

Câu 1.

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$
- b) Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số
- c) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 2.

- a) Giải phương trình: $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$
- b) Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$.

Câu 3.

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$
- b) Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác

$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} \geq a+b+c$$

Chứng minh :

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . M là giao điểm của CE và DF .

- a) Chứng minh: Tứ giác $EFGH$ là hình vuông
- b) Chứng minh $DF \perp CE$ và ΔMAD cân
- c) Tính diện tích ΔMDC theo a .

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$(x - y)^2 + 4(x - y) - 5 = (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 - 9$$

$$a) = (x - y - 2)^2 - 3^2 = (x - y + 5)(x - y - 1)$$

$$b) \text{ Ta có: } n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1) + (n + 1) \\ = (n + 1)(n^2 - n + 2)$$

$$\text{Do } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } \begin{cases} n + 1 > 1 \\ n^2 - n + 2 > 1 \end{cases}. \text{ Vậy } n^3 + n + 2 \text{ là hợp số.}$$

$$c) \text{ Gọi hai số lần lượt là } a^2 \text{ và } (a + 1)^2$$

Theo bài ra ta có:

$$a^2 + (a + 1)^2 + a^2 \cdot (a + 1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$$

$$= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a + 1) + 1$$

$$= (a^2 + a + 1)^2 \text{ là một số chính phương lẻ vì } a^2 + a = a(a + 1) \text{ là số chẵn nên } a^2 + a + 1 \text{ là số lẻ}$$

Câu 2.

a) Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{x - 1}{2012} - 1 + \frac{x - 2012}{2011} - 1 + \frac{x - 3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x - 2012}{1} - 1 + 2012 = 2012$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 2013}{2012} + \frac{x - 2013}{2011} + \frac{x - 2013}{2010} + \dots + \frac{x - 2013}{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2013$$

$$b) a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^2(a - 1) + b^2(b - 1) + c^2(c - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 \Rightarrow a, b, c \text{ nhận hai giá trị là 0 hoặc 1}$$

$$\Rightarrow b^{2012} = b^2; c^{2013} = c^2 \Rightarrow S = a^2 + b^{2012} + c^{2013} = 1$$

Câu 3.

a) Ta có: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 - 8x - 2y + 18$

$$A = 2[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$$

$$A = 2(x+y-2)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$$

Vậy $Min A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

b) Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên: $a + b - c > 0; -a + b + c > 0; a - b + c > 0$

Đặt $x = -a + b + c > 0; y = a - b + c > 0; z = a + b - c > 0$

Ta có: $x + y + z = a + b + c; a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$$

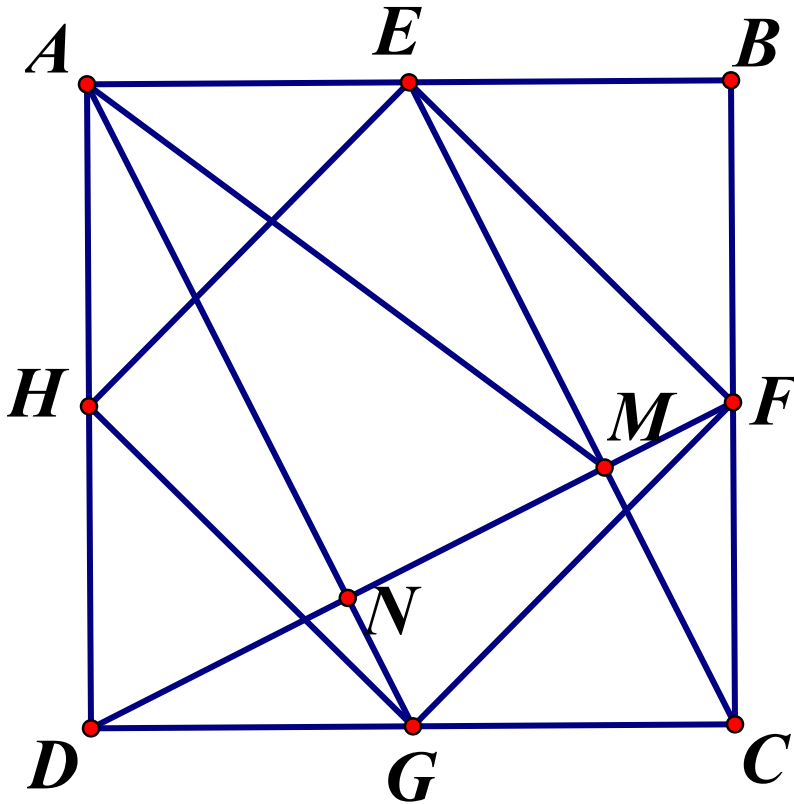
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + 3x + 3y + 3z \right] = \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{xy}{z} + 2 \cdot \frac{yz}{x} + 2 \cdot \frac{xz}{y} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{z}{2} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} \cdot [3(x+y+z) + x+y+z] = x+y+z$$

Mà $x + y + z = a + b + c$ nên suy ra điều phải chứng minh

Câu 4.



a) Chứng minh $EFGH$ là hình thoi

Chứng minh có 1 góc vuông nên $EFGH$ là hình vuông

b) $\triangle BEC = \triangle CFD \Rightarrow \angle ECB = \angle FDC$ mà $\triangle CDF$ vuông tại C nên:

$\Rightarrow \angle EDF + \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow \angle BFC + \angle ECB = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF$ vuông tại M hay $CE \perp DF$

Gọi N là giao điểm của AG và DF . Chứng minh tương tự: $AG \perp DF$

$\Rightarrow GN \parallel CM$ mà G là trung điểm của DC nên N là trung điểm DM.

Trong $\triangle MAD$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow \triangle MAD$ cân tại A

c) $\triangle CMD \sim \triangle FCD (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$

Do đó: $\frac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \cdot S_{FCD}$

Mà $S_{FCD} = \frac{1}{2} CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2$

$$\text{Vậy } S_{CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2$$

Trong $\triangle DCF$ theo định lý Pytago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC^2 \right) = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} CD^2$$

$$S_{MCD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4} CD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{5} a^2$$

Do đó: