**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN**

**QUẬN NAM TỪ LIÊM**

**MÔN TOÁN 9 - NĂM HỌC: 2020 - 2021**

*Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)*

**Đề số 5**

**Bài 1.** **(4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức $A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}}$ với $x>0, y>0$

a) Rút gọn biểu thức $A$

b) Cho $x+y=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A$.

2. Cho biểu thức $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh rằng $B$ là một số nguyên.

**Bài 2.** **(4,0 điểm)**

1. Cho $m+5; n-2; p+2020$ là các số nguyên cùng chia hết cho $6$. Chứng minh rằng: $m+n+p+4^q+3$ cũng chia hết cho $6$ (q là số tự nhiên).

2. Cho $a,b,c,d$ là các số nguyên thỏa mãn $a^2=b^2+c^2+d^2$

Chứng minh rằng: $abcd+2021$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

**Bài 3.** **(4,0 điểm)**

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

2. Giải phương trình : $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}=\frac{4x-3}{5}$

**Bài 4.** **(6,0 điểm)**

Cho hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh bằng $a$ và có tâm là $O$. Điểm $M$ là một điểm di chuyển trên $BC$ ($M$ khác $B$ và $C$). Gọi $N$ là giao điểm của tia $AM$ và đường thẳng $CD$. $G$ là giao điểm của $DM$ và $BN$.

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}$ không đổi.

2) Chứng minh: $CG\perp AN$.

3) Gọi $H$ là giao điểm của $OM$ và $BN$. Tìm vị trí của điểm $M$ để diện tích tam giác $HAD$ đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 5.** **(1,0 điểm)** Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

**HẾT**

## ĐÁP ÁN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP QUẬN
## QUẬN NAM TỪ LIÊM
## MÔN TOÁN 9 - NĂM HỌC: 2020 - 2021

**Bài 1.** **(5,0 điểm)**

1. Cho biểu thức $A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}}$ với $x>0, y>0$

a) Rút gọn biểu thức $A$

b) Cho $x+y=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A$.

2. Cho biểu thức $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh rằng $B$ là một số nguyên.

**Lời giải**

1. a) Rút gọn biểu thức $A$

$$A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]:\frac{\sqrt{x^3}+y\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3}+\sqrt{x^3y}}$$ với $x>0, y>0$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{\left(\sqrt{x^3}+x\sqrt{y}\right)+\left(y\sqrt{x}+\sqrt{y^3}\right)}{\sqrt{xy}\,(y+x)}$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{x+y}{xy}\right):\frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+y\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}\,(x+y)}$$

$$=\frac{2\sqrt{xy}+x+y}{xy}:\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)}{\sqrt{xy}\,(x+y)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{xy}\cdot\frac{\sqrt{xy}\,(x+y)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)}$$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$ với $x>0, y>0$

b) Cho $x+y=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A$.

Với $x>0, y>0$ ta có: $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô- Si ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{y}}}=2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}}$$

Mặt khác: $\sqrt{xy}\leq\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{4}{2}=2\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2.\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{xy}}}\geq 2.\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$

Hay $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\dfrac{1}{\sqrt{y}}}=2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{xy}}}\geq\sqrt{2}$

Do đó: $A\geq\sqrt{2}$ .Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x+y=4\end{cases}\Rightarrow x=y=2$.

Vậy $MinA=\sqrt{2}$ tại $x=y=2$.

2. Ta có:

$$B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$$

$$\Rightarrow B^3=1+\frac{\sqrt{84}}{9}+1-\frac{\sqrt{84}}{9}+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right).\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)}.\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$$

$$B^3=2+3.\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}.B$$

$$B^3=2-B\Leftrightarrow B^3+B-2=0\Leftrightarrow B^3-B^2+B^2-B+2B-2=0$$

$$\Leftrightarrow(B-1)\left(B^2+B+2\right)=0$$

$+)B-1=0\Leftrightarrow B=1$

$+)B^2+B+2=0\Leftrightarrow\left(B+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}=0$ ( Vô lí)

Vậy $B=1$ là một số nguyên.

**Bài 2. (4,0 điểm)**

1. Cho $m+5; n-2; p+2020$ là các số nguyên cùng chia hết cho $6$. Chứng minh rằng: $m+n+p+4^q+3$ cũng chia hết cho $6$ (q là số tự nhiên).

2. Cho $a,b,c,d$ là các số nguyên thỏa mãn $a^2=b^2+c^2+d^2$

Chứng minh rằng: $abcd+2021$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

**Lời giải**

1. Ta có: $(m+5)\vdots 6 \Rightarrow m:6$ dư $1$

$(n-2)\vdots 6 \Rightarrow n:6$ dư $2$

$(p+2020)\vdots 6 \Rightarrow p:6$ dư $2$

Do đó: $(m+n+p):6$ dư $5$ hay $(m+n+p+1)\vdots 6$

Ta có: $4^q+2=(2^q)^2+2=2(2^{2q-1}+1)$

Mà $2^{2q-1}:3$ dư $2$ nên $(2^{2q-1}+1)\vdots 3 \Rightarrow 2.(2^{2q-1}+1)\vdots 6 \Rightarrow (4^q+2)\vdots 6$

Do đó: $m+n+p+4^q+3=\left[(m+n+p+1)+(4^q+2)\right]\vdots 6$

Vậy $m+n+p+4^q+3$ cũng chia hết cho $6$ (q là số tự nhiên).

2. Ta có: $(2m+1)^2=4m(m+1)+1$

Do đó: với mọi $m\in Z$ thì $(2m+1)^2$ chia $8$ dư $1$. Nên với $a,b,c,d$ lẻ thì $a^2,b^2,c^2,d^2$ chia $8$ dư $1$

Suy ra: không xảy ra $a^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3 )

Vậy trong các số $a,b,c,d$ có ít nhất 1 số chẵn. Ta có: $abcd+2021$ là số lẻ.

Đặt $a.b.c.d+2021=2n+1 (n\in Z) \Rightarrow 2n+1=(n+1-n)(n+1+n)=(n+1)^2-n^2$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

**Bài 3.** **(4,0 điểm)**

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

2. Giải phương trình : $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}=\dfrac{4x-3}{5}$

**Lời giải**

1. Tìm số nguyên x,y thỏa mãn:

$$x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+5x^2y^2+60-37xy=0$$
$$\Leftrightarrow\ 20x^2+20y^2+100x^2y^2-740xy+1200=0$$
$$\Leftrightarrow\ 20x^2+20y^2+(10xy-37)^2=169$$

Vì $20x^2\geq 0\ \forall 2x;20y^2\geq 0\ \forall y;(10\text{xy}-37)^2\geq 0\ \forall x,y$ và vai trò của x,y như nhau; ta giả sử $x\leq y;20x^2\leq 169\Rightarrow\ x^2\leq 8\Rightarrow\ x^2\in\left\{0;1;4\right\}$; suy ra:

$\left(20x^2;20y^2;(10\text{xy}-37)^2\right)\in\left\{(0;0;169);(0;20;149);(0;80;89);(20;20;129);(20;80;69);(80;80;9)\right\}$

Mà $(10xy-37)^2$ là số chính phương

$\Rightarrow\left(20x^2;20y^2;(10\text{xy}-37)^2\right)\in\left\{(0;0;169);(80;80;9)\right\}$

+ TH1: $\begin{cases}20x^2=0\\20y^2=0\\(10xy-37)^2=169\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\37^2=169\end{cases}\Rightarrow$ không có giá trị

+ TH2: $\begin{cases}20x^2=80\\20y^2=80\\(10xy-37)^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 2\\y=\pm 2\\\left[\begin{array}{l}xy=4\\xy=\dfrac{17}{5}(l)\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy $(x;y)\in\left\{(2;2);(-2;-2)\right\}$

2. Giải phương trình : $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}=\dfrac{4x-3}{5}$ (ĐK: $x\geq\dfrac{1}{5}$)

Vì $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}>0\ \forall x;y$

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}=\frac{4x-3}{5}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{4x-3}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}}-\frac{4x-3}{5}=0$$
$$\Leftrightarrow\ (4x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}}-\frac{1}{5}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-3=0\\\dfrac{1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{5}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{4}\\\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}=5\end{array}\right.$$

Giải phương trình $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}=5$ bình phương 2 vế ta có :

$\Leftrightarrow 5x-1+2\sqrt{(5x-1)(x+2)}+x+2=25$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(5x-1)(x+2)}=24-6x$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+9x-2}=24-6x (DK: x\le 4)$

$\Leftrightarrow 5x^2+9x-2=9x^2-72x+144$

$\Leftrightarrow 4x^2-81x+146=0$

$\Leftrightarrow (2x-\frac{81}{4})^2=\frac{2783}{64}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(c) \\ x=\frac{73}{4}(l) \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3}{4};2\right\}$

**Bài 4.** **(6,0 điểm)**

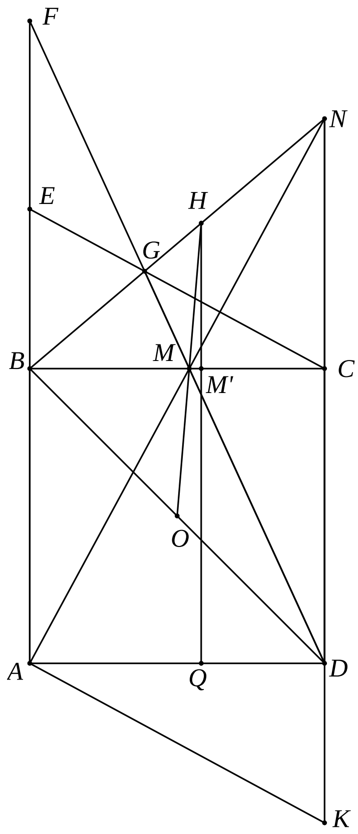
Cho hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh bằng $a$ và có tâm là $O$. Điểm $M$ là một điểm di chuyển trên $BC$ ($M$ khác $B$ và $C$). Gọi $N$ là giao điểm của tia $AM$ và đường thẳng $CD$. $G$ là giao điểm của $DM$ và $BN$.

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}$ không đổi.

2) Chứng minh: $CG\perp AN$.

3) Gọi $H$ là giao điểm của $OM$ và $BN$. Tìm vị trí của điểm $M$ để diện tích tam giác $HAD$ đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**




**1)** Kẻ $AK \perp AN \ \left(K \in CD\right)$

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}\left(= 90^\circ - \widehat{MAD}\right)$

$\Rightarrow \ \Delta ABM = \Delta ADK$

$\Rightarrow \ AM = AK$

Trong $\Delta KAN$ vuông tại $A$ có: $\dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AD^2}$

$\Rightarrow \ \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{a^2}$ không đổi

Vậy $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2}$ không đổi.

**2)** $CG$ cắt $AB$ tại $E$; $DM$ cắt $AB$ tại $F$

Ta có: $AD^2 = DK.DN \Rightarrow \ DK.DN = a^2 \ (1)$

Do $DC\,//\,AB \Rightarrow \ \dfrac{BE}{CN} = \dfrac{BG}{GN} = \dfrac{BF}{DN}$

$\Rightarrow BE.DN = CN.BF$ (2)

Mặt khác $\frac{BF}{CD} = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{CN}$ (do $AB // CD$)

$\Rightarrow BF.CN = CD.AB = a^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow DK.DN = BE.DN$

$\Rightarrow DK = BE \Rightarrow AE = CK$

$\Rightarrow EAKC$ là hình bình hành

$\Rightarrow AK // CE$

Mà $AK \perp AN \Rightarrow CE \perp AN$

**3)** $CF$ cắt $BN$ tại $H'$

Áp dụng định lí Papuyt $\Rightarrow O, M, H'$ thẳng hàng

$\Rightarrow H' \equiv H$

Lấy $I \in AB$ sao cho $BI = CN$

$\Rightarrow IBNC$ là hình bình hành

$\Rightarrow IC // BN$

Mà $BF.CN = a^2$

$\Rightarrow BI.BF = CB^2$

$\Rightarrow \Delta ICF$ vuông tại C

$\Rightarrow IC \perp CF$

$\Rightarrow CF \perp BN \Rightarrow BHC = 90^\circ$

Kẻ $HQ \perp AD$ $(Q \in AD)$

Gọi $M'$ là giao điểm của $HQ$ và $BC$

Ta có: $HQ = M'Q + HM' = a + HM'$

Mà $HM' \le \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow\ HQ \le \dfrac{3}{2}a$

Do đó: $S_{AHD} = \dfrac{1}{2}AD.HQ \le \dfrac{1}{2}a.\dfrac{3}{2}a = \dfrac{3}{4}a^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M'$ là trung điểm $AB$

**Bài 5.** **(1,0 điểm)**

Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

**Lời giải**

Xét ngũ giác đều ABCDE, ta nhận thấy ba đỉnh bất kì của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 2 khả năng:

- Nếu tô 5 đỉnh bởi đủ ba loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.

- Nếu tô 5 đỉnh bởi nhiều nhất 2 màu thì có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Vậy, luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác nhau.