**ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC**

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**Đường trung tuyến của tam giác**

Đoạn thẳng $AM$ nối đỉnh $A$ của tam giác $ABC$ với trung điểm $M$ của cạnh $BC$ gọi là đường trung tuyến của tam giác $ABC$.

• Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

**Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác**

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

• G là trọng tâm tam giác $ABC$ thì$\frac{AG}{AD}=\frac{BG}{BE}=\frac{CG}{CF}=\frac{2}{3}.$

**II. BÀI TẬP**

**Bài 1:**

Từ các đẳng thức trên, hãy suy ra các đẳng thức khác:

|  |  |
| --- | --- |
| $$GD=\frac{1}{3}AD=\frac{1}{2}...................$$ | $$AG=\frac{2}{3}AD=...................................$$$$BG=\frac{2}{3}BE=.....................................$$$$CG=\frac{2}{3}CF=....................................$$ |
| ; ;  |

**Bài 2:** Cho tam giác $ABC$ có hai đường trung tuyến $BP,CQ$ cắt nhau tại $G.$ Trên tia đối của tia $PB$ lấy điểm $E$ sao cho $PE=PG.$ Trên tia đối của tia $QG$ lấy điểm $F$ sao cho $QF=QG.$ Chứng minh rằng: a) $GB=GE,GC=GF;$ b) $EF=BC$ và $EF//BC.$

**Bài 3:**  Tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng $ΔABC$là tam giác cân.

**Bài 4:** Cho $ΔABC$ có 3 đường trung tuyến $AD,BE,CF$ đồng quy tại $G$ .

a) Nếu $ΔABC$ đều hãy chứng minh: $GD=GE=GF$.

b) Đảo lại, nếu có $GD=GE=GF$ khi đó hãy chứng minh tam $ΔABC$đều.

**Bài 5:** : Chứng minh rằng, trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

**Bài 6:**  Chứng minh rằng nếu một tam giác có đường trung tuyến tương ứng với một cạnh bằng một nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

**Bài 7:**  Cho $ΔABC$ cân ở $A,$ $AB=34cm,BC=32cm$ và 3 trung tuyến $AM,BN,CP$ đồng quy tại trọng tâm $G$.

a) Chứng minh $AM⊥BC$

b) Tính độ dài $AM,BN,CP$. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

**Bài 8:**  $ΔABC$có đường cao , trung tuyến . Cho biết $\hat{BAH}=\hat{HAM}=\hat{MAC}$ .

a) Chứng minh $MC=2MH$

b) Vẽ $MI⊥AC$ tại I. Chứng minh $\hat{IMB}=2.\hat{ABC}$.

c) Tính các góc của $ΔABC$.

**Bài 9:**  Cho $ΔABC$ vuông tại A có AD là trung tuyến.

a) Chứng minh $AD=\frac{1}{2}BC$.

b) Biết $AC=\sqrt{8}cm,AD=\sqrt{3}cm$ + Tính cạnh AB.

+ Trung tuyến BE của $ΔABC$cắt AD tại G. Tính BE và chứng minh $ΔAGB$ là tam giác vuông.

**Bài 10:**  Cho $ΔABC$ có hai trung tuyến $AM$ và $BN$ vuông góc với nhau tại G. Chứng minh $BC^{2}+CA^{2}=5AB^{2}$ .

***CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT***

*Mỗi trung tuyến chia thành 2 tam giác có diện tích bằng nhau.*

*Nối 3 đỉnh của tam giác với trọng tâm của nó ta được 3 tam giác nhỏ có diện tích bằng nhau.*

*3 trung tuyến của tam giác phân tam giác thành 6 tam giác nhỏ có diện tích bằng nhau.*

***Hết***

**HDG**

**Bài 1:** *Hs tự điền*

**Bài 2:**

a) Vì $G$ là trọng tâm $ΔABC$ nên : $BG=2GP,CG=2GQ.$

Lại có $PE=PG,QF=QG$ nên : $GE=2GP,GF=2GQ.$

Do đó $BG=GE,CG=GF.$

b) Suy ra : $ΔGBC=ΔGEF(c.g.c)$

Từ đó ta có $EF=BC$ và $\hat{GEF}=\hat{GBC}$ $⇒EF//BC.$

**Bài 3:** Gọi G là giao điểm của BD và CE, ta có $ CG= \frac{2}{3}CE$. Do $BD = CE$ nên$BG = CG, GD = GE$

 $ΔBGE=ΔCGD \left(c.g.c\right)⇒ BE=CD$

Ta lại có$BE=\frac{1}{2}AB,CD=\frac{1}{2}AC $ nên $AB=AC$. Vậy $ΔABC$là tam giác cân.

**Bài 4:** a) Vì $ΔABC$ đều nên $AD=BE=CF$

mà $EG=\frac{1}{3}EB;$ $FG=\frac{1}{3}CF;DG=\frac{1}{3}AD⇒GE=GF=GD$

b) Ta có: $EG=\frac{1}{3}EB;FG=\frac{1}{3}CF;DG=\frac{1}{3}AD$

mà $GE=GF=GD⇒AD=BE=CF$

$BE=CF⇒AB=AC$ ( đã chứng minh ***bài 3*** )

$AD=BE⇒CA=CB$

$⇒AB=BC=CA⇒ΔABC$ đều.

**Bài 5:**  Xét $ΔABC$ vuông tại A, đường trung tuyến AM.

Ta sẽ chứng minh $AM=\frac{1}{2}BC$

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho . Ta có$MA=\frac{1}{2}AD$, cần chứng minh. Dễ thấy $ΔBMD=ΔCMA$ (c.g.c)$⇒BD=AC,  \hat{B\_{1}}=\hat{C}$ do đó $BD//AC$. Ta lại có $\hat{BAC}=90°$ nên$\hat{ABD}=90°$. Do đó $ΔCAB=ΔDBA$ (vì cạnh AB chung, $\hat{CAB}=\hat{DBA}=90°$,$AC = BD$), suy ra$BC = AD$. Vậy $AM =\frac{1}{2}BC$

**Bài 6:**  Xét$ΔABC$, đường trung tuyến AM có $AM=\frac{1}{2}BC.$

Ta sẽ chứng minh$\hat{BAC}=90°$. Dễ thấy$MA = MB = MC$.

Các tam giác MAB, MAC cân tại M nên:$\hat{B}=\hat{A\_{1}},$. $ \hat{C}=\hat{A\_{2}}$

Do đó $\hat{B}+\hat{C}=\hat{A\_{1}}+\hat{A\_{2}}=\hat{BAC}$

Ta lại có $\hat{B}+\hat{C}+\hat{BAC}=180°$ nên $\hat{BAC}=90°$

**Bài 7:**  

a) 

b) Vì M là trung điểm $BC⇒BM=\frac{BC}{2}=16cm$

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông $ABM$ ta có:

$AM^{2}+MB^{2}=AB^{2}$ $⇒AM=\sqrt{AB^{2}-MB^{2}}=\sqrt{34^{2}-16^{2}}=30cm$

Vì G là trọng tâm $ΔABC⇒GM=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}.30=10cm$

Xét $ΔCBP$ và $ΔBCN$ có: $\left\{\begin{array}{c}\&\hat{B}=\hat{C}(gt)\\\&BCchung\\\&CN=PB(AB=AC)\end{array}\right.⇒ΔCBP=ΔBCN(c.g.c)⇒CP=BN$

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông $GBM$ ta có:

$GM^{2}+MB^{2}=MB^{2}$ $⇒MB^{2}=10^{2}+16^{2}=356⇒BM≈18,87cm$

Vì G là trọng tâm $ΔABC⇒BN=\frac{3}{2}BG=\frac{3}{2}.18,87=28,31cm$

Vậy $AM=30cm;$ $BN=CP=28,31cm$

**Bài 8:**

a) $ΔABH=ΔAMH$ (c.g.c)$⇒BH=HM⇒BM=2HM=MC$

b) Chỉ ra $ΔAHM=ΔAIM(ch-gn)⇒\hat{AMH}=\hat{AMI}$

mà $\hat{AMH}=\hat{ABH}(theoa)⇒\hat{BMI}=2.\hat{ABC}$

c) Ta có: $ΔAMI=ΔAMH⇒IM=MH=\frac{CM}{2}$

Trong tam giác vuông $CMI$ có $IM=\frac{CM}{2}⇒\hat{C}=30^{0}⇒\hat{CMI}=60^{0}⇒\hat{IMB}=120^{0}⇒\hat{B}=60^{0}$

$⇒\hat{A}=90°$ . Vậy tam giác ABC có: $\hat{C}=30°;$ $\hat{A}=90°$

**Chứng minh bổ đề**: *Trong một tam giác vuông, góc đối diện với cạnh cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì bằng* $30°$

**Bài 9:** 

a) $AD=\frac{BC}{2}⇒BC=2AD=2\sqrt{3}cm$

b) Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông $ABC$ ta có: $BC^{2}=AB^{2}+AC^{2}$

$$⇒AB=\sqrt{BC^{2}-AC^{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^{2}-\left(\sqrt{8}\right)^{2}}=2cm$$

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông $ABE$ ta có:

$BE^{2}=AB^{2}+AE^{2}⇒BE=\sqrt{2^{2}+\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^{2}}=\sqrt{6}cm$

mà $AG=\frac{2}{3}AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}cm;BG=\frac{2}{3}BE=\frac{2\sqrt{6}}{3}cm$

$AG^{2}+BG^{2}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{2}+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^{2}=4=AB^{2}$ $⇒ΔAGB$vuông tại G ( *Pitago đảo)*

**Bài 10:** Vì $AM⊥BN$ nên :

$BC^{2}+CA^{2}=(2BM)^{2}+(2AN)^{2}$

$=4(BG^{2}+GM^{2}+GN^{2}+AG^{2})$

$$=4\left(GB^{2}+AG^{2}\right)+4\left(GM^{2}+GN^{2}\right)$$

$$=4AB^{2}+4\left[\left(\frac{1}{2}AG\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}BG\right)^{2}\right]=5AB^{2}$$

**Bài tập bổ sung:**

1) Cho $ΔABC$ có hai trung tuyến $BE$ và $CF$cắt nhau tại G. Đường thẳng $AG$ cắt $BC$ tại D. Kẻ  tại H và  tại K. Chứng minh:

a) $BH=CK$

b) $S\_{ΔAGB}=S\_{ΔAGC}=S\_{ΔCGB}$ ( S là diện tích)

2) Cho $ΔMNP$ . Gọi I là một điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng nếu $S\_{ΔIGN}=S\_{ΔMIP}=S\_{ΔNIP}$ thì I là trọng tâm của $ΔMNP$



a) $ΔBDH=ΔCKD(ch-gn)⇒BH=CK$

b) Xét $ΔAGB$ và $ΔAGC$ có cạnh $AG$ chung mà:

$\left\{\begin{array}{c}\&BH⊥AD\\\&CK⊥AD\\\&BH=CK\end{array}\right.⇒S\_{ΔAGB}=S\_{ΔAGC}$ . Chứng minh tương tự ta được: $S\_{ΔBGC}=S\_{ΔAGC}$

Vậy $S\_{ΔAGB}=S\_{ΔBGC}=S\_{ΔAGC}$

2) Gọi $MI∩NP=\left\{E\right\};NI∩MP=\left\{F\right\}$

Kẻ $NH⊥ME$ tại H, $PK⊥ME$ tại K

$⇒S\_{ΔMNI}=S\_{ΔMIP}⇒\frac{1}{2}MI.NH=\frac{1}{2}MI.PK$ $⇒NH=PK⇒ΔNHE=ΔPKE(cgv-gn)⇒NE=EP$

$⇒E$ là trung điểm $NP$. Chứng minh tương tự: $F$ là trung điểm $MP$

mà $ME∩NF=\left\{I\right\}⇒I$ là trọng tâm $ΔMNP$