# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.**

**1. Định lí côsin:** Trong tam giác  với  và . Ta có :





***Hệ quả:***



**2. Định lí sin :** Trong tam giác  với ,  và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có :



**3. Độ dài trung tuyến: Cho tam giác ** với  lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C. Ta có :



**4. Diện tích tam giác**

Với tam giác  ta kí hiệu  là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB; R, r

lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác;  là nửa chu vi tam giác; S là diện tích tam giác. Khi đó ta có:

S = 

= 

= 

= 

=  (công thức Hê–rông)

**B - CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH**

**Dạng toán 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC**

**Gồm có 3 loại cơ bản hs chỉ cần áp dụng trực tiếp công thức**

**Phương pháp:**

- Sử dụng trực tiếp định lí cosin và định lí sin.

- Chọn hệ thức lượng thích hợp đối với tam giác để tính một số yếu tố trung gian cần thiết để thuận lợi cho việc giải toán.

**Loại 1. Xác định các yếu tố trong tam giác khi biết độ dài 3 cạnh.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu1:** Cho tam giác ABC có . Tính góc A, suy ra S, *ha,* R, r, *ma.*  **Lời giải tham khảo** | | **🖎Lưu ý**  - Biết 3 cạnh áp dụng định lí cosin trong tam giác sẽ tính được các góc còn lại |
| **1.1.** Giải tam giác  biết  a) .  **Lời giải**  Theo định lí côsin ta có | **1.2.** Cho tam giác ABC biết  Tính góc A, B, C, suy ra S, *ha,* R, r, *ma.*  **Lời giải** | |
| **1.3.** Cho tam giác có **.**  a) Tính diện tích tam giác  b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác  c) Tính đường đường cao kẻ từ đỉnh A.  **Lời giải**  a) Áp dụng công thức Hê - rông ta có  b) Áp dụng công thức tính diện tích  và  suy ra  c) |  | |

**Loại 2: Tính các yếu tố trong tam giác khi biết độ dài 2 cạnh và góc xen giữa**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu2.** Cho tam giác có  và . Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.  **🖎Lời giải tham khảo**  Áp dụng định lí côsin ta có  Suy ra  Vì  nên  Theo công thức tính diện tích ta có  (1)  Mặt khác  (2)  Từ (1) và (2) suy ra  Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là | | **🖎Lưu ý**  Biết 2 cạnh và góc xen giữa của 1 tam giác để tính cạnh còn lại có 2 cách:  - Sd định lí cosin.  - Sd định lí sin. |
| **2.1.** Giải tam giác  biết  và .  **Lời giải**  Theo định lí sin ta có  hoặc  Vì góc A tù nên góc C nhọn do đó  Suy ra  Mặt khác | **2.2.** Cho tam giác ABC biết:  và  . Tính sinA, a , suy ra S, *ha,* R.  **Lời giải** | |
| **2.3.**  Cho tam giác  có  và .  a) Tính chu vi của tam giác  b) Tính  **Lời giải**  a)Theo định lí côsin ta có    Suy ra chu vi tam giác là  b) (Hình 2.23a)  Hình 2.23a  Kẻ đường cao BH ta có  .  . Vậy |  | |

**Loại 3: Tính các yếu tố trong tam giác biết hai góc và độ dài cạnh đối diện với góc còn lại**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 3.**Giải tam giác  biết  và .  **🖎Lời giải tham khảo**  Ta có  Theo định lí sin ta có | | **🖎Lưu ý**  Trong tam giác khi biết hai góc và độ dài cạnh đối diện với góc còn lại: áp dụng định lí Sin trong tam giác để tính các cạnh còn lại. |
| **3.1.** Giải tam giác , biết:    **Lời giải**  Ta có  suy ra tam giác  cận tại .  Theo định lí sin ta có  . | **3.2.** Cho tam giác ABC cân tại A biết    Tính R, r, cạnh c, b, suy ra S  **Lời giải**  Áp dụng định lí sin:        . | |
| **3.3.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết . Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.  **Lời giải**  Ta có  Theo định lí sin ta có ,    Theo công thức đường trung tuyến ta có  Theo công thức tính diện tích tam giác ta có |  | |

**Dạng toán 2. Chứng minh quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác**

**Phương pháp**

* Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
* Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,…)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 1.** Cho tam giác  thỏa mãn . Chứng minh rằng  a)  b)  **🖎Lời giải tham khảo**  a) Áp dụng định lí sin ta có  Suy ra  đpcm  b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có  đpcm | | **🖎Lưu ý** |
| **1.1.** Tam giác ABC có và trung tuyến  chứng minh rằng:    **Lời giải**  a) Áp dụng công thức đường trung tuyến  Ta có  (\*)  b) Theo định lí sin ta có      Thay vào (\*) ta có đpcm | **1.2.** Cho tam giác . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là .  **Lời giải**  Gọi G là trọng tâm của tam giác .  Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác  vuông tại G  (\*)  Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có    Suy ra  (đpcm) | |
| **1.3.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  ta có;  a)  b)  **Lời giải**  a) Áp dụng định lí côsin ta có:    b)  (câu a) | **1.4.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  ta có;  a)  b)  **Lời giải**  a)  (đúng)  d) Áp dụng công thức đường trung tuyến. | |

**Dạng toán 3: Nhận dạng tam giác**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1.** Tìm tính chất đặc biệt của tam giác ABC biết:  **🖎Lời giải tham khảo**  Yêu cầu bài toán tương đương với: | | **🖎Lưu ý**  **Cách khác:** Áp dụng định lí cosin: | |
| **1.1.** Nhận dạng tam giác ABC nếu ta có  **Lời giải**  Áp dụng trực tiếp công thức đường trung tuyến trong tam giác  Yêu càu bài toán tương đương với    KL: Tam giác ABC vuông tại A | **1.2.** Nhận dạng tam giác ABC biết:  **Lời giải**  Áp dụng định lí cosin ở (1) và thế vào (2)      KL: Tam giác ABC đều. | | |
| **Câu 2.** Nhận dạng tam giác  biết    **🖎Lời giải tham khảo**  Áp dụng công thức diện tích ta có  suy ra        Vậy tam giác  đều. | | | **🖎Lưu ý** |
| **2.1.** Cho tam giác . Chứng minh tam giác  cân nếu  **Lời giải**  Sử dụng công thức  thay  vào (\*) được:  suy ra tam giác  cân tại C | **2.2.** Cho tam giác . Chứng minh tam giác  cân nếu  **Lời giải**  Sử dụng công thức đường trung tuyến và định lí cosin:    suy ra tam giác  cân tại C. | | |