ĐỀ 80

HSG TOÁN 9 SƠN LA 2023-2024

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức

A = $\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$, (x ¿$0; x\neq 1$)

b) Tính giá trị biểu thứcB = $\frac{2x^4-3x^3-15x^2-2x+3}{3x^3-10x^2-2x+2}$, với x thỏa mãn $\frac{x+1}{x^2+3x+8}=\frac{1}{7}$

Câu 2. (4,0 điểm) Cho phương trình: $x^2-(3x-2)x+2m^2-m-3=0(1)$, (với x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1 = 3x_2$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{4}{2x+y+1}+\frac{3}{3x+y-2}=4\\ \frac{5x+2y+3}{(2x+y+1).(3x+y+2)}=\frac{5}{4}\end{cases}$

b) Giải phương trình: $(\sqrt{9-2x}+3)(\sqrt{2x+9}-3)=4x$

Câu 4. (6,0 điểm) Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B thuộc đường tròn (O)) PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC , E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng

a) PF.PC = PI.PO.

b) E là trung điểm của đoạn thẳng AH .

c) Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d .

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2x^2y+3xy+y=x^2+2xy^2+3x+1$$

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x > 0, $5x^2=yz$. $x+y+x=xyz$.

Chứng minh rằng: $x\geq\sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$

------------HẾT------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức

A = $\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$, (x ¿$0;x\neq 1$)

b) Tính giá trị biểu thức B = $\frac{2x^4-3x^3-15x^2-2x+3}{3x^3-10x^2-2x+2}$, với x thỏa mãn $\frac{x+1}{x^2+3x+8}$ = $\frac{1}{7}$

Lời giải

a) $\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}=\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}\ \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\ \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Mà $\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

Do đó: A = $\frac{2}{\sqrt{x}-1}:\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\frac{2}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$

Vậy A = $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, với điều kiện x ¿$0;x\neq 1$

b) Ta có $\frac{x+1}{x^2+3x+8}=\frac{1}{7}\Rightarrow x^2+3x+8=7x+7\Rightarrow x^2-4x+1=0$

Khi đó:$2x^4-3x^3-15x^2-2x+3=(x^2-4x+1)(2x^2+5x+3)+5x=5x$

Và ta có: $3x^3-10x^2-2x+2=(x^2-4x+1)(2x+2)+3x=3x$

Do đó: B = $\frac{2x^4-3x^3-15x^2-2x+3}{3x^3-10x^2-2x+2}$ ¿ $\frac{5x}{3x}$ ¿$\frac{5}{3}$

Câu 2. (4,0 điểm) Cho phương trình: $x^2-(3x-2)x+2m^2-m-3=0(1)$, (với x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1=3x_2$

Lời giải

Ta có: $\Delta=[-(3m-2)]^2-4(2m^2-m-3)$

$=(3m-2)^2-8m^2+4m+12=9m^2-12+4-8m^2+4m+12$

$=m^2-8m+16=(m-4)^2\geq 0,\forall m$

Do $\Delta\geq 0,\forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Từ câu a, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Áp dụng hệ thức Vi-ét $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -[-(3m-2)] = 3m-2 \\ P = x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} = 2m^2 - m - 3 \end{cases}$

Ta có hệ phương trình sau:

$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 + x_2 = 3m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9m-6}{4} \\ x_2 = \dfrac{3m-2}{4} \end{cases}$, thay vào (3), ta được:

$\dfrac{9m-6}{4} . \dfrac{3m-2}{4}$ ¿ $2m^2 - m - 3$

$\Leftrightarrow (9m-6)(3m-2) = 16(2m^2 - m - 3)$

$\Leftrightarrow 27m^2 - 36m + 12 =$ ¿ $32m^2 - 16m - 48$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 20m - 60 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow m = -2, m = 6$

Vậy $m = -2, m = 6$ là giá trị cần tìm

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+y+1} + \dfrac{3}{3x+y-2} = 4 \\ \dfrac{5x+2y+3}{(2x+y+1).(3x+y+2)} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

b) Giải phương trình: $(\sqrt{9-2x}+3)(\sqrt{2x+9}-3) = 4x$

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} a = 2x+y+1 \\ b = 3x+y+2 \end{cases}$ hệ trở thành $\begin{cases} \dfrac{4}{a} + \dfrac{3}{b} = 4 \\ \dfrac{a+b}{a.b} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{a} + \dfrac{3}{b} = 4 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} 2x+y+1 = 1 \\ 3x+y+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 11 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = -4 \\ y = 11 \end{cases}$

b)

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+9\ge 0 \\ 9-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-9}{2}\le x\le \dfrac{9}{2}$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$2x\left(\sqrt{9-2x}+3\right)=4x\left(\sqrt{2x+9}+3\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{9-2x}=2\sqrt{2x+9}+3(*) \end{array}\right.$

Đặt a = $\sqrt{9-2x}$, b = $\sqrt{9+2x}$ ta có a, b ≥ 0. Từ (*), ta có hệ phương trình

$\begin{cases} a=2b+3(1) \\ a^2+b^2=18(2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) suy ra $(2b+3)^2+b^2=18 \Leftrightarrow 5b^2+12b-9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3/5 \\ b=-3 \end{array}\right.$

Với $b=-3$ loại

Với $b=\dfrac{3}{5} \Rightarrow \sqrt{9+2x}=\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{9}{2} \\ x=\dfrac{-108}{20} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-108}{20}$

Thử lại, phương trình có tập nghiệm S = $\left\{\dfrac{-108}{20};0\right\}$

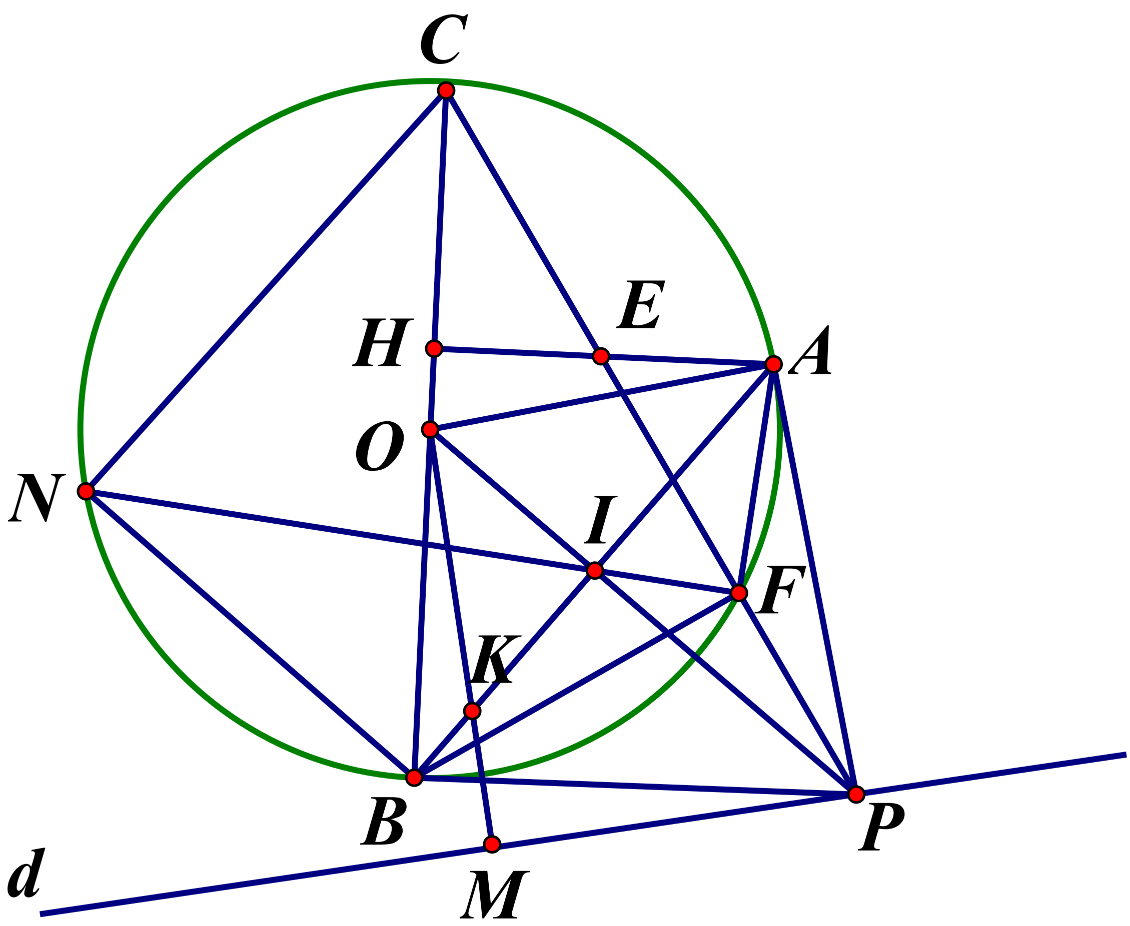
Câu 4. (6,0 điểm) Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B thuộc đường tròn (O)) PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC , E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng

a) PF.PC = PI.PO.

b) E là trung điểm của đoạn thẳng AH .

c) Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d.

Lời giải



a) Chứng minh PF.PC = PI.PO.

+) Xét $\triangle AOP$ vuông tại A có AI là đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác

$\Rightarrow PA^2 = PI.PO$ (1).

+) Xét hai tam giác $\triangle A$FP và △CAP có:

$\widehat{PAF} = \widehat{ACF}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung AF)

$\Rightarrow \triangle A$FP đồng dạng với △CAP.

$\Rightarrow \frac{PF}{PA}$ ¿ $\frac{PA}{PC}$ $\Leftrightarrow$ PF.PC = PA^2 (2).

Từ (1) và (2) ⇒ PF.PC = PI.PO

b) + Xét hai tam giác $\triangle A$HC và △PBO có:

$\widehat{AHC} = \widehat{OBP}$ ¿ 90^0

Mặt khác do PO//AC (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \widehat{POB} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị)

⇒ △ AHC đồng dạng với △PBO do đó: $\frac{AH}{PB}$ ¿ $\frac{CH}{OB}$ (1).

+) Xét hai tam giác △EHC và △PCB có:

$\widehat{PCB}$ chung

$\widehat{EHC}=\widehat{PBO}$ ¿ 90^0

⇒ △EHC đồng dạng với △CPB do đó: $\frac{CH}{CB}$ ¿ $\frac{EH}{PB}$ (2).

Do CB = 2OB, kết hợp (1) và (2) ta suy ra: AH = 2EH

hay E là trung điểm của AH.

c) Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ O lên đường thẳng d . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OM và AB .

Xét hai tam giác △OIK và △OMP có góc $\widehat{POM}$ chung, $\widehat{OIK}=\widehat{OMP}$ ¿ 90^0

⇒ △OIK đồng dạng với △OMP

⇒ $\frac{OK}{OP}$ ¿ $\frac{OI}{OM}$ ⇔ OK = $\frac{OP.OI}{OM}$

Mặt khác $OP.OI$ = OB^2 suy ra OK = $\frac{OB^2}{OM}$ cố định, K thuộc OM cố định suy ra điểm K cố định

Mà $\widehat{OIK}$ ¿ 90^0 với mọi vị trí của M

Vậy khi M di động trên d thì I di động trên đường tròn đường kính OK cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2x^2y+3xy+y=x^2+2xy^2+3x+1$$

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện x > 0,

$5x^2=yz.\ x+y+x=xyz$

Chứng minh rằng: $x\geq\sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$

Lời giải

a)

$2x^2y+3xy+y=x^2+2xy^2+3x+1$

$\Leftrightarrow (2y-1)x^2-x(2y^2-3y+3)+y-1=0$ (1)

Coi (1) là phương trình theo ẩn x

+) Nếu $2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$ (loại)

+) Nếu $2y-1\neq 0 \Leftrightarrow y\neq\frac{1}{2}$, Ta có (1) là phương trình bậc 2

$\Delta = \left[-(2y^2-3y+3)\right]^2-4(y-1)(2y-1)$

$¿(2y^2-3y+3)^2-4(2y^2-3y+1)$

$\Delta = (2y^2-3y+3)^2-4(2y^2-3y+3-2)$

$= (2y^2-3y+3)^2-4(2y^2-3y+3)+8$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow \Delta$ là số chính phương

Đặt a = $(2y^2-3y+3) \Rightarrow \Delta = a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

Δ là số chính phương, đặt $\Delta = k^2$ (k ∈ N), ta có $(a-2)^2+4 = k^2$

$\Leftrightarrow k^2-(a-2)^2=4 \Leftrightarrow (k+a-2)(k-a+2)=4$

Vì $(k+a-2)(k-a+2)=2k$ là số chẵn, và $(k+a-2)(k-a+2)=4$ là số chẵn nên $(k+a-2)\, và\, (k-a+2)$ cũng là số chẵn

Do đó $\begin{cases}(k+a-2)=2\\(k-a+2)=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}(k+a-2)=-2\\(k-a+2)=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=2\\a=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}k=-2\\a=-2\end{cases}$

- Với $y=\frac{1}{2}$ (loại)
- Với y = 1, ta thay vào phương trình (1) được phương trình $x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là (x;y) ∈ $\{(0;1),(2;1)\}$

b) Ta có $5x^2=yz \Rightarrow 5x^3=xyz \Rightarrow x^3=\frac{xyz}{5}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi $5x^2=yz\leq\frac{(y+z)^2}{4}\,¿\,\frac{(5x^3-x)^2}{4} \Rightarrow 5x^2\leq\frac{(5x^3-x)^2}{4}$

$20x^2 \leq (5x^3-x)^2 \Leftrightarrow x^2(5x^3-x)^2 \geq 20x^2 \Leftrightarrow (5x^2-1)^2-(2\sqrt{5})^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (5x^2-1-2\sqrt{5})(5x^2-1+2\sqrt{5})\geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x^2-1-2\sqrt{5}\geq 0\\ 5x^2-1+2\sqrt{5}\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}5x^2-1-2\sqrt{5}\leq 0\\ 5x^2-1+2\sqrt{5}\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x^2\geq 1+2\sqrt{5}\\ 5x^2\geq 1-2\sqrt{5}\end{cases}\\ \begin{cases}5x^2\leq 1+2\sqrt{5}\\ 5x^2\leq 1-2\sqrt{5}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 5x^2\geq 1+2\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1+2\sqrt{5}}{5}$$

Vậy x $\geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$

------------HẾT------------