|  |  |
| --- | --- |
| **UBND QUẬN HAI BÀ TRƯNG**  **PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN**  **VĂN HÓA VÀ MÔN KHOA HỌC CẤP QUẬN**  **MÔN : TOÁN 9**  **Năm học : 2021-2022**  **Ngày thi: 17/02/2022**  **Thời gian: 150 phút**  (không kể thời gian phát đề) |

**Bài I. (5,0 điểm)**

1. Giải phương trình : 
2. Cho là các số thực khác 0 và thỏa mãn điều kiện : . Tính giá trị của biểu thức 

**Bài II. (5,0 điểm)**

1. Cho là các số nguyên thỏa mãn . Chứng minh chia hết cho 6
2. Tìm các số nguyên thỏa mãn 

**Bài III. (2,0 điểm)** Cho các số thực thỏa mãn Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài IV. (6,0 điểm)** Cho tam giác nhọn, nội tiếp đường tròn đường kính Các đường cao cắt nhau tại Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm và C nằm khác phía đối với Gọi là trung điểm 

1. Chứng minh tứ giác là hình bình hành, từ đó suy ra 
2. Chứng minh 
3. Dây cắt tại L. Chứng minh cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác 

**Bài V. (2,0 điểm)**

1. Cho là số nguyên dương. Tìm tất cả số nguyên dương để là số chính phương
2. Trong buổi lễ tuyên dương học sinh tiêu biểu lớp 9 của quận Hai Bà Trưng, có 20 học sinh nam và  học sinh nữ của các trường được vinh dự tham gia. Người ta nhận thấy trong các học sinh đó :

* Không có học sinh nam nào quen tất cả các học sinh nữ
* Mỗi học sinh nữ quen ít nhất một học sinh nam

Chứng tỏ rằng: Tồn tại hai học sinh nam và hai học sinh nữ sao cho và quen nhau, và quen nhau, nhưng và không quen nhau, B và M không quen nhau.

**ĐÁP ÁN**

**Bài I. (5,0 điểm)**

1. **Giải phương trình : **

ĐKXĐ: . Ta viết lại phương trình thành :



1. **Cho là các số thực khác 0 và thỏa mãn điều kiện : . Tính giá trị của biểu thức **

Ta có : 

Từ đó biến đổi được 

Với giả thiết ta có 

**Bài II. (5,0 điểm)**

1. **Cho là các số nguyên thỏa mãn . Chứng minh chia hết cho 6**

Ta có : 

Mặt khác, ta dễ dàng chứng minh được 

Từ đó 

Do đó chia hết cho 6

1. **Tìm các số nguyên thỏa mãn **



Mà là các số nguyên suy ra 



Mà 

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là 

**Bài III. (2,0 điểm) Cho các số thực thỏa mãn Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức **

Điều kiện : . Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :



Tìm GTNN:

  
Từ đó P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi 

Tìm GTLN : Đặt 

Xét hiệu : (do 

Từ đó đạt giá trị lớn nhất bằng khi 

**Bài IV. (6,0 điểm) Cho tam giác nhọn, nội tiếp đường tròn đường kính Các đường cao cắt nhau tại Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm và C nằm khác phía đối với Gọi là trung điểm **

****

1. **Chứng minh tứ giác là hình bình hành, từ đó suy ra **

Dễ chứng minh suy ra tứ giác là hình bình hành

Từ đó dẫn tới 

1. **Chứng minh **

Ta có : dẫn đến 

Mặt khác: 

Hơn nữa (OM là đường trung bình trong tam giác 

Dẫn đến 

1. **Dây cắt tại L. Chứng minh cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác **

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt tại điểm thứ hai R, suy ra . Ta có :

. Mặt khác từ (1) suy ra được , dẫn tới 

Do đó 

Vậy nên hay ba điểm thẳng hàng.

Từ đó cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác 

**Bài V. (2,0 điểm)**

1. **Cho là số nguyên dương. Tìm tất cả số nguyên dương để là số chính phương**

Ta có 

Nhận thấy suy ra cùng tính chẵn lẻ

Hơn nữa . Suy ra cùng chẵn .

Đặt , thay vào (\*) ta có :



Giả sử là một ước nguyên tố chung của và . Khi đó ta có : 

Từ đó dẫn tới (vô lý). Vậy 

Suy ra với và do đó 

Dễ thấy với thì nên không có x thỏa mãn

Với thì , suy ra chỉ có thể bằng 

Khi ta có : , dễ thấy thỏa mãn

1. **Trong buổi lễ tuyên dương học sinh tiêu biểu lớp 9 của quận Hai Bà Trưng, có 20 học sinh nam và  học sinh nữ của các trường được vinh dự tham gia. Người ta nhận thấy trong các học sinh đó :**

* **Không có học sinh nam nào quen tất cả các học sinh nữ**
* **Mỗi học sinh nữ quen ít nhất một học sinh nam**

**Chứng tỏ rằng: Tồn tại hai học sinh nam và hai học sinh nữ sao cho và quen nhau, và quen nhau, nhưng và không quen nhau, B và M không quen nhau.**

Trong 20 học sinh nam, gọi A là bạn quen nhiều học sinh nữ nhất

Vì không quen tất cả các bạn nữ, nên tồn tai một học sinh nữ không quen A

Vì quen ít nhất một bạn nam, gọi học sinh nam đó là B

Ta chứng minh : Trong các học sinh nữ quen có một học sinh không quen B

Thật vậy: Giả sử tất cả học sinh nữ quen A đều quen B. Như vậy B quen nhiều bạn nữ hơn A (vì A còn quen cả N). Điều này mâu thuẫn với quy định A là bạn quen nhiều học sinh nữ nhất.

Từ đó có một học sinh nữ quen A mà không quen B, đó là M