**ĐỀ 83**

**ĐỀ THI HSG TOÁN 9 NĂM HỌC 2023-2024 TỈNH THANH HÓA**

**Bài 1.** ( 4,0 điểm):

1. Rút gọn phân thức

P = $\frac{x}{\sqrt{xy}-2y}$ + $\frac{\sqrt{x^{3}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}$ . $\frac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x$ $\geq $ 0; *y* > 0; $x$ $\ne $ 4*y*; $x$ $\ne $ 1

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+2\sqrt{abc}$ = 1. Tính giá trị của biếu thức

Q = $\sqrt{a\left(1-b\right)\left(1-c\right)}+\sqrt{b\left(1-c\right)\left(1-a\right)}+\sqrt{c\left(1-a\right)\left(1-b\right)}-\sqrt{abc}+2020$

**Bài 2.** (4,0 điểm):

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^{2}-6x-6}$ = 3$\sqrt{\left(2-x\right)^{5}}+\left(7-19x\right)\sqrt{\left(2-x\right)}$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=6-\frac{2}{y}\\x^{4}+x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=12-\frac{y-1}{y^{2}}\end{array}\right.$

**Bài 3.** (4,0 điểm):

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

$\frac{a}{4}$ $+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

1. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và

$ab+bc+ca=3c^{2}$. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương

**Bài 4.** (6,0 điểm):

Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến $A\_{x}$ và $B\_{y}$. Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia $A\_{x}$ và $B\_{y}$ theo thứ tự tại D, E. Gọi I là giao điểm của AE và BD , CI cắt AB tại H .

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .
2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO
3. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia $B\_{y}$ tại F. Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O,R) ao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo R.

**Bài 5.** (2,0 điểm):

Cho a, b là các số thực dương .Chứng minh rằng

Q = $\frac{a+b}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{ab}{1+b}$ $+$ $\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}$ $\geq $ 3

**----------HẾT------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1.** ( 4,0 điểm):

1. Rút gọn phân thức

P = $\frac{x}{\sqrt{xy}-2y}$ + $\frac{\sqrt{x^{3}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}$ . $\frac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x$ $\geq $ 0; *y* > 0; $x$ $\ne $ 4*y*; $x$ $\ne $ 1

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+2\sqrt{abc}$ = 1. Tính giá trị của biếu thức

Q = $\sqrt{a\left(1-b\right)\left(1-c\right)}+\sqrt{b\left(1-c\right)\left(1-a\right)}+\sqrt{c\left(1-a\right)\left(1-b\right)}-\sqrt{abc}+2020$

**LỜI GIẢI**

1. Rút gọn phân thức

P = $\frac{x}{\sqrt{xy}-2y}$ + $\frac{\sqrt{x^{3}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}$ . $\frac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x$ $\geq $ 0; *y* > 0; $x$ $\ne $ 4*y*; $x$ $\ne $ 1

Ta có: P = $\frac{x}{\sqrt{xy}-2y}$ + $\frac{\sqrt{x^{3}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}}$ . $\frac{2}{1-\sqrt{x}}$

= $\frac{x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}$ + $\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

= $\frac{x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}$ + $\frac{-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}$ = $\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}$ = $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Vậy P = $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ với $x$ $\geq $ 0; *y* > 0; $x$ $\ne $ 4*y*; $x$ $\ne $ 1

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+2\sqrt{abc}$ = 1. Tính giá trị

Ta có

* $\sqrt{a\left(1-b\right)\left(1-c\right)}=\sqrt{a\left(1-\left(b+c\right)+bc\right)}=\sqrt{a\left(b+2\sqrt{abc}+bc\right)}$

= $\sqrt{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{bc}\right)^{2}}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{bc}\right)$ = $a+\sqrt{abc}$

Tương tự

* $\sqrt{b\left(1-c\right)\left(1-a\right)}=\sqrt{b\left(1-\left(c+a\right)+ca\right)}=\sqrt{b\left(b+2\sqrt{abc}+ca\right)}$

= $\sqrt{b\left(\sqrt{b}+\sqrt{ca}\right)^{2}}=\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{ca}\right)$ =$ b+\sqrt{abc}$

* $\sqrt{c\left(1-a\right)\left(1-b\right)}=\sqrt{c\left(1-\left(a+b\right)+ab\right)}=\sqrt{c\left(c+2\sqrt{abc}+ab\right)}$

= $\sqrt{c\left(\sqrt{c}+\sqrt{ab}\right)^{2}}=\sqrt{c}\left(\sqrt{c}+\sqrt{ab}\right)$ =$ c+\sqrt{abc}$

Do đó

Q = $\sqrt{a\left(1-b\right)\left(1-c\right)}+\sqrt{b\left(1-c\right)\left(1-a\right)}+\sqrt{c\left(1-a\right)\left(1-b\right)}-\sqrt{abc}+2020$

= $a+\sqrt{abc}+b+\sqrt{abc}+c+\sqrt{abc}-\sqrt{abc}+2020$

= $a+b+c+2\sqrt{abc}+2020$

= $1+2020$ = 2021

**Bài 2.** (4,0 điểm):

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^{2}-6x-6}$ = 3$\sqrt{\left(2-x\right)^{5}}+\left(7-19x\right)\sqrt{\left(2-x\right)}$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=6-\frac{2}{y}\\x^{4}+x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=12-\frac{y-1}{y^{2}}\end{array}\right.$

**LỜI GIẢI**

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^{2}-6x-6}$ = 3$\sqrt{\left(2-x\right)^{5}}+\left(7-19x\right)\sqrt{\left(2-x\right)}$

ĐKCĐ: $\left\{\begin{array}{c}3x^{2}-6x-6 > 0\\2-x \geq 0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\left(x-1\right)^{2}> 3\\x \leq 2\end{array}\right.$ $⇔x\leq 1-\sqrt{3}$

Đặt $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{3x^{2}-6x-6} =a\\\sqrt{2-x} =b > 0\end{array}\right.$ $⇔\left\{\begin{array}{c}3x^{2}-6x-6 =a^{2}\\2-x =b^{2}\end{array}\right.$

$⇒$ $3x^{2}-5x-7=x^{2}-b^{2}+1$

Ta có $\sqrt{3x^{2}-6x-6}$ = 3$\sqrt{\left(2-x\right)^{5}}+\left(7-19x\right)\sqrt{\left(2-x\right)}$

$⇔$ $\sqrt{3x^{2}-6x-6}$ = $\sqrt{(2-x)}\left[3\left(2-x\right)^{2}+7x-19\right]$

$⇔$ $\sqrt{3x^{2}-6x-6}$ = $\sqrt{2-x}\left[3x^{2}-5x-7\right]$

$⇒$ $a=b\left[a^{2}-b^{2}+1\right]⇔\left(a-b\right)\left(ab+b^{2}+1\right)=0$

Xét $a-b=0$ $⇔$ $a=b$ $⇔$ $\sqrt{3x^{2}-6x-6}$ = $\sqrt{2-x}$

$$⇔ 3x^{2}-6x-6=2-x$$

$$⇔ 3x^{2}-5x-8=0$$

$$⇔ (x+1)(3x-8)=0$$

$⇔ x=-1$ (thỏa mãn) hoặc $x=$ $\frac{8}{3}$ (loại)

Xét $ab+b^{2}+1$= 0

Do $x\leq 1-\sqrt{3}⇔2-x\geq 1+\sqrt{3}>1⇒ab+b^{2}-1>0$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$

2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=6-\frac{2}{y}\\x^{4}+x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=12-\frac{y-1}{y^{2}}\end{array}\right.$

ĐK: y $\ne 0$

Cộng theo từng vế các phương trình của hệ ta có

$x^{4}+3x^{2}+$ $\frac{2x^{2}}{y}$ = 18 $-$ $\frac{3}{y}$ $-$ $\frac{1}{y^{2}}$

$⇔$ $x^{4}$ $+$ $\frac{x^{2}}{y}$ $-3x^{2}$ $+$ $\frac{x^{2}}{y}$ + $\frac{1}{y^{2}}$ $-$ $\frac{3}{y}$ $+6x^{2}$ + $\frac{6}{y}$ $-$ 18 = 0

$⇔$ $x^{2}\left(x^{2}+\frac{1}{y}-3\right)$ + $\frac{1}{y}\left(x^{2}+\frac{1}{y}-3\right)+6\left(x^{2}+\frac{1}{y}-3\right)=0$

$⇔$ $\left(x^{2}+\frac{1}{y}-3\right)\left(x^{2}+\frac{1}{y}+6\right)=0$

Xét $x^{2}+$ $\frac{1}{y}$ $-3$ = 0 $⇔$ $\frac{1}{y}$ = 3 $-x^{2}$ thay vào phương trình $x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=6-$ y ta được

$x^{2}$ + $x^{2}\left(3-x^{2}\right)=6-2(3-x^{2}$) $⇔ x^{2}$($x^{2}-2)=0⇔x=0;x=\pm \sqrt{2}$

Với $x=0$ $⇒$ $y=\frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

Với $x=\pm \sqrt{2}$ $⇔$ $x^{2}=2⇒$ $y=1$ (thỏa mãn)

Xét $x^{2}+\frac{1}{y}+6$ = 0 $⇔$ $\frac{1}{y}$ = $-6-x^{2}$ thay vào phương trình $x^{2}+\frac{x^{2}}{y}=6-$ y ta được

$x^{2}$ + $x^{2}\left(-x^{2}-6\right)=6-2(-x^{2}-6$) $⇔ x^{4}+7x^{2}+18=0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là (x,y) = $\left\{\left(0;\frac{1}{3}\right);\left(-\sqrt{2};1\right);\left(\sqrt{2};1\right)\right\}$

**Bài 3.** (4,0 điểm):

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

$\frac{a}{4}$ $+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

1. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và

$ab+bc+ca=3c^{2}$. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương

**LỜI GIẢI**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

$\frac{a}{4}$ $+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

Ta có $\frac{a}{4}$ $+\sqrt[3]{4-b}=\sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b}+\sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$

$⇔$ $\frac{a}{4}$ $+\sqrt[3]{4-b}=$ $\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{b}\right)^{2}}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{b}\right)^{3}}$

Đặt $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}=x$; $\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}=y$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}-xy=\frac{a}{4}\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}-xy=\frac{\left(x-y\right)\left(x^{2}+y^{2}-xy\right)}{a}\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}(x^{2}+y^{2}-xy)\left(\frac{x+y}{a}-1\right)=0\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.$

Trường hợp 1:

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}(x^{2}+y^{2}-xy)=0\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.⇔$ $\left\{\begin{array}{c}(x^{2}+y^{2}-xy)=0\\\left(x+y\right).0=4\end{array}\right.$ Vô nghiệm

Trường hợp 2:

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\frac{x+y}{a}-1=0\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\frac{x+y}{a}=1\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=a\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.$

Vì $\left(x+y\right)^{3}=x^{3}+y^{3}+3xy\left(x+y\right)=4+3a.xy\leq 4+3a\frac{\left(x+y\right)^{2}}{4}$

$a^{3}\leq 4+$ $\frac{3a^{3}}{4}$ $⇒$ $a^{3}$ $\leq $ 16 vì (a $\in $ N\*) $⇒$ $a \in ${1;2}

Với a = 1 $⇒$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^{2}-3xy\right]=4\end{array}\right.$

$⇒$ $xy=-1⇒\sqrt[3]{4-\sqrt{b}}=-1⇒$ b = 5 (thỏa mãn)

Với a = 2 $⇒$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=2\\x^{3}+y^{3}=4\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=2\\\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^{2}-3xy\right]=4\end{array}\right.$

$⇒$ $xy=\frac{2}{3}$ $⇒\sqrt[3]{4-\sqrt{b}}=\frac{2}{3}⇒$b = $\frac{1000}{729}$ $\notin $ Z (loại)

Vậy a = 1; b = 5

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và

$ab+bc+ca=3c^{2}$. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương

Ta có $ab+bc+ca+c^{2}=4c^{2}$ $⇔$ $ab+bc+ca+c^{2}=4c^{2}$

$⇔\left(a+c\right)\left(b+c\right)=4c^{2}$ (\*)

Giả sử $\left(a+c; b+c\right)=d$ $⇒$ $\left\{\begin{array}{c}(a+c)\vdots d\\(b+c)\vdots d\end{array}\right.$ $⇒$ $a-b\vdots d$ vì $a-b$ là số nguyên tố nên $\left[\begin{array}{c}d=1\\d=a-b\end{array}\right.$

Xét $d=a-b$ suy ra tồn tại $x; y\in $ N sao cho $ \left\{\begin{array}{c}a+c= \left(a-b\right)x\\b+c=\left(a-b\right)y\end{array}\right.$

$⇔$ $a-b=(a-b)(x-y)$

$x-y$ = 1 $⇔$ $x=y+1$ thay vào (\*) ta có $y\left(y+1\right)\left(a-b\right)^{2}=\left(2x\right)^{2}$

$⇒$ $y\left(y+1\right)$ là số chính phương mà y và y + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên $y=0$ $⇒$ $b+c=0$ $⇒$ $4c^{2}=0$

$⇔$ c = 0. Khi đó $8c+1=1$ là số chính phương.

Xét $d=1$ suy ra tồn tại m; n $\in $ N sao cho

$ \left\{\begin{array}{c}a+c=m^{2}\\b+c=n^{2}\end{array}\right.$ $⇔$ $a-b=m^{2}-n^{2}=\left(m-n\right)\left(m+n\right)$ là số nguyên tố, mà $m+n>m-n$

$m-n=1⇒m=n+1$ kết hợp với (\*) ta có $2c=m.n=n.(n+1)$

$⇒$ $8c+1=4n.(n+1)+1=\left(2n+1\right)^{2}$ là số chính phương.

**Bài 4.** (6,0 điểm):

Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến $A\_{x}$ và $B\_{y}$. Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia $A\_{x}$ và $B\_{y}$ theo thứ tự tại D, E. Gọi I là giao điểm của AE và BD , CI cắt AB tại H .

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .
2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO
3. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia $B\_{y}$ tại F. Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O,R) ao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo R.

**LỜI GIẢI**

****

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

Vì AD//BE $⇒$ $\frac{AD}{BE}$ = $\frac{DI}{IB}$ mà AD = DC; BE = CE nên

$\frac{DC}{CE}$ = $\frac{DI}{IB}$ $⇒$ CI//BE//AD $⇒$ CH//BE.

$\left.\begin{array}{c}CI//BE⇒\frac{CI}{BE} = \frac{DI}{IB}= \frac{AI}{AE}\\IH//BE⇒\frac{AI}{AE} = \frac{IH}{BE}\end{array}\right\}$ $⇒$ $\frac{CI}{BE}$ = $\frac{IH}{BE}$ $⇒$ CI = IH

Hay I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO

Ta có: $AB+AC-BC=\left(AK+BK\right)+\left(AP+CP\right)-\left(CQ+BQ\right)$

= $AK+BK+AK+CQ-CQ-BK=2AK$

2AK$=AB+AC-BC$

Tương tự ta có $2BK=AB+BC-AC$

$$⇒ 2AK.BK=(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)$$

$⇔ 4AK.BC=AB^{2}+AB.BC-AB.AC+AC.AB+AC.BC-AC^{2}-AB.AC-BC^{2}+AC.BC$

$$⇔ 4AK.BC=AB^{2}-(AC^{2}+BC^{2})+2AC.BC=2CH.AB=2CH.AB=2CH.CO=4CH.CO$$

$⇔$ AK.BK = CH.CO

3. Kẻ MN $⊥$ AB tại N

BHCF là hình chữ nhật

Đặt BH = x

Ta có $\frac{MN}{CH}$ = $\frac{MN}{BF}$ = $\frac{BN}{BH}$ = $\frac{AN}{AB}$ = $\frac{BN + AN}{BH + AB}$ = $\frac{2R}{x+2R}$

$⇒$ MN = $\frac{2R.CH}{x+2R}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

CH = $\sqrt{AH.BH}=\sqrt{x(2R-x)}=$ $\frac{2\sqrt{2x(2R-x)}}{2\sqrt{2}}$ $\leq $ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ($x+2R)$

Suy ra MN $\leq $ $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Diện tích lớn nhất khi MN lớn nhất (Vì AB cố định). Hay MN = $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Dấu “=” xảy ra khi 2x = 2R $-x$ $⇔$ x = $\frac{2R}{3}$. Điểm C nằm trên đường tròn (O) sao cho

CH = $\sqrt{\frac{2R}{3}\left(2R-\frac{2R}{3}\right)}$ = $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$

Khi đó $S\_{ABM}$ = $\frac{1}{2}$ MN.AB = $\frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{2}}$.2R = $\frac{R^{2}}{\sqrt{2}}$

**Bài 5.** (2,0 điểm):

Cho a, b là các số thực dương .Chứng minh rằng

Q = $\frac{a+b}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{ab}{1+b}$ $+$ $\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}$ $\geq $ 3

**LỜI GIẢI**

Ta có $\frac{a+b}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{ab}{1+b}$ $+$ $\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}$ = $\frac{a+b}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{ab}{1+b}$ $+$ $\frac{a+ab+b+ab}{(1+a)(1+b)ab}$

= $\frac{a}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{1}{a+ab}$ $+$ $\frac{b}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+b}$ $+$ $\frac{1}{b+ab}$

Áp dụng BĐT Svacxơ ta có

$\frac{a}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{1}{a+ab}$ = $\frac{a^{2}}{a+a^{2}b}$ $+$ $\frac{\left(ab\right)^{2}}{ab+a^{2}b}$ $+$ $\frac{1}{a+ab}$ $\geq $ $\frac{\left(a+ab+1\right)^{2}}{2(a^{2}b+ab+a)}$

Áp dụng BĐT phụ $\left(x+y+z\right)^{2}\geq 3\left(xy+yz+xz\right)$ ta có

$$ \left(a+ab+1\right)^{2}\geq 3\left(a^{2}b+ab+a\right)$$

Suy ra $\frac{a}{1+ab}+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{1}{a+ab}$ $\geq $ $\frac{3}{2}$ (1)

Tương tự ta có

$\frac{b}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+b}$ $+$ $\frac{1}{b+ab}$ = $\frac{b^{2}}{b+ab^{2}}$ $+$ $\frac{\left(ab\right)^{2}}{ab+ab^{2}}$ $+$ $\frac{1}{b+ab}$ $\geq $ $\frac{\left(b+ab+1\right)^{2}}{2(ab^{2}+ab+b)}$ $\geq $ $\frac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a+b}{1+ab}$ $+$ $\frac{ab}{1+a}$ $+$ $\frac{ab}{1+b}$ $+$ $\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab}\geq $ 3

Dấu “=” xảy ra khi a = b = ab = 1

**----------HẾT------------**