



Chương

Bài 4.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



Lý thuyết

1. Định nghĩa hàm số lượng giác



Định nghĩa:

- **Hàm số sin** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\sin x$ , ký hiệu  $y = \sin x$ .
- **Hàm số cos** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\cos x$ , ký hiệu  $y = \cos x$ .
- **Hàm số tan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \tan x.$$

- **Hàm số cotan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \cot x.$$

Như

- (1) Tập xác định của hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là  $\mathbb{R}$
- (2) Tập xác định của hàm số  $y = \tan x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \right\}$
- (3) Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi (k \in \mathbb{Z}) \}$

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn



Hàm số chẵn - hàm số lẻ:

Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là

- **Hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .
- **Hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .



### Hàm số tuần hoàn:

Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số  $T \neq 0$  sao cho  $\forall x \in D$  ta có:

(1)  $x + T \in D$  và  $x - T \in D$ .

(2)  $f(x + T) = f(x)$ .

Số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kỳ** của hàm số tuần hoàn đó.

### Chú ý

(1) Hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .

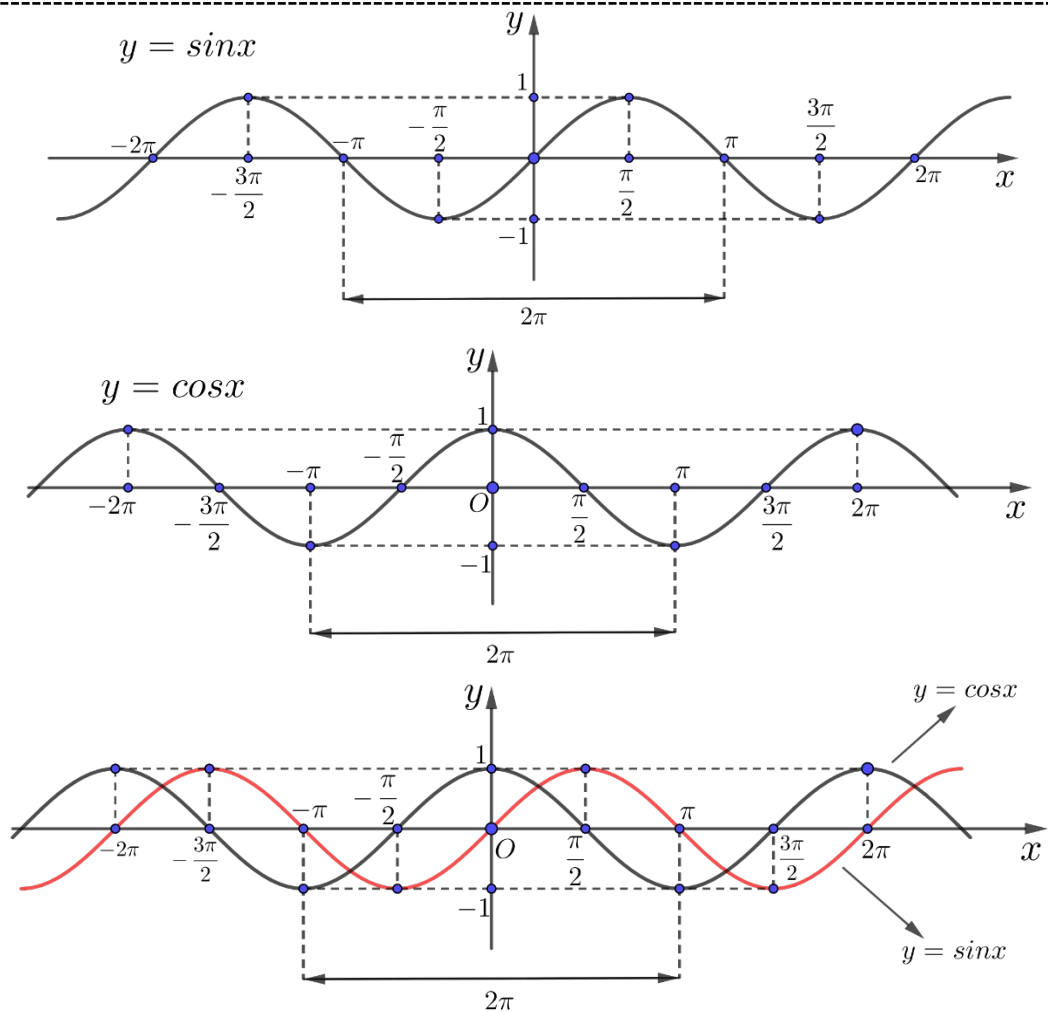
(2) Hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

### 3. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

	Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
<b>1. Định nghĩa:</b>	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với $\sin$ của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số $\sin$ . » Kí hiệu $y = \sin x$ .	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với $\cos$ của góc lượng giác có số đo $x$ radian được gọi là hàm số $\cos$ . » Kí hiệu $y = \cos x$ .
<b>2. Tập xác định:</b>	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
<b>3. Tập giá trị:</b>	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
<b>4. Tính chất</b>	Là hàm số lẻ.	Là hàm số chẵn.
<b>5. Chu kỳ</b>	Chu kỳ $2\pi$ .	Chu kỳ $2\pi$ .
<b>6. Đơn điệu</b>	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ . + Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ .	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ . + Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ .



7. Đồ thị



8. Giá trị đặc biệt

$$\begin{aligned} \sin x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\rho}{2} + k2\rho \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\rho \\ \sin x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\rho}{2} + k2\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x = -1 &\Leftrightarrow x = \rho + k2\rho \\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\rho}{2} + k\rho \\ \cos x = 1 &\Leftrightarrow x = k2\rho \end{aligned}$$

4. Đồ thị & tính chất hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$

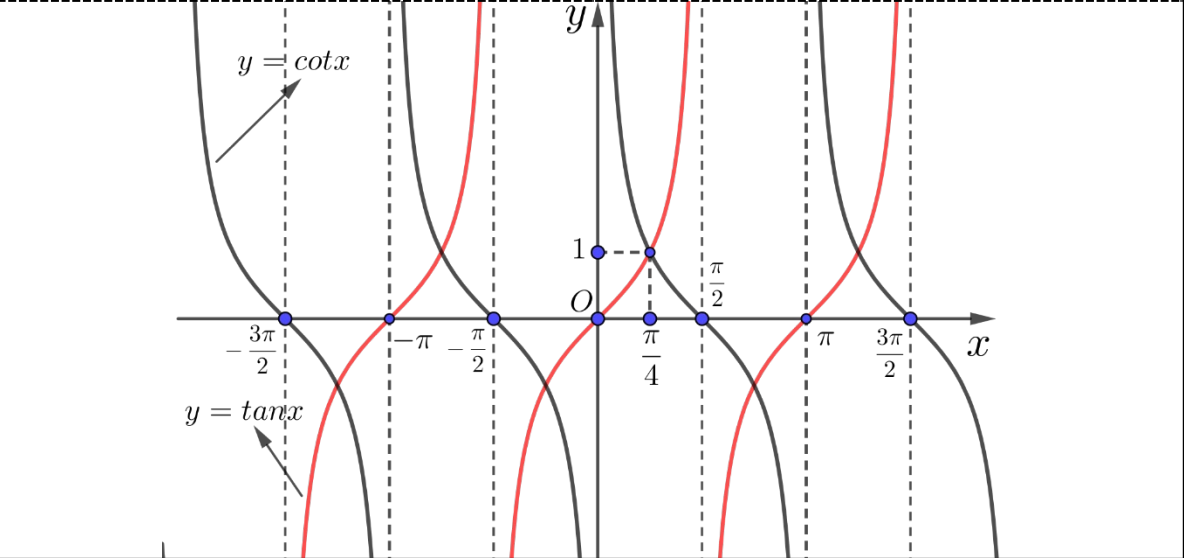
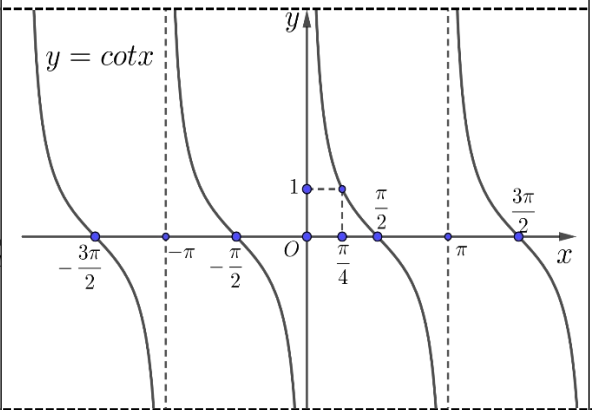
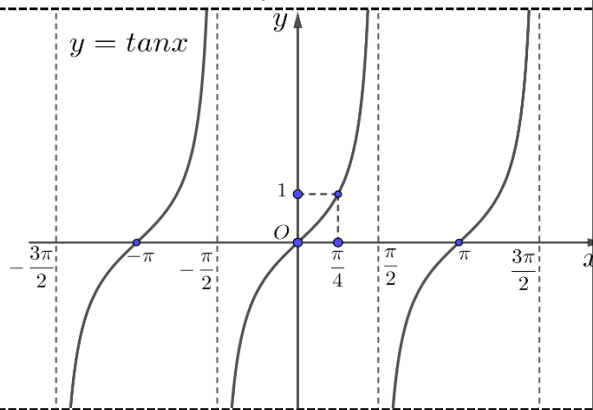
	Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
<b>1. Định nghĩa:</b>	Hàm số tan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ ( $\cos x \neq 0$ ) » Kí hiệu $y = \tan x$ .	Hàm số cotan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ ( $\sin x \neq 0$ ) » Kí hiệu $y = \cot x$ .
<b>2. Tập xác định:</b>	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\rho}{2} + k\rho, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{ k\rho, k \in \mathbb{Z} \}$
<b>3. Tập giá trị:</b>	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
<b>4. Tính chất hàm:</b>	Là hàm số lẻ.	Là hàm số lẻ.
<b>5. Chu kỳ:</b>	Chu kỳ $\rho$ .	Chu kỳ $\rho$ .
<b>6. Đơn điệu:</b>	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng	Hàm số nghịch biến trên mỗi



7. Đồ thị

$$\left( \frac{p}{2} + kp; \frac{3p}{2} + kp \right)$$

khoảng  $(kp; p + kp)$ .





**B**

**Các dạng bài tập**

**Dạng 1. Tập xác định**



**Phương**

Tập xác định hàm số lượng giác cơ bản:

» Hàm số  $y = \sin x; y = \cos x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

» Hàm số  $y = \tan x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

» Hàm số  $y = \cot x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Ngoài ra còn có các dạng:

»  $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  lưu ý  $Q(x) \neq 0$ .

»  $y = f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}$  thì  $y = f(x)$  có nghĩa khi  $Q(x) \geq 0$ .

$y = f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}}$  ,  $Q(x) > 0$



**Ví dụ 1.1.**

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1)  $y = \sin 4x$

(2)  $y = \sin \frac{3x+1}{x^2-1}$

(3)  $y = \cos \sqrt{x+2}$

(4)  $y = \cos \frac{2025}{\sqrt{3-x}}$

**Lời giải**

(1)  $y = \sin 4x$

Hàm số xác định với mọi số thực  $x$  nên hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

(2)  $y = \sin 4x$

Hàm số xác định khi  $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ .

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .

(3)  $y = \sin \frac{3x+1}{x^2-1}$

Hàm số xác định khi  $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ .

Tập xác định  $D = [-2; +\infty)$ .

(4)  $y = \cos \sqrt{x+2}$

Hàm số xác định khi  $3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$ .



Tập xác định  $D = (-\infty; 3)$ .



**Ví dụ 1.2.**

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1)  $y = \tan\left(x + \frac{\rho}{4}\right)$

(2)  $y = \cot\left(x - \frac{\rho}{3}\right)$

⇒ **Lời giải**

(1)  $y = \tan\left(x + \frac{\rho}{4}\right)$

Hàm số xác định khi  $\cos\left(x + \frac{\rho}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\rho}{4} \neq \frac{\rho}{2} + k\rho \Leftrightarrow x \neq \frac{\rho}{4} + k\rho (k \in \mathbb{Z})$

Do đó hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\rho}{4} + k\rho (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ .

(2)  $y = \cot\left(x - \frac{\rho}{3}\right)$

Hàm số xác định khi  $\sin\left(x - \frac{\rho}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\rho}{3} \neq k\rho \Leftrightarrow x \neq \frac{\rho}{3} + k\rho (k \in \mathbb{Z})$

Do đó hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\rho}{3} + k\rho (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ .



**Ví dụ 1.3.**

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1)  $y = \sqrt{3 + 2\cos x}$

(2)  $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\rho}{6}\right)$

(3)  $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

(4)  $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

⇒ **Lời giải**

(1)  $y = \sqrt{3 + 2\cos x}$

Hàm số xác định khi  $3 + 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{3}{2}$  (đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ ), vì  $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Suy ra tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

(2)  $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\rho}{6}\right)$

Điều kiện:  $\begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin\left(3x + \frac{\rho}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\rho}{2} + k2\rho \\ x \neq -\frac{\rho}{18} + \frac{k\rho}{3} \end{cases}$



$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{p}{2} + k2p, -\frac{p}{18} + \frac{kp}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vậy TXĐ:

$$(3) \quad y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$$

$$\sin 4x - \cos 3x = \sin 4x - \sin \left( \frac{p}{2} - 3x \right) = 2 \cos \left( \frac{x + \frac{p}{4}}{2} \right) \sin \left( \frac{7x - \frac{p}{4}}{2} \right)$$

Ta có:

$$\begin{cases} \cos 5x \neq 0 & \begin{cases} x \neq \frac{p}{10} + k\frac{p}{5} \\ x \neq \frac{p}{2} + k2p \\ x \neq -\frac{p}{14} + \frac{k2p}{7} \end{cases} \\ \cos \left( \frac{x + \frac{p}{4}}{2} \right) \neq 0 \\ \sin \left( \frac{7x - \frac{p}{4}}{2} \right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Điều kiện:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{p}{10} + \frac{kp}{5}; \frac{p}{2} + k2p, -\frac{p}{14} + \frac{k2p}{7} \right\}$$

Vậy TXĐ:

$$(4) \quad y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

$$y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{-\cos 2x} = -\frac{\sin x}{\cos 2x}$$

Hàm số xác định  $\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{p}{2} + kp \Leftrightarrow x \neq \frac{p}{4} + \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{p}{4} + \frac{kp}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .



## ▮ Dạng 2. Tính chẵn - lẻ



### Phương pháp

► **Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$

» **Hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = f(x)$ .

» **Hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in D$  ta có  $-x \in D$  và  $f(-x) = -f(x)$ .

► Để xác định **tính chẵn lẻ** của hàm số ta thực hiện theo các bước sau:

» **Bước 1:** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số, khi đó:

♦ Nếu  $D$  là tập đối xứng (tức là  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ), ta thực hiện tiếp **bước 2**.

♦ Nếu  $D$  không là tập đối xứng (tức là  $\exists x \in D$  mà  $-x \notin D$ ), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

» **Bước 2:** Xác định  $f(-x)$ , khi đó:

♦ Nếu  $f(-x) = f(x)$  kết luận hàm số là hàm chẵn.

♦ Nếu  $f(-x) = -f(x)$  kết luận hàm số là hàm lẻ.

♦ Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

► **Chú ý:**

① Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.

2. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn

3. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ.

4. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ.

② Công thức liên quan đến việc xử lý dấu “ - ”

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$$

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$|-x| = |x|$$

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{khi } n \in \mathbb{M} \\ -x^n & \text{khi } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



### Ví dụ 2.1.

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

(1)  $y = 3\cos x + \sin^2 x$

(2)  $y = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x}$

⇨ **Lời giải**

(1)  $y = 3\cos x + \sin^2 x$

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Lấy  $x \in \mathbb{R}$  ta có  $-x \in \mathbb{R}$  và  $y(-x) = 3\cos(-x) + \sin^2(-x) = 3\cos x + \sin^2 x = y(x)$ .

Do đó hàm số là hàm chẵn.



$$(2) y = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x}$$

Hàm số xác định khi  $\cos 3x \neq -1 \Leftrightarrow 3x \neq p + k2p \Leftrightarrow x \neq \frac{p}{3} + \frac{k2p}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{p}{3} + \frac{k2p}{3} (k \in \mathbb{Z}) \right\}$

Ta thấy nếu  $x \in D \Rightarrow \cos 3x \neq -1$  mà  $\cos(-3x) = \cos 3x \Rightarrow \cos(-3x) \neq -1 \Rightarrow -x \in D$

$$y(-x) = \frac{1 + \sin^2(-2x)}{1 + \cos(-3x)} = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x} = y(x)$$

Khi đó  
Do đó hàm số là hàm chẵn.



### Ví dụ 2.2.

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

(1)  $y = 2x \sin x$

(2)  $y = \cos x + \sin 2x$

(3)  $y = \frac{\cos 2x}{x}$

(4)  $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$

### ⇨ Lời giải

(1)  $y = 2x \sin x$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$  (1).

Đặt  $y = f(x) = 2x \sin x$ .

NX:  $\forall x \in D, f(-x) = 2(-x) \sin(-x) = 2x \sin x = f(x)$  (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số đã cho là hàm số chẵn.

(2)  $y = \cos x + \sin 2x$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Đặt  $y = f(x) = \cos x + \sin 2x$ .

Xét  $x = \frac{p}{3} \in D \Rightarrow -x = -\frac{p}{3} \in D$

$$f\left(\frac{p}{3}\right) = \cos \frac{p}{3} + \sin \frac{2p}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad f\left(-\frac{p}{3}\right) = \cos\left(-\frac{p}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2p}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta thấy  $f\left(\frac{p}{3}\right) \neq f\left(-\frac{p}{3}\right)$  nên hàm số đã cho không là hàm số chẵn

Và  $-f\left(\frac{p}{3}\right) \neq f\left(-\frac{p}{3}\right)$  nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.

(3)  $y = \frac{\cos 2x}{x}$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .



Đặt  $y = f(x) = \frac{\cos 2x}{x}$ .

Ta có  $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{-x} = -\frac{\cos(2x)}{x} = -f(x)$ .

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

(4)  $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$ .

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  là tập đối xứng do đó  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

Đặt  $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$ .

Ta có  $\forall x \in D: f(-x) = \tan^7(-2x) \sin(-5x) = \tan^7(2x) \sin(5x) = f(x)$ .

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

### Chú ý

Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

» Với câu (1)  $y = 2x \sin x$ :

*Chứng minh đồ thị hàm số  $y = 2x \sin x$  nhận trục tung làm trục đối xứng.*

» Với câu (3)  $y = \frac{\cos 2x}{x}$ :

*Chứng minh đồ thị hàm số  $y = \frac{\cos 2x}{x}$  nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.*

» Đồ thị của hàm số lẻ nhận **gốc tọa độ** làm **tâm đối xứng**.

» Đồ thị của hàm số chẵn nhận **trục Oy** làm **trục đối xứng**.



### ▣ Dạng 3. Tính tuần hoàn



#### Phương

► **Tính tuần hoàn** hàm số lượng giác cơ bản:

(1) Hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $2p$ .

(2) Hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$  là các hàm số tuần hoàn với chu kì  $p$ .

► Các kết quả có thể áp dụng:

(1) Hàm số  $y = A \cdot \sin(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2p}{|a|}$

(2) Hàm số  $y = A \cdot \cos(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2p}{|a|}$

(3) Hàm số  $y = A \cdot \tan(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{p}{|a|}$

(4) Hàm số  $y = A \cdot \cot(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{p}{|a|}$

(5) Nếu hàm số  $y = f(x)$  chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kì lần lượt là  $T_1, T_2, \dots, T_n$  thì hàm số  $f$  có chu kì  $T$  là bội chung nhỏ nhất của  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

(6) Nếu hàm số  $y = f(x)$  tuần hoàn với chu kì  $T$  thì hàm số  $y = f(x) + c$  ( $c$  là hằng số)

#### Chú ý

**Một số dấu hiệu nhận biết hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn**

Hàm số  $y = f(x)$  không phải là hàm tuần hoàn khi **một** trong các điều kiện sau bị vi phạm:

(1) Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.

(2) Tồn tại số  $a$  sao cho hàm số không xác định với  $x > a$  hoặc  $x < a$ .

(3) Phương trình  $f(x) = k$  có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.

(4) Phương trình  $f(x) = k$  có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$x_1 < x_2 < \dots, |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0, \dots$$

#### Ví dụ 3.1.

Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

(1)  $y = 1 - \sin 5x$

(2)  $y = \cos^2 x - 1$

(3)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

(4)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3} \cdot x)$

👉 **Lời giải**

(1)  $y = 1 - \sin 5x$



Hàm số  $y = 1 - \sin 5x$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_1 = \frac{2p}{5}$ .

(2)  $y = \cos^2 x - 1$

Hàm số  $y = \cos^2 x - 1 = \frac{\cos 2x - 1}{2}$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_2 = p$ .

(3)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

Hàm số  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$  tuần hoàn và có chu kỳ  $T_2 = \frac{5p}{2}$ .

(4)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Hàm số  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$  không tuần hoàn

Vì ta có hàm số  $y = \cos x$  có chu kỳ  $T_1 = 2p$  và hàm số  $y = \cos(\sqrt{3}x)$  có chu kỳ  $T_2 = \frac{2p}{\sqrt{3}}$  nhưng không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của  $T_1 = 2p$  và  $T_2 = \frac{2p}{\sqrt{3}}$



### Ví dụ 3.2.

Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau:

(1)  $y = \cos^2 x - 1$

(2)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

(3)  $y = \sin \frac{3x+1}{x^2-1}$

(4)  $y = \cos \sqrt{x+2}$

### Lời giải

(1)  $y = \cos^2 x - 1$

Ta biến đổi:  $y = \cos^2 x - 1 = \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$ .

**Áp dụng:** Hàm số  $y = A \cdot \cos(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kì

$$T = \frac{2p}{|a|}$$

Do đó  $f$  là hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2p}{2} = p$ .

(2)  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$

Ta biến đổi:  $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$ .



**Áp dụng:** Hàm số  $y = A \cdot \sin(ax + b)$  ( $A, a \neq 0$ ) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2}$$

Do đó  $f$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ

(3)  $y = \cos x + \cos(\sqrt{3} \cdot x)$

Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn  $\Rightarrow$  có số thực dương  $T$  thỏa :

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(x+T) + \cos\sqrt{3}(x+T) = \cos x + \cos\sqrt{3}x$$

$$x=0 \Rightarrow \cos T + \cos\sqrt{3}T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos\sqrt{3}T = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 2n\pi \\ \sqrt{3}T = 2m\pi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} \text{ vô lí,}$$

Do  $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n}$  là số hữu tỉ.

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.



## ▮ Dạng 4. Giá trị lớn nhất - nhỏ nhất



### Phương pháp

► Ta có tập giá trị của hàm số  $y = \sin x; y = \cos x$  đều là  $[-1; 1]$ , tức là  $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$ .  
Từ đó ta có các hệ quả sau:

$$(1) \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq |\cos x| \leq 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \end{cases}$$

$$a \leq P(x) \leq b \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{P(x)} \geq \frac{1}{b}$$



### Ví dụ 4.1.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$(1) y = 4 - 3 \sin 5x$$

$$(2) y = -2 |\sin x|$$

$$(3) y = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 2x + 1$$

$$(4) y = \sin x, x \in \left[-\frac{p}{4}; \frac{p}{4}\right]$$

### ⇨ Lời giải

$$(1) y = 4 - 3 \sin 5x$$

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Leftrightarrow -3 + 4 \leq 4 - 3 \sin x \leq 3 + 4 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 7$ .

Do đó:  $\max y = 7 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} + k2p (k \in \mathbb{Z})$ .

$\min y = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + k2p (k \in \mathbb{Z})$ .

$$(2) y = -2 |\sin x|$$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -2 |\sin x| \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq y \geq 1$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $3 \Leftrightarrow |\sin x| = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = kp, k \in \mathbb{Z}$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $1 \Leftrightarrow |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + kp, k \in \mathbb{Z}$ .

$$(3) y = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 2x + 1$$

$$y = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 2x + 1 = \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 2x \right) + 1$$

Đặt  $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (a \in (0; p))$

Ta có  $y = \sqrt{3} (\cos a \sin 2x + \sin a \cos 2x) + 1 = \sqrt{3} \sin(2x + a) + 1$

Ta có:



$$-1 \leq \sin(2x+a) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \sin(2x+a) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} + 1 \leq \sqrt{3} \sin(2x+a) + 1 \leq \sqrt{3} + 1$$

Do đó:  $\max y = 1 + \sqrt{3}$  đạt được khi  $\sin(2x+a) = 1$

$\min y = 1 - \sqrt{3}$  đạt được khi  $\sin(2x+a) = -1$ .

$$(4) \quad y = \sin x, x \in \left[-\frac{p}{4}; \frac{p}{4}\right]$$

Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $(-p; p)$  nên

$$\text{Với } x \in \left[-\frac{p}{4}; \frac{p}{4}\right] \Rightarrow \sin\left(-\frac{p}{4}\right) \leq \sin x \leq \sin\left(\frac{p}{4}\right) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó  $\max y = \frac{\sqrt{2}}{2}$  đạt được khi  $x = \frac{p}{4}$ ;  $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  đạt được khi  $x = -\frac{p}{4}$ .



### Ví dụ 4.2.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

(1)  $y = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

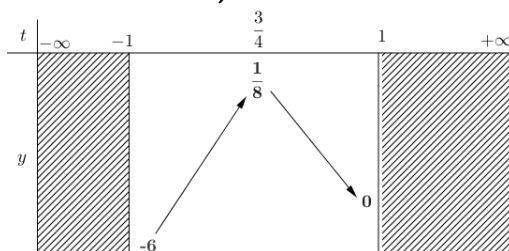
(2)  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

### ⇨ Lời giải

(1)  $y = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$

Đặt  $\sin x = t$  ( $|t| \leq 1$ ), hàm số có dạng:  $y = -2t^2 + 3t - 1$ .

Xét hàm số  $y = -2t^2 + 3t - 1$  trên  $[-1; 1]$ , hàm số có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:

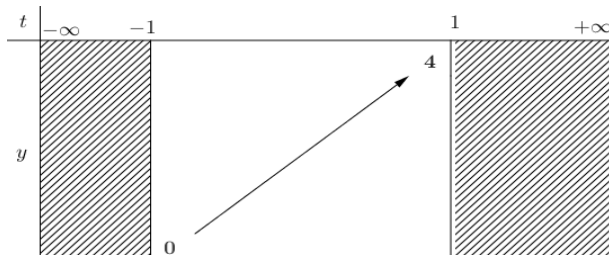
Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-6 \Leftrightarrow t = -1$  tức là  $\sin x = -1$

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $\frac{1}{8} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$  tức là  $\sin x = \frac{3}{4}$

(2)  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

Hàm số được viết lại thành  $y = 1 - \sin^2 x + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3$

Đặt  $t = \sin x$  ( $|t| \leq 1$ ), xét hàm số  $y = -t^2 + 2t + 3$  trên  $[-1; 1]$  có BBT như sau:



Nhìn vào BBT ta thấy:



- ⊛ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $0 \Leftrightarrow t = -1$  tức  $\sin x = -1$ .
- ⊛ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $4 \Leftrightarrow t = 1$  tức là  $\sin x = 1$ .

**Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com**  
<https://www.vn teach.com>