**ĐỀ 83**

**ĐỀ THI HSG TOÁN 9 NĂM HỌC 2023-2024 TỈNH THANH HÓA**

**Bài 1.** ( 4,0 điểm):

1. Rút gọn phân thức

P = + . với 0; *y* > 0; 4*y*; 1

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện = 1. Tính giá trị của biếu thức

Q =

**Bài 2.** (4,0 điểm):

1. Giải phương trình = 3
2. Giải hệ phương trình

**Bài 3.** (4,0 điểm):

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

1. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn là số nguyên tố và

. Chứng minh là số chính phương

**Bài 4.** (6,0 điểm):

Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến và . Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia và theo thứ tự tại D, E. Gọi I là giao điểm của AE và BD , CI cắt AB tại H .

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .
2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO
3. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia tại F. Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O,R) ao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo R.

**Bài 5.** (2,0 điểm):

Cho a, b là các số thực dương .Chứng minh rằng

Q = 3

**----------HẾT------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1.** ( 4,0 điểm):

1. Rút gọn phân thức

P = + . với 0; *y* > 0; 4*y*; 1

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện = 1. Tính giá trị của biếu thức

Q =

**LỜI GIẢI**

1. Rút gọn phân thức

P = + . với 0; *y* > 0; 4*y*; 1

Ta có: P = + .

= +

= + = =

Vậy P = với 0; *y* > 0; 4*y*; 1

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện = 1. Tính giá trị

Ta có



= =

Tương tự



= =



= =

Do đó

Q =

=

=

= = 2021

**Bài 2.** (4,0 điểm):

1. Giải phương trình = 3
2. Giải hệ phương trình

**LỜI GIẢI**

1. Giải phương trình = 3

ĐKCĐ:

Đặt

Ta có = 3

=

=

Xét =

(thỏa mãn) hoặc (loại)

Xét = 0

Do

Vậy nghiệm của phương trình là

2. Giải hệ phương trình

ĐK: y

Cộng theo từng vế các phương trình của hệ ta có

= 18

+ + 18 = 0

+

Xét = 0 = 3 thay vào phương trình y ta được

+ ) (

Với (thỏa mãn)

Với (thỏa mãn)

Xét = 0 = thay vào phương trình y ta được

+ ) vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là (x,y) =

**Bài 3.** (4,0 điểm):

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

1. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn là số nguyên tố và

. Chứng minh là số chính phương

**LỜI GIẢI**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

Ta có

Đặt ;

Trường hợp 1:

Vô nghiệm

Trường hợp 2:

Vì

16 vì (a N\*) {1;2}

Với a = 1

b = 5 (thỏa mãn)

Với a = 2

b = Z (loại)

Vậy a = 1; b = 5

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn là số nguyên tố và

. Chứng minh là số chính phương

Ta có

(\*)

Giả sử vì là số nguyên tố nên

Xét suy ra tồn tại N sao cho

= 1 thay vào (\*) ta có

là số chính phương mà y và y + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên

c = 0. Khi đó là số chính phương.

Xét suy ra tồn tại m; n N sao cho

là số nguyên tố, mà

kết hợp với (\*) ta có

là số chính phương.

**Bài 4.** (6,0 điểm):

Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến và . Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia và theo thứ tự tại D, E. Gọi I là giao điểm của AE và BD , CI cắt AB tại H .

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .
2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO
3. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia tại F. Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O,R) ao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo R.

**LỜI GIẢI**

****

1. Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

Vì AD//BE = mà AD = DC; BE = CE nên

= CI//BE//AD CH//BE.

= CI = IH

Hay I là trung điểm của đoạn thẳng CH .

2. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng KA.KB = CH.CO

Ta có:

=

2AK

Tương tự ta có

AK.BK = CH.CO

3. Kẻ MN AB tại N

BHCF là hình chữ nhật

Đặt BH = x

Ta có = = = = =

MN =

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

CH = (

Suy ra MN . Diện tích lớn nhất khi MN lớn nhất (Vì AB cố định). Hay MN = .

Dấu “=” xảy ra khi 2x = 2R x = . Điểm C nằm trên đường tròn (O) sao cho

CH = =

Khi đó = MN.AB = .2R =

**Bài 5.** (2,0 điểm):

Cho a, b là các số thực dương .Chứng minh rằng

Q = 3

**LỜI GIẢI**

Ta có =

=

Áp dụng BĐT Svacxơ ta có

=

Áp dụng BĐT phụ ta có

Suy ra (1)

Tương tự ta có

= (2)

Từ (1) và (2) suy ra 3

Dấu “=” xảy ra khi a = b = ab = 1

**----------HẾT------------**