

MỤC LỤC

MỤC LỤC-----	1
PHẦN MỞ ĐẦU-----	2
I. Cơ sở xuất phát-----	3
II. Sự tương giao giữa đường thẳng- đường cong-----	4
1. Đường thẳng – đường thẳng-----	4
2. Đường thẳng – đường tròn-----	5
3. Đường thẳng – đường Conic-----	17
4. Đường thẳng – đường bậc cao-----	20
III. Mở rộng vấn đề-----	24
KẾT LUẬN CHUNG-----	26
TÀI LIỆU THAM KHẢO-----	27

LỜI MỞ ĐẦU

Sử dụng đồ thị để giải hệ phương trình là một trong những phương pháp hay. Cơ sở của phương pháp này là sử dụng trực quan sinh động của hình học để nhận biết tương quan của phép toán giao của hai tập giá trị của hệ hàm

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Do thời gian có hạn tôi chỉ tìm hiểu hệ có dạng

$$\begin{cases} y = f(x) & (d) \\ y = g(x) & (C). \end{cases}$$

Với $y = f(x)$ là phương trình của đường thẳng và $y = g(x)$ là phương trình của đường cong.

Sử dụng phương pháp đồ thị sẽ giúp học sinh rèn luyện kỹ năng vẽ đồ thị, hình dung được hướng giải và biện luận số nghiệm của hệ. Một số bài toán nếu biết dùng phương pháp này sẽ tìm được nghiệm nhanh chóng hơn các phương pháp khác.

Cuốn chuyên đề gồm ba mục:

- I. Cơ sở xuất phát.
- II. Sự tương giao đường thẳng – đường cong.
 - 1. Đường thẳng – đường thẳng.
 - 2. Đường thẳng – đường tròn.
 - 3. Đường thẳng – đường conic.
 - 4. Đường thẳng – đường bậc cao.
- III. Mở rộng vấn đề.

Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy cô để hoàn thiện thêm cho phương pháp này.

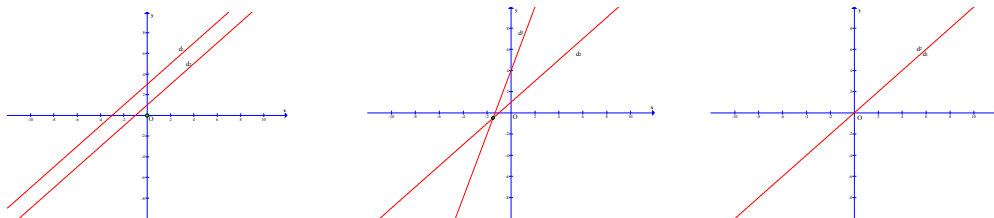
Thực hiện: Bùi Mạnh Khôi

I. Cơ sở xuất phát:

Bài toán: Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}, \text{ Điều kiện: } a^2 + b^2 \neq 0, a'^2 + b'^2 \neq 0.$$

Nhận xét: Phương trình (1) và (2) chính là phương trình của đường thẳng (d_1) và (d_2) .



- ♣ Nếu $(d_1) \parallel (d_2)$ thì $d_1 \cap d_2 = \emptyset \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm.
- ♣ Nếu (d_1) cắt (d_2) thì hệ có nghiệm duy nhất.
- ♣ Nếu (d_1) trùng (d_2) thì hệ vô số nghiệm.

Trên cơ sở đó, chúng ta có thể phát triển cho bài toán

$$\begin{cases} (1) \text{ là đường thẳng} \\ (2) \text{ là đường cong} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} (1) \text{ là đường cong} \\ (2) \text{ là đường cong} \end{cases}$$

với dạng bài tập giải hệ phương trình hoặc giải và biện luận hệ phương trình.

Phương pháp chung giải bài toán bằng đồ thị:

Bước 1: Chuyển bài toán về dạng

$$\begin{cases} f(x, y, m) = 0 & (C_1) \\ g(x, y, m) = 0 & (C_2). \end{cases}$$

Bước 2: Vận dụng các kiến thức về vị trí tương đối của đồ thị (C_1) , (C_2) ta tìm được nghiệm của bài toán hay tìm được giá trị tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán đặt ra.

- **Các phương pháp sử dụng để giải và biện luận hệ phương trình:**
- Sử dụng tiếp tuyến (đường thẳng- đường cong bất kì).
- Sử dụng tiệm cận (hyperbol)

II. Sự tương giao giữa đường thẳng và đường cong:

1. Sự tương giao giữa đường thẳng và đường thẳng:

Ví dụ: Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ (x-m)(y-m) = 0 \end{cases}$

Giải:

Ta có

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ (x-m)(y-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x = m \text{ hoặc } y = m \end{cases}.$$

Gọi (d_1) , (d_2) lần lượt là các đường thẳng có phương trình $x = m$ và $y = m$.

$$|x| + |y| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 & , \forall x \in [0, 2], \forall y \in [0, 2] \\ x - y - 2 = 0 & , \forall x \in [0, 2], \forall y \in [-2, 0] \\ -x + y - 2 = 0 & , \forall x \in [-2, 0], \forall y \in [0, 2] \\ -x - y - 2 = 0 & , \forall x \in [-2, 0], \forall y \in [-2, 0] \end{cases}$$

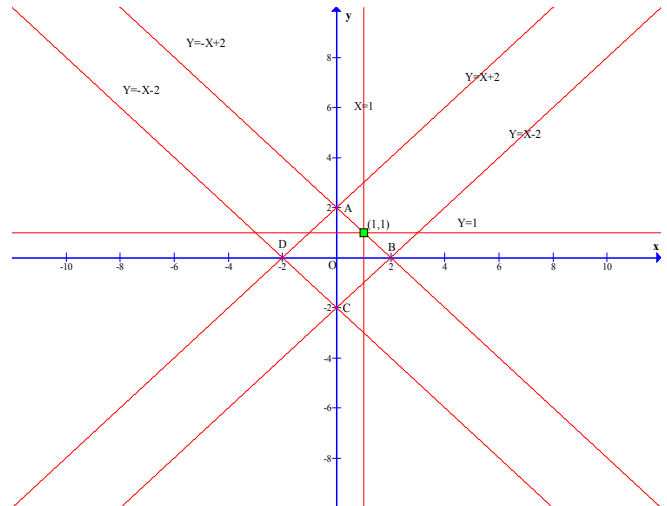
Nhận xét:

♥ $|x| + |y| = 2$ là tập các điểm nằm trên hình vuông ABCD.

♥ (d_1) , (d_2) và các cạnh hình vuông ABCD đồng quy $\Leftrightarrow m = \pm 1$.

♥ (d_1) qua A thì (d_2) qua B.

♥ (d_1) qua C thì (d_2) qua D.



Vậy: ♣ Nếu $|m| > 2$ hệ vô nghiệm.

♣ Nếu $|m| = 2$ hệ có 2 nghiệm phân biệt.

♣ Nếu $|m| = 1$ hệ có 3 nghiệm phân biệt.

♣ Nếu $|m| < 2$, $|m| \neq 1$ thì hệ có 4 nghiệm phân biệt.

♠ Bài tập tự giải:

- Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + y = m \end{cases}$
- Tìm m để hệ vô nghiệm $\begin{cases} -mx + (m+1)y - 1 = 0 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$.

Chú ý: Chúng ta có thể biện luận bằng định thức.

2. Sự tương giao giữa đường thẳng và đường tròn:

2.1 Đường thẳng cố định và đường tròn cố định:

Ví dụ:

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = -3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ (I).

Giải:

Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy :

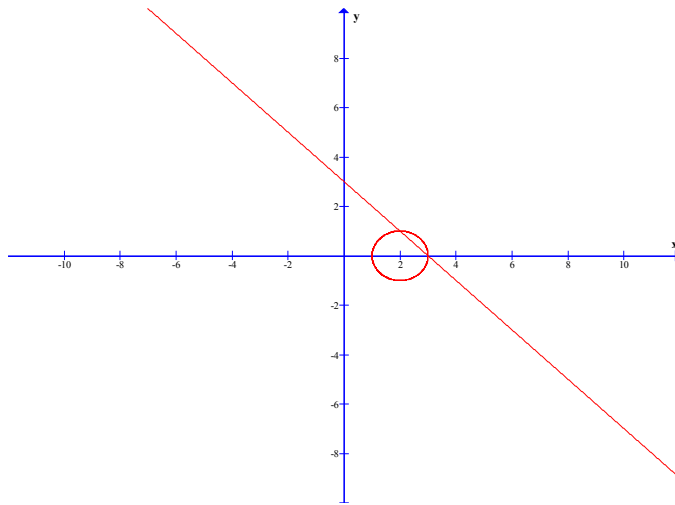
♥ (1) là đường tròn (C) tâm I(2,0), bán kính R=1.

♥ (2) là đường thẳng (d): $x+y=3$.

♥ Nghiệm của hệ phương trình là giao điểm của (C) và (d).

Chuyên đề toán học: Sử dụng pp đồ thị để giải hệ phương trình.

Vì (C) và (d) cắt nhau tại hai điểm: (3,0), (2,1) nên hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là: $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.



2.2 Đường thẳng thay đổi và đường tròn cố định:

Ví dụ 1:

Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2+2x=3 \end{cases}$ (I) (Đường thẳng có phương cố định).

Giải:

Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m & (1) \\ (x+1)^2+y^2=4 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy: ♥ (1) là họ đường thẳng $A_m: x+y=m$.

♥ (2) là đường tròn (C) tâm $I(-1,0)$, bán kính $R=2$.

♥ Nghiệm của hệ phương trình (II) là giao điểm của A_m và (C).

■ Hệ phương trình có hai nghiệm

$\Leftrightarrow A_m$ cắt (C) tại hai điểm

$\Leftrightarrow d(I, A_m) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1-m|}{\sqrt{1+1}} < 2$$

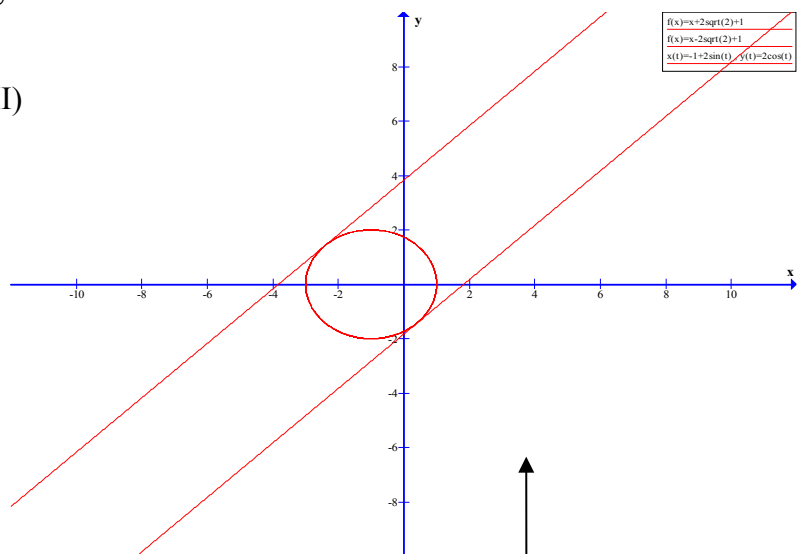
$$\Leftrightarrow |m+1| < 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 7 < 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} - 1 < m < 2\sqrt{2}.$$

■ Hệ phương trình (II) có một nghiệm $\Leftrightarrow A_m$ tiếp xúc với (C)

$$\Leftrightarrow d(I, A_m) = R$$



$$\Leftrightarrow m = -2\sqrt{2} - 1 \vee m = 2\sqrt{2} - 1$$

■ Hệ phương trình (II) vô nghiệm $\Leftrightarrow A_m \cap (C) = \emptyset \Leftrightarrow d(I, A_m) > R$
 $\Leftrightarrow m < -2\sqrt{2} - 1 \vee m > 2\sqrt{2} - 1$

Vậy:

- ♣ Nếu $-2\sqrt{2} - 1 < m < 2\sqrt{2}$: hệ có hai nghiệm.
- ♣ Nếu $m = -2\sqrt{2} - 1 \vee m = 2\sqrt{2} - 1$: hệ có một nghiệm.
- ♣ Nếu $m < -2\sqrt{2} - 1 \vee m > 2\sqrt{2} - 1$: hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2:

Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} (2-m)x + y = m & (1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 & (2) \end{cases}$ (Đường thẳng qua điểm cố định).

Giải:

Ta thấy:

- ♥ (1) là họ đường thẳng luôn qua $A(-1, 2)$.
- ♥ (2) là đường tròn (C) tâm $I(1, -1)$, bán kính $R = 1$.
- ♥ Nghiệm của hệ phương trình (I) là giao điểm của A_m và đường tròn (C).

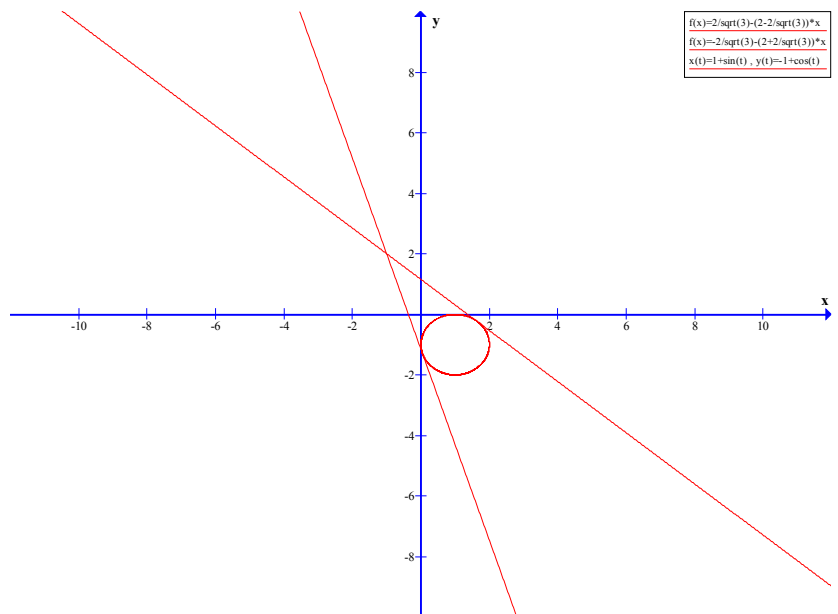
■ Hệ phương trình có hai nghiệm
 $\Leftrightarrow A_m$ cắt (C) tại hai điểm
 $\Leftrightarrow d(I, A_m) < R$
 $\Leftrightarrow \frac{|2 - m - 1 - m|}{\sqrt{(2 - m)^2 + 1}} < 1$
 $\Leftrightarrow |1 - 2m| < \sqrt{m^2 - 4m + 5}$
 $\Leftrightarrow (1 - 2m)^2 < m^2 - 4m + 5$
 $\Leftrightarrow 3m^2 < 4$
 $\Leftrightarrow m^2 < 4/3$
 $\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

■ Hệ phương trình có một nghiệm
 $\Leftrightarrow A_m$ và (C) tiếp xúc
 $\Leftrightarrow m = -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

■ Hệ phương trình vô nghiệm
 $\Leftrightarrow A_m$ không cắt (C)
 $\Leftrightarrow d(I, A_m) > R$
 $\Leftrightarrow m < -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee m > \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy:

- ♣ Nếu $-\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}}$: Hệ phương trình có hai nghiệm.



- ♣ Nếu $m = \frac{-2}{\sqrt{3}}$, $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$: Hệ phương trình có một nghiệm.
 ♣ Nếu $m < \frac{-2}{\sqrt{3}}$, $m > \frac{2}{\sqrt{3}}$: Hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3:

Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} 2^{2x} + 4^{2y} = 2 \\ 2^{2x} + 4^y - 2^{x+2y} = 1 - m \end{cases} \quad (I)$

Giải:

Đặt: $u=2^x \geq 0, v=2^y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 & (1) \\ u + v - uv = 1 - m & (2) \end{cases} \quad (I)$

Ta có (2): $u + v - uv = 1 - m$

$$\Leftrightarrow u + v - \frac{(u+v)^2 - 2}{2} = 1 - m$$

$$\Leftrightarrow (u+v)^2 - 2(u+v) - 2m = 0 \quad (3).$$

Đặt $t = u + v, t > 0$ ta được

$$(3) \text{ trở thành: } t^2 - 2t - 2m = 0 \quad (4)$$

$$(4) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1/2.$$

Khi đó (4) có nghiệm: $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+2m} \Leftrightarrow u + v = 1 \pm \sqrt{1+2m}.$

Và hệ (I) trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 & (5) \\ u + v = 1 \pm \sqrt{1+2m} & (6) \end{cases}$

Gọi X_1, X_2 là tập nghiệm của (5) và (6)

Ta thấy:

♥ X_1 là tập điểm thuộc đường tròn

(C) tâm $O(0,0)$, bán kính $R = 2$.

♥ X_2 là tập điểm thuộc hai đường thẳng

$$d_1: u + v = 1 + \sqrt{1+2m}$$

$$\text{và } d_2: u + v = 1 - \sqrt{1+2m}.$$

$$\text{♥ } d: u+v=\alpha \text{ đi qua } A(\sqrt{2},0) \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{2}.$$

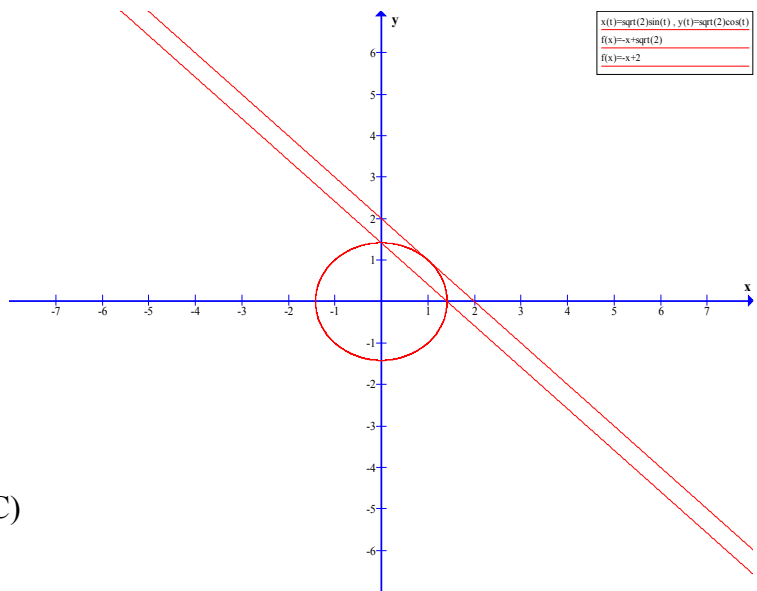
■ Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (d_1) hoặc (d_2) cắt (C) tại góc phần tư thứ nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{1+2m} \leq 2 \\ \sqrt{2} \leq 1 - \sqrt{1+2m} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 0.$$

Vậy:

$$\text{♣ } m \in [1 - \sqrt{2}, 0] \text{ thỏa điều kiện bài toán.}$$



2.3 Đường thẳng cố định và đường tròn thay đổi:

a. Tâm thay đổi:

Ví dụ:

Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình: (I) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 - mx + y^2 = 1 - \frac{m^2}{4} \end{cases}$

Giải:

Ta có: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ (x - m/2)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

Ta thấy: ♥ (1) là đường thẳng (Δ): $2x + 3y = 3$.

♥ (2) là đường tròn tâm I(m/2, 0), bán kính R = 1.

♥ Khoảng cách: $d(I, \Delta) = \frac{|2m/2 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|m-3|}{\sqrt{5}}$

■ Hệ (I) có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) < R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{5}} < 1$$

$$\Leftrightarrow |m-3| < \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} < m < 3 + \sqrt{5}$$

■ Hệ (I) có một nghiệm

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |m-3| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{5}$$

■ Hệ (I) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) > R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{5}} > 1$$

$$\Leftrightarrow |m-3| > \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + \sqrt{5} \\ m < 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy: ♣ Với $3 - \sqrt{5} < m < 3 + \sqrt{5}$: hệ có hai nghiệm.

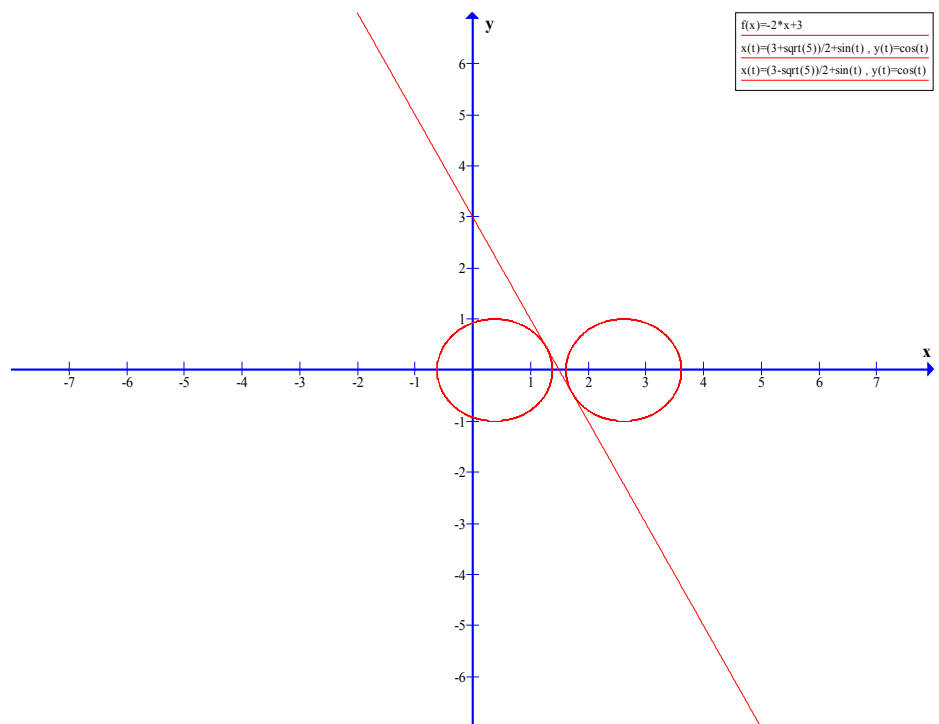
♣ Với $m = 3 \pm \sqrt{5}$: hệ có một nghiệm.

♣ Với $\begin{cases} m > 3 + \sqrt{5} \\ m < 3 - \sqrt{5} \end{cases}$: hệ vô nghiệm.

b. Bán kính thay đổi:

Ví dụ:

Biện luận theo m số nghiệm của hệ: $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \quad (1) \quad (2)$



Giải:

Với $m \leq 0$ hệ vô nghiệm, do đó chỉ xét với $m > 0$.
Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Ta thấy:

- ♥ X_1 là tập các điểm trên cạnh hình vuông ABCD.
- ♥ X_2 là tập các điểm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = \sqrt{m}$.
- ♥ (C) tiếp xúc với ABCD
 $\Leftrightarrow \sqrt{m} = \sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow m = 2$

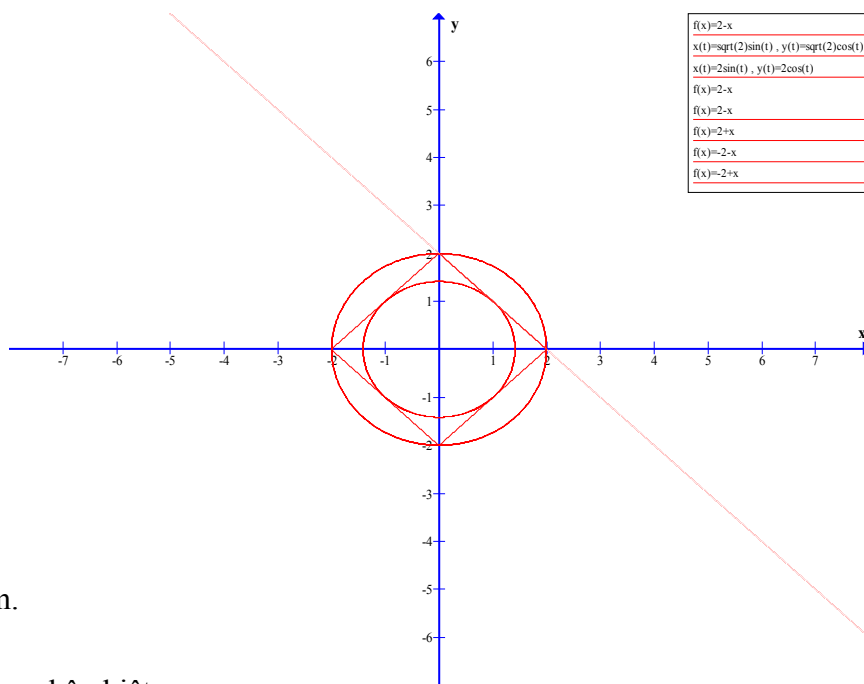
- ♥ (C) ngoại tiếp hình vuông ABCD
 $\Leftrightarrow \sqrt{m} = 2$
 $\Leftrightarrow m = 4$

Nhận xét:

Số nghiệm của hệ phương trình là số giao điểm của (C) và các cạnh của ABCA.

Vậy:

- ♣ Với $\begin{cases} m > 4 \\ m < 2 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.
- ♣ Với $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$ hệ có bốn nghiệm.
- ♣ Với $2 < m < 4$ hệ có tám nghiệm phân biệt.



c. Bán kính thay đổi, tâm thay đổi:

Ví dụ 1:

Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình: (I) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 + mx + my - m - 1 = 0 \end{cases}$.

Giải:

Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ (x + m/2)^2 + (y + m/2)^2 = m^2/2 + m + 1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Ta thấy:

- ♥ (1) là đường thẳng (Δ): $x + y = 4$
- ♥ (2) là đường tròn (C), tâm $I(-m/2, -m/2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2/2 + m + 1}$.

■Hệ (I) có hai nghiệm

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d(C, \Delta) < R \\ &\Leftrightarrow d(C, \Delta) = \frac{|-m/2 - m/2 - 4|}{\sqrt{1+1}} < \sqrt{m^2/2 + m + 1} \\ &\Leftrightarrow (m+4)^2 < 2(m^2/2 + m + 1) \\ &\Leftrightarrow m^2 + 8m + 6 < m^2 + 2m + 2 \\ &\Leftrightarrow m < -7/3. \end{aligned}$$

■Hệ phương trình có một nghiệm

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \\ &\Leftrightarrow m = 7/3. \end{aligned}$$

■Hệ (I) vô nghiệm

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d(I, \Delta) > R \\ &\Leftrightarrow m > 7/3. \end{aligned}$$

Vậy:

♣ Với $m < 7/3$: hệ có hai nghiệm phân biệt.

♣ Với $m = 7/3$: hệ có một nghiệm.

♣ Với $m > 7/3$: hệ vô nghiệm.

Ví dụ 2:

Biện luận theo m số nghiệm của hệ:
$$(I) \begin{cases} \log_{2(m+1)}(x^2 + y^2) = 1 & (1) \\ (x + y)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện: $0 < 2(m+1) \neq 1 \Leftrightarrow -1 < m \neq -1/2$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(m+1) & (1) \\ (x + y)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Gọi X_1, X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Ta thấy:

- ♥ X_1 là tập các điểm trên đường tròn (C) tâm $O(0,0)$, bán kính $R = \sqrt{2(m+1)}$.
- ♥ X_2 là tập các điểm trên hai đường thẳng: $d_1: x + y + 2 = 0$ và $d_2: x + y - 2 = 0$.
- ♥ Do tính đối xứng nên $d(O, d_1) = d(O, d_2) = \sqrt{2}$.

■ d_1 và d_2 cùng không cắt (C)

$$\Leftrightarrow R < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(m+1)} < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow m < 0$$

$\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

■ d_1 và d_2 cùng tiếp xúc với (C)

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{2}$$

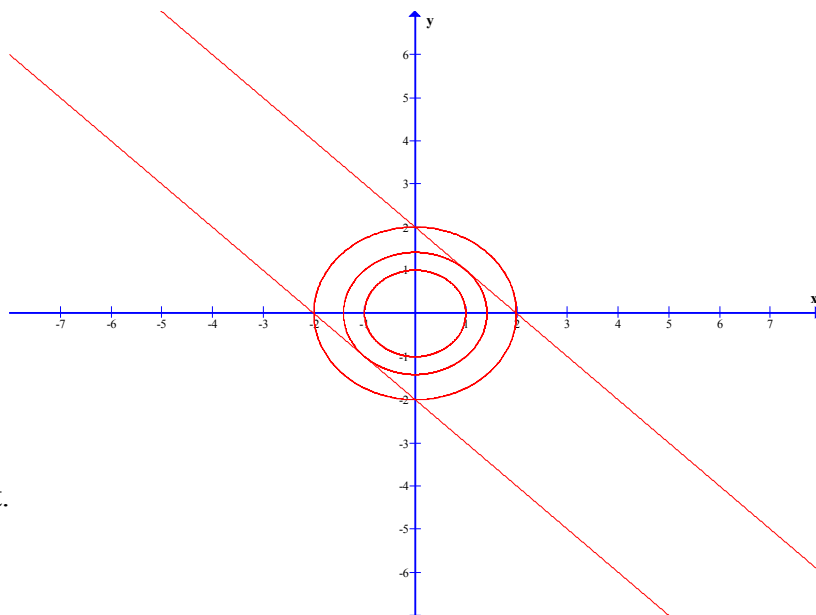
$$\Leftrightarrow m = 0$$

$\Rightarrow$ hệ có hai nghiệm phân biệt.

■ d_1 và d_2 cùng cắt (C) tại 2 hai điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow R > \sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow$ hệ có bốn nghiệm phân biệt.



2.4 Đường thẳng thay đổi, đường tròn thay đổi:

Ví dụ 1:

Biện luận số nghiệm của hệ theo a $\begin{cases} x + y = 2a - 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a + 3 & (2) \end{cases}$

Giải:

Ta thấy:

♥ (1) là đường thẳng (Δ): $x + y = 2a - 1$.

♥ (2) là đường tròn (C) tâm I(0,0), bán kính $R = \sqrt{a^2 + 2a + 3}$.

■ Hệ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) < R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a - 1|}{\sqrt{1+1}} < \sqrt{a^2 + 2a + 3}$$

$$\Leftrightarrow (2 - 1)^2 < 2(a^2 + 2a + 3)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 8a - 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - \sqrt{26})/2 < a < (4 + \sqrt{26})/2$$

■ Hệ có một nghiệm

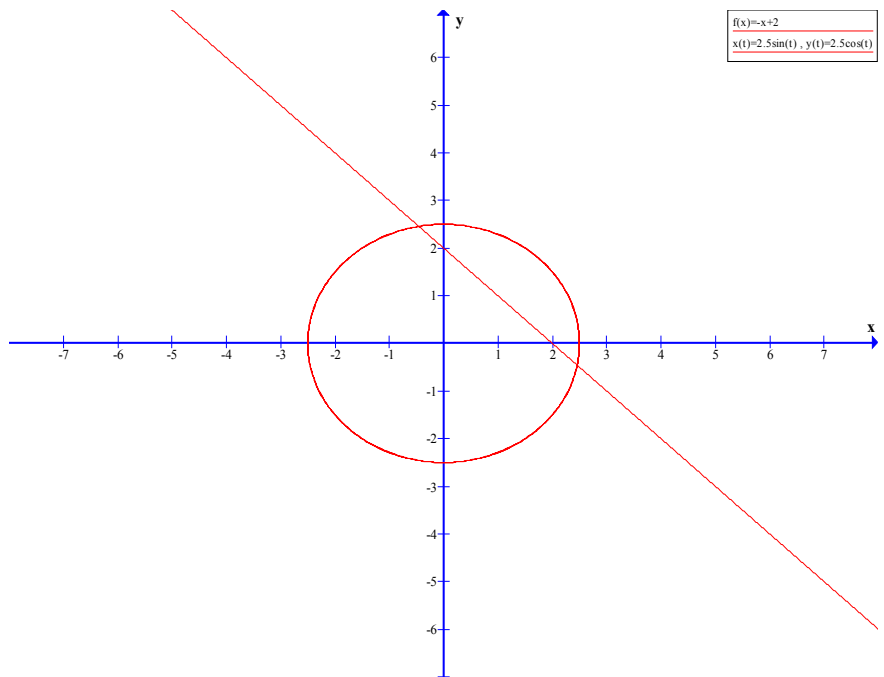
$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4 + \sqrt{26}}{2} \\ a = \frac{4 - \sqrt{26}}{2} \end{cases}$$

■ Hệ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) > R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{4 + \sqrt{26}}{2} \\ a < \frac{4 - \sqrt{26}}{2} \end{cases}$$



Ví dụ 2:

Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a & (1) \\ x + y = 2a + 1 & (2) \end{cases}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Ta có: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ (x+1) + (y-1) = 2a+1 \end{cases}$ (II)

Đặt: $\begin{cases} \sqrt{x+1} = u \geq 0 \\ \sqrt{y-1} = v \geq 0 \end{cases}$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} u + v = a & (1') \\ u^2 + v^2 = 2a + 1 & (2') \end{cases}$ (điều kiện $a \geq -1/2$).

Gọi X, Y là tập nghiệm của (1') và (2').

Ta thấy:

♥ X là tập hợp điểm trên đường thẳng $d: u + v - a = 0$.

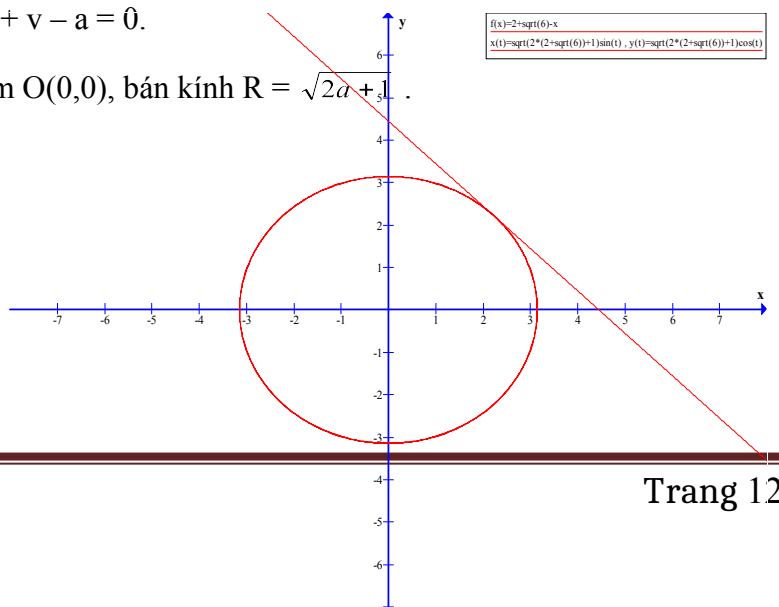
♥ Y là tập hợp điểm trên đường tròn (C) tâm $O(0,0)$, bán kính $R = \sqrt{2a+1}$.

■ Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

(C) tiếp xúc với (d).

$$\Leftrightarrow d(O, \Delta) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2a+1}$$



$$\Leftrightarrow a^2 - 4a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + \sqrt{6} \\ a = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

♣ Với điều kiện $a \geq -1/2$, ta chỉ lấy nghiệm $a = 2 + \sqrt{6}$.

2.5 Chuyển từ phương trình về hệ phương trình:

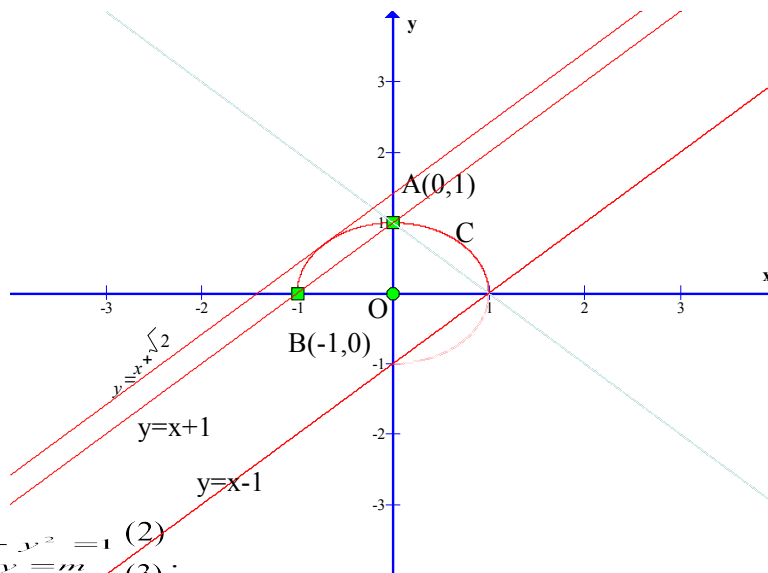
Ví dụ:

Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $\sqrt{1-x^2} = x - m$ (1).

Giải:

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$.

Đặt $y = \sqrt{1-x^2} \geq 0$.



Khi đó phương trình chuyển thành hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (2) \\ x - y = m & (3) \end{cases}$

Ta thấy:

♥ (2) là phần nửa đường tròn đơn vị (C) có tâm O(0,0) phía trên trục hoành, bán kính R=1.

♥ (3) là phương trình đường thẳng (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất $x - y = 0$.

Tìm vị trí tới hạn cho (d):

+ $A(0,1) \in (d) \Leftrightarrow m = 1$.

+ $B(-1,0) \in (d) \Leftrightarrow m = -1$.

+ (d) tiếp xúc với phần trên của đường tròn (C) thì $d(O, (d)) = R \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Vậy:

b. $\begin{cases} |x-1| + |y+1| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$.

c.
$$\begin{cases} 2^{2x} + (2^y + 1)^2 = m \\ (2^x + 1)^2 + 2^{2y} = 4 \end{cases}$$

1000

1. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b. $\begin{cases} |x - 1| + |y - 1| = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$.

d. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 2x + y^2 = m. \end{cases}$

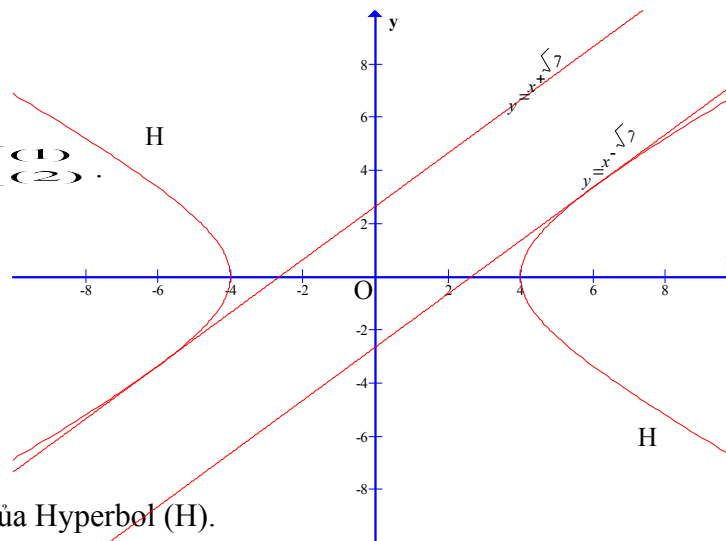
f. $\sqrt{x^2 - 9} = x - m$.

[illegible]

Giải:

Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x - y = m \end{cases} \quad \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$$



Ta thấy:

♥ (1) là phương trình của Hyperbol (H).

♥ (2) là phương trình của đường thẳng.

■ Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (H) tiếp xúc với (d)

$$\Leftrightarrow m^2 = 16 - 9$$

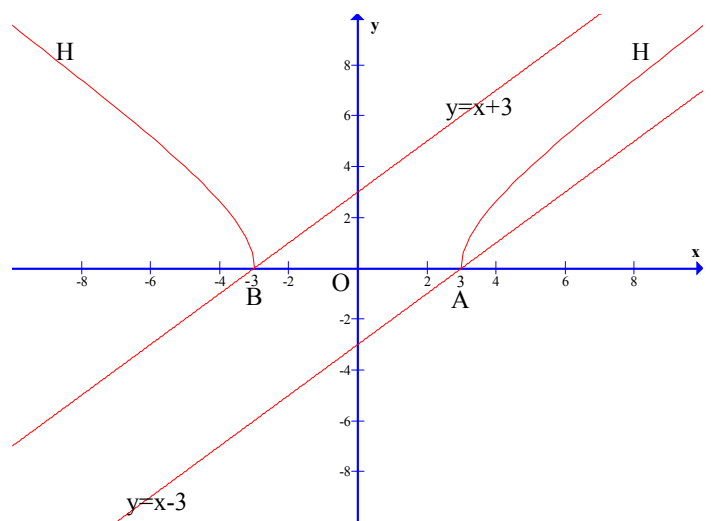
$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}.$$

Ví dụ 2:

Biện luận theo m số nghiệm của

phương trình: $\sqrt{x^2 - 9} = x - m$ (1).

Giải:



Đặt $y = \sqrt{x^2 - 9} \geq 0$.

Khi đó phương trình chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = x - m \end{cases}$$

Ta thấy:

♥ (2) là phương trình của Hyperbol có tâm là gốc O.

♥ (3) là phương trình đường thẳng (d) song song với phân giác góc phần tư thứ nhất $x - y = 0$ và cũng chính là tiệm cận của (H).

Ta tìm hai vị trí tới hạn cho (d) là:

$$+ A(3,0) \in (d) \Leftrightarrow m = 3.$$

$$+ B(-3,0) \in (d) \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy:

♣ Với $-3 < m \leq 0$ hoặc $m > 3$ thì $(H) \cap (d) = \emptyset \Leftrightarrow (1)$ vô nghiệm.

♣ Với $m \leq -3$ hoặc $0 < m \leq 3$ thì $(H) \cap (d)$ tại một điểm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất.

3.1 sự tương giao giữa đường thẳng và Elip:

Ví dụ:

Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $\sqrt{12 - 3x^2} = x - m$ (1).

Giải:

Đặt: $y = \sqrt{12 - 3x^2} \geq 0$.

Khi đó phương trình chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1 & (2) \\ x - y = m & (3) \end{cases} \quad (y \geq 0).$$

Ta thấy:

♥ (2) là phương trình elip (E)

có tâm là gốc O.

♥ (3) là phương trình đường

thẳng (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất $x - y = 0$.

Ta tìm hai vị trí tới hạn của (d) là:

$$+ A(2,0) \in (d) \Leftrightarrow m = 2.$$

$$+ B(-2,0) \in (d) \Leftrightarrow m = -2.$$

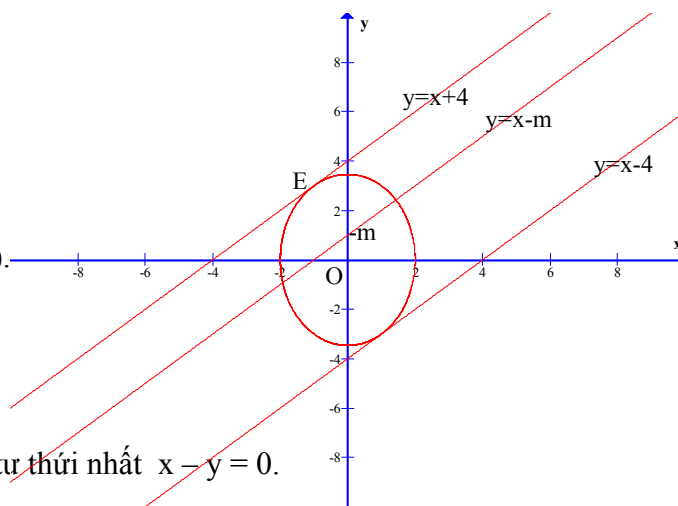
$$+ (d) \text{ tiếp xúc với nửa trên của elip (E)} \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$$

$$\Rightarrow m^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \end{cases}$$

Chỉ lấy giá trị $m = -4$.

Vậy:



Chuyên đề toán học: Sử dụng pp đồ thị để giải hệ phương trình.

- ♣ Với $m < -4$ hoặc $m > 2$ thì (d) không cắt (E) nên phương trình vô nghiệm.
- ♣ Với $m = -4$ thì (d) giao (E) tại A nên phương trình có nghiệm duy nhất.
- ♣ Với $-4 < m < -2$ thì (E) cắt (d) tại hai điểm nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Chú ý:

- * Phương pháp trên được mở rộng cho trường hợp elip có tâm khác O.
- * Có thể sử dụng phép biến đổi đặt $y\sqrt{3} = \sqrt{12 - 3x^2}$, khi đó hệ đưa về dạng

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = \sqrt{3} \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

♠ Bài tập tự giải:

Biện luận theo m số nghiệm của các phương trình sau:

- $\sqrt{4 - x^2} = x - m$.
- $\sqrt{1 - 9x^2} = m - 3x$.
- $\sqrt{16 - 4x^2} = x - m$

3.3 Sự tương giao của đường thẳng và Parabol:

Ví dụ 1:

Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

Giải:

Đặt: $y = x^2 + 2x$. Khi đó phương trình được

$$\text{chuyển về hệ: } \begin{cases} y = x^2 + 2x & (2) \\ y = m - 4 & (3) \end{cases}$$

Ta thấy:

♥ (2) là phương trình parabol (P) đỉnh A(-1,1).

♥ (3) là phương trình đường thẳng (d) song song với Ox.

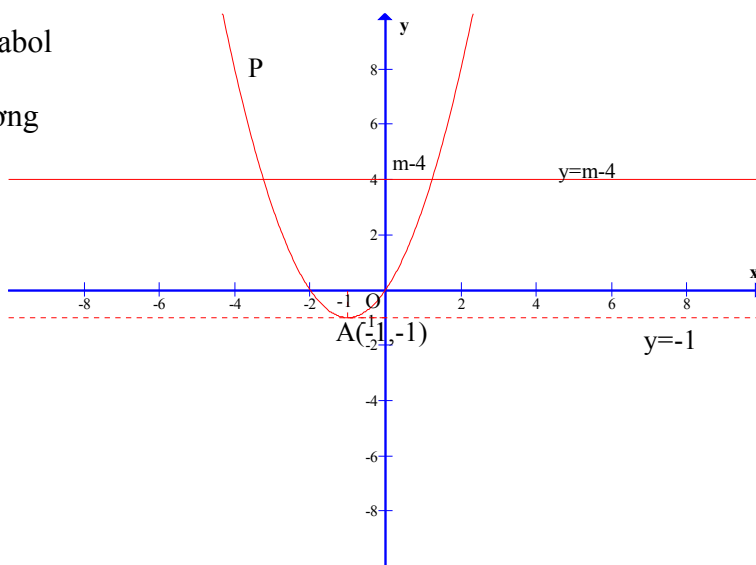
$$\begin{aligned} + (d) \cap (P) &= \{A\} \\ \Leftrightarrow m - 4 &= -1 \\ \Leftrightarrow m &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + (d) \cap (P) &= \emptyset \\ \Leftrightarrow m - 4 &< -1 \\ \Leftrightarrow m &< 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + (d) \cap (P) &\text{ tại hai điểm} \\ \Leftrightarrow m - 4 &> -1 \\ \Leftrightarrow m &> 3. \end{aligned}$$

Vậy:

- ♣ Với $m < 3$: phương trình vô nghiệm.
- ♣ Với $m = 3$: phương trình có nghiệm kép $x = -1$.
- ♣ Với $m > 3$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.



Ví dụ 2: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt?

$$(1/5)^{|x^2 - 4x + 3|} = m^4 - m^2 + 1 \quad (1).$$

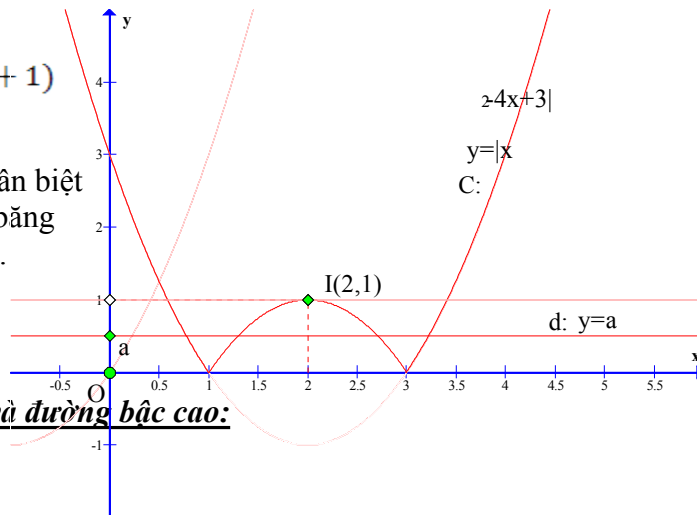
$$\text{HD: } (1) \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 3| = \log_{1/5}(m^4 - m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = a = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) \end{cases}$$

Muốn phương trình có bốn nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = a$ phải nằm trong băng tạo bởi hai đường thẳng $y = 0$ và $y = 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/5 < m^4 - m^2 + 1 < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m^2 < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$



4. Sự tương giao của đường thẳng và đường bậc cao:

4.1 Với đường bậc ba:

Bài toán:

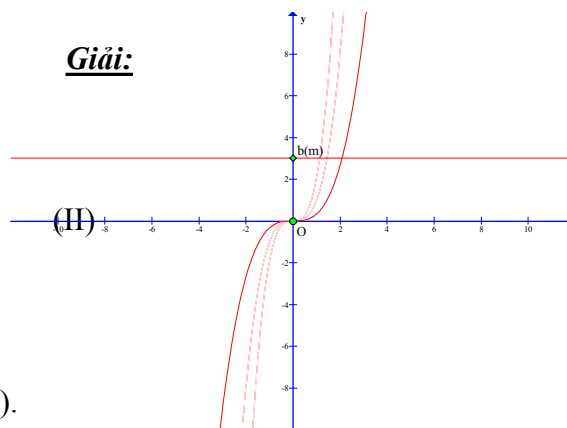
Biện luận số nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a > 0) \\ y = a(m)x + b(m) \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

+ $a(m) = 0$,

(I) trở thành
$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d & (C) \\ y = b(m) & (d) \end{cases} \quad (II)$$



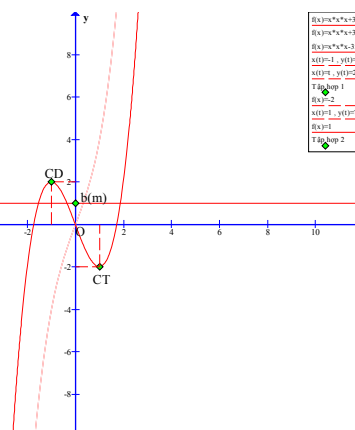
Trường hợp 1: C không có cực trị,
(d) luôn cắt C tại duy nhất một điểm,
nên (II) luôn có nghiệm duy nhất với mọi $b(m)$.

Trường hợp 2: C có 2 cực trị.

- $\begin{cases} b(m) > y_{CD} \\ b(m) < y_{CT} \end{cases} \quad (II) \text{ có nghiệm duy nhất.}$

- $\begin{cases} b(m) = y_{CD} \\ b(m) = y_{CT} \end{cases} \quad (II) \text{ có 2 nghiệm,}$

- trong đó có một nghiệm kép.
- $y_{CT} < b(m) < y_{CD} \quad (II) \text{ có 3}$
- nghiệm phân biệt.



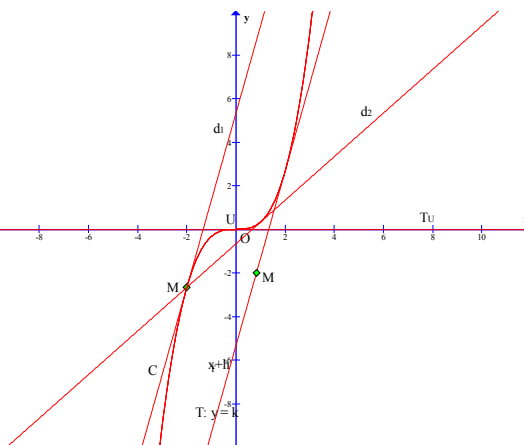
+ $a(m) \neq 0$,

(I) trở thành
$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d & (C) \\ y = a(m)x + b(m) & (d_m) \end{cases} \quad (III)$$

Giả sử d_m qua điểm M cố định.

Trường hợp 1: C không có cực trị.

- a. $M \notin C$, thì qua M có duy nhất
- b. một tiếp tuyến của C là T có hệ số góc k_T .
- $a(m) > k_T$ thì (III) có 3 nghiệm phân biệt.
 - $a(m) = k_T$ thì (III) có 2 nghiệm, trong đó
 - ó một nghiệm kép.
 - $a(m) < k_T$ thì (III) có 1 nghiệm duy nhất.



- c. $M \in C \setminus \{U\}$, thì qua M có 2 tiếp tuyến của C là d_1 và d_2 lần lượt có hệ số góc $k_1 > k_2$.

$\begin{cases} a(m) > k_2 \\ a(m) \neq k_1 \end{cases}$ thì (III) có 3 nghiệm phân biệt.

- $\begin{cases} a(m) = k_1 \\ a(m) = k_2 \end{cases}$ thì (III) có 2 nghiệm, trong đó có một nghiệm kép.
- $a(m) < k_2$ thì (III) có 1 nghiệm duy nhất.

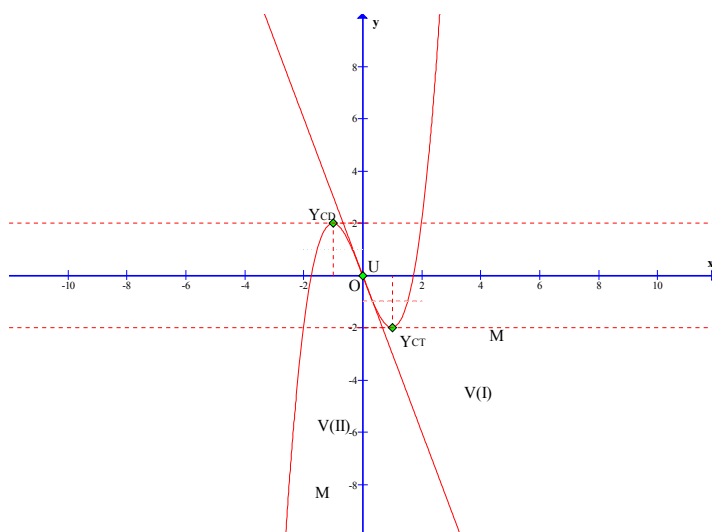
- d. $M \equiv C$, thì qua M có 1 tiếp tuyến của C là T.

- $a(m) > k_T$ thì (III) có 3 nghiệm phân biệt.
- $a(m) \leq k_T$ thì (III) có 1 nghiệm.

Trường hợp 2: C có 2 cực trị.

- a. $M \in V(I)$, thì qua M có 3 tiếp tuyến của C.
- b. $V(I)$, thì qua M có 3 tiếp tuyến của C.
- c. $M \in V(II)$, thì qua M có 1 tiếp tuyến của C.
- d. $M \in d_u, x_M > x_U$, thì qua M có 2 tiếp tuyến.
- e. $M \in C \setminus \{U\}$, thì qua M có 2 tiếp tuyến của C.
- f. $M \equiv U$, thì qua M có 1 tiếp tuyến của C.

Tùy theo số tiếp tuyến mà ta sẽ biện luận số nghiệm của (III) theo điều kiện của $a(m)$.



4.2 Với đường bậc bốn:

Bài toán:

Giải biện luận hệ phương trình sau theo m (I)
$$\begin{cases} y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e & (C) \\ y = a(m)x + b(m) & (d_m) \end{cases}$$

Điều kiện: $a \neq 0$, d_m qua điểm M cố định.

Giải:

a. $a(m) = \text{const}$, thì (I) biện luận được theo m khi

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$$

nhằm được 1 nghiệm.

Ví dụ:

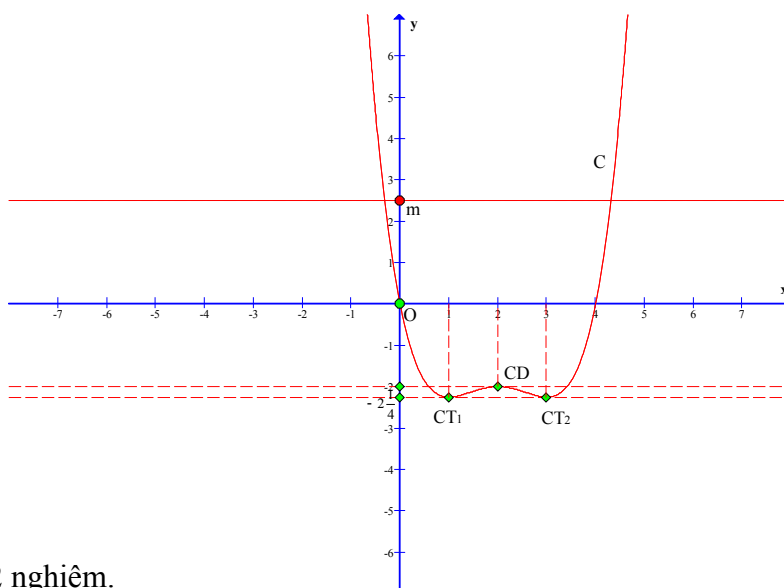
Biện luận số nghiệm của phương trình

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0 \quad (1)$$

Hướng dẫn:

Chuyển (1) về hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x & (C) \\ y = m & (d_m) \end{cases} \quad (I)$$



Do đó:

$m > -2$: hệ có 2 nghiệm.

$m = 2$: hệ có 3 nghiệm.

$-2 > m > -\frac{9}{4}$: hệ có 4 nghiệm.

$m = -9/4$: hệ có 3 nghiệm.

$m < -9/4$: hệ vô nghiệm.

- b. $a(m) \neq 0$, thì chỉ xét (C) là đồ thị của hàm trùng phương bằng cách dùng tiếp tuyến. Để dựng được tiếp tuyến qua M thì điểm M khi ra đề phải chọn thích hợp như nằm trên một tiếp tuyến tuyến cố định có hoành độ tiếp điểm nguyên. Đây cũng là điều kiện trong trường hợp C là đồ thị của hàm bậc ba hay hàm bậc cao khác

III Mở rộng vấn đề:

♦ Về phương pháp:

*Khoảng cách:

☉ Họ đường tròn: $C(m): (x - a(m))^2 + (y - b(m))^2 = (R(m))^2$.

+Đặc trưng:

- Tâm $I(a(m), b(m))$.
- Bán kính $|R(m)|$.
- Qua 2 điểm cố định.

* Tiếp tuyến:

Xét bài toán biện luận số nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = a(m)x + b(m) \end{cases}$$

Chuyên đề toán học: Sử dụng pp đồ thị để giải hệ phương trình.

với $f(x)$ là các hàm đã học trong chương trình phổ thông như: hàm bậc nhất, hàm bậc hai, hàm bậc ba, hàm bậc bốn, phương trình Hyperbol, Elip, đường tròn (những trường hợp này đã khảo sát trong tiểu luận), phương trình căn thức, mũ, logarit, lượng giác, phân tuyến tính (bậc nhất trên bậc nhất và bậc hai trên bậc hai).

*Tiệm cận:

● Họ Hyperbol: $\frac{(x-a(m))^2}{(A(m))^2} - \frac{(y-b(m))^2}{(B(m))^2} = 1 \quad (Hm)$

+Đặc trưng:

a. Tiệm cận: $y = \pm \frac{B(m)}{A(m)}(x - a(m)) + b(m)$.

b. Qua hai điểm cố định.

● Parabol tiệm cận: Mở rộng ví dụ sau đồ thị của C: $y = x^2 + \frac{1}{x}$ tiệm cận với Parabol

P: $y = x^2$ khi $x \rightarrow \pm\infty$.

*Điều kiện tiếp xúc của đường thẳng và conic.

♦ Về đặc điểm đồ thị.:

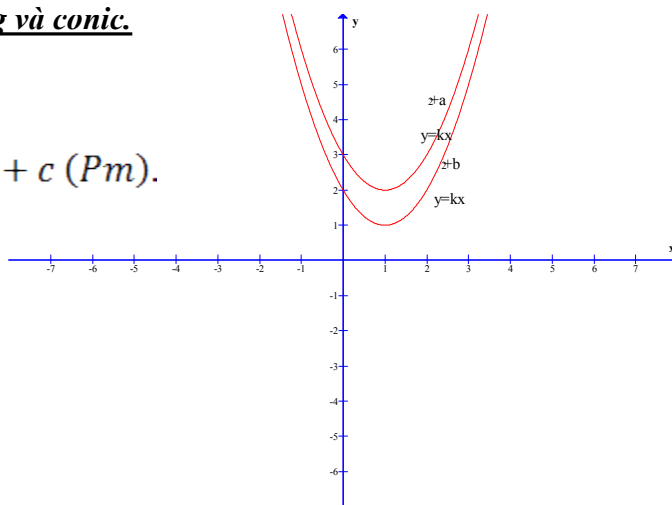
*Parabol: $y = a(m)x^2 + b(m)x + c \quad (Pm)$.

+Đặc trưng:

a. Đỉnh I($-\frac{b(m)}{2a(m)}, -\frac{\Delta(m)}{4a(m)}$).

b. Hệ số bậc nhất:

c. Qua 2 điểm cố định.



*Biến đổi đồ thị:

● Các phép tịnh tiến, đối xứng.

● Cách ghép đồ thị:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{nếu } x \geq a \quad (C_1) \\ f_2(x) & \text{nếu } x < a \quad (C_2) \end{cases}$$

● Cách dùng trị tuyệt đối:

$$y = \frac{\text{bậc hai}}{\text{bậc hai}}$$

$$y = \left| \frac{bậc\ hai}{bậc\ hai} \right|$$

•

$$y = \frac{|bậc\ hai|}{bậc\ hai}$$

•

$$y = \frac{bậc\ hai}{|bậc\ hai|}$$

•

$$|y| = \left| \frac{bậc\ hai}{bậc\ hai} \right|$$

•

KẾT LUẬN CHUNG

♦ Phương pháp:

- Biện luận theo các vị trí tới hạn(tiếp tuyến, tiệm cận, điều kiện tiếp xúc).
- Sử dụng các đặc trưng của đồ thị (hệ số góc, tâm, qua điểm cố định,..)

♦ Cách ra đề:

- Đủ điều kiện để xác định các vị trí tới hạn của đồ thị xác định.
- Một yếu tố của đồ thị hàm chứa tham số chưa xác định.

•

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Hồng Đức, Phương trình và hệ phương trình, NXB Đại học Sư Phạm, 2004.
2. Lê Hồng Đức- Lê Hữu Trí, Phương pháp giải toán hình học giải tích trong mặt phẳng, NXB Hà Nội, 2006.
3. Trần Phương- Lê Hồng Đức, Đại số sơ cấp, NXB Hà Nội, 2006.

4. Trần Phương- Lê Hồng Đức, Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn toán đại số sơ cấp, NXB Hà Nội, 2007.