| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>TỈNH KHÁNH HÒA | THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH<br>NĂM HỌC: 2016-2017<br>MÔN: TOÁN 8<br>Ngày thi: 11-4-2017 |
|---|---|

**Bài 1. (4 điểm)**

a) Tìm 3 số dương $a,b,c$ thỏa mãn : $\frac{a^2+7}{4}=\frac{b^2+6}{5}=\frac{c^2+3}{6}$ và $a^2+2c^2=3c^2+19$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

**Bài 2. (3 điểm)**

Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi đến lớp thứ $n(n=2;3;4....)$ nhận được 4n áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo

Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo ?

**Bài 3. (3 điểm)**

Tìm tất cả các số nguyên dương $n$ để $\left(1+n^{2017}+n^{2018}\right)$ là số nguyên tố

**Bài 4. (3 điểm)**

Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng $a_1$ trận và thua $b_1$ trận, đội thứ 2 thắng $a_2$ trận và thua $b_2$ trận, …., đội thứ 9 thắng $a_9$ trận và thua $b_9$ trận.

Chứng minh rằng $a_1^2+a_2^2+a_3^2+.....+a_9^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2+.....+b_9^2$

**Bài 5. (5 điểm)**

Cho đoạn thẳng $AB$ dài $a(cm)$. Lấy điểm C bất kỳ thuộc đoạn thẳng AB (C khác A và B). Vẽ tia $Cx$ vuông góc với AB. Trên tia $Cx$ lấy hai điểm $D$ và E sao cho $CD=CA$ và $CE=CB.$

a) Chứng minh AE vuôn góc với BD

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $AE$ và BD. Tìm vị trí của điểm C trên đoạn thẳng AB để đa giác $CMEDN$ có diện tích lớn nhất

c) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khoảng cách từ I đến $AB$ không phụ thuộc vào vị trí điểm C

**Bài 6. (2 điểm)**

Hình vuông có $3\times 3$ ô (như hình bên ), chứa 9 số mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau được gọi là hình vuông kỳ diệu . Chứng minh rằng số ở tâm $(\times)$ của một hình vuông kỳ diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột , hoặc cùng đường chéo.

| | | |
|---|---|---|
| | x | |
| | | |

## ĐÁP ÁN

**Bài 1.**

a) Từ giả thiết $a^2 + 2c^2 = 3b^2 + 19 \Rightarrow a^2 + 2c^2 - 3b^2 = 19$

Ta có: $\dfrac{a^2+7}{4} = \dfrac{b^2+6}{5} = \dfrac{c^2+3}{6} = \dfrac{3b^2+18}{15} = \dfrac{2c^2+6}{12} = \dfrac{a^2+7+2c^2+6-3b^2-18}{4+12-15} = \dfrac{14}{1} = 14$

$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$

$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$

Suy ra : $c^2 = 81 \Rightarrow c = 9$

b)

$P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 2x) + x^2$

$= (x^2+1)^2 + 2x(x^2+1) + x^2 = (x^2+x+1)^2$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 2x.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{3}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4} \Rightarrow P \geq \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$

Dấu $" = "$ xảy ra $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

**Bài 2.**

Gọi số lớp của trường A được nhận áo là $x$

Vì lớp thứ $x$ nhận áo cuối cùng và số áo được phát hết nên số áo lớp thứ $x$ nhận được là $4x$.

Lớp thứ $x-1$ nhận số áo là $4(x-1) + \dfrac{1}{8}.4x = 4,5x - 4$

Vì số áo các lớp nhận được như nhau nên ta có phương trình:

$4,5x - 4 = 4x \Leftrightarrow x = 8$

Suy ra số áo mỗi lớp nhận được: $4.8 = 32$ (áo)

Suy ra số áo trường A nhận được: $32.8 = 256$ (áo)

**Bài 3.** Đặt: $A = 1 + n^{2017} + n^{2018}$

Với $n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố

Với $n > 1,$ ta có:

$$1 + n^{2017} + n^{2018} = \left(n^{2018} - n^2\right) + \left(n^{2017} - n\right) + \left(n^2 + n + 1\right)$$
$$= n^2\left(n^{2016} - 1\right) + n\left(n^{2016} - 1\right) + \left(n^2 + n + 1\right) = \left(n^{2016} - 1\right)\left(n^2 + n\right) + \left(n^2 + n + 1\right)$$

Ta lại có: $n^{2016} - 1 = \left(n^3\right)^{672} - 1 = \left(n^3 - 1\right)\left[\left(n^3\right)^{671} + \left(n^3\right)^{670} + .... + n^3 + 1\right] \vdots \left(n^3 - 1\right)$

$\Rightarrow \left(n^{2016} - 1\right) \vdots \left(n^2 + n + 1\right)$. Suy ra $A \vdots \left(n^2 + n + 1\right),$ mà $1 < n^2 + n + 1 < A$ nên A là hợp số.

Vậy $n = 1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn điều kiện

**Bài 4.**

Mỗi đội bóng thi đấu với 8 đội bóng khác và hai đội bất kỳ chỉ gặp nhau 1 trận nên mỗi đôi sẽ thi đấu 8 trận $\Rightarrow a_i + b_i = 8$ (với $i = 1, 2, 3......8)$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

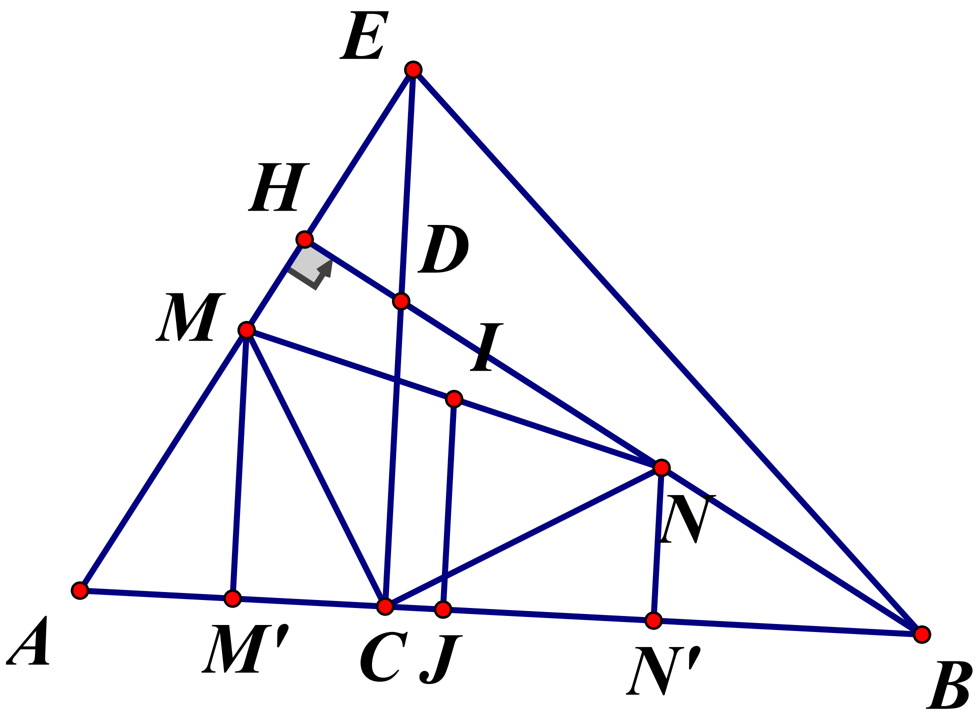
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + .... + a_9^2 = (8 - a_1)^2 + (8 - a_2)^2 + (8 - a_3)^2 + ..... + (8 - a_9)^2$$
$$\Leftrightarrow 16(a_1 + a_2 + a_3 + ....... + a_9) = 576(1)$$

Mặt khác, tổng số trận thắng của các đôi bằng tổng số trận đấu nên :

$$a_1 + a_2 + a_3 + .... + a_9 = \frac{9.8}{2} = 36(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

**Bài 5.**




a) Gọi H là giao điểm của $BD$ và $AE$

$\Delta ACE = \Delta DCB (c.g.c) \Rightarrow \hat{E} = \hat{B}$

Suy ra $\Delta DHE \sim \Delta DCB (g.g) \Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{CDB} = 90^0$

b) Ta có: $S_{CMEDN} = S_{CME} + S_{CDN} = \frac{1}{2} S_{ACE} + \frac{1}{2} S_{BCD} = \frac{1}{4}.AC.CE + \frac{1}{4}.CB.CD = \frac{1}{2} AC.CB$

Mặt khác, theo bđt AM-GM ta có: $AC.CB \le \frac{(AC+CB)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

Suy ra $S_{CMEDN} \ge \frac{a^2}{8}.$ Dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi $AC = CB$ hay C là trung điểm AB

c) Gọi $J, M', N'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $I, M, N$ lên $AB$

Ta có: $IJ$ là đường trung bình của hình thang $MNN'M'$ nên $IJ = \frac{MM' + NN'}{2} (1)$

Ta lại có MM' là đường trung bình của $\Delta ACE$ và NN' là đường trung bình $\Delta BCD$ nên

$MM' = \frac{CE}{2} = \frac{CB}{2}$ và $NN' = \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $IJ = \dfrac{\dfrac{AC}{2} + \dfrac{CB}{2}}{2} = \dfrac{AB}{4} = \dfrac{a}{4}$

Vậy khoảng cách của điểm $I$ đến đoạn $AB$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm C.

**Bài 6.**

Giả sử hình vuông kỳ diệu điền các số $a,b,c,d,e,f,g,h,i$ như hình vẽ

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

Đặt $S = a + b + c + d + e + f + g + h + i$

Suy ra $d + e + f = b + e + h = a + e + i = c + e + g = \dfrac{S}{3}$ (1)

Suy ra $(d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (c + e + g) = \dfrac{4S}{3}$

$\Rightarrow (d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (c + e + g) = \dfrac{4S}{3}$

$\Rightarrow S + 3e = \dfrac{4S}{3} \Rightarrow e = \dfrac{S}{9}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d + f = b + h = a + i = c + g = \dfrac{2S}{9} = 2e(dfcm)$