

TOÁN 9

CHUYÊN ĐỀ 1: CĂN BẬC HAI & HẰNG ĐẲNG THỨC (Buổi 1)

A – LÝ THUYẾT

I. Căn bậc hai:

1. CĂN BẬC HAI của số thực a là số x sao cho $x^2 = a$.

- Số thực a dương: có đúng hai căn bậc hai là số đối nhau: số dương kí hiệu là \sqrt{a} và số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

- Số 0: có đúng 1 căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$

- Số thực a âm: không có căn bậc hai, khi đó ta nói biểu thức \sqrt{a} không có nghĩa hay không xác định.

2. CĂN BẬC HAI SỐ HỌC của số thực a là số không âm x mà $x^2 = a$.

Với $a \geq 0$, ta có:

- Số x là căn bậc hai số học của a thì $x = \sqrt{a}$

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$$

- $\sqrt{a} \geq 0$ và $(\sqrt{a})^2 = a$

3. Với a, b là các số dương, ta có:

a) Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

b) Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: Phân biệt căn bậc hai và căn bậc hai số học:

Bài tập 1: Tìm câu đúng trong các câu sau:

a) Căn bậc hai của 0,81 là 0,9;

b) Căn bậc hai của 0,81 là 0,09;

d) $\sqrt{0,81} = 0,9$

e) $\sqrt{0,81} = \pm 0,9$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

c) Căn bậc hai của 0,81 là 0,9 và $-0,9$;

Bài tập 2: Tìm câu đúng trong các câu sau:

a) Số 3 không có căn bậc hai.

b) Căn bậc hai của 3 là $\sqrt{3}$

c) Căn bậc hai của 3 là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$

d) Căn bậc hai số học của 3 là $\sqrt{3}$

e) Căn bậc hai số học của 3 là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$

Bài tập 3: Tìm các căn bậc hai số học của các số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng:

16; 25; 144; 0,09; 225; $\frac{9}{16}$; 121; 10 000; 0,01.

DANG 2: Chứng minh căn một số là số vô tỉ.

Bài tập 3: Chứng minh $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Giải:

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng:

Giả sử $\sqrt{5}$ là số hữu tỉ.

Như vậy $\sqrt{5}$ có thể biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{m}{n}$, tức là $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$.

Suy ra $(\sqrt{5})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ hay $5n^2 = m^2$ (1).

Đẳng thức này chứng tỏ $m^2 : 5$, mà 5 là số nguyên tố nên $m : 5$.

Đặt $m = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có $m^2 = 25k^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $5n^2 = 25k^2$ nên $n^2 = 5k^2$ (3).

Từ (3) ta lại có $n^2 : 5$ mà 5 là số nguyên tố nên $n : 5$.

m và n cùng chia hết cho 5 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, trái với giả thiết.

Vậy $\sqrt{5}$ không phải là số hữu tỉ, do đó $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Bài tập 4: Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{3}$ là số vô tỉ

c) $\sqrt{3} + 1$ là số vô tỉ

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

b) $\sqrt{7}$ là số vô tỉ

d) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ là số vô tỉ

DANG 3: Giải phương trình, bất phương trình chứa căn:

Bài tập 5: Giải phương trình:

Chú ý phương trình dạng: $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$

Lưu ý: Nếu $x < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

a) $\sqrt{x} = 15$

d) $\sqrt{x^2+1} = 2$

b) $\sqrt{x} - 1 = 3$

e) $\sqrt{x^2+5x+20} = 4$

c) $2\sqrt{x} = 14$

f) $\sqrt{x^2+3} = -1$

Bài tập 6: Tìm x không âm, biết:

a) $\sqrt{x} < \sqrt{4}$

b) $\sqrt{2x} < 4$

DANG 4: So sánh các số có căn:

Bài tập 7: So sánh hai số:

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{26}$ và 15

b) $6\sqrt{5}$ và $5\sqrt{6}$

d) $-5\sqrt{35}$ và -30

Bài tập 8: So sánh hai số:

a) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ với 7

c) $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ với $\sqrt{3} + 5$

b) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ với 12

d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ với 2

Bài tập 9: So sánh hai số:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ với $\sqrt{65} - 1$

b) $\frac{13-2\sqrt{3}}{6}$ và $\sqrt{2}$

Bài tập 10: So sánh các số:

a) $\frac{30+2\sqrt{45}}{4}$ và 12

b) $\sqrt{5\sqrt{3}}$ với $\sqrt{3\sqrt{5}}$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

Hướng dẫn và đáp số:

Bài tập 1: Câu c) d) đúng

Bài tập 2: Câu c) d) đúng

Bài tập 4: a) b) Chứng minh tương tự bài 3

c) Giả sử $\sqrt{3}+1$ là một số hữu tỉ. Đặt $\sqrt{3}+1=x$ ($x \in \mathbb{Q}$), ta có:

$$(\sqrt{3}+1)^2 = x^2 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{3}+1 = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x^2-4}{2}$$

Vì x là số hữu tỉ nên x^2-4 là số hữu tỉ, do đó $\frac{x^2-4}{2}$ là số hữu tỉ.

Như vậy $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ, điều này vô lý. Vậy $\sqrt{3}+1$ là số vô tỉ.

d) Giả sử $\sqrt{1+\sqrt{2}} = m$ (m là số hữu tỉ) thì $\sqrt{2} = m^2 - 1$ nên $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, vô lý.

Bài tập 5: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x}-1=3$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x}=3+1=4$
 $\Leftrightarrow x=4^2=16$
Vậy ...

b) $\sqrt{x^2+1}=2$
 $\Leftrightarrow x^2+1=2^2=4$
 $\Leftrightarrow x^2=4-1=3$
 $\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$
Vậy ...

c) $\sqrt{x^2+5x+20}=4$
 $\Leftrightarrow x^2+5x+20=4^2=16$
 $\Leftrightarrow x^2+5x+4=0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x+4)=0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \end{cases}$
Vậy ...

d) $\sqrt{x^2+3}=-1$
Do $-1 < 0$ nên phương trình vô nghiệm

Bài tập 7: So sánh hai số:

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$

Có: $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$

Do $12 < 18$ nên $(2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$ hay $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

b) $6\sqrt{5}$ và $5\sqrt{6}$

Có: $(6\sqrt{5})^2 = 6^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 36 \cdot 5 = 180$; $(5\sqrt{6})^2 = 5^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = 25 \cdot 6 = 150$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

Do $180 > 150$ nên $(6\sqrt{5})^2 > (5\sqrt{6})^2$ hay $6\sqrt{5} > 5\sqrt{6}$

c) $3\sqrt{26}$ và 15

Ta có $15 = 3.5$, nên ta đi so sánh: $\sqrt{26}$ và 5

Bài tập 8: So sánh hai số:

d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ với 2

Có: $37 > 36 \Rightarrow \sqrt{37} > \sqrt{36}$;

$\sqrt{15} < \sqrt{16} \Rightarrow -\sqrt{15} > -\sqrt{16}$

Nên $\sqrt{37} - \sqrt{15} > \sqrt{36} - \sqrt{16} = 6 - 4 = 2$

Bài tập 9: So sánh hai số:

b) $\frac{13-2\sqrt{3}}{6} > \frac{13-2\sqrt{4}}{6} = 1,5$

Mặt khác: $(1,5)^2 = 2,25$; $(\sqrt{2})^2 = 2$

Suy ra: $1,5 > \sqrt{2}$, do đó: $\frac{13-2\sqrt{3}}{6} > \sqrt{2}$

CHUYÊN ĐỀ 1: CĂN BẬC HAI & HẰNG ĐẲNG THỨC (Buổi 02,03,04)

A – LÝ THUYẾT

II . Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức :

- Điều kiện xác định của \sqrt{A} là $A \geq 0$
(tức là để căn thức \sqrt{A} có nghĩa thì điều kiện là biểu thức A phải lớn hơn hoặc bằng 0)
- Với mọi số thực a, ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$
- Với A là biểu thức, ta có hằng đẳng thức:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

BỔ SUNG:

1. $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$
2. $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: Tìm giá trị của x để biểu thức chứa căn có nghĩa:

Bài tập 1: Tìm các giá trị của x để mỗi biểu thức sau có nghĩa:

$$A = \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$B = \sqrt{2x^2 + 4x + 5}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$D = \sqrt{x + \frac{3}{x}} + \sqrt{-3x}$$

Bài tập 2: Tìm các giá trị của x để mỗi biểu thức sau có nghĩa:

$$A = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$B = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

$$C = \sqrt{\frac{x+3}{5-x}}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

Bài tập 3: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$

Bài tập 4: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức:

a) $A = \sqrt{2 - x^2}$

b) $B = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$

c) $C = \sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$

d) $D = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

Bài tập 5: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức:

a) $A = 3 - \sqrt{1 - 16x^2}$

b) $B = \frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$

c) $C = \sqrt{8x - x^2 - 15}$

d) $D = \frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

e) $E = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$

f) $F = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$

DANG 2: Tính, rút gọn biểu thức:

Bài tập 6: Tính:

a) $-\frac{7}{9} \cdot \sqrt{(-0,81)^2}$

b) $6 \cdot \sqrt{\left(\frac{-1}{36}\right)^2}$

c) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$

d) $72 : \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 36} - \sqrt{225}$

Bài tập 7: Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

c) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

Bài tập 8: Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{64a^2} + 2a$ với $a \geq 0$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

b) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ với a bất kì

c) $\sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ với a bất kì

d) $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$ với $1 \leq a \leq 2$

Bài tập 9: Cho biểu thức: $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A.

b) Rút gọn biểu thức A.

Bài tập 10: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 11$;

b) $x + 5\sqrt{x} + 6$

c) $x + 4\sqrt{x} + 3$

d) $3x - 6\sqrt{x} - 6$

Bài tập 11: Rút gọn các phân thức sau:

a) $A = \frac{a\sqrt{a} - 8 + 2a - 4\sqrt{a}}{a - 4}$

b) $B = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}}$

c) $C = \frac{\sqrt{c^2 + 2c + 1}}{|c| - 1}$

Bài tập 12: Cho $x < 0$, hãy rút gọn biểu thức: $P = \left| 2x - \sqrt{(5x - 1)^2} \right|$

DANG 3: Sử dụng hằng đẳng thức để giải phương trình, bất phương trình:

Bài tập 13: Giải phương trình:

a) $\sqrt{9 - 12x + 4x^2} = 4$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

Bài tập 14: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$

b) $\sqrt{3x^2 - 18x + 28} + \sqrt{4x^2 - 24x + 45} = -5 - x^2 + 6x$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

Bài tập 15: Tìm các giá trị của x sao cho: $\sqrt{x+1} < x+3$

Bài tập 16: Tìm các giá trị của x sao cho:

a) $\sqrt{x^2-3} \leq x^2-3$

b) $\sqrt{x^2-6x+9} > x-6$

Bài tập 17: Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức:

$$x+y+z+8=2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-2}+6\sqrt{z-3}$$

Bài tập 18: Cho biểu thức: $A = \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2+6x+9}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

Bài tập 19: Cho biểu thức: $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.

Bài tập 20: Cho biểu thức: $B = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

a) Rút gọn B.

b) Tìm x để $B = -9$

Bài tập 21: Tìm x biết rằng: $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$

Bài tập 22: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x+1}$

b) $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-6x+9} = 0$

c) $\sqrt{x^2-4} - x^2 + 4 = 0$

Bài tập 23: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-4x+8} + \sqrt{x^2-4x+9} = 3 + \sqrt{5}$

b) $\sqrt{2-x^2} + 2x + \sqrt{-x^2-6x-8} = 1 + \sqrt{3}$

c) $\sqrt{9x^2-6x+2} + \sqrt{45x^2-30x+9} = \sqrt{6x-9x^2} + 8$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

DANG 4: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức chứa căn:

Bài tập 24: Tìm GTNN của biểu thức: $A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Bài tập 25: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

b) $B = \sqrt{49x^2 - 42x + 9} + \sqrt{49x^2 + 42x + 9}$

Bài tập 26: a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$

Hướng dẫn và đáp số:

DANG 1: Tìm giá trị của x để biểu thức chứa căn có nghĩa:

Bài tập 1: Tìm các giá trị của x để mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) Để A có nghĩa $4x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) \geq 0$. Suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$
$$\left[\begin{array}{l} 2x-1 \leq 0 \\ 2x+1 \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

Vậy A có nghĩa khi $x \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $x \geq \frac{1}{2}$.

b) Ta có: $2x^2 + 4x + 5 = 2(x^2 + 2x + 1) + 3 = 2(x+1)^2 + 3 > 0$ với mọi x.

Vậy B có nghĩa với mọi x.

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

c) Để C có nghĩa $\Leftrightarrow 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(2 - x) > 0$. Suy ra:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Vậy C có nghĩa khi $0 < x < 2$.

d) Để D có nghĩa \Leftrightarrow

$$\begin{cases} x + \frac{3}{x} > 0 \\ -3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x} > 0 \\ -3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \end{cases}, \text{ không có giá trị nào của } x \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

này. Vậy không có giá trị nào của x để D có nghĩa.

Bài tập 2: Tìm các giá trị của x để mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0$. Suy ra:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Vậy với $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$ thì $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ có nghĩa.

b) $x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ với mọi x .

Vậy biểu thức đã cho có nghĩa với mọi x .

c) Biểu thức đã cho có nghĩa khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 5 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Vậy C có nghĩa khi $-3 \leq x < 5$.

d) Biểu thức đã cho có nghĩa khi và chỉ khi: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) > 0$

Đáp số: $x < 2$ hoặc $x > 3$.

Bài tập 3: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức:

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

a) Điều kiện xác định của A là:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 1 > 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 2 \Leftrightarrow |x-1| > \sqrt{2} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -\sqrt{2} \\ x-1 > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1-\sqrt{2} \\ x > 1+\sqrt{2} \end{cases}\end{aligned}$$

b) Điều kiện xác định của B là: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-\sqrt{2x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 & (1) \\ x > \sqrt{2x+1} & (2) \end{cases}$

Giải (1) ta được: $x \geq -\frac{1}{2}$.

Giải (2) ta có: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 2x+1 \end{cases}$ (3)

Giải (3) ta được: $\begin{cases} x < 1-\sqrt{2} \\ x > 1+\sqrt{2} \end{cases}$ (Lấy kết quả bài 3a)

Kết hợp với $x \geq -\frac{1}{2}$ và $x > 0$, ta được $x > 1+\sqrt{2}$ là điều kiện xác định của B.

Chú ý: Sẽ sai lầm nếu cho rằng (2) $\Leftrightarrow x^2 > 2x+1$, khi đó sẽ đi đến đáp số sai là:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 1-\sqrt{2} \\ x > 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài tập 4: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức:

a) $2-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

b) $5x^2-3 > 0 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $-(2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $(x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ hoặc $x < -2$

Bài tập 5: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức:

a) $|4x| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

$$b) \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ 1 - \sqrt{x^2 - 3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 3 \\ \sqrt{x^2 - 3} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{3} \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{3} & (x \neq -2) \\ x \geq \sqrt{3} & (x \neq 2) \end{cases}$$

c) $(x - 3)(5 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$.

d) Mọi x.

e) $\frac{1}{2} \leq x \neq 1$

f) Giải $2x + 1 > 0$ được $x > -\frac{1}{2}$

Giải $x^2 \leq 16$ được $-4 \leq x \leq 4$

Giải $x^2 - 8x + 14 \geq 0$ được:

$$x^2 - 8x + 14 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \leq -\sqrt{2} \\ x - 4 \geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 - \sqrt{2} \\ x \geq 4 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết luận: $-\frac{1}{2} < x \leq 4 - \sqrt{2}$

DANG 2: Tính, rút gọn biểu thức:

Bài tập 6: Tính:

a) $-0,63$

b) $\frac{1}{6}$

c) 86

d) -13

Bài tập 7: Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} + 1| + |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} - 1 = 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} = |\sqrt{7} - 1| - |\sqrt{7} + 1| = \sqrt{7} - 1 - \sqrt{7} - 1 = -2$

c) $\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = |3 + \sqrt{2}| - |3 - \sqrt{2}| = 3 + \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

d) $x^2 - (\sqrt{11})^2 = (x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})$

Bài tập 8: Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{64a^2} + 2a = |8a| + 2a = 8a + 2a = 10a$ (vì $a \geq 0$)

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

b) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3 \cdot |3a^3| - 6a^3$

- Nếu $a \geq 0$ thì $3 \cdot |3a^3| - 6a^3 = 3 \cdot 3a^3 - 6a^3 = 3a^3$

- Nếu $a < 0$ thì $3 \cdot |3a^3| - 6a^3 = 3 \cdot (-3a^3) - 6a^3 = -15a^3$

c) $\sqrt{(a+3)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = |a+3| + |a-3|$

- Nếu $a < -3$ thì $|a+3| + |a-3| = -a-3 - a+3 = -2a$

- Nếu $-3 \leq a \leq 3$ thì $|a+3| + |a-3| = a+3 - a+3 = 6$

- Nếu $a > 3$ thì $|a+3| + |a-3| = a+3 + a-3 = 2a$.

d) $\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2} = |\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1|$

Với $1 \leq a \leq 2$ thì $\sqrt{a-1}+1 > 0$, còn $\sqrt{a-1}-1 \leq 0$, ta có:

$$|\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1| = \sqrt{a-1}+1 - \sqrt{a-1}+1 = 2$$

Bài tập 9: a) Biến đổi biểu thức được: $A = \sqrt{x - \sqrt{(x-2)^2}} = \sqrt{x - |x-2|}$

Điều kiện xác định của A là:

$$x - |x-2| \geq 0 \Leftrightarrow x \geq |x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

b) Nếu $x \geq 2$ thì $A = \sqrt{x - (x-2)} = \sqrt{2}$

Nếu $1 \leq x < 2$ thì $A = \sqrt{x - (2-x)} = \sqrt{2x-2}$

Bài tập 10: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 11 = x^2 - (\sqrt{11})^2 = (x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})$

b) $x + 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x})^2 + 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

c) $x + 4\sqrt{x} + 3 = (\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x} + 3 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3)$

d) $3x - 6\sqrt{x} - 6 = 3[x - 2\sqrt{x} - 2] = 3[(x - 2\sqrt{x} + 1) - 3] = 3[(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 - (\sqrt{3})^2]$
 $= 3[(\sqrt{x} - 1)^2 - (\sqrt{3})^2] = 3(\sqrt{x} - 1 - \sqrt{3})(\sqrt{x} - 1 + \sqrt{3})$

Bài tập 11: Rút gọn các phân thức sau:

a) ĐK: $a \neq 4$

$$A = \frac{(a\sqrt{a} + 2a) - (8 + 4\sqrt{a})}{a - 4} = \frac{a(\sqrt{a} + 2) - 4(2 + \sqrt{a})}{a - 4} = \frac{(a - 4)(\sqrt{a} + 2)}{a - 4} = \sqrt{a} + 2, a \neq 4$$

b) $B = \frac{12\sqrt{6}}{|\sqrt{6} + 1| - |\sqrt{6} - 1|} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} + 1} = \frac{12\sqrt{6}}{2} = 6\sqrt{6}$

c) ĐK: $|c| \neq 1 \Leftrightarrow c \neq \pm 1$

$$C = \frac{\sqrt{(c+1)^2}}{|c-1|} = \frac{|c+1|}{|c-1|}$$

- Nếu $c < -1$ thì $\frac{|c+1|}{|c-1|} = \frac{-c-1}{-c-1} = 1$

- Nếu $-1 < c \leq 0$ thì $\frac{|c+1|}{|c-1|} = \frac{c+1}{-c-1} = -1$

- Nếu $c > 0$ và $c \neq 1$ thì $\frac{|c+1|}{|c-1|} = \frac{c+1}{c-1}$

Bài tập 12: $P = |2x - |5x - 1||$

Do $x < 0$ nên $5x - 1 < 0$, do đó $P = |2x - (1 - 5x)| = |7x - 1|$

Lại do $x < 0$ nên $7x - 1 < 0$. Vậy $P = 1 - 7x$.

DANG 3: Sử dụng hằng đẳng thức để giải phương trình, bất phương trình:

Bài tập 13: Giải phương trình:

a) $\sqrt{9 - 12x + 4x^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 3)^2} = 4 \Leftrightarrow |2x - 3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 4 \\ 2x - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,5 \\ x = -0,5 \end{cases}$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-0,5; 3,5\}$

$$b) \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |x-1| + |x-3| = 1$$

- Với $x < 1$ thì $x - 1 < 0$ và $x - 3 < 0$, ta có phương trình:

$$1 - x + 3 - x = 1 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1,5 \text{ không thỏa mãn điều kiện } x < 1.$$

- Với $1 \leq x \leq 3$ thì $x - 1 > 0$ và $x - 3 < 0$, ta có phương trình:

$$x - 1 + 3 - x = 1 \Leftrightarrow 0x = -1, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

- Với $x > 3$ thì $x - 1 > 0$ và $x - 3 > 0$, ta có phương trình:

$$x - 1 + x - 3 = 1 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2,5 \text{ không thỏa mãn điều kiện } x > 3.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm, hay tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

Bài tập 14: Giải phương trình:

a) Phương trình được viết về dạng: $|x-1| + |x-2| = 3$

Xét ba trường hợp: $x < 1$; $1 \leq x \leq 2$; $x > 2$.

Đáp số: $x = 0$; $x = 3$.

b) Phương trình được viết về dạng: $\sqrt{3(x-3)^2 + 1} + \sqrt{4(x-3)^2 + 9} = 4 - (x-3)^2$

Vì $(x-3)^2 \geq 0$ với mọi x nên:

$$\sqrt{3(x-3)^2 + 1} + \sqrt{4(x-3)^2 + 9} \geq 1 + 3 = 4.$$

Mặt khác $4 - (x-3)^2 \leq 4$ với mọi x . Vì vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi vế trái và vế phải cùng bằng 4. Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Bài tập 15: Điều kiện xác định của $\sqrt{x+1}$ là $x \geq -1$.

Với điều kiện trên thì $x+3 > 0$ nên (1) tương đương với:

$$(\sqrt{x+1})^2 < (x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x+1 < x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 8 > 0 \quad (3)$$

Bất phương trình (3) đúng với mọi x , vì:

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

$$x^2 + 5x + 8 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 8 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

Vậy các giá trị phải tìm của x là $x \geq -1$.

Bài tập 16:

a) Đặt $\sqrt{x^2 - 3} = a \geq 0$. (1)

Ta có: $a \leq a^2 \Leftrightarrow a^2 - a \geq 0 \Leftrightarrow a(a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ a \geq 1 \end{cases}$ (2)

Kết hợp (1) với (2) ta được $a = 0$ hoặc $a \geq 1$.

Với $a = 0$ ta được $x = \pm\sqrt{3}$. Với $a \geq 1$ ta được $x \geq 2$ hoặc $x \leq -2$.

Đáp số: $x = \pm\sqrt{3}$; $x \geq 2$; $x \leq -2$.

b) Giải bất phương trình: $|x - 3| > x - 6$, ta được nghiệm là mọi x.

Bài tập 17: Điều kiện $x \geq 1$; $y \geq 2$; $z \geq 3$.

Đẳng thức đã cho được biến đổi thành:

$$(\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-2}-2)^2 + (\sqrt{z-3}-3)^2 = 0$$

Suy ra: $\begin{cases} (\sqrt{x-1}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{y-2}-2)^2 = 0 \\ (\sqrt{z-3}-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{y-2} = 2 \\ \sqrt{z-3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = 12. \end{cases}$

Bài tập 18:

a) $A = |x - 3| - |x + 3| = \begin{cases} 6 & \text{với } x < -3 \\ -2x & \text{với } -3 \leq x \leq 3 \\ -6 & \text{với } x > 3 \end{cases}$

b) Giải $-2x = 1$ với điều kiện $-3 \leq x \leq 3$, ta được $x = -\frac{1}{2}$

Bài tập 19:

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và ứng dụng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

a) $A = 4x - |3x - 2| = \begin{cases} x+2 \\ 7x-2 \end{cases}$

b) Với $x = \frac{2}{7} < \frac{2}{3}$ thì $A = 7x - 2 = 7 \cdot \frac{2}{7} - 2 = 0$

Bài tập 20:

a) $A = 5x + |x + 3| = \begin{cases} 6x+3 & \text{với } x \geq -3 \\ 4x-3 & \text{với } x < -3 \end{cases}$

b) Xét hai trường hợp:

$\begin{cases} x \geq -3 \\ 6x+3 = -9 \end{cases}$ được $x = -2$ (thỏa mãn)
và $\begin{cases} x < -3 \\ 4x-3 = -9 \end{cases}$ được $x = -1,5$ (loại).

Bài tập 21: $\sqrt{(2x-1)^2} \leq 5-x \Leftrightarrow |2x-1| \leq 5-x$

$\Leftrightarrow x-5 \leq 2x-1 \leq 5-x \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2.$

Bài tập 22:

a) Áp dụng $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$. Đáp số: $x_1 = 0; x_2 = -1$

b) Áp dụng $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$. Đáp số: $x = 3.$

c) $\sqrt{x^2-4} = x^2-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4 = (x^2-4)^2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 \\ (x^2-4)(x^2-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \text{ hoặc } x \leq -2 \\ x = \pm 2 \text{ hoặc } x = \pm\sqrt{5}. \end{cases}$

c) Vậy $S = \{\pm 2; \pm\sqrt{5}\}$

Bài tập 23:

a) $\sqrt{(x-2)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2+4} + \sqrt{(x-2)^2+5} = 3 + \sqrt{5}$

Vế trái $T \geq \sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

b) $\sqrt{3-(x-1)^2} + \sqrt{1-(x+3)^2} = 1 + \sqrt{3}$

Vế trái $T \leq \sqrt{3} + 1 = 1 + \sqrt{3}$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (x+3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$, điều này

không xảy ra. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) $\sqrt{(3x-1)^2+1} + \sqrt{5(3x-1)^2+4} = \sqrt{9-(3x-1)^2}$

Vế trái $T \geq \sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$;

Vế phải $P \leq \sqrt{9} = 3$;

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

DẠNG 4: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức chứa căn:

Bài tập 24: Ta có: $A = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1}$
 $= \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$
 $= |x+1| + |x-1|$

Cách 1:

- Nếu $x < -1$ thì $A = -x - 1 - x + 1 = -2x > 2$. (1)

- Nếu $-1 \leq x \leq 1$ thì $A = x + 1 - x + 1 = 2$ (2)

- Nếu $x > 1$ thì $A = x + 1 + x - 1 = 2x > 2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\text{Min } A = 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức $|A| + |B| \geq |A + B|$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB \geq 0$.

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

$$A = |x+1| + |x-1|$$

$$= |x+1| + |1-x| \geq |x+1-1+x| = 2$$

$$\text{Vậy } \min A = 2 \Leftrightarrow (x+1)(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Bài tập 25:

a) $A = |2x - 1| + |3 - 2x|$

Giải tương tự bài 24, ta được $\min A = 2$ khi $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

b) $B = |3 - 7x| + |3 + 7x|$

Giải tương tự bài 24, ta được $\min B = 6$ khi $-\frac{3}{7} \leq x \leq \frac{3}{7}$

Bài tập 26:

a) $A = \sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}} = \sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \sqrt{1} = 1$ (dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$)

Vậy $\max A = 1$ (khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$)

b) $B = \sqrt{(2x^2 - x - 1)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$ (dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (2x + 1)(x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1; x = -\frac{1}{2}$)

Vậy $\min B = 3$ (khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$).

c) $C = |5x - 2| + |5x| = |2 - 5x| + |5x|$

$$C \geq |2 - 5x + 5x| = |2| = 2 \text{ (dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow (2 - 5x).5x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - 5x \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq 0 \\ 2 - 5x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{5}.$$

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486

Nguyễn Văn Quyền - Toán THCS 6789 - 0938.59.6698

Vậy $\min C = 2$ (khi và chỉ khi $0 \leq x \leq \frac{2}{5}$)

Học Viện Toán Mathpro

Gia Sư Thành Công - Chuyên đào tạo và cung ứng Gia sư chất lượng tại nhà

ĐT : 024.6260.0992 - 0914.757.486