

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1$. Xét một điểm M thay đổi trên mặt phẳng (P) . Gọi khối nón (N) có đỉnh là điểm M và có đường tròn đáy là tập hợp các tiếp điểm về từ M đến mặt cầu (S) . Khi (N) có thể tích nhỏ nhất, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $x + ay + bz + c = 0$. Tính $a + b + c$

A. -2.

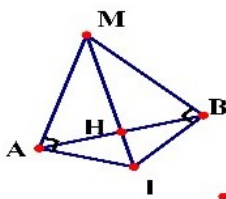
*B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

• Cắt bởi mặt phẳng đi qua tâm $I(0;1;2)$ và điểm M ta được thiết diện như sau:



Khi đó (N) có bán kính đáy là $R = HA = \frac{AB}{2}$ và đường cao $h = MH$

Để thấy khi M càng gần I thì (N) có $R; h$ càng nhỏ hay thể tích nhỏ nhất khi IM ngắn nhất, tức là M là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

• Có $t = -\frac{Ax_I + By_I + Cz_I + D}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0}{1^2 + 1^2 + 1^2} = -1$ và điểm M có tọa độ

$$\begin{cases} x_M = x_I + At = 0 - 1 = -1 \\ y_M = y_I + Bt = 1 - 1 = 0 \\ z_M = z_I + Ct = 2 - 1 = 1 \end{cases} \text{ hay } M(-1; 0; 1)$$

Mặt khác, có $IM = d(I, (P)) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \sqrt{3}$ và $IH \cdot IM = IA^2 = 1^2 \Leftrightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}IM$

Suy ra $IH = \frac{1}{3}IM$ và $H(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3})$

• Mặt phẳng đáy đi qua H và có VTPT $\vec{IM} = (-1; -1; -1) = -(1; 1; 1)$ nên có phương trình

$$1(x + \frac{1}{3}) + 1(y - \frac{2}{3}) + 1(z - \frac{5}{3}) = 0 \text{ hay } x + y + z - 2 = 0. \text{ Suy ra } a + b + c = 1 + 1 - 2 = 0$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$; $B(2;1;0)$; $C(2;0;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa BC và cách A một khoảng lớn nhất. Hỏi vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

A. $\vec{n} = (5; 2; -1)$

B. $\vec{n} = (5; 2; 1)$

C. $\vec{n} = (-5; 2; -1)$

*D. $\vec{n} = (5; -2; -1)$

Lời giải

Ta có: $\vec{BC} = (0; -1; 2)$ là một vector chỉ phương của BC

$$\Rightarrow \text{Phương trình tham số của } BC: \begin{cases} x=2 \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$$

$$\text{Lấy điểm } H \in BC \Rightarrow H(2; 1-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (1; -t; 2t-1)$$

$$H \text{ là hình chiếu của } A \text{ trên } BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 0 - t \cdot (-1) + (2t-1) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(1; -\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$$

Mà $d(A; (P)) \leq AH$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(P) \perp AH$

Khi đó một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $n = (5; -2; -1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-4; 1; 5)$, $B(6; -1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$. Xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc (P) . Bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất bằng

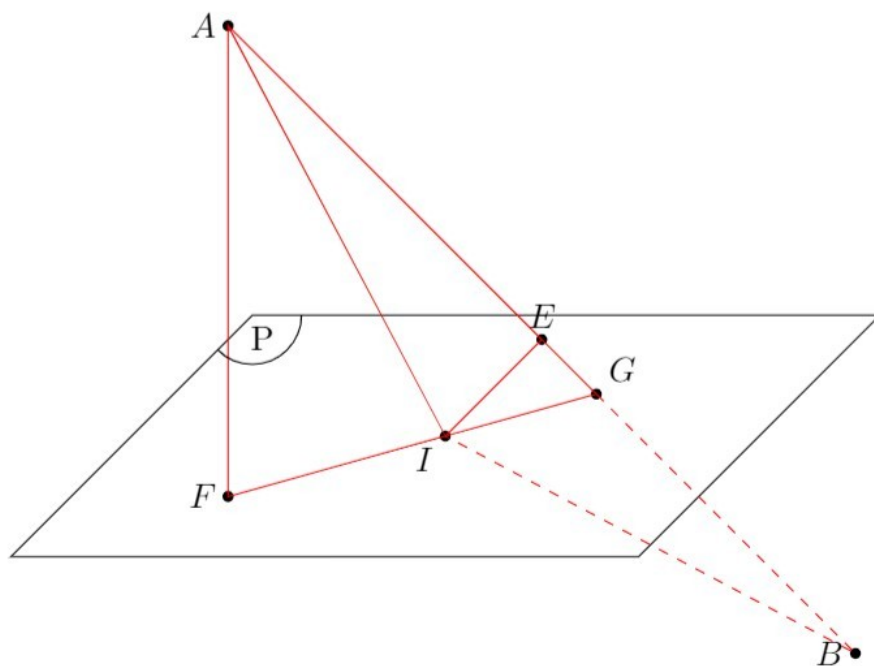
*A. $\sqrt{35}$.

B. $\sqrt{33}$.

C. 6.

D. 5.

Lời giải



Ta có $(P): x + y - z - 1 = 0$, $G = AB \cap (P)$

Thế điểm $A(-4; 1; 5)$, $B(6; -1; 1)$ vào phương trình mặt phẳng thì ta thấy

$$(x_A + y_A - z_A - 1)(x_B + y_B - z_B - 1) < 0 \Rightarrow A \text{ và } B \text{ nằm khác phía so với mặt phẳng } (P).$$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (10; -2; -4) \Rightarrow u = (-5; 1; 2)$ là VTCP của AB .

Gọi E là trung điểm của AB với $E(1; 0; 3)$ và F là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) .

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) cần tìm. Vì $I \in (P)$ nên suy ra điểm I phải thuộc giao tuyến giữa mặt phẳng

(P) và mặt phẳng trung trực của AB là (Q) với $n_{(Q)} = u = (-5; 1; 2)$

Suy ra mặt phẳng $(Q): -5x + y + 2z - 1 = 0$.

Vậy để bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất thì tâm I phải thuộc cả mặt phẳng (AEF)

$$(AB): \begin{cases} x = -4 - 5t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ta có: $G = AB \cap (P)$ nên

$$-4 - 5t + 1 + t - 5 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \Rightarrow G\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AG} = \left(\frac{15}{2}; -\frac{3}{2}; -3\right) \\ \overrightarrow{EG} = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; -1\right) \end{cases}$$

Suy ra

$$\Rightarrow \begin{cases} AG = \frac{3\sqrt{30}}{2} \\ EG = \frac{\sqrt{30}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AF = d(A; (P)) = 3\sqrt{3} \\ GF = \sqrt{GA^2 - AF^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{GE}{GF} = \frac{IE}{AF} \\ IE = \frac{GE \cdot AF}{GF} = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$IA = \sqrt{IE^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{35}$$

Vậy suy ra bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) là

Cách 2. (GVPT đề xuất)

Mặt phẳng trung trực đoạn AB có phương trình là $(Q): -5x + y + 2z - 1 = 0$.

Gọi I là tâm mặt cầu. Khi đó $I \in \Delta = (P) \cap (Q)$

$$\text{Tọa độ điểm } I \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} -5x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cho } x = t \Rightarrow z = 2t, y = t + 1 \Rightarrow I(t; t + 1; 2t)$$

$$\text{Khi đó } R^2 = IA^2 = (t + 4)^2 + t^2 + (2t - 5)^2 = 6(t - 1)^2 + 35 \geq 35$$

$$\text{Vậy } \min R = \sqrt{35}$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 2), B(-1; 1; 3), C(3; 2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Biết rằng điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho thứ $MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi $a + b + c$ bằng:

A. -1.

B. 1.

*C. 3.

D. 5.

Lời giải

• Gọi điểm I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Suy ra: $I(-2; 0; 4)$.

• Ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 - MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) + IA^2 + 2IB^2 - IC^2 \\ &= 2MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - IC^2 \end{aligned}$$

$$MA^2 + 2MB^2 - MC^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu vuông góc của } I \text{ lên } (P).$$

$$\text{Khi đó phương trình đường thẳng } MI \text{ đi qua } I \text{ và vuông góc với } (P) \text{ là: } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(-2 + t; 2t; 4 - 2t)$$

$$M \in (P) \Rightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(-1; 2; 2) \Rightarrow a + b + c = 3.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 4z = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;3;1)$ thuộc mặt phẳng (P) . Gọi Δ là đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u} = (a; b; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ . Giá trị của $a + 2b$ là:

- A. 4. B. 0. *C. -3. D. 7.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -4)$
 Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$
 Gọi $H(1+2t; -1-t; 3+t) \in d \Rightarrow \vec{AH} = (2t; -4-t; 2+t)$
 H là hình chiếu của A trên $d \Leftrightarrow \vec{AH} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 4t + 4 + t + 2 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$
 $\Rightarrow \vec{AH} = (-2; -3; 1) \Rightarrow [\vec{AH}, \vec{n}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (11; -7; 1)$
 Dễ thấy $d(\Delta; d) \leq AH = \sqrt{14}$
 Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta$ là đường thẳng đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d .
 Do đó đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (11; -7; 1)$.
 $\Rightarrow a = 11; b = -7$. Vậy $a + 2b = -3$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; -2; 4), B(-2; 6; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\angle AMB = 90^\circ$ và N là điểm di động thuộc d . Tìm giá trị nhỏ nhất của MN ?

- *A. 2 B. 8 C. $\sqrt{73}$ D. $5\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có: M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) nên suy ra $M(x; y; 0)$
 Mà $\angle AMB = 90^\circ$ nên suy ra $\vec{AM} \perp \vec{BM} \Rightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$
 Ta lại có: $\vec{AM} = (x-4; y+2; -4), \vec{BM} = (x+2; y-6; -4)$ như vậy phương trình trên tương đương với:
 $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \Rightarrow (x-4)(y+2) + (y+2)(y-6) + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$
 Suy ra tập hợp các điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn (C) có tâm $I(1; 2; 0)$ và bán kính $R = 3$
 với đường tròn (C) là giao tuyến giữa mặt cầu đường kính AB và mặt phẳng (Oxy)
 Gọi $N_0 = d \cap (Oxy) \Rightarrow N_0(5; -1; 0)$ mà ta có N là điểm di động thuộc d nên suy ra ta có:
 $MN \geq MN_0 \geq M_0N_0$ với $M_0 = IN_0 \cap (C)$
 $M_0N_0 = IN_0 - R = 5 - 3 = 2$ nên suy ra giá trị nhỏ nhất của MN bằng 2 với dấu bằng xảy ra khi

$$\overrightarrow{IM}_0 = \frac{3}{5} \overrightarrow{IN}_0 \Rightarrow M_0 \left(\frac{17}{5}; \frac{1}{5}; 0 \right)$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$; $B(1; 0; 5)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất:

- *A. $\left(\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; 0 \right)$ B. $\left(\frac{9}{4}; \frac{5}{4}; 0 \right)$ C. $\left(-\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; 0 \right)$ D. $\left(-\frac{9}{4}; \frac{5}{4}; 0 \right)$

Lời giải

Dễ thấy $A(3; -2; 3)$ và $B(1; 0; 5)$ nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy)

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(3; -2; -3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (-2; 2; 8) \Rightarrow u = (1; -1; -4)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng $A'B$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $A'B$ là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$$

Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 6\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M = A'B \cap (Oxy) \Leftrightarrow$ Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 - 4t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{4} \\ x = \frac{9}{4} \\ y = -\frac{5}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; 0\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. Điểm M là điểm trên đường thẳng d sao cho $(MA + 2MB + 3MC)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tung độ điểm M là

- A. 2. B. -2. C. -1. *D. 1.

Lời giải

Vì $M \in d$ nên $M(-2+t; -1+t; t)$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} MA + 2MB + 3MC &= \sqrt{(5-t)^2 + (-1+t)^2 + (-t)^2} + 2\sqrt{(2-t)^2 + (4-t)^2 + (-t)^2} \\ &\quad + 3\sqrt{(2-t)^2 + (1-t)^2 + (3-t)^2} \\ \Leftrightarrow MA + 2MB + 3MC &= \sqrt{3t^2 - 12t + 26} + 2\sqrt{3t^2 - 12t + 20} + 3\sqrt{3t^2 - 12t + 14} \\ \Leftrightarrow MA + 2MB + 3MC &= \sqrt{3(t-2)^2 + 14} + 2\sqrt{3(t-2)^2 + 8} + 3\sqrt{3(t-2)^2 + 2} \\ &\geq \sqrt{14} + 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t-2=0 \Leftrightarrow t=2$.

Khi đó: $M(0;1;2)$. Vậy, tung độ điểm M cần tìm bằng 1.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y + \sqrt{2})^2 + z^2 = 16$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng có phương trình $y - 2\sqrt{2} = 0$ sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

- A. 26. B. 32. C. 28. *D. 45.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; -\sqrt{2}; 0)$ và bán kính $R = 4$.

$A(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng có phương trình $y - 2\sqrt{2} = 0$ nên $b = 2\sqrt{2}$. Hay $A(a; 2\sqrt{2}; c)$.

Tập tất cả các tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A là một đường tròn (C) . Gọi BC là một đường kính của (C) . Khi đó $\angle BAC$ là góc có số đo lớn nhất trong tất cả các góc còn lại.

Như vậy điều kiện có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau là góc $90^\circ \leq \angle BAC < 180^\circ$.

Trong trường hợp $\angle BAC = 90^\circ$ thì $ABIC$ là hình vuông nên ta có $AI = 4\sqrt{2}$.

Như vậy, suy ra: $YCBT \Leftrightarrow IA \leq 4\sqrt{2}$. Hay $IA = \sqrt{a^2 + 18 + c^2} \leq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + c^2 \leq 14$.

Do a, c là các số nguyên nên xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a = 0 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$. Có 7 điểm.

Trường hợp 2: $a = \pm 1 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$. Có 14 điểm.

Trường hợp 3: $a = \pm 2 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$. Có 14 điểm.

Trường hợp 4: $a = \pm 3 \Rightarrow c \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$. Có 10 điểm.

Vậy có tổng $7 + 14 + 14 + 10 = 45$ điểm thỏa mãn bài toán.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . Hỏi điểm M luôn thuộc mặt phẳng nào có phương trình dưới đây?

- A. $3x + 4y + 2 = 0$. *B. $3x + 4y - 2 = 0$. C. $6x + 8y - 11 = 0$. D. $6x + 8y + 11 = 0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -1; -1)$ và bán kính $R = 3$.

Do AM là tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên $IM \perp AM$ suy ra $AM = \sqrt{AI^2 - IM^2}$.

Ta có $AI = 5, IM = R = 3$. Suy ra $AM = \sqrt{AI^2 - IM^2} = 4$.

Tập hợp các tiếp điểm M tạo thành đường tròn có tâm là H . Khi đó ta có $\triangle AHM$ đồng dạng với $\triangle AMI$

Suy ra $\frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AI} \Rightarrow AH = \frac{AM^2}{AI} = \frac{16}{5}$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm M . Khi đó (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{AI} = (-3; -4; 0)$ nên phương trình (α) có dạng $-3x - 4y - d = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + d = 0$

$$\text{Do } d(A, (\alpha)) = AH \Leftrightarrow \frac{|18+d|}{5} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow |18+d| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ d = -34 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (\alpha_1): 3x + 4y - 2 = 0; (\alpha_2): 3x + 4y - 34 = 0$$

$$\text{Do } d(I, (\alpha_1)) = \frac{9}{5} < 3 \text{ nên } (\alpha_1) \text{ không cắt } (S) \text{ (nhận)}$$

$$\text{Và } d(I, (\alpha_2)) = \frac{41}{5} > 3 \text{ nên } (\alpha_2) \text{ cắt } (S) \text{ (loại)}$$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$ cắt mặt phẳng (P) tại điểm B . Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) , nhìn đoạn AB dưới góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Tính độ dài MB .

$$\text{A. } MB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{*B. } MB = \sqrt{5}$$

$$\text{C. } MB = \sqrt{41}$$

$$\text{D. } MB = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng

$$\Rightarrow B(1+3t; 2+4t; -3-4t) \in (Q)$$

$$\text{Do } B \in (P) \Rightarrow 2(1+3t) + 2(2+4t) - (-3-4t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1)$$

Nhận xét: Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) , nhìn đoạn AB dưới góc vuông nên M di chuyển trên đường tròn giao tuyến (C) của mặt cầu đường kính AB và (P) .

$$AB \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right), IB = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

Gọi I là trung điểm

$$(C) \Rightarrow OI = d(I, (P)) = \frac{\left| 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 0 - (-1) + 9 \right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

Gọi O là tâm của đường tròn giao tuyến

Nhận xét: MB lớn nhất $\Leftrightarrow MB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow O$ là trung điểm của MB .

$$MB = 2 \cdot OB = 2 \sqrt{IB^2 - OI^2} = 2 \sqrt{\frac{41}{4} - 9} = \sqrt{5}$$

Vậy

Câu 12. Trong mặt phẳng (α) cho hai tia Ox, Oy , góc $\angle Oy = 60^\circ$. Trên tia Oz vuông góc với mặt phẳng (α) tại O , lấy điểm S sao cho $SO = a$. Gọi M, N là các điểm lần lượt di động trên hai tia Ox, Oy sao cho $OM + ON = a$ ($a > 0$ và M, N khác O). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O trên hai cạnh SM, SN . Khi M, N di động trên hai tia Ox, Oy mặt cầu ngoại tiếp đa diện $MNHOK$ có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

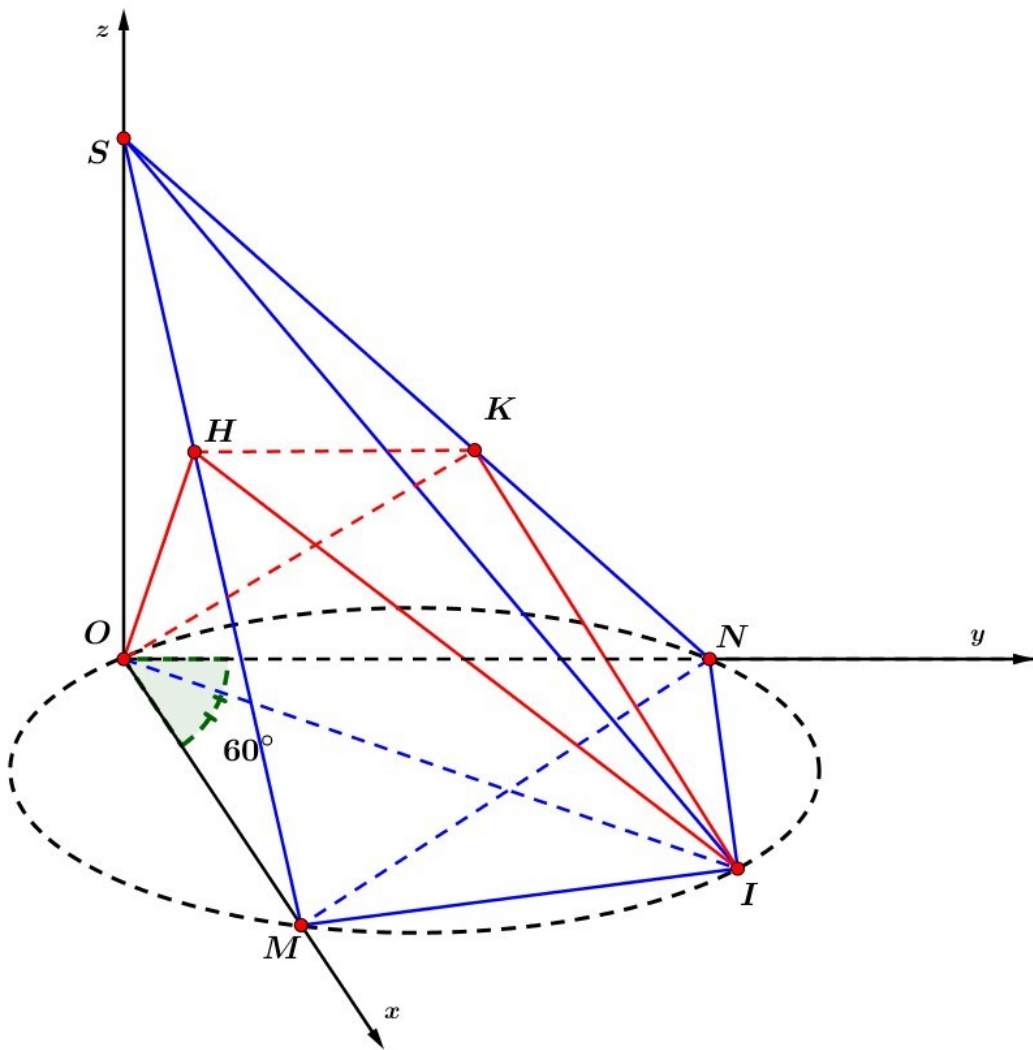
$$\text{A. } \frac{2\pi a^2}{3}$$

$$\text{B. } \pi a^2$$

$$\text{C. } 2\pi a^2$$

$$\text{*D. } \frac{\pi a^2}{3}$$

Lời giải



Ta gọi: OI là đường kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác OMN

Khi đó, ta có: $IM \perp OM$ tại M và $IN \perp ON$ tại N (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \angle OMI = \angle ONI = 90^\circ \quad (1)$$

Mà $\begin{cases} SO \perp MI \\ SO \perp NI \end{cases}; (SO \perp (OMN))$ nên suy ra $\begin{cases} IM \perp (SOM) \\ IN \perp (SON) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle OMI = \angle ONI = 90^\circ \\ OH \perp MI, OK \perp NI \end{cases}$

Mà mặt khác: $\begin{cases} OH \perp SM \\ OK \perp SN \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} OH \perp (SMI) \\ OK \perp (SNI) \end{cases} \Rightarrow \angle OHI = \angle OKI = 90^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2), với 4 điểm M, H, K, N cùng nhìn đoạn thẳng OI dưới góc vuông, suy ra $R_{(MNOHK)} = R_{\triangle OMN}$

Như vậy suy ra mặt cầu ngoại tiếp đa diện $MNHOK$ có diện tích nhỏ nhất khi OI nhỏ nhất

Ta có: $2R_{\triangle OMN} = \frac{MN}{\sin \angle MON} = \frac{MN}{\sin 60^\circ} \Rightarrow R_{\triangle OMN} = \frac{MN}{\sqrt{3}}$

$$MN = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos 60^\circ}$$

$$\Rightarrow MN^2 = (OM + ON)^2 - 3 \cdot OM \cdot ON \geq a^2 - 3 \left(\frac{OM + ON}{2} \right)^2 = a^2 - 3 \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow MN_{\min} = \frac{a}{2} R_{\triangle OMN} = \frac{a}{2} R_{(MNOHK)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{\min} = 4\pi \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{3}$$

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp đa diện $MNHOK$ có diện tích nhỏ nhất bằng

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha): x+y=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm hoành độ của điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(6; -10; 3)$ là lớn nhất.

A. -1.

*B. -4.

C. 2.

D. -5.

Lời giải

Mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 24$ có tâm $I(0; 2; -3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{6}$.

$d = d(I; (\alpha)) = \sqrt{2}$. Gọi r là bán kính đường tròn (C) , ta có $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{24 - 2} = \sqrt{22}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) . Khi đó H là tâm của đường tròn giao tuyến. Suy ra $H(-1; 1; -3)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (α) . Suy ra $K(8; -8; 3)$. Ta có $\overline{HK}(9; -9; 6)$.

Ta có $AM = \sqrt{KM^2 + d^2(A; (\alpha))}$, do $d^2(A; (\alpha))$ không đổi nên AM lớn nhất khi KM lớn nhất.

$$HK: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng

Đường thẳng HK cắt đường tròn (C) tại hai điểm. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2t \\ x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2t \\ (-1+3t)^2 + (-1-3t)^2 + (2t)^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2t \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm là $M_1(2; -2; -1)$ và $M_2(-4; 4; -5)$.

Xét $KM_1 = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 4^2} = \sqrt{88}$ và $KM_2 = \sqrt{12^2 + (-12)^2 + 8^2} = \sqrt{352}$.

Vậy điểm $M \equiv M_2(-4; 4; -5)$. Suy ra hoành độ điểm M là -4.

Câu 14. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 2)$, $B(2; 3; -1)$, $C(0; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 7 = 0$. Khi điểm M thay đổi trên mặt phẳng (P) , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = |\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$?

*A. 8.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. 6.

Lời giải

• Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$: $G(1; 2; 1)$ và $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$.

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{MG} + \overline{GA} + \overline{MG} + \overline{GB} + \overline{MG} + \overline{GC} = 3.\overline{MG} + (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) = 3.\overline{MG}$$

$$\Rightarrow E = |\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = |3.\overline{MG}| = 3.MG$$

Do đó giá trị min E đạt được khi min MG .

• Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (P) :

$$M \in (P) \Rightarrow MG \geq HG = d(G; (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \min MG = \frac{8}{3} \text{ khi: } M \equiv H \text{ hay } M \text{ là hình chiếu của } G \text{ lên } (P) \Rightarrow M\left(\frac{17}{9}; \frac{2}{9}; \frac{25}{9}\right)$$

$$\text{Vậy: } \min E = 3 \cdot \min MG = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8$$

Câu 15. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$ tâm I và điểm $A(2; 2; 1)$. Xét các điểm B, C, D thay đổi thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc nhau. Khoảng

cách từ I đến mặt phẳng (BCD) có giá trị lớn nhất bằng $\frac{m}{n}$ (với m, n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản). Tích $m \cdot n$ bằng?

A. 42.

B. 30.

*C. 15.

D. 14.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(-1; 2; -3)$ và bán kính $R = 5$; $A(2; 2; 1)$ thuộc mặt cầu.

Gọi G là trọng tâm ΔBCD .

$$\begin{cases} \vec{AI} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) \\ \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) \end{cases} \Rightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AI}$$

Khi đó

$$\Rightarrow G\left(0; 2; -\frac{5}{3}\right)$$

Do A, I cố định nên G cố định.

$$\Rightarrow d(I; (BCD)) \leq IG$$

$$d(I; (BCD))_{\max} = IG = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow m \cdot n = 15$$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; 1; -2), B(1; -5; 4), C(5; -1; 0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong mặt phẳng Oxz sao cho $|\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}| = 10$ là một đường tròn tâm $H(a; 0; c)$, bán kính bằng r . Tính tổng $T = a + c + r$.

A. 0.

B. -3.

C. 10.

*D. 6.

Lời giải

Xét điểm I thỏa mãn $\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(8; 4; -5)$.

$$\text{Ta có: } |\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}| = |\vec{MI} + \vec{IA} - 2(\vec{MI} + \vec{IB}) + 3(\vec{MI} + \vec{IC})| = 2\vec{MI} = 10 \Rightarrow MI = 5$$

Do đó M thuộc mặt cầu tâm I , bán kính $R = 5$.

Vậy $H(a; 0; c)$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng Oxz suy ra $H(8; 0; -5) \Rightarrow a = 8; c = -5; r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (Oxz))} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$$\text{Vậy } a + c + r = 8 - 5 + 3 = 6.$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 0)$; $B(-1; 2; 4)$. Xét trụ (T) nội tiếp mặt cầu đường kính AB và có trục nằm trên đường thẳng AB . Thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất thì chứa đường tròn đáy đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $C(0; -1; -2\sqrt{3})$. B. $C(0; -1; 2\sqrt{3})$. C. $C(1; 0; -2\sqrt{3})$. *D. $C(-1; 0; 2\sqrt{3})$.

Lời giải

Ta có: $\overline{AB}(-4; 4; 4)$. Bán kính mặt cầu $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2} = 2\sqrt{3}$

Gọi $O(1; 0; 2)$ là tâm của mặt cầu

Gọi h là chiều cao của trụ, r là bán kính đáy của trụ

$$V_T = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = f(h)$$

Ta có:

Xét hàm số $f(h)$ có: $f'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: $V_{T(\max)}$ khi $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3} = 4$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đáy của trụ, suy ra mp (P) nhận $\overline{AB}(-4; 4; 4)$ làm VTPT và cách O một khoảng bằng 2

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng là: $-4x + 4y + 4z + D = 0$

$$d((P), O) = \frac{|-4 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + D|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|4 + D|}{4\sqrt{3}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -4 - 8\sqrt{3} \\ D = -4 + 8\sqrt{3} \end{cases}$$

Do đó: $(P_1): -4x + 4y + 4z - 4 - 8\sqrt{3} = 0$

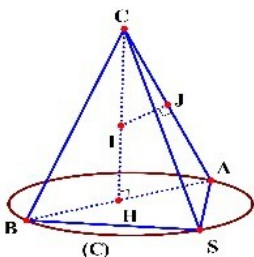
$(P_2): -4x + 4y + 4z - 4 + 8\sqrt{3} = 0$

Thay các đáp án, ta thấy đáp án D nằm trên (P_1) .

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa cạnh AB và vuông góc với (ABC) . (C) là đường tròn đường kính AB và nằm trong mặt phẳng (P) . Gọi S là một điểm bất kỳ nằm trên (C) , S khác A, B . Khi đó khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ đến mặt phẳng $(Q): 2x + 3y + z + 1 = 0$ bằng

- *A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{14}}$. C. $\frac{6}{\sqrt{14}}$. D. $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Lời giải



• Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ không phụ thuộc vị trí điểm S .

Gọi $H\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$ là trung điểm AB . Suy ra H là tâm của (C) và $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB)$ hay CH là trục của đường tròn (C) . Có $\overrightarrow{CH} = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -3\right) = \frac{3}{2}(1; 1; -2)$ suy ra CH có phương trình $x=t; y=t; z=3-2t$.

• Mặt phẳng trung trực đoạn AC đi qua trung điểm $J\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$ của AC và có VTPT là $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 3) = -3(1; 0; -1)$ nên có phương trình: $\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$ hay $(\alpha): x - z = 0$

• Suy ra tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là giao điểm I của CH và (α) , tìm được $I(1; 1; 1)$. Do đó $d(I, (Q)) = \frac{|2+3+1+1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 1; 1), B(0; 1; 2), C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$. Gọi I là điểm thuộc (P) sao cho $S = IA^2 + 2IB^2 + IC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Độ dài OI bằng

- A. $\sqrt{46}$. B. $3\sqrt{5}$. *C. $\frac{5\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{46}}{4}$.

Lời giải

• Có $S = \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 = (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA})^2 + 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC})^2$ (với M tùy ý)

Hay $S = 4IM^2 + (\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2) + 2\overrightarrow{IM}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

• Chọn M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Suy ra $M\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)$

Khi đó $S = 4MI^2 + (\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2)$ và dễ thấy S nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất hay I là hình

chiếu vuông góc của M lên (P) . Suy ra $I\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; 1\right)$ và $OI = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(2; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 5)$ và điểm N sao cho $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi cắt các đoạn thẳng OA, OB, OC, ON lần lượt tại các

điểm A_1, B_1, C_1, N_1 thỏa mãn $\frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} + \frac{OC}{OC_1} = 2019$ và $N_1 = (x_0; y_0; z_0)$ khi đó

- A. $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{11}{2019}$. B. $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{18}{2019}$.
*C. $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{13}{2019}$. D. $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{19}{2019}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (2; 6; 5) \Rightarrow N(2; 6; 5)$

Ta thấy: $OA = 2, OB = 6, OC = 5$

Gọi $A_1(a; 0; 0), B_1(0; b; 0), C_1(0; 0; c)$ lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) với các đoạn thẳng OA, OB, OC
 $\Rightarrow 0 < a \leq 2, 0 < b \leq 6, 0 < c \leq 5$

Như vậy ta có: $OA_1 = a, OB_1 = b, OC_1 = c$. Mặt phẳng (P) đi qua A_1, B_1, C_1 nên sẽ có phương trình $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Mà $\frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} + \frac{OC}{OC_1} = 2019$ nên suy ra $\frac{2}{a} + \frac{6}{b} + \frac{5}{c} = 2019$

$$\Rightarrow \frac{2}{2019a} + \frac{6}{2019b} + \frac{5}{2019c} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{2}{2019}}{a} + \frac{\frac{6}{2019}}{b} + \frac{\frac{5}{2019}}{c} = 1 \Rightarrow (P) \text{ đi qua } E\left(\frac{2}{2019}; \frac{6}{2019}; \frac{5}{2019}\right)$$

$$\text{Ta thấy: } \frac{OE}{ON} = \left(\frac{\frac{2}{2019}}{\frac{2}{2019}}; \frac{\frac{6}{2019}}{\frac{6}{2019}}; \frac{\frac{5}{2019}}{\frac{5}{2019}}\right) = \frac{1}{2019} \frac{ON}{ON} \Rightarrow E \in ON$$

Mà ta lại có $E \in (P), E \in ON$ nên suy ra E là giao điểm của (P) với đoạn ON

$$\Rightarrow E \equiv N_1(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow x_0 = \frac{2}{2019}; y_0 = \frac{6}{2019}; z_0 = \frac{5}{2019} \text{ . Vậy } x_0 + y_0 + z_0 = \frac{13}{2019}$$

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và

đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c)$ ($a > 0$) nằm trên đường thẳng (d) sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (với A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$ và $\angle CMA = 120^\circ$. Tính $Q = a + b + c$.

A. $Q = 1$.

*B. $Q = 2$.

C. $Q = \frac{10}{3}$.

D. $Q = 3$.

Lời giải

$$\text{Ptmc } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 27$$

$$\Rightarrow (S) \text{ có tâm } I(1; 2; -3) \text{ và bán kính } R = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Đặt $MA = x$, do MA, MB, MC là các tiếp tuyến kẻ từ M đến mặt cầu nên: $MA = MB = MC = x$.

Từ giả thiết ta có $AB = x, BC = x\sqrt{2}, CA = x\sqrt{3}$ mà ta nhận thấy thêm $CA^2 = CB^2 + BA^2$ nên suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B .

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AC, AB .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp MK \\ AB \perp HK \end{cases} \Rightarrow AB \perp (HMK) \Rightarrow AB \perp HM \text{ mà } HM \perp AC \text{ nên suy ra } HM \perp (ABC).$$

$$\text{Suy ra } M, H, I \text{ thẳng hàng, } MC \text{ là tiếp tuyến nên } MC \perp IC. \text{ Khi đó } CH = \frac{x\sqrt{3}}{2}, IC = R = 3\sqrt{3}.$$

Áp dụng công thức tính đường cao trong $\triangle IMC$ vuông tại C , ta có:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CI^2} + \frac{1}{CM^2} \Rightarrow \frac{4}{3x^2} = \frac{1}{27} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = MA = 3 \Rightarrow MI = 6.$$

$$\text{Mà } M \in (d) \Rightarrow Gs M(t-1; t-2; t+1) \text{ với } a = t-1 > 0; \text{ do } I(1; 2; -3), MI = 6$$

$$\Rightarrow (t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{4}{3} \Rightarrow t=\frac{4}{3} \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tọa độ của điểm } M \text{ là } M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow Q = a + b + c = 2.$$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+4}{1}$ và hai điểm $M(-1; 4; 1)$, $N(3; -2; 0)$. Gọi $H(a; b; c)$, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên đường thẳng Δ sao cho khối tứ diện $HKNM$ có thể tích nhỏ nhất. Tính giá trị $T = a - 2b + c$?

A. $T = 8$. *B. $T = -8$. C. $T = -3$. D. $T = 5$.

Lời giải

$H\Delta MNMNK$

• Từ dữ kiện đầu bài, ta tính được:

$$\overrightarrow{MN} = (4; -6; -1), \quad MN = \sqrt{53}, \quad u_{\Delta} = (1; -2; 1), \quad [\overrightarrow{u_{\Delta}}; \overrightarrow{MN}] = (8; 5; 2), \quad (\overrightarrow{u_{\Delta}}, \overrightarrow{MN}) \approx 32,73^\circ;$$

$$\cos(MN; HK) \approx 0.84, \quad \sin(MN; HK) \approx 0.54, \quad HK = MN \cdot \cos(\overrightarrow{u_{\Delta}}, \overrightarrow{MN}) \approx 7.09$$

$$V_{HKNM} = \frac{1}{6} HK \cdot MN \cdot d(HK; MN) \cdot \sin(HK; MN)$$

Trong đó: $HK, MN, \sin(HK; MN)$ là các hằng số được tính ở trên

$\Rightarrow$ Giá trị $\min V_{HKNM}$ đạt được khi $\min d(HK; MN)$

• Gọi $E(m; -1; -m^2) \in \Delta$; $\overrightarrow{ME} = (m+1; -5; -m^2-1)$

$$d(HK; MN) = \frac{|\overrightarrow{[u_{\Delta}; MN]} \cdot \overrightarrow{ME}|}{|\overrightarrow{[u_{\Delta}; MN]}|} = \frac{|8(m+1) - 25 - 2(m^2+1)|}{\sqrt{93}} = \frac{|-2m^2 + 8m - 19|}{\sqrt{93}}$$

$$= \frac{|2(m^2 - 4m + 4) + 11|}{\sqrt{93}} = \frac{|2(m-2)^2 + 11|}{\sqrt{93}} \geq \frac{11}{\sqrt{93}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } m=2 \Rightarrow \Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+4}{1}$$

• Phương trình mặt phẳng (P) qua $M(-1; 4; 1)$ và vuông góc với Δ là:

$$u_{(P)} = u_{\Delta} = (1; -2; 1), \quad (P): (x+1) - 2(y-4) + (z-1) = 0 \Leftrightarrow (P): x - 2y + z + 8 = 0$$

$$H \equiv (P) \cap \Delta \Rightarrow \text{tọa độ của } H \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \\ \frac{x-2}{1} = \frac{z+4}{1} \\ x - 2y + z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{16}{3}\right) \Rightarrow a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{5}{3}, \quad c = -\frac{16}{3} \Rightarrow T = a - 2b + c = \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} - \frac{16}{3} = -8$$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$, điểm $A(3; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và tạo với mặt phẳng (P) một góc φ . Biết khoảng cách giữa Δ và d là 3. Tính giá trị nhỏ nhất của $\cos \varphi$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. *C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vptp $n = (1; 2; 2)$

Đường thẳng d đi qua $O(0; 0; 0)$ và có vtcp $u = (3; 2; 2)$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(3; -1; -1)$ và có vtcp $u' = (a; b; c)$

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u}' \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}'| |\vec{n}|} = \frac{|a + 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ta có

$$d(d, \Delta) = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \vec{OA}|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}$$

Lại có

$$[\vec{u}, \vec{u}'] = (2c - 2b; 2a - 3c; 3b - 2a)$$

$$\begin{aligned} d(d, \Delta) = 3 &\Leftrightarrow \frac{|3(2c - 2b) + 3c - 2a + 2a - 3b|}{\sqrt{(2c - 2b)^2 + (2a - 3c)^2 + (3b - 2a)^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|9(c - b)|}{\sqrt{8a^2 + 13b^2 + 13c^2 - 12ab - 12ac - 8bc}} = 3 \\ &\Leftrightarrow 81(c - b)^2 = 9(8a^2 + 13b^2 + 13c^2 - 12ab - 12ac - 8bc) \Leftrightarrow 9(c - b)^2 = 8a^2 + 13b^2 + 13c^2 - 12ab - 12ac - 8bc \\ &\Leftrightarrow 9c^2 - 18bc + 9b^2 = 8a^2 + 13b^2 + 13c^2 - 12ab - 12ac - 8bc \Leftrightarrow 8a^2 + 8b^2 + 8c^2 - 12ab - 12ac + 10bc = 0 \\ &\Leftrightarrow 4a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 6ab - 6ac + 5bc = 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 2(b + c)^2 - 6a(b + c) = -bc \end{aligned}$$

$$\sin \varphi = \frac{|a + 2(b + c)|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a + 2(b + c)|}{3\sqrt{a^2 + (b + c)^2 - 2bc}}$$

Khi đó

$$= \frac{|a + 2(b + c)|}{3\sqrt{a^2 + (b + c)^2 + 8a^2 + 4(b + c)^2 - 12a(b + c)}} = \frac{|a + 2(b + c)|}{3\sqrt{9a^2 + 5(b + c)^2 - 12a(b + c)}}$$

$$\sin \varphi = \frac{|a + 2t|}{3\sqrt{9a^2 + 5t^2 - 12at}} \Leftrightarrow 9\sin^2 \varphi = \frac{a^2 + 4at + 4t^2}{9a^2 + 5t^2 - 12at} = P$$

Đặt $b + c = t$ ta có

$$\Leftrightarrow 9(P - 1)a^2 - 4(3P + 1)at + (5P - 4)t^2 = 0 \quad (*)$$

Nếu $a = 0 \Rightarrow t = 0$ (loại)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 4(3P + 1)^2 - 9(P - 1)(5P - 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9P^2 - 65P \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq \frac{65}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \varphi \leq \frac{65}{81} \Rightarrow \sin \varphi \leq \frac{\sqrt{65}}{9} \Rightarrow \cos \varphi \geq \frac{4}{9} \Rightarrow \min(\cos \varphi) = \frac{4}{9}$$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(0; 3; 1)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 9 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a + 2b - c$ bằng:

- *A. 0. B. 3. C. -3. D. 9.

Lời giải

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ Gọi } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC: \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ và } G(1; 2; 2) \\ &\bullet T = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ &= 3\vec{MG}^2 + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 + 2\vec{MG}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) \\ &= 3\vec{MG}^2 + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 = 3\vec{MG}^2 + 13 + 3 + 14 = 3\vec{MG}^2 + 30 \end{aligned}$$

Do đó giá trị $\min T$ đạt được khi $\min MG$.

$$MG \geq d(G; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3$$

$$M \in (P);$$

$\Rightarrow \min MG = 3$ khi: M là hình chiếu của G lên (P) .

Phương trình của đường thẳng d qua G và vuông góc với (P) là:

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$u_d = n_{(P)} = (2; -2; 1);$$

$$M \equiv d \cap (P) \Rightarrow \text{Tọa độ } M \text{ thỏa mãn hệ phương trình: } \begin{cases} x - 2t = 1 \\ y + 2t = 2 \\ z - t = 2 \\ 2x - 2y + z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm M thỏa mãn ycbt có tọa độ là: $M(3; 0; 3)$

$$\Rightarrow a = 3, b = 0, c = 3 \Rightarrow a + 2b - c = 0$$

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z = 3 \\ mx - 2y - z + 3m = 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử của S là

A. $-\frac{23}{13}$.

*B. $-\frac{6}{5}$.

C. $-\frac{19}{5}$.

D. $-\frac{12}{13}$.

Lời giải

• Đặt $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z - 3 = 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(3; 0; -2)$ có bán kính $R = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2 - (-3)} = 4$ và mặt phẳng $(P): mx - 2y - z + 3m = 0$.

• Bài toán để hệ phương trình có nghiệm duy nhất, tức là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

$$d[I, (P)] = R \Leftrightarrow \frac{|3m - 2 \cdot 0 - (-2) + 3m|}{\sqrt{m^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 4$$

• Ta có

$$\Leftrightarrow |6m + 2| = 4\sqrt{m^2 + 5} \Leftrightarrow 36m^2 + 24m + 4 = 16m^2 + 80 \Leftrightarrow 20m^2 + 24m - 76 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-3 - 2\sqrt{26}}{5} \\ m = \frac{-3 + 2\sqrt{26}}{5} \end{cases} \text{ . Vậy } \frac{-3 - 2\sqrt{26}}{5} + \frac{-3 + 2\sqrt{26}}{5} = -\frac{6}{5}.$$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(1; 2; 0), M(-1; 3; 4)$. Gọi d là đường thẳng qua B vuông góc với AB đồng thời cách M một khoảng cách nhỏ nhất. Một véc tơ chỉ phương của d có dạng $u = (2; a; b)$. Tính tổng $a + b$

A. 1.

B. 2

*C. -1.

D. -2.

Lời giải

Gọi (α) là mặt phẳng qua điểm B và vuông góc với AB , khi đó phương trình $(\alpha): z = 0$ ($(\alpha) \equiv Oxy$) và $d \subset (\alpha)$

Gọi H, K là lần lượt là hình chiếu của M lên (α) và d .

Ta có $d(M; d) = MK \geq MH$, suy ra giá trị nhỏ nhất của $d(M; d) = MH$, khi đó d qua $H(-1; 3; 0)$.

d có vectơ chỉ phương là $\vec{HB} = (2; -1; 0) \Rightarrow u = (2; -1; 0) \Rightarrow a = -1; b = 0 \Rightarrow a + b = -1$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; -3), B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Tìm $M(a; b; c) \in (P)$ thỏa mãn $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất, tính $T = a + b + c$.

- A. $T = \frac{311}{183}$. B. $\frac{-131}{61}$. *C. $\frac{-35}{183}$. D. $\frac{85}{61}$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{5}{3}\right)$.

Ta có: $MA^2 + 2MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + 2(\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2MI(\vec{IA} + 2\vec{IB})$
 $= 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2$.

Do $IA^2 + 2IB^2$ không đổi nên $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất khi MI^2 nhỏ nhất suy ra M là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) suy ra d có phương trình

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + 3t \\ y = -8t \\ z = -\frac{5}{3} + 7t \end{cases}$$

Xét phương trình: $3\left(\frac{4}{3} + 3t\right)^2 + 8(-8t)^2 + 7\left(-\frac{5}{3} + 7t\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{13}{183}$.

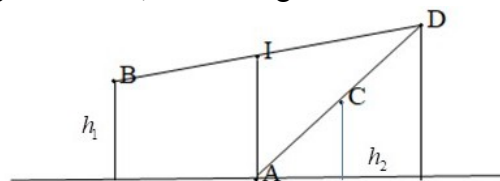
Suy ra $a + b + c = \frac{-1}{3} + 2t = \frac{-35}{183}$.

Câu 28. Trong không gian với trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1; -4; 4)$, $B(1; 7; -2)$, $C(1; 4; -2)$. Mặt phẳng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A . Đặt $h_1 = d(B; (P))$; $h_2 = 2d(C; (P))$. Khi đó $h_1 + h_2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T = b + c + d$.

- *A. $T = 65$. B. $T = 52$. C. $T = 77$. D. $T = 33$.

Lời giải

Gọi D là điểm sao cho C là trung điểm AD , I là trung điểm BD .



Suy ra $D(3; 12; -8)$, $I\left(2; \frac{19}{2}; -5\right)$.

Khi đó $h_1 + h_2 = d(B; (P)) + d(D; (P)) = 2d(I; (P)) \leq 2IA$.

Vậy $h_1 + h_2$ đạt giá trị lớn nhất khi (P) qua A , vuông góc với IA .

$IA = \left(-3; -\frac{27}{2}; 9\right) \Rightarrow (P)$ nhận $n = (2; 9; -6)$ làm vec tơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) : $2x + 9y - 6z + 62 = 0$.

Vậy $b = 9; c = -6; d = 62 \Rightarrow b + c + d = 65$.

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 8; 2), B(9; -7; 23)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khi đó tổng $b + c + d$ có giá trị bằng

A. $b + c + d = 2$. B. $b + c + d = 4$. *C. $b + c + d = 3$. D. $b + c + d = 1$.

Lời giải

Vì $A \in (P)$ nên $8b + 2c + d = 0 \Leftrightarrow d = -8b - 2c \Rightarrow (P): x + by + cz - 8b - 2c = 0$

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5 - 3b + 7c + d|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-11b + 5c + 5|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2}$$

$$d(B; (P)) = \frac{|9 - 15b + 21c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = \frac{|(-11b + 5c + 5) + 4(-b + 4c + 1)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$$

Lại có

$$\Rightarrow d(B; (P)) \leq \frac{|(-11b + 5c + 5)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} + \frac{|4(-b + 4c + 1)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} + \frac{|4(-b + 4c + 1)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1^2 + 4^2 + 1^2)(b^2 + c^2 + 1^2)}}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 18\sqrt{2}$$

Vậy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất là $18\sqrt{2}$ khi

$$\begin{cases} (-11b + 5c + 5) \cdot (-b + 4c + 1) > 0 \\ \frac{b}{-1} = \frac{c}{4} = \frac{1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow b = -1; c = 4$$

Từ đây có $b = -1; c = 4; d = 0 \Rightarrow b + c + d = 3$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$: (S_1) có tâm $I\left(0, 0, \frac{21}{2}\right)$, bán kính $r_1 = 6$ và (S_2) có tâm $J(0, 0, 1)$, bán kính $r_2 = \frac{9}{2}$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M(x, y, z)$ với x, y, z nguyên thuộc phần giao của hai khối cầu?

A. 11. *B. 13. C. 9. D. 7.

Lời giải

$$(S_1): x^2 + y^2 + \left(z - \frac{21}{2}\right)^2 = 36$$

Ta có phương trình mặt cầu

$$(S_2): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{81}{4}$$

Và phương trình mặt cầu

Điểm $M(x, y, z)$ thuộc giao của hai khối cầu $(S_1), (S_2)$ nên tọa độ điểm $M(x, y, z)$ là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \left(z - \frac{21}{2}\right)^2 \leq 36 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq \frac{81}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq \frac{81}{4} \\ z=5 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x^2 + y^2 + (5-1)^2 \leq \frac{81}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{17}{4}$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ và $x^2 + y^2 \leq \frac{17}{4}$ suy ra $\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}; \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases}; \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy có 13 điểm $M(x, y, z)$ với x, y, z nguyên thuộc phần giao của hai khối cầu.

Câu 31. Trong không gian cho hai điểm $I(2; 3; 3)$ và $J(4; -1; 1)$. Xét khối trụ (T) có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính IJ và có hai tâm nằm trên đường thẳng IJ . Khi có thể tích (T) lớn nhất thì hai mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy của (T) có phương trình dạng $x + by + cz + d_1 = 0$ và $x + by + cz + d_2 = 0$. Giá trị của $d_1^2 + d_2^2$ bằng:

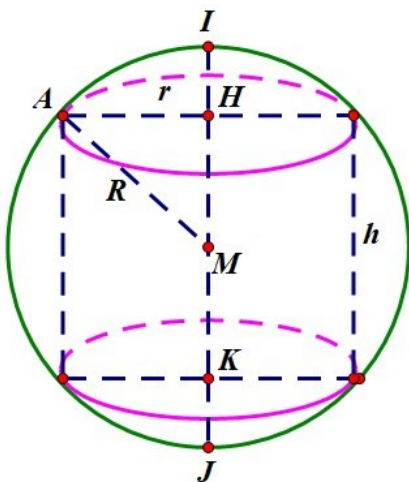
A. 25.

B. 14.

C. 61.

*D. 26.

Lời giải



Ta có: $\overline{IJ} = (2; -4; -2) = 2(1; -2; -1)$. Mặt cầu có bán kính $R = \frac{IJ}{2} = \sqrt{6}$, tâm $M(3; 1; 2)$ là trung điểm của IJ .

Gọi H, K lần lượt là tâm của hai đường tròn đáy của hình trụ.

$$r = AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{6 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{24 - h^2}{4}}$$

Thể tích khối trụ:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{24 - h^2}{4} \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot (24 - h^2) \cdot h$$

Ta có: $\frac{24 - h^2}{2} + \frac{24 - h^2}{2} + h^2 \geq 3 \sqrt{\left(\frac{24 - h^2}{2} \cdot h\right)^2}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{24 - h^2}{2} \cdot h\right)^2} \leq 8 \Leftrightarrow \left(\frac{24 - h^2}{2} \cdot h\right)^2 \leq 512 \Leftrightarrow \frac{24 - h^2}{2} \cdot h \leq 16\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V \leq 4\pi\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24 - h^2}{2} = h^2 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{2} \Rightarrow MH = MK = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra

Gọi (α) vuông góc với IJ và cách tâm M của mặt cầu một khoảng là $\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow (\alpha): x - 2y - z + d = 0$$

$$d(M, (\alpha)) = \sqrt{2} \quad \text{Mà} \quad d(M, (\alpha)) = \frac{|3 - 2 \cdot 1 - 2 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1 + d|}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow |-1 + d| = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 + 2\sqrt{3} \\ d = 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Nhận xét mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy chính là mặt phẳng (α) .

Không mất tính tổng quát gọi $d_1 = 1 + 2\sqrt{3}; d_2 = 1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 26$.

Câu 32. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với

$a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$. Khi tổng $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt phẳng (α) đi qua tâm I của mặt cầu (S) và song song với mặt

phẳng (OAB) có dạng $mx + ny + pz + q = 0$ (với $m, n, p, q \in \mathbf{Z}; \frac{q}{p}$ là phân số tối giản). Giá trị $T = m + n + p + q$ bằng

A. 3.

B. 9.

C. 5.

*D. -5.

Lời giải

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } O.ABC \text{ là } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 90.$$

Ta có

$$P = OA + OB + OC = a + b + c. \text{ Đặt } x = a - 4 \geq 0, y = b - 5 \geq 0, z = c - 6 \geq 0.$$

Khi đó

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z + 77 = 90.$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13.$$

$$T = (x + y + z)^2 + 12(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z + 2(xy + yz + zx + 2x + y).$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13 \text{ và } x, y, z \geq 0 \text{ nên } (x + y + z)^2 + 12(x + y + z) - 13 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x + y + z \geq 1 \Leftrightarrow a - 4 + b - 5 + c - 6 \geq 1 \Leftrightarrow a + b + c \geq 16 \Rightarrow \{OA + OB + OC\}_{\min} = 16.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 4, b = 5, c = 7$.

Suy ra, $A(4; 0; 0), B(0; 5; 0), C(0; 0; 7)$

Gọi mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A(4; 0; 0), B(0; 5; 0), C(0; 0; 7), O(0; 0; 0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 16 - 8a + d = 0 \\ 25 - 10b + d = 0 \\ 47 - 14c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{2} \\ c = \frac{7}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Tâm của mặt cầu (S) là $I\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(OAB) \equiv (Oxy): z = 0 \Rightarrow (\alpha): z + e = 0$.

Vì $I\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ thuộc (α) nên $\frac{7}{2} + e = 0 \Leftrightarrow e = -\frac{7}{2}$

Suy ra, $2z - 7 = 0 \Rightarrow m = 0; n = 0; p = 2; q = -7$.

$$T = m + n + p + q = -5$$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $C(-1; 2; 11), H(-1; 2; -1)$, hình nón (N) có đường cao $CH = h$ và bán kính đáy là $R = 3\sqrt{2}$. Gọi M là điểm trên đoạn CH , (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục CH tại M của hình nón (N) . Gọi (N') là khối nón có đỉnh H đáy là (C) . Khi thể tích khối nón (N') lớn nhất thì mặt cầu ngoại tiếp nón (N') có tọa độ tâm $I(a; b; c)$, bán kính là d . Giá trị $a + b + c + d$ bằng

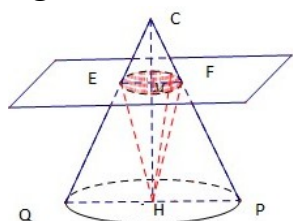
A. 1.

B. 3.

*C. 6.

D. -6.

Lời giải



Đặt $HM = x$, $0 < x < h$. Gọi I, R, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đáy của nón (N) , bán kính đường tròn (C) . Khi đó ta có $CH = h = 12$ là chiều cao của (N) , $R = 3\sqrt{2}$.

Khi đó C, I, H thẳng hàng (I nằm giữa C, H).

Do tam giác $\triangle CEM \sim \triangle CQH$ nên $\frac{EM}{QH} = \frac{CM}{CH} \Leftrightarrow EM = \frac{QH \cdot CM}{CH} \Leftrightarrow r = EM = FM = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là

$$V = \frac{1}{3} \pi EM^2 \cdot HM = \frac{1}{3} \pi \left[\frac{R(h-x)}{h} \right]^2 x = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$$

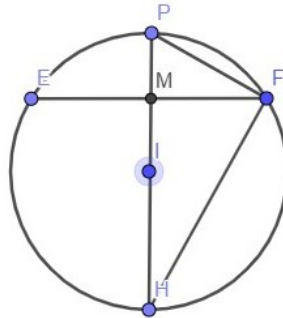
Ta có Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$ ($0 < x < h$)

$$f'(x) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x); \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)(h-3x) \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{4\pi R^2 h}{81}$	

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x = \frac{h}{3}$
Chú ý: Có thể đánh giá dựa vào



$$(h-x)^2 x = (h-x)(h-x)x = \frac{1}{2}(h-x)(h-x)2x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{h-x+h-x+2x}{3}\right)^3 \text{ với } 0 < x < h. \text{ Dấu "=" xảy ra khi ba số}$$

$$(h-x) = (h-x) = 2x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$$

$$\text{Khi đó } HM = x = \frac{h}{3} = 4, \quad r = \frac{R \cdot CM}{h} = \frac{R \cdot (h-x)}{h} = 2\sqrt{2} = MF$$

Gọi P là giao điểm của HM với mặt cầu ngoại tiếp nón (N') . Ta có $\triangle HFP$ vuông tại F $\Rightarrow HF^2 = HM \cdot HP$

$$\Leftrightarrow HM^2 + MF^2 = HM \cdot HP \Leftrightarrow 16 + (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot HP \Rightarrow HP = 6$$

$$\Rightarrow d = HI = 3 = \frac{1}{4}HC \Rightarrow HI = \frac{1}{4}HC \Rightarrow I(-1; 2; 2)$$

Vậy $a + b + c + d = 6$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 0)$, $B(-3; 1; 4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

Xét khối nón (N) có đỉnh có tọa độ nguyên thuộc đường thẳng Δ và ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích nhỏ nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $ax + by + cz + 1 = 0$. Giá trị $a + b + c$ bằng

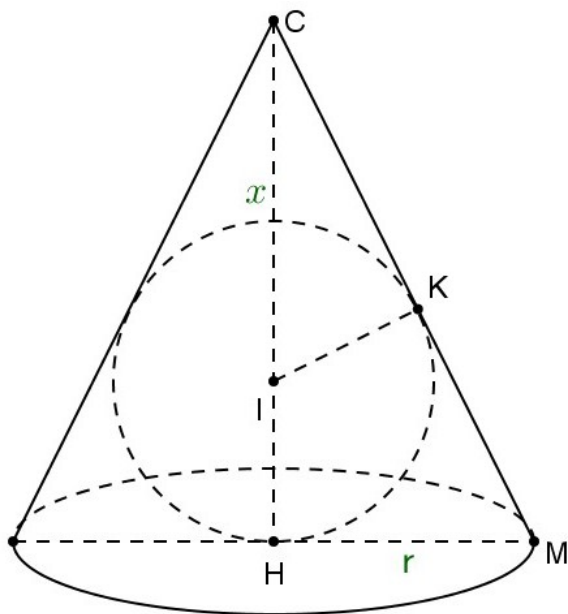
*A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. -6.

Lời giải



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(-1; 2; 2)$, bán kính 3.

Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đáy của (N) , C là đỉnh của (N) .

Khi đó C, I, H thẳng hàng (I nằm giữa C, H), $IH = IK = 3$

Đặt $CI = x$

$$\Delta CIK \text{ đồng dạng } \Delta CMH \text{ nên } \frac{IK}{MH} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow r = HM = \frac{IK \cdot CH}{CK} = \frac{3(x+3)}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3(x+3)}{\sqrt{x^2-9}} \right)^2 \cdot (x+3) = 3\pi \frac{(x+3)^2}{x-3}$$

$$V_{(N)} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+3)^2}{x-3} = \frac{x^2+6x+9}{x-3} \text{ nhỏ nhất } (x > 3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x - 27}{x-3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$V_{(N)} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = 9, \text{ khi đó } IC = 9 \text{ nên } C \in (S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 81$$

$$\text{Mặt khác } C \in \Delta \text{ nên } C(-1; 2; 11) \text{ hoặc } C\left(\frac{43}{11}; -\frac{32}{11}; -\frac{41}{11}\right)$$

$$\text{Vì } C \text{ có tọa độ nguyên nên } C(-1; 2; 11)$$

$$\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{IC} \text{ nên } H(-1; 2; -1)$$

Mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) đi qua H và nhận $\overrightarrow{IH} = (0; 0; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng là $z + 1 = 0$

$$\text{Do đó } a = 0, b = 0, c = 1 \text{ nên } a + b + c = 1$$

Câu 35. Trong hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$ và $(S_2): (x-10)^2 + (y-9)^2 + (z-2)^2 = 400$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y + mz + 22 = 0$. Có bao nhiêu số nguyên m để mp (P) cắt hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo giao tuyến là hai đường tròn không có tiếp tuyến chung?
A. 5. **B.** 11. **C.** Vô số. ***D.** 6.

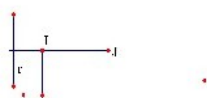
Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1; -3; 2)$, bán kính $R_1 = 7$; mặt cầu (S_2) có tâm $J(10; 9; 2)$, bán kính $R_2 = 20$. Ta có $IJ(9; 12; 0)$, $IJ = 15$.

Mặt phẳng $(P): 4x - 3y + mz + 22 = 0$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_P(4; -3; m)$

Do $IJ \cdot \vec{n}_P = 0$ nên IJ song song hoặc chứa trong (P).

Bán kính đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ là $r = \frac{2\sqrt{p(p-7)(p-20)(p-15)}}{15} = \frac{28}{5}$ với $p = \frac{20+7+15}{2} = 21$



Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến hai mặt cầu là (Q): $3x + 4y + 30 = 0$

Ta có $d(I; (Q)) = \frac{21}{5}$, $d(J; (Q)) = \frac{96}{5}$ nên $d(I; (Q)) + IJ = d(J; (Q))$

Ta có mp(P) cắt hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo giao tuyến là hai đường tròn, trong đó đường tròn nhỏ ở trong

đường tròn lớn khi $\frac{28}{5} < d(I; (P)) < 7 \Leftrightarrow \frac{28}{5} < \frac{|2m+35|}{\sqrt{m^2+25}} < 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45m^2 - 140m > 0 \\ \frac{684}{25}m^2 - 140m - 441 < 0 \end{cases}$$

Và có m nguyên, nên $m \in \{-2; -1; 4; 5; 6; 7\}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 3)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 = 12$. Xét khối trụ (T) nội tiếp mặt cầu (S) và có trục đi qua điểm A . Khi khối trụ (T) có thể tích lớn nhất thì hai đường tròn đáy của (T) nằm trên hai mặt phẳng có phương trình dạng $x + ay + bz + c = 0$ và $x + ay + bz + d = 0$. Giá trị $a + b + c + d$ bằng

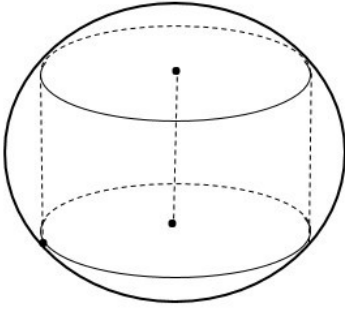
A. $-4 + 4\sqrt{2}$.

***B.** -5 .

C. -4 .

D. $-5 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi r, h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của mặt trụ (T) và R là bán kính mặt cầu (S) , ta có:
 $R = 2\sqrt{3}$, $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

Thể tích khối trụ (T) là $V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} = \pi \sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2 \cdot r^2 (2R^2 - 2r^2)}$

Mà theo Cô-si ta có: $\sqrt[3]{r^2 \cdot r^2 (2R^2 - 2r^2)} \leq \frac{r^2 + r^2 + 2R^2 - 2r^2}{3} = \frac{2}{3} R^2$

Suy ra: $r^2 \cdot r^2 (2R^2 - 2r^2) \leq \frac{8}{27} R^6 \Rightarrow V \leq \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} R^3$. Dấu “=” xảy ra khi $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

$$h = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}R}{3} = 4$$

Vậy khi khối trụ (T) đạt thể tích lớn nhất thì chiều cao (Có thể dùng phương pháp hàm số).

Mặt khác tâm của khối trụ (T) chính là tâm $I(1; 2; 3)$ của mặt cầu (S) nên trục của khối trụ (T) nằm trên đường

thẳng $IA: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Vậy hai đáy của khối trụ nằm trên 2 mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AI và cách

tâm I một khoảng bằng 2. Gọi $M(1+t; 2+t; 3) \in IA$ là tâm của đường tròn đáy hình trụ, ta có

$$IM = 2 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + t^2} = 2 \Leftrightarrow 2t^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \Rightarrow M(1+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}; 3) \\ t = -\sqrt{2} \Rightarrow M(1-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}; 3) \end{cases}$$

Vậy 2 mặt phẳng chứa 2 đường tròn đáy của mặt trụ có phương trình là:

$$(x - 1 - \sqrt{2}) + (y - 2 - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{Và } (x - 1 + \sqrt{2}) + (y - 2 + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 + 2\sqrt{2} = 0$$

Vậy: $a + b + c + d = -5$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ Cho $d: \frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{2}$ và hai điểm $A(3; 1; 2); B(-1; 3; -2)$ Mặt cầu tâm I bán kính R đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng d . Khi R đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, I là $(P): 2x + by + cz + d = 0$. Tính $d + b - c$.

*A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow E(1; 2; 0)$ và $IE = \sqrt{R^2 - 9}$

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $(\alpha): 2x - y + 2z = 0$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên d .

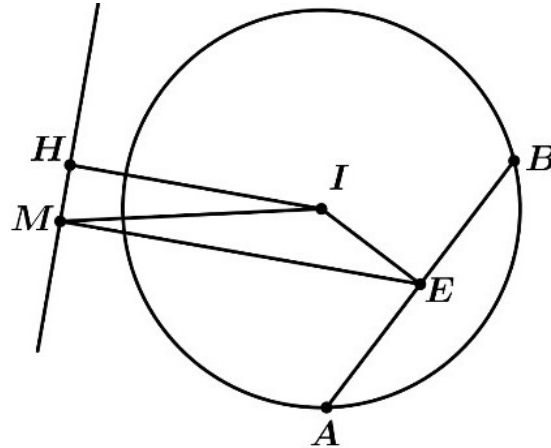
Gọi M là hình chiếu vuông góc của E lên $d \Rightarrow EM = d_{(E;d)} = 9$

$$\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -t + 5 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(2; 6; 1) \Rightarrow ME = 3\sqrt{2}$$

$$2x - y + 2z = 0$$

Toạ độ M là nghiệm hệ

Vì $(\alpha) \perp d$ và $IH + IE \geq EM \Rightarrow R$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I, H, E$ thẳng hàng.



$$\Rightarrow R + \sqrt{R^2 - 9} = 3\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow EI = \frac{1}{4}EH \Rightarrow I\left(\frac{5}{4}; 3; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow IA = \left(\frac{7}{4}; -2; \frac{7}{4}\right)$$

Vậy

$$\Rightarrow n = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IA} \right] = (-18; 0; 18) = -18(1; 0; -1)$$

$$(P): 2x - 2z - 2 = 0 \Rightarrow b = 0; c = -2; d = -2 \Rightarrow d + b - c = 0$$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 1)$ và $B(2; 1; 1)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của (N) cách điểm $E(1; 1; 1)$ một khoảng là bao nhiêu?

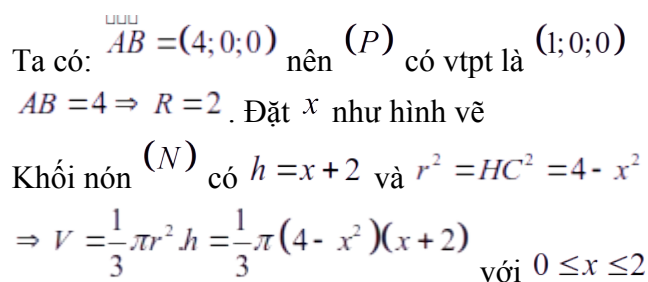
*A. $d = \frac{1}{2}$.

B. $d = 2$.

C. $d = \frac{1}{3}$.

D. $d = 3$.

Lời giải



Đạt max khi $x = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3} \Rightarrow 3IH = IB$ với $I(0;1;1)$

$$\Rightarrow H\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right) \Rightarrow 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 0(y - 1) + 0(z - 1) = 0$$

$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0$. Khoảng cách từ điểm $E(1;1;1)$ tới mặt phẳng (P) là $d(E, (P)) = \frac{\left|1 - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$.

Câu 39. Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là bao nhiêu?

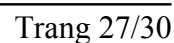
*A. $S_{\max} = 2a^2$

B. $S_{\max} = a^2 \sqrt{2}$

C. $S_{\max} = 4a^2$

D. $S_{\max} = \frac{9a^2}{8}$

Lời giải



Giả sử O là tâm đáy và AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân SAM . Theo giả thiết hình nón có bán kính đáy $R = OA = a\sqrt{3} \text{ cm}$, $\angle ASB = 120^\circ$ nên $\angle ASO = 60^\circ$. Xét tam giác SOA vuông tại O , ta có:

$$\sin 60^\circ = \frac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \frac{OA}{\sin 60^\circ} = 2a$$

$$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2} SA \cdot SM \cdot \sin \angle ASM = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \cdot \sin \angle ASM = 2a^2 \sin \angle ASM$$

Diện tích thiết diện là:

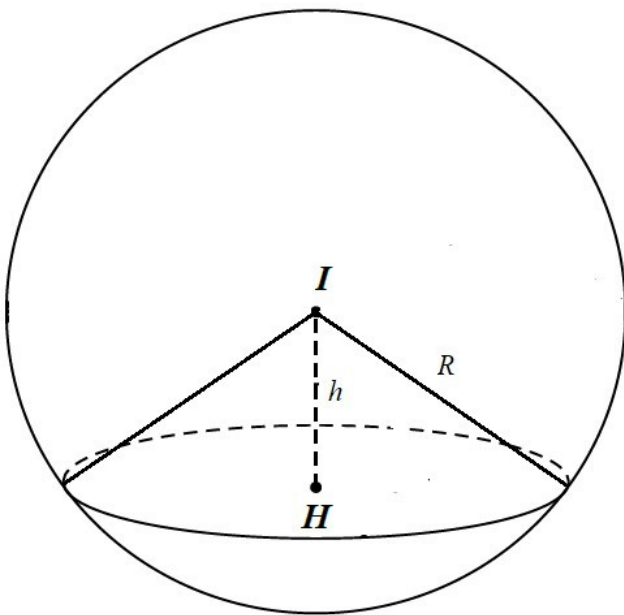
Do $0 < \sin \angle ASM \leq 1$ nên $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin \angle ASM = 1$ hay khi tam giác ASM vuông cân tại đỉnh S (vì $\angle ASB = 120^\circ > 90^\circ$ nên tồn tại tam giác ASM thỏa mãn).

Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là: $S_{\max} = 2a^2$ (đvtt).

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -1); B(1; 3; -2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0$. Xét khối nón (N) có đỉnh là tâm I của mặt cầu và đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S) . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) và đi qua hai điểm A, B có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$ và $y + mz + e = 0$. Giá trị của $b + c + d + e$ bằng

- A. 15. B. -12. C. -14. *D. -13.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$

Xét khối nón (N) có đỉnh I , bán kính đáy r và chiều cao h (h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng chứa đường tròn đáy) có thể tích là

$$V_N = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi (3 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi (3h - h^3)$$

Khảo sát hàm $f(h) = 3h - h^3$ trên khoảng $(0; \sqrt{3})$ ta được V_N max khi $h = 1$

Bài toán quy về lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B và cách điểm I một khoảng $h = 1$

Gọi $\vec{n} = (a; b; c) (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là vectơ pháp tuyến của mp (P)

Ta có $\vec{BA} = (1; 0; 1)$; $\vec{n} \cdot \vec{BA} = 0 \Leftrightarrow a + c = 0 \Leftrightarrow c = -a$

$M_p(P)$ đi qua A , với vector pháp tuyến $n=(a;b;-a)$ có phương trình là $a(x-2)+b(y-3)-a(z+1)=0 \Leftrightarrow ax+by-az-3a-3b=0$

$$d(I,(P))=1 \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=1 \Leftrightarrow (a+b)^2=2a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2-2ab=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2b \end{cases}$$

+ Với $a=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow mp(P): y-3=0$

+ Với $a=2b$, chọn $b=1 \Rightarrow a=2; c=-2 \Rightarrow mp(P): 2x+y-2z-9=0$

Vậy $b=1; c=-2; d=-9; e=-3 \Rightarrow b+c+d+e=-13$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;0;0), B(3;4;-4)$. Xét khối trụ (T) có trục là đường thẳng AB và có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (T) có thể tích lớn nhất, hai đáy của (T) nằm trên hai mặt phẳng song song lần lượt có phương trình là $x+by+cz+d_1=0$ và $x+by+cz+d_2=0$. Khi đó giá trị của biểu thức $b+c+d_1+d_2$ thuộc khoảng nào sau đây?

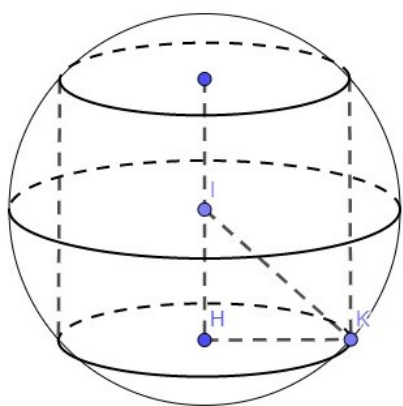
A. $(0;21)$

B. $(-11;0)$

*C. $(-29;-18)$

D. $(-20;-11)$

Lời giải



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(2;2;-2)$ và bán kính bằng 3.

Gọi $x, (0 < x < 3)$ là bán kính đáy của (T) , khi đó (T) có chiều cao bằng $h=2\sqrt{9-x^2}$, do đó thể tích của (T) bằng

$$V=2\pi x^2 \sqrt{9-x^2}=4\pi \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (9-x^2)} \leq 4\pi \sqrt{\left(\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + (9-x^2)}{3}\right)^3}=12\pi\sqrt{3}$$

(T) có thể tích lớn nhất bằng $V_{\max}=12\pi\sqrt{3}$ khi $x=\sqrt{6}$.

Khi đó gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (T) , (P) có phương trình tổng quát dạng $x+2y-2z+d=0$. Khoảng cách từ tâm $I(2;2;-2)$ đến (P) bằng $\sqrt{3}$ nên

$$\frac{|2+2 \cdot 2-2 \cdot (-2)+d|}{3}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} d=3\sqrt{3}-10 \\ d=-3\sqrt{3}-10 \end{cases}$$

Vậy $b+c+d_1+d_2=2-2+3\sqrt{3}-10-3\sqrt{3}-10=-20$

----HẾT----

