

Bài 2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

|FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

$$k\vec{u} = (kx_1; ky_1), k \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Hai vector $\vec{u} = (x_1; y_1), \vec{v} = (x_2; y_2) (v \neq 0)$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho $x_1 = kx_2$ và $y_1 = ky_2$.

Ví dụ 1. Cho $\vec{u} = (2; -1), \vec{v} = (1; 5)$. Tìm tọa độ của mỗi vector sau:

a) $\vec{u} + \vec{v}$;

b) $\vec{u} - \vec{v}$.

Giải

Do $\vec{u} = (2; -1), \vec{v} = (1; 5)$ nên ta có:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1; -1 + 5)$. Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (3; 4)$.

b) $\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1; -1 - 5)$. Vậy $\vec{u} - \vec{v} = (1; -6)$.

Ví dụ 2. Cho $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (2; 1), \vec{c} = (1; 2)$. Tính tọa độ của mỗi vector sau:

$$3\vec{a}; 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$$

Giải

Do $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (2; 1), \vec{c} = (1; 2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3)$. Vậy $3\vec{a} = (-6; 9)$.

+) $2\vec{a} = (-4; 6)$.

Do đó $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2; 6 - 1)$, vì vậy $2\vec{a} - \vec{b} = (-6; 5)$.

+) $2\vec{b} = (4; 2), \vec{a} + 2\vec{b} = (-2 + 4; 3 + 2)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}; -3\right)$.

Do đó $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(-1; -3), B(2; 3)$ và $C(3; 5)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\vec{AB} = (3; 6), \vec{BC} = (1; 2)$. Suy ra $\vec{AB} = 3\vec{BC}$. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

II. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Nếu $M(x_M; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Nếu $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $A(-2;1), B(2;5), C(5;2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC .

Giải

Do $M(x_M; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0; y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Vậy $M(0;3)$.

Do $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_G = \frac{(-2)+2+5}{3}; y_G = \frac{1+5+2}{3}$. Vậy $G\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

III. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Nếu $u = (x_1; y_1)$ và $v = (x_2; y_2)$ thì $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2$.

Nhận xét

a) Nếu $a = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Nếu $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

c) Với hai vectơ $u = (x_1; y_1)$ và $v = (x_2; y_2)$ khác 0 , ta có:

- u và v vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;2), B(1;-1), C(8;0)$.

a) Tính $|\vec{BA}|, |\vec{BC}|$ và $\cos \angle ABC$.

b) Chứng minh $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

c) Giải tam giác ABC .

Giải

a) Ta có: $\vec{BA} = (1;3), \vec{BC} = (7;1)$. Do đó $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$$|\vec{BA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, |\vec{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$$

$$\cos \angle ABC = \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

b) Do $\vec{AB} = (-1; -3)$ và $\vec{AC} = (6; -2)$ nên $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 0$. Vậy $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

c) Do $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ nên $\angle BAC = 90^\circ$, tức là tam giác ABC vuông tại A . Mà $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ nên $\angle ABC \approx 63^\circ$.

Vì thế $\angle ACB \approx 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$.

Mặt khác, ta có: $|\vec{AB}| = \sqrt{10}, |\vec{BC}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, |\vec{CA}| = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$

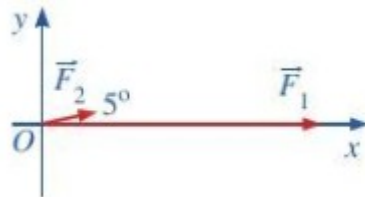
Ví dụ 6. Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực $\vec{F}_1$ có độ lớn (cường độ) là $2000N$ theo phương ngang lên xe ô tô con.



Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực $\vec{F}_2$ có độ lớn là 300 N lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vector như hình sao cho $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 5^\circ$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình bên, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 N .



Ta có:

$$\vec{F}_1 = (2000; 0).$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 5^\circ \text{ nên tọa độ của } \vec{F}_2 \text{ là:}$$

$$\vec{F}_2 = (300 \cdot \cos 5^\circ; 300 \cdot \sin 5^\circ).$$

Do đó, lực $\vec{F}$ tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có tọa độ là:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2000 + 300 \cdot \cos 5^\circ; 300 \cdot \sin 5^\circ).$$

Độ lớn lực tổng hợp $\vec{F}$ tác động lên xe ô tô con là:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(2000 + 300 \cdot \cos 5^\circ)^2 + (300 \cdot \sin 5^\circ)^2} \approx 2299(\text{N}).$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TRỤC TỌA ĐỘ

Câu 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -2 và 5.

- Tìm tọa độ của $\vec{AB}$.
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- Tìm tọa độ của điểm M sao cho $2\vec{MA} + 5\vec{MB} = \vec{0}$.
- Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\vec{NA} + 3\vec{NB} = -\vec{1}$.

Lời giải

a) Tọa độ của $\vec{AB}$:

$$\text{Ta có: } x_A = -2; x_B = 5 \Rightarrow \vec{AB} = x_B - x_A = 7 \Rightarrow \vec{AB} = 7\vec{i} \quad (\vec{i} \text{ là vector đơn vị})$$

b) Vì I là trung điểm của đoạn AB nên tọa độ của I là:

$$x_I = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_I = \frac{3}{2}$$

c) $M(m)$ là điểm xác định bởi hệ thức: $2\vec{MA} + 5\vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} = 2,5\vec{MB}$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{i} = 2,5 \cdot \vec{MB} \cdot \vec{i} \Leftrightarrow -2 - m = 2,5(m - 5) \Leftrightarrow 3,5m = 10,5 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow x_m = 3$$

d) $N(n)$ là điểm xác định bởi hệ thức: $2\vec{NA} + 3\vec{NB} = -\vec{1} \Leftrightarrow 5\vec{NA} - 3\vec{NA} + 3\vec{NB} = -\vec{1}$

$$\Leftrightarrow 5\vec{NA} + 3\vec{AB} = -\vec{1} \Leftrightarrow 5\vec{NA} = -\vec{1} - 3 \cdot 7 = -22 \Leftrightarrow \vec{NA} = -\frac{22}{5} \Leftrightarrow -2 - n = -\frac{22}{5} \Leftrightarrow n = \frac{12}{5}.$$

Câu 2. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -3 và 1.

a) Tìm tọa độ của điểm M sao cho $3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 1$.

Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overline{NA} + 3\overline{NB} = \overline{AB}$.

Lời giải

Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -3 và $1 \Rightarrow A(-3); B(1) \Rightarrow \overline{AB} = 4$

a) Tọa độ điểm M sao cho $3\overline{MA} - 2\overline{MB} = 1 \Leftrightarrow \overline{MA} + 2(\overline{MA} - \overline{MB}) = 1$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} = 1 + 2\overline{AB} = 9 \Leftrightarrow -3 - m = 9 \Rightarrow m = -12 \Rightarrow M(-12)$$

b) Tọa độ điểm N sao cho $\overline{NA} + 3\overline{NB} = \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{NA} - \overline{NB} + 4\overline{NB} = 4$

$$\Leftrightarrow 4\overline{NB} = 4 + \overline{AB} = 8 \Leftrightarrow \overline{NB} = 2 \Leftrightarrow 1 - n = 2 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow N(-1)$$

Câu 3. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2), B(2), C(1), D(6)$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh rằng $\overline{IC} \cdot \overline{ID} = \overline{IA}^2$.

Gọi J là trung điểm của CD . Chứng minh rằng $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AJ}$.

Lời giải

Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm $A(-2; \overline{AD} = 6), B(2), C(1), D(6) \Rightarrow \overline{AC} = 3; \overline{AB} = 4$

a) Ta có $\frac{1}{\overline{AC}} = \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\overline{AB}}$

b) $I(i)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow i = \frac{-2+2}{2} = 0 \Rightarrow \overline{IA} = 2; \overline{IC} = 1; \overline{ID} = 4$
 $\Rightarrow \overline{IC} \cdot \overline{ID} = 1 \cdot 4 = 2^2 = \overline{IA}^2$

c) $J(j)$ là trung điểm của $CD \Rightarrow j = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \overline{AJ} = \frac{9}{2}$
 $\left. \begin{array}{l} \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 3 \cdot 6 = 18 \\ \overline{AB} \cdot \overline{AJ} = 4 \cdot \frac{9}{2} = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AJ}$
 Ta có:

Câu 4. Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c .

a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} = 0$.

c) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overline{NA} - 3\overline{NB} = \overline{NC}$.

Lời giải

Trên trục $x'Ox$ cho 3 điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là a, b, c

a) Tọa độ trung điểm $I(i)$ của AB : $i = \frac{a+b}{2}$

b) Tọa độ điểm $M(m)$ thỏa mãn: $\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} = 0 \Rightarrow \overline{MA} = \overline{BC} \Rightarrow a - m = c - b \Rightarrow m = a + b - c$

c) Tọa độ điểm $N(n)$ thỏa mãn: $2\overline{NA} - 3\overline{NB} = \overline{NC} \Rightarrow (2\overline{NA} - 2\overline{NB}) - (\overline{NB} - \overline{NC}) = 2\overline{NC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{NC} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} \Rightarrow n - c = a - b + \frac{c - b}{2} \Rightarrow n = a - \frac{3b}{2} + \frac{3a}{2}$$

Câu 5. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý.

- a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
b) Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, BD, AB, CD . Chứng minh rằng các đoạn IJ và KL có chung trung điểm.

Lời giải

Gọi a, b, c, d lần lượt là tọa độ các điểm A, B, C, D .

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (b - a)(d - c) + (c - a)(b - d) + (d - a)(c - b) \\ &= (bd - bc - ad + ac) + (bc - cd - ab - ad) + (dc - bd - ac + ab) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & I(i), J(j), K(k), L(l) \text{ lần lượt là trung điểm của các đoạn } AC, BD, AB, CD \\ & \Rightarrow i = \frac{a+c}{2}; j = \frac{b+d}{2}; k = \frac{a+b}{2}; l = \frac{c+d}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó, trung điểm của } IJ \text{ có tọa độ là: } \frac{1}{2} \left(\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} \right)$$

$$\text{Trung điểm của } KL \text{ có tọa độ là: } \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right)$$

$$\text{Vậy hai trung điểm có cùng tọa độ bằng } \frac{1}{4}(a+b+c+d) \text{ nên chúng trùng nhau.}$$

DẠNG 2. TỌA ĐỘ VÉC TƠ

Câu 6. Cho $a = (1; -2); b = (0; 3)$ tìm tọa độ của các vector sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \overrightarrow{x} = a + b; \overrightarrow{y} = a - b; \overrightarrow{z} = 2a - 3b. \\ \text{b) } & \overrightarrow{u} = 3a - 2b; \overrightarrow{v} = 2 + b; \overrightarrow{w} = 4a - \frac{1}{2}b. \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & \overrightarrow{x} = a + b = (1+0; -2+3) = (1; 1), \overrightarrow{y} = a - b = (1-0; -2-3) = (1; -5), \\ & \overrightarrow{z} = 2a - 3b = (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0; 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3) = (2; -13). \end{aligned}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{u} = 3a - 2b = (3; -12), \overrightarrow{v} = 2 + b = (2; 1), \overrightarrow{w} = 4a - \frac{1}{2}b = 4 \left(3; -\frac{11}{2} \right)$$

Câu 7. Cho

$$a = (2; 0); b = \left(-1; \frac{1}{2} \right); c = (4; -6)$$

- a) Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{d} = 2a - 3b + 5c$.
b) Tìm 2 số m, n sao cho $ma + b - nc = 0$.
c) Biểu diễn vector c theo a, b .

Lời giải

$$\vec{d} = 2a - 3b + 5c = \left(2.2 - 3.(-1) + 5.4; 2.0 - 3.\frac{1}{2} + 5.(6) \right) = \left(27; -\frac{63}{2} \right)$$

a)

$$\vec{ma} + \vec{b} - \vec{nc} = 0 \Rightarrow m.2i + \left(-i + \frac{1}{2}j \right) - n(4i - 6j) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 - 4n = 0 \\ \frac{1}{2} + 6n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ n = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

b) Ta có:

$$\text{c) Giả sử: } \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \text{ ta có: } \begin{cases} 4 = x.2 + y.(-1) \\ -6 = x.0 + y.\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -12 \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = 8\vec{a} - 12\vec{b}$

DẠNG 3. TỌA ĐỘ ĐIỂM

Câu 8. Cho hai điểm $A(3; -5)$, $B(1; 0)$

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\vec{OC} = -3\vec{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng với A qua C .

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$.

Lời giải.

a) Gọi $C(x_C; y_C)$.

Theo bài $\vec{OC} = -3\vec{AB} \Leftrightarrow (x_C; y_C) = -3(-2; 5) = (6; -15) \Rightarrow C(6; -15)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_C = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases}$$

b) D đối xứng với A qua C hay C là trung điểm của AD

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A = 2.6 - 3 = 12 \\ y_D = 2y_C - y_A = 2(-15) - (-5) = -25 \end{cases} \Rightarrow D(12; -25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + 3x_B}{1+3} = \frac{3+3.1}{4} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_A + 3y_B}{1+3} = \frac{-5+3.0}{4} = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$$

c) M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$

Câu 9. Cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 0)$

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC , điểm B chia đoạn AC , điểm C chia đoạn AB .

Lời giải:

$$\begin{cases} \vec{AB} = (2; 2) \\ \vec{BC} = (-3; -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{BC} = -\frac{3}{2}\vec{AB} \text{ nên 3 điểm } A, B \text{ và } C \text{ thẳng hàng.}$$

b) Ta có:

$$\begin{cases} \vec{AB} = (2; 2) \\ \vec{AC} = (-1; -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} \Rightarrow A \text{ chia đoạn } BC \text{ theo tỉ số } k = -2.$$

$$+ \begin{cases} \overrightarrow{BA} = (-2; -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3; -3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow B \text{ chia đoạn } AC \text{ theo tỉ số } k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1; 1) \\ \overrightarrow{CB} = (3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} \Rightarrow C \text{ chia đoạn } AB \text{ theo tỉ số } k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 10. Cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$.

- Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Lời giải:

a) $\overrightarrow{AB} = (-1; 6)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (3; -2)$

b) I là trung điểm của AB
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

c) Ta có: $\overrightarrow{CM} = (x_M - 3; y_M - 2)$, $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2(-1; 6) - 3(2; 4) = (-8; 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 3 = -8 \\ y_M - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -5 \\ y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-5; 2)$$

d) $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Rightarrow (x_N - 1; y_N + 2) + 2(x_N; y_N - 4) - 4(x_N - 3; y_N - 2) = (0; 0)$

$$\Leftrightarrow (-x_N + 11; -y_N + 2) = (0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 11 \\ y_N = 2 \end{cases} \Rightarrow N(11; 2)$$

Câu 11. Cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(2; 1)$, $C(-1; -3)$.

- CMR: Tồn tại tam giác ABC .
- Tính chu vi tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho M cách đều A, B .
- Tìm điểm N thuộc trục Oy sao cho N cách đều B, C .

Lời giải.

a) Ta có phương trình đường thẳng AB : $y = ax + b$

$$\begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d: y = 1$$

Do C không thuộc d nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng, tức là tam giác tồn tại.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-3; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -4)$

$$\Rightarrow AB = 3; BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; AC = 4 \Rightarrow P_{ABC} = 3 + 5 + 4 = 12$$

- c) Tọa độ trọng tâm G :
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow G\left(0; -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$
- d) Gọi $D(x; y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = 3 \\ -3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-4; -3)$
- e) Phương trình trung trực của đoạn thẳng AB là $x = \frac{1}{2}$. M là giao của trung trực này với trục Ox hay $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
- f) Gọi $N(0; x)$
$$\Rightarrow \begin{cases} CN^2 = 1 + (x+3)^2 \\ BN^2 = 2^2 + (1-x)^2 \end{cases}$$
- N cách đều B và C khi $CN^2 = BN^2 \Leftrightarrow 1 + (x+3)^2 = 2^2 + (1-x)^2$
- $$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8} \Rightarrow N\left(0; -\frac{5}{8}\right)$$

Câu 12. Cho tam giác ABC có $A(4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

- Tính chu vi tam giác.
- Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác.
- Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải.

- a) Ta có $\overline{AB} = (-2; 3)$, $\overline{BC} = (0; -6)$, $\overline{AC} = (-2; -3)$
- $$\Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, BC = 6, AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \Rightarrow P_{ABC} = 2\sqrt{13}$$
- b) Gọi $D(x; y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -2 \\ -2 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow D(4; -5)$
- c) Tọa độ trọng tâm G của tam giác
$$x_G = \frac{4+2+2}{3} = \frac{8}{3}; y_G = \frac{1+4-2}{3} = 1 \Rightarrow G\left(\frac{8}{3}; 1\right)$$
- d) Ta có phương trình đường thẳng AC : $y = \frac{3}{2}x - 5$. Suy ra đường cao BF qua B và vuông góc với AC là $y = -\frac{2}{3}(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$.
- Phương trình đường thẳng AB là $y = -\frac{3}{2}x + 7$ suy ra đường cao CK đi qua C và vuông góc với AB là $y = \frac{2}{3}(x-2) - 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$.

Tọa độ trực tâm H là giao điểm của BF và CK nên
$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{2}; 1\right).$$

e) Trung điểm đoạn AB và BC lần lượt là $M\left(3; \frac{5}{2}\right)$, $N(2; 1)$

Phương trình trung trực của AB đi qua M và vuông góc với AB là: $y = \frac{2}{3}(x - 3) + \frac{5}{2}$.

Phương trình trung trực của BC là $y = 1$

Tâm đường tròn ngoại tiếp I là giao điểm của hai trung trực nên $I\left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

Câu 13. Cho $A(1; 3)$, $B(2; 5)$ và $C(4; -1)$.

- Tìm chu vi của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trung điểm của các đoạn thẳng AB , AC .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -4)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}; BC = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}; AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow P_{ABC} = \sqrt{5} + 5 + \sqrt{40}$$

b) Tọa độ trung điểm M của đoạn AB : $x_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $y_M = \frac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 4\right)$

Trung điểm của N của đoạn AC : $x_N = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$; $y_N = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; 1\right)$

c) Tọa độ trọng tâm G tương tự như các bài toán trước $G\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

d) Gọi $D(x; y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = 1 \\ -1 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$
 $\Rightarrow D(3; -3)$

e) Ta có phương trình đường thẳng AB : $y = 2x + 1$. Suy ra đường cao CH là $y = -\frac{1}{2}(x - 4) - 1$.

Phương trình đường thẳng AC là $y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$. Suy ra đường cao BE là $y = \frac{3}{4}(x - 2) + 5$

Tọa độ trực tâm H thỏa mãn
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x - 4) - 1 \\ y = \frac{3}{4}(x - 2) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow H(-2; 2)$$

f) Phương trình trung trực của AB đi qua M và vuông góc với AB là: $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + 4$.

Phương trình trung trực của BC là: $y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1$

Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I là giao điểm của hai trung trực nên thỏa mãn

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + 4. \\ y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

DẠNG 4. ỨNG DỤNG

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ suy ra $\cos B$

Lời giải

a). $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{90}$, $|\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{100}$

Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

b). Có $\overrightarrow{BA} = (-1; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (8; -6) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1) \cdot 8 + (-3) \cdot (-6) = 10$

Ngoài ra $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Câu 15. Cho ba điểm $A(4\sqrt{3}; -1)$, $B(0;3)$, $C(8\sqrt{3};3)$

a) Tìm đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

b) Tìm $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Gọi tọa độ điểm D là $D(x; y)$ thì $\overrightarrow{AD} = (x - 4\sqrt{3}; y + 1)$, $\overrightarrow{BC} = (8\sqrt{3}; 0)$

Từ đó suy ra $x = 12\sqrt{3}$, $y = -1$. Vậy ta có $D(12\sqrt{3}; -1)$

b) Ta có $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \left[(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})^2 - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 \right] = \frac{1}{4} (64 - 448) = -\frac{187}{2}$;

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}^2 = 192$.

Câu 16. Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ b) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = (k; -4)$

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot k + (-5) \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$

$$\text{b) Ta có } \vec{u} = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$$

$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4} \Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$$

Câu 17. Cho các véc-tơ $a = (-2; 3)$, $b = (4; 1)$

a) Tìm các số k và m sao cho $c = ka + mb$ vuông góc với véc-tơ $a + b$.

b) Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $a \cdot \vec{d} = 4$ và $b \cdot \vec{d} = -2$.

Lời giải.

a) Ta có $c = ka + mb = (-2k + 4m; 3k + m)$

$$\text{Để } c \perp (a + b) \Leftrightarrow c \cdot (a + b) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0$$

Vậy với $2k + 3m = 0$ thì $c \perp (a + b)$

b) Gọi $\vec{d} = (x; y)$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$$

Khi đó từ $a \cdot \vec{d} = 4$ và $b \cdot \vec{d} = -2$, ta có hệ phương trình và

$$\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7} \right)$$

Vậy và

Câu 18. Tính góc giữa hai véc-tơ a và b trong các trường hợp sau

a) $a = (1; -2)$, $b = (-2; -6)$

b) $a = (-3; 4)$, $b = (4; 3)$

c) $a = (2; 5)$, $b = (3; -7)$

Lời giải.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-6)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{4+36}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) Áp dụng công thức

$$\vec{(a, b)} = 45^\circ$$

Vậy

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-3) \cdot 4 + 4 \cdot 3}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{0}{25} = 0$$

b) Ta có

$$\vec{(a, b)} = 90^\circ$$

Vậy

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4+25} \cdot \sqrt{9+49}} = \frac{-29}{29\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Ta có

$$\vec{(a, b)} = 135^\circ$$

Vậy

Câu 19. Cho $u = (4; 1)$ và $v = (1; 4)$

a) Tìm m để $a = u + m \cdot v$ vuông góc với trục hoành.

b) Tìm n để $b = n.u + v$ tạo với véc-tơ $c = i + j$ một góc 45° .

Lời giải.

a) Ta có $i = (1; 0)$, $a = (4 + m; 1 + 4m)$.

Véc-tơ a vuông góc với trục hoành khi và chỉ khi $a.i = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$

b) Ta có $b = (4n + 1; n + 4)$, $c = i + j = (1; 1)$.

Góc giữa hai véc-tơ b , c là 45° khi

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{(4n+1) + (n+4)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4n+1)^2 + (n+4)^2}} \Leftrightarrow \frac{5(n+1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17n^2 + 16n + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow 5(n+1) &= \sqrt{17n^2 + 16n + 17} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \geq 0 \\ 25n^2 + 50n + 25 = 17n^2 + 16n + 17 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq -1 \\ 4n^2 + 17n + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow n = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy $n = -\frac{1}{4}$.

Câu 20. Cho các điểm $A(4\sqrt{3}; -1)$, $B(0; 3)$, $C(8\sqrt{3}; 3)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC .

b) Tính các góc của tam giác ABC .

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{48 + 16} = 8$

$$\overrightarrow{BC} = (8\sqrt{3}; 0) \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{CA} = (-4\sqrt{3}; -4) \Rightarrow AC = 8$$

$$\text{b) Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{128 + 192 - 192}{128} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\hat{A} = 120^\circ$ và vì tam giác cân tại A nên $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$.

Câu 21. Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$, $C(2; 6)$. Tìm tọa độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác.

Lời giải.

$$\text{Trọng tâm } G \text{ có tọa độ } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2 \end{cases} \text{ . Vậy } G\left(\frac{2}{3}; 2\right).$$

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(2-3) + (y-0)(6-0) = 0 \\ (x-3)(-3-2) + (y-0)(0-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 6y = 3 \\ -5x - 6y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Vậy $H\left(2; \frac{5}{6}\right)$.

Câu 22. Cho điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$ và $C(10;-2)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ và tính $\cos B$, $\cos C$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;3)$ và $\overrightarrow{AC} = (9;-3)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 - 9 = 0$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

b) Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (8;-6)$. Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -8 + 18 = 10$.

$BA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, mà $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos B$

Suy ra $10 = \sqrt{10} \cdot \cos B$. Vậy $\cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 90 \Rightarrow \cos C = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Tương tự ta có

Câu 23. Cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B .

Lời giải.

Gọi $C(x;y)$ thì $\overrightarrow{BA} = (1;3)$ và $\overrightarrow{BC} = (x-1;y-1)$.

Điều kiện tam giác ABC vuông cân tại B là
$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ BA = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-1) = 0 \\ 1^2 + 3^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ (3 - 3y)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ 10y^2 - 20y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm C có tọa độ $(4;0)$, $(-2;2)$.

Câu 24. Cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$, $D(0;-2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Lời giải.

Ta chứng minh $ABCD$ là hình thoi có một góc vuông.

$$\overrightarrow{AB} = (1;7) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-7;1) \Rightarrow BC = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{CD} = (-1;-7) \Rightarrow CD = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{DA} = (7;-1) \Rightarrow DA = 5\sqrt{2}$$

Vậy $AB = BC = CD = DA = 5\sqrt{2}$ và vì A, B, C, D phân biệt nên $ABCD$ là hình thoi.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot (-7) + 7 \cdot 1 = 0$ nên $AB \perp BC$

Vậy $ABCD$ là hình vuông.

Câu 25. Biết $A(1;-1)$ và $B(3;0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D .

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 3; y)$

Điều kiện $ABCD$ là hình vuông ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 3) + 1 \cdot y = 0 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(3 - x) \\ 5(x - 3)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(3 - x) \\ (x - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Với $C(4; -2)$ ta tính được đỉnh $D(2; -3)$

Với $C(2; 2)$ ta tính được đỉnh $D(0; 1)$

Câu 26. Cho tam giác ABC với $A(2; 4)$, $B(-3; 1)$, $C(3; -1)$

a) Tìm điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b) Tìm chân A' của đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC .

Lời giải.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 3 + 3 \\ y_D - 4 = -1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi

Vậy $D(8; 2)$

b) Gọi $A'(x; y)$ là chân đường cao AA' của tam giác ABC .

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ A' \in BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} = k \cdot \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

Ta có

$$\text{Mà } \overrightarrow{AA'} = (x - 2; y - 4), \overrightarrow{BC} = (6; -2), \overrightarrow{BA'} = (x + 3; y - 1) \text{ nên } \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B lần lượt có tọa độ là a, b . M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, k \neq 1$. Khi đó tọa độ của điểm M là:

- A. $\frac{ka - b}{k - 1}$ B. $\frac{kb - a}{k - 1}$ C. $\frac{a - kb}{k + 1}$ D. $\frac{kb + a}{k - 1}$

Lời giải

Gọi x là độ của điểm M .

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow a - x = k(b - x) \Leftrightarrow (k - 1)x = kb - a \Leftrightarrow x = \frac{kb - a}{k - 1}, k \neq 1$$

Ta có:

Đáp án B.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $a = 4i + 6j$ và $b = 3i - 7j$. Tính tích vô hướng $a.b$

- A. $a.b = -30$ B. $a.b = 3$ C. $a.b = 30$ D. $a.b = 43$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $a=(4;6)$ và $b=(3;-7)$

Suy ra $a.b=4.3+6.(-7)=-30$

- Câu 3.** Trên trục $(O;i)$ cho ba điểm A, B, C . Nếu biết $\overline{AB}=5, \overline{AC}=7$ thì $\overline{CB}$ bằng:
- A. -2 B. 2 C. 4 D. 3

Lời giải

Ta có: $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = 5 - 7 = -2$

Đáp án A.

- Câu 4.** Trên trục $(O;i)$ cho hai điểm A, B lần lượt có tọa độ 1 và 5. Khi đó tọa độ điểm M thỏa mãn $\overline{2MA} - \overline{3MB} = 0$ là:

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

Lời giải

Đáp án D

$$\overline{2MA} - \overline{3MB} = 0 \Leftrightarrow \overline{2MA} = \overline{3MB} \Leftrightarrow 2(x_A - x_M) = 3(x_B - x_M) \Leftrightarrow x_M = 13$$

- Câu 5.** Trên trục $x'Ox$ có vector đơn vị i . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. x_A là tọa độ điểm $A \Leftrightarrow \overline{OA} = x_A i$

B. x_B, x_C là tọa độ của điểm B và C thì $\overline{BC} = x_B - x_C$

C. $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$

D. M là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$

Lời giải

Đáp án B

Ta có $\overline{BC} = x_B - x_C$

- Câu 6.** Trên trục $x'Ox$, cho tọa độ của A, B lần lượt là $-2; 3$. Khi đó tọa độ điểm M thỏa mãn: $\overline{OM}^2 = \overline{MAMB}$ là:

- A. 6 B. $\sqrt{6}$ C. -6 D. 4

Lời giải

Đáp án C

$$\Rightarrow x^2 = (-2 - x)(3 - x) \Rightarrow x = -6$$

Gọi M có tọa độ là x

- Câu 7.** Trên trục $(O;i)$ tìm tọa độ x của điểm M sao cho $\overline{MA} + \overline{2MC} = 0$, với A, C có tọa độ tương ứng là -1 và 3

- A. $x = \frac{5}{3}$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $x = \frac{2}{5}$ D. $x = \frac{5}{2}$

Lời giải

Từ $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) = 0$

Hay $-1 - x + 2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

Đáp án A.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $u = (3; 4)$ và $v = (-8; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|u| = |v|$. B. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và v cùng phương.
C. u vuông góc với v . D. $u = -v$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u \cdot v = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$ suy ra u vuông góc với v .

Câu 9. Trong mp Oxy cho $A(4; 6)$, $B(1; 4)$, $C\left(7; \frac{3}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây sai

- A. $\overrightarrow{AB} = (-3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = \left(3; -\frac{9}{2}\right)$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$. D. $|\overrightarrow{BC}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overrightarrow{AB} = (-3; -2)$, nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên loại B.

Phương án C: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ nên loại C. $\overrightarrow{AC} = \left(3; -\frac{9}{2}\right)$

Phương án D: Ta có $\overrightarrow{BC} = \left(6; -\frac{5}{2}\right)$ suy ra $BC = \sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{13}{2}$ nên chọn D.

Câu 10. Cho các vectơ $a = (1; -2)$, $b = (-2; -6)$. Khi đó góc giữa chúng là

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 135° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $a = (1; -2)$, $b = (-2; -6)$, suy ra $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.

Câu 11. Cho $\overrightarrow{OM} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{ON} = (3; -1)$. Tính góc của $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$

- A. 135° . B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. -135° . D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos(\vec{OM}, \vec{ON}) = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{ON}}{|\vec{OM}| \cdot |\vec{ON}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{OM}, \vec{ON}) = 135^\circ$$

Ta có

- Câu 12.** Trong mặt phẳng Oxy cho $a = (1; 3), b = (-2; 1)$. Tích vô hướng của 2 vector a, b là:
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a = (1; 3), b = (-2; 1)$, suy ra $a \cdot b = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 1$.

- Câu 13.** Cặp vector nào sau đây vuông góc?

- A. $a = (2; -1)$ và $b = (-3; 4)$ B. $a = (3; -4)$ và $b = (-3; 4)$
 C. $a = (-2; -3)$ và $b = (-6; 4)$ D. $a = (7; -3)$ và $b = (3; -7)$

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $a \cdot b = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10 \neq 0$ suy ra A sai.

Phương án B: $a \cdot b = 3 \cdot (-3) + (-4) \cdot 4 \neq 0$ suy ra B sai.

Phương án C: $a \cdot b = -2 \cdot (-6) - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow a \perp b$ suy ra C đúng.

Phương án D: $a \cdot b = 7 \cdot 3 + (-3) \cdot (-7) = 42 \neq 0$ suy ra D sai.

- Câu 14.** Cho 2 vector $a = (a_1; a_2), b = (b_1; b_2)$, tìm biểu thức sai:

- A. $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ B. $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$
 C. $a \cdot b = \frac{1}{2} [a^2 + b^2 - (a+b)^2]$ D. $a \cdot b = \frac{1}{2} [(a+b)^2 - a^2 - b^2]$

Lời giải

Chọn C

Phương án A: biểu thức tọa độ tích vô hướng $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ nên loại A

Phương án B: Công thức tích vô hướng của hai vector $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$ nên loại B

Phương án C: $\frac{1}{2} [a^2 + b^2 - (a+b)^2] = \frac{1}{2} [a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 + 2ab)] = -ab$ nên chọn C.

- Câu 15.** Cho tam giác ABC có $A(1; 2), B(-1; 1), C(5; -1)$. Tính $\cos A$

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{AB} = (-2; -1), \vec{AC} = (4; -3)$ suy ra

$$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{(-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{25}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

- Câu 16.** Trong mặt phẳng $(O; i, j)$ cho 2 vector: $a = 3i + 6j$ và $b = 8i - 4j$. Kết luận nào sau đây sai?

- A. $a \cdot b = 0$. B. $a \perp b$. C. $|a| \cdot |b| = 0$. D. $|a \cdot b| = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$a = (3; 6); b = (8; -4)$$

Phương án A: $a \cdot b = 24 - 24 = 0$ nên loại A

Phương án B: $a \cdot b = 0$ suy ra a vuông góc b nên loại B

Phương án C: $|a| \cdot |b| = \sqrt{3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-4)^2} \neq 0$ nên chọn C.

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1; 2), B(4; 1), C(5; 4)$. Tính $\angle BAC$?

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 120° .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 2)$ suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 45^\circ$

Câu 18. Cho các vector $a = (1; -3), b = (2; 5)$. Tính tích vô hướng của $a(a + 2b)$

- A. 16. B. 26. C. 36. D. -16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a \cdot a = 10$, $a \cdot b = -13$ suy ra $a(a + 2b) = -16$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $a = (-2; 3)$, $b = (4; 1)$ và $c = ka + mb$ với $k, m \in \mathbb{R}$.

Biết rằng vector c vuông góc với vector $(a + b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2k = 2m$ B. $3k = 2m$ C. $2k + 3m = 0$ D. $3k + 2m = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} c = ka + mb = (-2k + 4m; 3k + m) \\ a + b = (2; 4) \end{cases}$.

Để $c \perp (a + b) \Leftrightarrow c(a + b) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0$.

Câu 20. Trên trục $(O; i)$ cho 4 điểm A, B, C, D có tọa độ lần lượt là a, b, c, d . Gọi E, F, G, H (có tọa độ lần lượt là e, f, g, h) theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Xét các mệnh đề:

I. $e + f + g + h = a + b + c + d$

II. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$

III. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} = 0$

Trong các mệnh đề trên mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ I B. II và III C. I, II, III D. Chỉ III

Lời giải

+ Áp dụng công thức tọa độ trung điểm $\Rightarrow I$ đúng.

+ Lấy E làm gốc trục thì $x_E = e = 0 \Rightarrow g = f + h \Rightarrow$ II đúng.

$$\frac{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE}}{2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$$

+ chỉ bằng 0 khi B là trung điểm của AB nên III sai.

Đáp án B

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy , cho $a = (2; -1)$ và $b = (-3; 4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Tích vô hướng của hai vector đã cho là -10 . B. Độ lớn của vector a là $\sqrt{5}$.

C. Độ lớn của vector b là 5 .

D. Góc giữa hai vector là 90° .

Lời giải

Chọn D

Ta có $|a| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ nên B đúng.

$|b| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ nên C đúng.

$a \cdot b = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10 \neq 0$ nên A đúng, D sai.

Câu 22. Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(5; -1)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. 7 .

B. 5 .

C. -7 .

D. -5 .

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = -5$.

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(1; -1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -4)$.

B. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

C. Tam giác ABC vuông cân tại A .

D. Tam giác ABC vuông cân tại B .

Lời giải

Chọn C

Phương án A: do $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -4)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ không vuông góc $\overrightarrow{BC}$ nên loại B.

Phương án C: Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -4)$, suy ra $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
Nên Tam giác ABC vuông cân tại A . Do đó chọn C.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; -1)$, $B(2; 10)$, $C(-4; 2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 11)$, $\overrightarrow{AC} = (-7; 3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(2; 10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$

- A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. B. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. C. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. D. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3; 1)$, $\overrightarrow{OB} = (2; 10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Câu 26. Trên trục (Δ) cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ D. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

Lời giải

Chọn gốc tọa độ $O \equiv A \Rightarrow x_A = 0, x_B = \overrightarrow{AB}, x_C = \overrightarrow{AC}, x_D = \overrightarrow{AD}$

Từ đáp án A: $\overrightarrow{VT} = x_B(x_D - x_C) + x_C(x_B - x_D) + x_D(x_C - x_B) = 0$

Đáp án A

Câu 27. Trên trục $(O; i)$ cho ba điểm A, B, C có tọa độ lần lượt là $-5; 2; 4$. Khi đó tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ là:

- A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$

Lời giải

Đáp án B

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(-5 - x_M) + 3(4 - x_M) + 4(2 - x_M) = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{10}{9}$$

Câu 28. Trên trục $x'Ox$ cho tọa độ các điểm B, C lần lượt là $m - 2$ và $m^2 + 3m + 2$. Tìm m để đoạn thẳng BC có độ dài nhỏ nhất.

- A. $m = 2$ B. $m = 1$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

Lời giải

Đáp án C

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = |m^2 + 2m + 4| = (m + 1)^2 + 3 \geq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

. BC nhỏ nhất khi $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Câu 29. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm A, B, C , D. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AC, DB, AD, BC . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IJ}$ B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{KI}$
C. Trung điểm các đoạn IJ và KL trùng nhau D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IK}$

Lời giải

Đáp án D

Ta có:

$$x_D - x_A + x_B - x_C = x_B + x_D - (x_A + x_C) = 2x_J - 2x_I = 2(x_J - x_I)$$

Là tọa độ của $\overline{IJ}$ nên A đúng.

Tương tự:

$(x_C - x_A) + (x_B - x_D) = 2(x_L - x_K)$ là tọa độ của $\overline{KL} \Rightarrow$ B đúng.

Gọi E, F là trung điểm của IJ và KL

$$x_E = \frac{1}{2}(x_I + x_J) = \frac{1}{4}(x_A + x_C) + \frac{1}{4}(x_D + x_B)$$

$$x_F = \frac{1}{2}(x_K + x_L) = \frac{1}{4}(x_A + x_D) + \frac{1}{4}(x_C + x_B) \Rightarrow x_E = x_F \Rightarrow$$
 C đúng.

Vậy đáp án D sai.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $a = (-3; 2)$ và $b = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vector c biết $c \cdot a = 9$ và $c \cdot b = -20$

- A. $c = (-1; -3)$ B. $c = (-1; 3)$ C. $c = (1; -3)$ D. $c = (1; 3)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $c = (x; y)$

Ta có
$$\begin{cases} c \cdot a = 9 \\ c \cdot b = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow c = (-1; 3)$$

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $a = (1; 2)$, $b = (4; 3)$ và $c = (2; 3)$.

Tính $P = a \cdot (b + c)$.

- A. $P = 0$ B. $P = 18$ C. $P = 20$ D. $P = 28$

Lời giải

Chọn B

Ta có $b + c = (6; 6)$. Suy ra $P = a \cdot (b + c) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $a = (-2; -1)$ và $b = (4; -3)$. Tính cosin của góc giữa hai vector a và b

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục

tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

- A. $C(0;6)$. B. $C(5;0)$. C. $C(3;1)$. D. $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C \in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; c-2) \end{cases}$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + (-1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 34. Tìm x để hai vector $a = (x; 2)$ và $b = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau.

- A. 3. B. 0. C. -3. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Vector $a = (x; 2)$ và $b = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

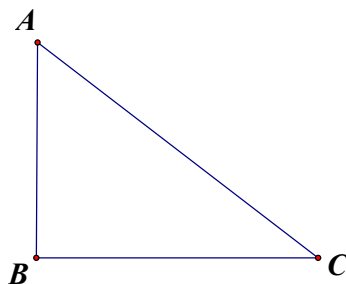
Vậy $x = 3$.

Câu 35. Cho tam giác ABC có $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .

- A. $(0; 3)$. B. $(0; -3)$. C. $(3; 0)$. D. $(-3; 0)$.

Lời giải

Chọn A



a có $\overrightarrow{AB} = (1; 1); \overrightarrow{AC} = (6; -4); \overrightarrow{BC} = (5; -5)$.

T

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0; 3)$.

Câu 36. Trên trục $x'Ox$ cho 4 điểm A, B, C , D. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$
 B. $\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} = 0$
 C. $\overline{AB}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{CD}^2 \cdot \overline{DB} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} = 0$
 D. $\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{AB} = 0$

Lời giải

Đáp án A

Chọn D là gốc tọa độ và a, b, c lần lượt là tọa độ của A, B, C .

Ta có:

$$\begin{aligned} \overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ &= a^2(c-b) + b^2(c-a) + c^2(b-a) + (c-b)(a-c)(b-a) \\ &= a^2c - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b - c^2a + c^2b - c^2a + abc - c^2b - b^2a + b^2c - a^2c + c^2a + a^2b - abc = 0 \end{aligned}$$

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai vectơ $u = (1; 2)$ và $v = (4m; 2m - 2)$. Tìm m để vectơ u vuông góc với v .

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn A

Hai vectơ $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0 \Leftrightarrow 4m + 2 \cdot (2m - 2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 38. Xác định tọa độ của vectơ $c = a + 3b$ biết $a = (2; -1), b = (3; 4)$

- A. $c = (11; 11)$ B. $c = (11; -13)$ C. $c = (11; 13)$ D. $c = (7; 13)$

Lời giải

$$c = a + 3b = (2; -1) + (9; 12) = (11; 11)$$

Đáp án A

Câu 39. Cho $a = (2; 1), b = (3; 4), c = (-7; 2)$. Tìm vectơ x sao cho $x - 2a = b - 3c$.

- A. $x = (28; 2)$ B. $x = (13; 5)$ C. $x = (16; 4)$ D. $x = (28; 0)$

Lời giải

$$x - 2a = b - 3c \Leftrightarrow x = 2a + b - 3c = (28; 0)$$

Đáp án D

Câu 40. Xác định tọa độ vectơ $c = 5a - 2b$ biết $a = (3; -2), b = (1; 4)$

- A. $c = (2; -11)$ B. $c = (-2; 11)$ C. $c = (2; 11)$ D. $c = (11; 2)$

Lời giải

Đáp án D

$$c = 5(3; -2) - 2(1; 4) = (11; 2)$$

- Câu 41.** Cho $a = (3; -1), b = (0; 4), c = (5; 3)$. Tìm vector x sao cho $x - a + 2b - 3c = 0$.
- A. $(18; 0)$ B. $(-8; 18)$ C. $(8; 18)$ D. $(8; -18)$

Lời giải

Đáp án A

$$x - a + 2b - 3c = 0 \Leftrightarrow x = a - 2b + 3c = (18; 0)$$

- Câu 42.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $(O; i, j)$, cho hai vector $a = 2i - j$ và $b = (-4; 2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. a và b cùng hướng. B. a và b ngược hướng.
C. $a = (-1; 2)$ D. $a = (2; 1)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $a = 2i - j \Rightarrow a = (2; -1) \Rightarrow b = -2a$

$\Rightarrow a$ và b ngược hướng.

- Câu 43.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-1; 3)$ và $C(3; 1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

- A. $A(0; 0)$ hoặc $A(2; -4)$ B. $A(0; 0)$ hoặc $A(2; 4)$
C. $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; -4)$ D. $A(0; 0)$ hoặc $A(-2; 4)$

Lời giải

Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Gọi $A(x; y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}$$

Vậy $A(0; 0)$ hoặc $A(2; 4)$.

- Câu 44.** Cho véc tơ $a(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $b(3; y)$ tạo với véc tơ a một góc 45° ?
- A. $y = -9$ B. $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$ D. $y = -1$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}}$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

Góc giữa hai véc tơ a và b bằng 45° suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90 + 10y^2} = 6 - 4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y \geq 0 \\ 90 + 10y^2 = (6 - 4y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1$$

Câu 45. Cho hai vectơ a, b sao cho $|a| = \sqrt{2}, |b| = 2$ và hai vectơ $x = a + b, y = 2a - b$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ a và b .

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Vì hai vectơ $x = a + b, y = 2a - b$ vuông góc với nhau nên

$$(a + b) \cdot (2a - b) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - b^2 + a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 2|a|^2 - |b|^2 + |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(a, b) = 0 \Leftrightarrow \cos(a, b) = 0 \Leftrightarrow (a, b) = 90^\circ$$

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $a = (2; 1), b = (3; 4), c = (7; 2)$. Cho biết $c = ma + nb$ khi đó.

A. $m = \frac{22}{5}; n = \frac{3}{5}$.

B. $m = -\frac{22}{5}; n = -\frac{3}{5}$.

C. $m = \frac{1}{5}; n = -\frac{3}{5}$.

D. $m = \frac{22}{5}; n = -\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $ma + nb = (2m + 3n; m + 4n)$.

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3n = 7 \\ m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{22}{5} \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Có

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(4; 2), B(-2; 1), C(0; 3), M(-3; 7)$. Giả sử

$\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC} (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $x + y$ bằng

A. $\frac{12}{5}$.

B. 5 .

C. $-\frac{12}{5}$.

D. -5 .

Lời giải

Chọn A

$\vec{AM}(-7; 5), \vec{AB}(-6; -1), \vec{AC}(-4; 1)$

Giả sử $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC} (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\begin{cases} 6x + 4y = 7 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{10} \\ y = \frac{37}{10} \end{cases}$$

Hệ phương trình

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy ; cho các véc tơ $a = (2; -1)$; $b = (0; 4)$ và $c = (3; 3)$. Gọi m và n là hai số thực sao cho $c = ma - nb$. Tính giá trị biểu thức $P = m^2 + n^2$.

A. $P = \frac{225}{64}$

B. $P = \frac{100}{81}$

C. $P = \frac{97}{64}$

D. $P = \frac{193}{64}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $ma - nb = (2m; -m - 4n)$

$$\vec{c} = ma - nb \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ -m - 4n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

Khi đó

Vậy $P = m^2 + n^2 = \frac{225}{64}$

Câu 49. Cho $a = (2; 1)$, $b = (-3; 4)$, $c = (-4; 9)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $ma + nb = c$. Tính $m^2 + n^2$?

A. 5. B. 3. C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $ma + nb = c \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ m + 4n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy , cho $a = (2; 1)$; $b = (3; 4)$; $c = (7; 2)$. Tìm m, n để $c = ma + nb$.

A. $m = -\frac{22}{5}, n = -\frac{3}{5}$

B. $m = \frac{1}{5}, n = -\frac{3}{5}$

C. $m = \frac{22}{5}, n = -\frac{3}{5}$

D. $m = \frac{22}{5}, n = \frac{3}{5}$

Lời giải

$$\vec{c} = ma + nb \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3n = 7 \\ m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{22}{5} \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Ta có

Đáp án C

Câu 51. Cho các vector $a = (4; -2)$, $b = (-1; -1)$, $c = (2; 5)$. Phân tích vector a và c ta được:

A. $\vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}$

B. $\vec{b} = \frac{1}{8}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}$

C. $\vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} - 4\vec{c}$

D. $\vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}$

Lời giải

Đáp án A

Giả sử $b = ma + nc$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4m + 2n \\ -1 = -2m + 5n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{8} \\ n = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 52. Cho vector $a = (2; 1)$, $b = (3; 4)$, $c = (7; 2)$. Khi đó $c = ma + nb$. Tính tổng $m + n$ bằng:

A. 5

B. 3,8

C. - 5

D. - 3,8

Lời giải

Đáp án B

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2m + 3n \\ 2 = m + 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4,4 \\ n = -0 \end{cases} \Rightarrow m + n = 3,8$$

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 4 điểm $A(1; -2), B(0;3), C(-3;4), D(-1;8)$. Phân tích $\vec{CD}$ qua $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{CD} = 2\vec{AB} - 2\vec{AC}$ B. $\vec{CD} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ C. $\vec{CD} = 2\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$ D. $\vec{CD} = 2\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$

Lời giải

Đáp án B

$$\vec{CD} = (2;4), \vec{AB} = (-1;5), \vec{AC} = (-4;6), \vec{CD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 4y = 2 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{CD} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC biết $A(2; -3), B(4;7), C(1;5)$. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là

A. $(7;15)$ B. $\left(\frac{7}{3};5\right)$ C. $(7;9)$ D. $\left(\frac{7}{3};3\right)$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ nên } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{7}{3} \\ y_G = 3 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{7}{3};3\right)$$

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2; -3), B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

A. $(3;2)$ B. $(2;10)$ C. $(6;4)$ D. $(8;-21)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức: } I \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB: \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x_I = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \frac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(3;2)$$

Câu 56. Cho ΔABC có $A(4;9), B(3;7), C(x-1;y)$. Để $G(x;y+6)$ là trọng tâm ΔABC thì giá trị x và y là

- A. $x=3, y=1$ B. $x=-3, y=-1$ C. $x=-3, y=1$ D. $x=3, y=-1$

Lời giải

Chọn D

Ta có :
$$\begin{cases} 3x=4+3+x-1 \\ 3(y+6)=9+7+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Câu 57. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(2;-3); B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .

- A. $I(6;4)$ B. $I(2;10)$ C. $I(3;2)$ D. $I(8;-21)$

Lời giải

Ta có
$$I\left(\frac{2+4}{2}; \frac{-3+7}{2}\right) = (3;2)$$

Đáp án C

Câu 58. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ B. $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ C. $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ D. $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
$$G\left(\frac{2-1-3}{3}; \frac{1-2+2}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-1;2)$, $B(2;0)$, $C(-3;1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $G\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$ B. $G\left(\frac{2}{3}; -1\right)$ C. $G\left(-\frac{4}{3}; 1\right)$ D. $G\left(\frac{4}{3}; -1\right)$

Lời giải

Chọn A

Giả sử $G(x;y)$ khi đó:
$$\begin{cases} x = \frac{-1+2-3}{3} \\ y = \frac{2+0+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra:
$$G\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$$

Câu 60. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(-4;1); B(2;4); C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm $\triangle ABD$

- A. $D(8;11)$ B. $D(12;11)$ C. $D(8;-11)$ D. $D(-8;-11)$

Lời giải

Gọi $D(x; y)$. C là trọng tâm ΔABD khi đó:
$$\begin{cases} 2 = \frac{-4+2+x}{3} \\ -2 = \frac{1+4+y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-11 \end{cases} \Rightarrow D(8; -11)$$

Đáp án C

Câu 61. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ΔABC có $A(3;5)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác.

- A. $G(-3;4)$ B. $G(4;0)$ C. $G(2;3)$ D. $G(3;3)$

Lời giải

Đáp án D

$$G = \left(\frac{3+1+5}{3}; \frac{5+2+2}{3} \right) = (3;3)$$

Ta có

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(3;-5)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-2)$, $D(5;-10)$. Hỏi

$$G\left(\frac{1}{3}; -3\right)$$

là trọng tâm của tam giác nào dưới đây?

- A. ABC . B. BCD . C. ACD . D. ABD .

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $\overrightarrow{BC} = (2; -5)$, $\overrightarrow{BD} = (8; -13)$ nên chúng không cùng phương $\Rightarrow B, C, D$ là 3 đỉnh của một tam giác.

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C + x_D}{3} = \frac{-3-1+5}{3} = \frac{1}{3} \\ \frac{y_B + y_C + y_D}{3} = \frac{3-2-10}{3} = -3 \end{cases}$$

Mặt khác, ta lại có

Vậy $G\left(\frac{1}{3}; -3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $D(3;4)$, $E(6;1)$, $F(7;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA . Tính tổng tung độ ba đỉnh của tam giác ABC .

- A. $\frac{16}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. 8. D. 16.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} y_A + y_B = 2y_D = 2 \cdot 4 = 8 \\ y_A + y_C = 2y_F = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow 2(y_A + y_B + y_C) = 8 + 6 + 2 = 16 \\ y_B + y_C = 2y_E = 2 \cdot 1 = 2 \end{cases}$$

Ta có

$$\Rightarrow y_A + y_B + y_C = 8. \text{ Chọn C.}$$

Câu 64. Cho tam giác ABC . Biết trung điểm của các cạnh BC , CA , AB có tọa độ lần lượt là $M(1; -1)$, $N(3; 2)$, $P(0; -5)$. Khi đó tọa độ của điểm A là:

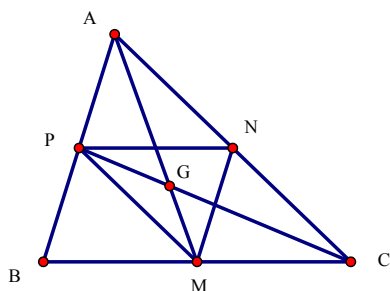
A. $(2; -2)$

B. $(5; 1)$

C. $(\sqrt{5}; 0)$

D. $(2; \sqrt{2})$

Lời giải



Chọn A

Có tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ có cùng trọng tâm G .

Có $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$, $\vec{GM} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, gọi $A(x, y)$.

$$\text{Có } \vec{AG} = 2\vec{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - x = -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} - y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ . Vậy } A(2; -2) \text{ .}$$

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle MNP$ có $M(1; -1)$, $N(5; -3)$ và P thuộc trục Oy . Trọng tâm G của tam giác nằm trên trục Ox . Tọa độ của điểm P là:

A. $P(0; 4)$

B. $P(2; 0)$

C. $P(2; 4)$

D. $P(0; 2)$

Lời giải

Đáp án C

Ta có P thuộc $Oy \Rightarrow (0; y)$, G thuộc trục $Ox \Rightarrow G(x; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5+0}{3} \\ 0 = \frac{-1-3+y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vì G là trọng tâm $\triangle MNP$

Câu 66. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $M(3; -4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox , Oy . Khẳng định nào đúng?

A. $\overline{OM_1} = -3$

B. $\overline{OM_2} = 4$

C. $\overline{OM_1} - \overline{OM_2} = (-3; 4)$

D. $\overline{OM_1} + \overline{OM_2} = (3; -4)$

Lời giải

Đáp án D

Ta có $M_1(3; 0), M_2(0; -4)$

Câu 67. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác MNP có $M(1; -1)$, $N(5; -3)$ và P là điểm thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác MNP nằm trên trục Ox . Tọa độ điểm P là

A. $(2; 4)$ B. $(0; 4)$ C. $(0; 2)$ D. $(2; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$$P \in Oy \Rightarrow P(0; y)$$

$$G \in Ox \Rightarrow G(x; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5+0}{3} \\ 0 = \frac{(-1)+(-3)+y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Điểm G là trọng tâm của tam giác MNP

Câu 68. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$. Tìm tọa độ điểm M để tứ giác $OBMA$ là một hình bình hành.

A. $M(-3; -3)$ B. $M(3; -3)$ C. $M(3; 3)$ D. $M(-3; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{OB}(2; 4)$, $\overrightarrow{AM}(x-1; y+1)$

Tứ giác $OBMA$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$
 Vậy $M(3; 3)$

Câu 69. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2; 5)$, $B(1; 1)$, $C(3; 3)$, một điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Tọa độ của E là

A. $(-3; 3)$ B. $(-3; -3)$ C. $(3; -3)$ D. $(-2; -3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}(-1; -4)$, $\overrightarrow{AC}(1; -2)$. Gọi $E(x; y)$.

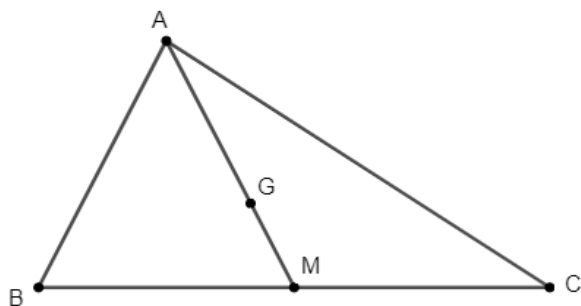
$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=3(-1)-2.1 \\ y-5=3(-4)-2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow E(-3; -3)$$

Câu 70. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, biết $M(1; -1)$ là trung điểm của cạnh BC . Tọa độ đỉnh A là

A. $(2; 0)$ B. $(-2; 0)$ C. $(0; -2)$ D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $A(x_A; y_A)$. Ta tính được $\overrightarrow{AM} = (1 - x_A; -1 - y_A)$, $\overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{3}; -1\right)$.
 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_A = 1 \\ -1 - y_A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases}$. Vậy $A(0; 2)$.
 Ta có:

Câu 71. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$. Điểm C thuộc tia Ox sao cho tam giác ABC vuông tại C có tọa độ là:

- A. $C(3; 0)$ B. $C(-3; 0)$ C. $C(-1; 0)$ D. $C(2; 0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $C \in Ox \Rightarrow C(x; 0)$. Khi đó: $\overrightarrow{AC} = (x - 2; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (x + 2; -1)$.
 Tam giác ABC vuông tại $C \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
 Vậy $C(-1; 0)$ hoặc $C(1; 0)$.

Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(3; 3)$, $B(-1; -9)$, $C(5; -1)$. Gọi I là trung điểm của AB .

Tìm tọa độ M sao cho $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$.

- A. $(5; 4)$ B. $(1; 2)$ C. $(-6; -1)$ D. $(2; 1)$

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M(x; y)$. Ta có $I(1; -3)$, $\overrightarrow{CI} = (-4; -2)$, $\overrightarrow{AM} = (x - 3; y - 3)$.
 $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$. Vậy $M(5; 4)$.

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có

$A(-3; 3), B(1; 4), C(2; -5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

- A. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ C. $M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ D. $M\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}\right)$

Lời giải

Đáp án C

$$\text{Ta có } \overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3 - x_M) - (2 - 1) = 4(x_M - 2) \\ 2(3 - y_M) - (5 - 4) = 4(y_M + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{6} \\ y_M = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$$

Câu 74. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(2;1), B(1;-3)$. Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo hình bình hành $OABC$.

- A. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ B. $I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ C. $I(2;6)$ D. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Đáp án D

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{I} \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right)$$

I là trung điểm của

Câu 75. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(1;3), B(4;0)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 0$

A. $M(1;18)$ B. $M(-1;18)$ C. $M(-18;1)$ D. $M(1;-18)$

Lời giải

Đáp án D

Ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x_M) + (4 - x_M) - 3(2 - x_M) = 0 \\ 3 - y_M + (0 - y_M) - 3(-5 - y_M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -18 \end{cases}$$

Câu 76. Trong hệ tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$. Tìm điểm E thuộc mặt phẳng tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$?

- A. $E(3;-3)$ B. $E(-3;3)$ C. $E(-3;-3)$ D. $E(-2;-3)$

Lời giải

$$\text{Gọi } E(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (x-2; y-5), \overrightarrow{AB} = (-1;-4), \overrightarrow{AC} = (1;-2)$$

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -5 \\ y-5 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow E(-3;-3)$$

Đáp án C

Câu 77. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm M có tung độ dương trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$.

- A. $M(2;2)$ B. $M(3;2)$ C. $M(-3;2)$ D. $M(3;3)$

Lời giải

$$\text{Gọi } M(x;y). \text{ Ta có: } S_{ABC} = 3S_{ABM} \Leftrightarrow BC = 3BM \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \pm \overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{BM} = (x-2; y-1); \overrightarrow{BC} = (-3;3)$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

- TH1: (loại)

$$\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M(3;2)$$

- TH2: (nhận)

Đáp án B

Câu 78. Trong hệ tọa độ Oxy , cho 3 điểm $A(-1; -1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ giao điểm I của AD và BG với D thuộc BC và $2\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{DC}$, G là trọng tâm $\triangle ABC$

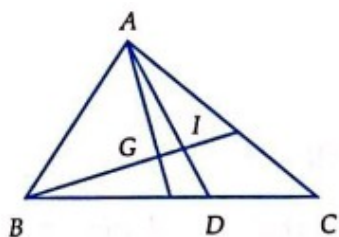
A. $I\left(\frac{5}{9}; 1\right)$

B. $I\left(\frac{1}{9}; 1\right)$

C. $I\left(\frac{35}{9}; 2\right)$

D. $I\left(\frac{35}{9}; 1\right)$

Lời giải



$$\overrightarrow{AB} = (1; 2), \overrightarrow{AC} = (4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$$

Ta có không cùng phương.

$$2\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_D = 5(3 - x_D) \\ 2(y_D - 1) = 5(-y_D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{15}{7} \\ y_D = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{15}{7}; \frac{2}{7}\right)$$

Ta có

$$G\left(\frac{2}{3}; 0\right) \quad I(x; y)$$

Trọng tâm. Gọi $I(x; y)$ là giao điểm của AD và BG

$$\overrightarrow{AI} = (x+1; y+1), \overrightarrow{AD} = \left(\frac{22}{7}; \frac{9}{7}\right) \Rightarrow \frac{7(x+1)}{22} = \frac{7(y+1)}{9} \Leftrightarrow 9x - 22y - 13 = 0$$

Ta có cùng phương

$$\overrightarrow{BI} = (x; y-1), \overrightarrow{BG} = \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$$

Ta lại có cùng phương $\Rightarrow$ tồn tại số $k \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BG} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow I\left(\frac{35}{9}; 1\right)$$

Đáp án D

Câu 79. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-1; 2)$, $B(2; 0)$, $C(-3; 1)$. Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC là

A. $I\left(\frac{11}{14}; \frac{13}{14}\right)$

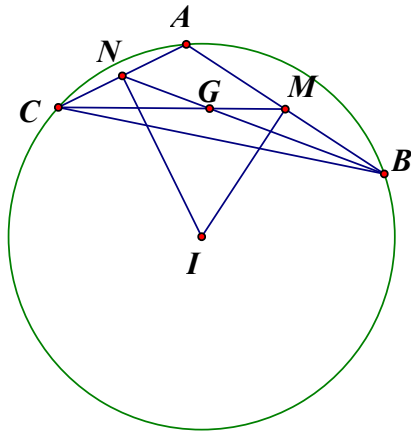
B. $I\left(\frac{11}{14}; -\frac{13}{14}\right)$

C. $I\left(-\frac{11}{14}; \frac{13}{14}\right)$

D. $I\left(-\frac{11}{14}; -\frac{13}{14}\right)$

Lời giải

Chọn D



Giả sử $I(a; b)$ khi đó:
$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} (*)$$

$M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $N\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm AB , AC .

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{IM} = \left(\frac{1}{2} - a; 1 - b\right)$, $\overrightarrow{IN} = \left(-2 - a; \frac{3}{2} - b\right)$.

Do đó:
$$\begin{cases} 3\left(\frac{1}{2} - a\right) - 2(1 - b) = 0 \\ -2(-2 - a) - 1\left(\frac{3}{2} - b\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{14} \\ b = -\frac{13}{14} \end{cases}$$

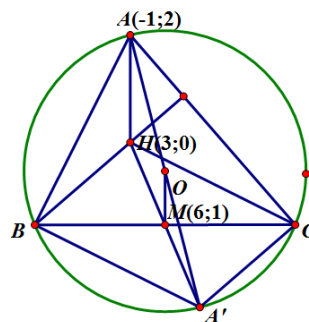
Suy ra: $I\left(-\frac{11}{14}; -\frac{13}{14}\right)$.

Câu 80. Tam giác ABC có đỉnh $A(-1; 2)$, trực tâm $H(3; 0)$, trung điểm của BC là $M(6; 1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A. 5. B. $\sqrt{5}$ C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Kẻ đường kính AA' của đường tròn khi đó ta có $\angle ABA' = \angle ACA' = 90^\circ$ hay $A'B \perp AC$ và $A'C \perp AB$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $BH \perp AC$ và $CH \perp AB \Rightarrow BH \parallel A'C$ và $CH \parallel A'B$, do đó $A'BHC$ là hình bình hành. Mà điểm M là trung điểm của đường chéo BC nên nó cũng là trung

điểm của $A'H$. Từ đó suy ra OM là đường trung bình của tam giác AHA' nên:

$$\vec{AH} = 2\vec{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2(6 - x_O) \\ -2 = 2(1 - y_O) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_O = 4 \\ y_O = 2 \end{cases} \Leftrightarrow O(4; 2).$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có độ dài bằng $OA = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (2 - 2)^2} = 5$.