DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC
http://diendantoanhoc.net

Đề thi chính thức VMEO III

Đề thi tháng 10 dành cho THCS

Bài 1. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Lấy một điểm P trong mặt phẳng tam giác sao cho nếu gọi các hình chiếu của P trên AB, AC lần lượt là C_1 và B_1 thì:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PC_1}{PB_1} = \frac{AB}{AC} \quad \text{hoặc} \quad \frac{PB}{PC} = \frac{PB_1}{PC_1} = \frac{AB}{AC}.$$

Chứng minh rằng với cách xác định đó ta luôn có đồng nhất thức $\angle PBC + \angle PCB = \angle BAC$.

Bài 2. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn có một số có tổng các chữ số chia hết cho 12. Khẳng định còn đúng không nếu thay 39 bởi 38 ? Giải thích câu trả lời !

Bài 3. Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực không âm a, b, c tùy ý

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \sqrt{b^2 - bc + c^2}.\sqrt{c^2 - ca + a^2} +$$

$$+ \sqrt{c^2 - ca + a^2}.\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ab + b^2}.\sqrt{b^2 - bc + c^2}.$$

Bài 4. Tìm số thực α nhỏ nhất sao cho tồn tại số thực β để với mọi bộ ba số thực a, b, c thỏa mãn $2006a + 10b + c = 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm trong đoạn $[\beta, \beta + \alpha]$.

Đề thi tháng 10 dành cho THPT

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Lấy A_1 là một điểm trên cung BC không chứa A sao cho đường thẳng vuông góc với OA tại A_1 cắt các đường thẳng AB, AC tại hai điểm và đoạn thẳng nối hai điểm đó nhận A_1 làm trung điểm. Các điểm B_1, C_1 được xác định tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Bài 2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $x^4 + 5y^4 = z^4$.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2 + f(y) - y) = (f(x))^2$.

Bài 4. Chứng minh rằng trong tập tất cả các đỉnh của một đa giác lồi bất kỳ luôn tồn tại ba đỉnh mà tam giác được tạo thành từ ba đỉnh này có chu vi lớn hơn 70% chu vi đa giác.

Hạn nhận bài 20/11/06

Đề thi chính thức VMEO III

Đề thi tháng 11 dành cho THCS

Bài 1. Cho đa thức $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1$. Tính giá trị $P(\alpha^2 + \alpha + 1)$ trong đó:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp là (I) lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB ở D,E,F. Lấy M là một điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng điểm M nằm trên đường tròn (I) khi và chỉ khi trong ba số $\sqrt{AE.S(BMC)}, \sqrt{BF.S(CMA)}$ và $\sqrt{CD.S(AMB)}$ có một số bằng tổng hai số kia ($S(XYZ)$ chỉ diện tích của tam giác XYZ).

Bài 3. Cho p là một số nguyên tố có dạng $4m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng số $216p^3$ không thể biểu diễn dưới dạng $x^2 + y^2 + z^9$ với $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. Trên lưới nguyên vô hạn, ô vuông đơn vị với bốn đỉnh có toạ độ (m, n),$(m-1, n)$, $(m-1, n-1)$, $(m, n-1)$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ được gọi là ô (m, n). Bây giờ ta lần lượt thực hiện các bước "dịch chuyển bi" theo một trong hai quy tắc sau đây:

(i) Lấy đi một viên bi ở ô (m, n) (nếu có), sau đó bỏ vào các ô $(m-1, n-2)$ và $(m-2, n-1)$ mỗi ô một viên

(ii) Lấy đi hai viên bi ở ô (m, n) (nếu có), sau đó bỏ vào các ô $(m+1, n-2)$ và $(m-2, n+1)$ mỗi ô một viên

Giả sử ban đầu có n viên bi ở các ô $(1, n), (2, n-1), ..., (n, 1)$ (mỗi ô có một viên). Hỏi rằng có thể hay không thể thực hiện hữu hạn các bước "dịch chuyển bi" để cho hai ô $(n+1, n)$ và $(n, n+1)$ đều có bi.

Đề thi tháng 11 dành cho THPT

Bài 1. Trong một cuộc thi có 11 thí sinh tham gia giải 9 bài toán. Sau khi kết thúc cuộc thi người ta thấy rằng cứ hai thí sinh bất kỳ thì giải chung với nhau không quá 1 bài toán. Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho mỗi bài toán đều có ít nhất k thí sinh giải được.

Bài 2. Cho hình thang cân ABCD, có đáy lớn CD, đáy nhỏ AB. Xét M là một điểm bất kỳ trên cạnh AB và (d) là đường thẳng qua M và vuông góc với AB. Hai tia Mx và My gọi là thoả mãn điều kiện (T) nếu như chúng đối xứng với nhau qua (d) và lần lượt cắt hai tia AD và BC tại E và F. Tìm quỹ tích trung điểm đoạn EF khi hai tia Mx và My thay đổi và thoả mãn điều kiện (T).

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{x-y+z^3}+\sqrt[3]{y-z+x^3}+\sqrt[3]{z-x+y^3}\le 1.$$

Bài 4. Cho trước số nguyên a lớn hơn 1. Gọi $p_1 < p_2 < ... < p_k$ là tất cả các ước số nguyên tố của a. Với mỗi số nguyên dương n ta định nghĩa:

$$\begin{cases} C_0(n) = a^{2n},\ C_1(n) = \dfrac{a^{2n}}{p_1^2},\ ....\ ,\ C_k(n) = \dfrac{a^{2n}}{p_k^2} \\ A = a^2+1 \\ T(n) = A^{C_0(n)} - 1 \\ M(n) = BSCNN(a^{2n+2}, A^{C_1(n)} - 1, ..., A^{C_k(n)} - 1) \\ A_n = \dfrac{T(n)}{M(n)} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $A_1, A_2, ...$ thoả mãn tính chất:

(i) Mỗi số trong dãy đều là số nguyên lớn hơn 1 và chỉ có các ước nguyên tố dạng $am+1$.

(ii) Hai số khác nhau bất kỳ trong dãy đều nguyên tố cùng nhau.

Hạn nhận bài 20/12/06

Đề thi chính thức VMEO III

Đề thi tháng 12 dành cho THCS

Bài 1. Cho tam giác ABC và một điểm K bất kỳ. Các đường thẳng AK,BK,CK cắt các cạnh đối diện của tam giác lần lượt tại D,E,F. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba cặp tam giác đồng dạng: hai tam giác BDM,DCN trên hai cạnh BD,DC, hai tam giác CEP và EAQ trên hai cạnh CE,EA, cuối cùng là hai tam giác AFR và FBS trên hai cạnh AF,FB. Các đường thẳng MN,PQ,RS cắt nhau tạo thành tam giác XYZ. Chứng minh rằng AX,BY,CZ đồng quy.

Bài 2. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (m, n) thỏa mãn $m^2 = \sqrt{n} + \sqrt{2n+1}$.

Bài 3..Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có đẳng thức phần nguyên sau:

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{p}\left[-\frac{1+\sqrt{8q+(2p-1)^2}}{2}\right] = -\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Bài 4. Dãy nhị phân $A = a_1a_2...a_k$ được gọi là đối xứng nếu $a_i = a_{k+1-i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Khi đó k được gọi là độ dài của A. Nếu $A = 11...11$ hoặc $A = 00..00$ thì A được gọi là đặc biệt. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho tồn tại các dãy đối xứng không đặc biệt A (độ dài m) và B (độ dài n) mà khi xếp chúng cạnh nhau ta được dãy nhị phân AB cũng đối xứng.

Đề thi tháng 12 dành cho THPT

Bài 1. Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài đường tròn đó. M là một điểm chạy trên đường tròn (O). Đường tròn tâm I đường kính PM cắt đường tròn (O) lần nữa tại N. Tiếp tuyến của (I) tại P cắt MN tại Q. Đường thẳng qua Q vuông góc với PO cắt PM tại A. AN cắt (O) lần nữa tại B. BM cắt PO tại C. Chứng minh rằng AC vuông góc với OQ.

Bài 2. Đồ thị đầy đủ n đỉnh là một tập hợp gồm n đỉnh và các đỉnh đó được nối với nhau đôi một bởi các cạnh. Giả sử đồ thì có n đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$, chu trình là một tập hợp các cạnh có dạng $A_{i_1}A_{i_2}, A_{i_2}A_{i_3}, ..., A_{i_m}A_{i_1}$ với $i_1, i_2, ..., i_m \in \{1, 2, ..., n\}$ đôi một khác nhau. Ta gọi m là độ dài của chu trình này. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu tất cả các cạnh của một đồ thị đầy đủ n đỉnh, mỗi cạnh tô bởi một trong ba màu khác nhau thì luôn tồn tại một chu trình có độ dài chẵn cùng màu.

Bài 3. Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $(a+b+c+d)(1/a+1/b+1/c+1/d) = 20$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right) \geq 36.$$

Bài 4. Với mỗi số nguyên dương n ký hiệu a_n/b_n là dạng tối giản của phân số $1+1/2+...+1/n$. Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên dương (M, N) ta luôn tìm được số nguyên dương m mà $(a_n, N) = 1$ với mọi $n = m, m+1, ..., m+M$.

Hạn nhận bài $20/1/07$