
MỤC LỤC

Nội dung	Trang
Lời mở đầu	2
§1. Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ	3
1. Một số quy ước khi đọc chuyên đề	3
2. Phương pháp đặt ẩn phụ	3
3. Phương pháp đánh giá	10
4. Phương pháp lượng giác	13
5. Một số Phương pháp khác	15
§2. Một số bài tập tự làm	16
Kết luận	18

LỜI MỞ ĐẦU

Toán học có một vẻ đẹp lôi cuốn, trong vẻ đẹp lôi cuốn đầy huyền bí đó thì các bài toán liên quan đến phương trình vô tỷ lại có nét đẹp riêng. Có lẽ vì lí do đó mà trong các kì thi học sinh giỏi, thi đại học thường có mặt bài toán liên quan đến phương trình vô tỷ để thách thức các nhà toán học tương lai.

Chuyên đề: “Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ” với mong muốn phần nào giúp các thầy cô và các em học sinh có thể tìm thấy nhiều điều bổ ích và thú vị đối với dạng toán này. Với mỗi ví dụ trong từng phương pháp giải, người đọc có thể tự sáng tác cho mình những bài toán với những con số mà mình thích. Tuy nhiên chuyên đề này khó có thể tránh được sai sót, vì vậy tôi mong nhận được sự động viên và những ý kiến đóng góp chân thành của bạn đọc để chuyên đề được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

§1. Mét sè ph-ng ph,p giñi ph-ng trxn nh v« tũ

1. mét sè quy íc khi ®äc chuyªn ®Ò

1.1 Vt: VÕ tr,i cña ph-ng trxn nh. Vt²: Bxn nh ph-ng cña vÕ tr,i ph-ng trxn nh.

1.2 Vp: VÕ phñi cña ph-ng trxn nh. Vp²: Bxn nh ph-ng cña vÕ phñi ph-ng trxn nh.

1.3 Vt⁽¹⁾: VÕ tr,i cña ph-ng trxn nh (1).

1.4 Vp⁽¹⁾: VÕ phñi cña ph-ng trxn nh (1).

1.5 §k, ®k: §iÒu kiÖn.

1.6 B§T: BÊt ®¼ng thøc.

2. Ph-ng ph,p ®Æt Èn phô

2.1 Mét sè lu ý

Khi giñi ph-ng trxn nh v« tũ b»ng ph-ng ph,p ®Æt Èn phô ta cã thÓ gÆp c,c d¹ng nh:

2.1.1 §Æt Èn phô ®a ph-ng trxn nh ®· cho vÒ ph-ng trxn nh ®¹i sè kh«ng cßn chøa cñn thøc víi Èn míi lụ Èn phô.

2.1.2 §Æt Èn phô mụ vÈn cßn Èn chÝnh, ta cã thÓ tÝnh Èn nuy theo Èn kia.

2.1.3 §Æt Èn phô ®Ó ®a ph-ng trxn nh vÒ hÖ hai ph-ng trxn nh víi hai Èn lụ hai Èn phô, còng cã thÓ hai Èn gãm mét Èn chÝnh vù mét Èn phô, thêng khi ®ã ta ®íc mét hÖ ®èi xøng.

2.1.4 §Æt Èn phô ®Ó ®íc ph-ng trxn nh cã hai Èn phô, ta biÖn ®æi vÒ ph-ng trxn nh tÝch víi vÕ phñi b»ng 0.

Thêng giñi ph-ng trxn nh ta hay biÖn ®æi t-ng ®-ng, nõu biÖn ®æi hÖ quñ thx nhí phñi thö l¹i nghiÖm.

2.2 Mét sè vÝ dô

VÝ dô 1. Giñi c,c ph-ng trxn nh sau:

$$1) \quad 18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0.$$

$$2) \quad x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

$$3) \quad \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

$$4) \quad 2x^2 + \sqrt{1 - x} + 2x\sqrt{1 - x^2} = 1.$$

Híng đến (HD): 1) §Et $\sqrt{x} = y$ vớ $y \geq 0$. Khi ã ph-ng tr-nh ã cho trê thụn $(3y^2 - 4y - 2)(6y^2 + 2y + 1) = 0$, suy ra $(3y^2 - 4y - 2) = 0$, ta ã $y = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$. Tõ ã ph-ng tr-nh cả nghiÖm lư $x = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{9}$.

2) Ta cả $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$, vớ mãi x .

MÆt kh,c $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$.

§Et $y = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$ (cã thÓ viÖt ã $y \geq 0$ hoÆc chÝnh x,c h-n lư

$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \sqrt{3}$), ta ã

$$2y^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + \sqrt{3}y - 3 = 0, \text{ ta ã } y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (lõ } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Tõ ã ph-ng tr-nh cả nghiÖm lư $x = 1$.

3) Ta thÊ $x < 0$ kh-ng tháa m-n.

Khi ã ph-ng tr-nh t-ng ã vớ hÖ

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right) > 0 \\ \left(\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}\right)^2 = \left(4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2 \end{cases}.$$

$$\text{§Et } x + \frac{1}{x} = y, \text{ ta ã } \begin{cases} 2 \leq y < 4(1) \\ 4 - (y^2 - 2) + 2\sqrt{5 - 2(y^2 - 2)} = (4 - y)^2(2) \end{cases}.$$

XĐt (2) $\Leftrightarrow \sqrt{9-2y^2} = y^2 - 4y + 5 \Leftrightarrow y^4 - 8y^3 + 28y^2 - 40y + 16 = 0$ (do hai vế không âm).

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^3 - 6y^2 + 16y - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)((y-2)(y^2 - 4y + 8) + 8) = 0$$

Đến đây $y=2$ (do $((y-2)(y^2 - 4y + 8) + 8) > 0$ với mọi y thỏa mãn (1)).

Tổ chức phần trình bày của nghiệm lại $x=1$.

Nhận xét: Bụi toán học ta cần tổ chức bằng Phương pháp phân tích trong phần sau.

4) Ta cần trình bày từng bước với

$$\sqrt{1-x} = 1 - 2x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x = 1 + 4x^4 + 4x^2(1-x^2) - 4x^2 - 4x\sqrt{1-x^2} + 8x^3\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1 - 4\sqrt{1-x^2} + 8x^2\sqrt{1-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 4\sqrt{1-x^2} + 8x^2\sqrt{1-x^2} = 0 \end{cases} (1)$$

XĐt (1), xét $y = \sqrt{1-x^2}$, suy ra $y \geq 0$ và $x^2 = 1-y^2$.

Ta có $1 - 4y + 8y(1-y^2) = 0 \Leftrightarrow 8y^3 - 4y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2y+1)(4y^2 - 2y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \text{ Tổ chức suy ra}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Thế lại ta có nghiệm của phương trình lại $x=0$ và $x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$

Nhận xét: Bụi toán học ta cần tổ chức bằng Phương pháp phân tích trong phần sau.

VÝ DỤ 2. Giải phương trình $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2 + 1}.$

HD: Xét $\sqrt{x^2 + 1} = y$, với $y \geq 1$. Khi đó ta có $y^2 + 3x = (x+3)y$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y-x) = 0.$$

Đến @ Õn $y=3$ vµ $y=x$. Tõ @ ã ph-ng trnh cũ nghiÕm lµ $x = \pm\sqrt{2}$.

VÝ dõ 3. Gi¶i ph-ng trnh $\sqrt[4]{17-x^8} - \sqrt[3]{2x^8-1} = 1$.

HD: §Æt $\sqrt[4]{17-x^8} = y$ ví $y \geq 0$ vµ $\sqrt[3]{2x^8-1} = z$. Khi @ ã ta @íc hÕ

$$\begin{cases} y-z=1 \\ 2y^4+z^3=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y-1 \\ 2y^4+(y-1)^3=33 \end{cases}$$

XÐt $2y^4+(y-1)^3=33 \Leftrightarrow (y-2)(2y^3+5y^2+7y+17)=0$.

Suy ra @íc $y-2=0$. Tõ @ ã nghiÕm cũa ph-ng trnh lµ $x = 1$ vµ $x = -1$.

VÝ dõ 4. Gi¶i cũc ph-ng trnh sau:

1) $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$.

2) $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$.

HD: 1) §Æt $\sqrt{4-x^2} = y$, ví $0 \leq y \leq 2$.

Khi @ ã ta @íc hÕ $\begin{cases} x+y=2+3xy \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$.

ThÕ hoÆc l¶i @Æt $x+y=S; xy=P$ rãi gi¶i tiÕp ta @íc nghiÕm cũa ph-ng trnh lµ

$$x=0; x=2 \text{ vµ } x = \frac{-2-\sqrt{14}}{3}.$$

2) §Æt $\sqrt[3]{81x-8} + 2 = 3y \Rightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y$.

Khi @ ã ta @íc hÕ $\begin{cases} 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y \\ 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x \end{cases}$.

XÐt hiÕu hai ph-ng trnh đến @ Õn $x=y$

(do $\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + \frac{1}{3} > 0$).

Thay vµo hÕ vµ gi¶i ph-ng trnh ta @íc $x=0; x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

VÝ dō 5. Gi¶i ph¬ng tr×nh $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$.

HD: §k $x \geq 5$. V¶i ®iÖu kiÖn ®ã ta biÖn ®æi ph¬ng tr×nh ® cho nh sau:

$$\begin{aligned}\sqrt{5x^2+14x+9} &= \sqrt{x^2-x-20} + 5\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow 5x^2+14x+9 &= x^2-x-20+25(x+1)+10\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)} \\ \Leftrightarrow 2x^2-5x+2 &= 5\sqrt{(x+1)(x-5)}\sqrt{x+4} \\ \Leftrightarrow 2(x+1)(x-5)+3(x+4) &= 5\sqrt{(x+1)(x-5)}\sqrt{x+4}\end{aligned}$$

§Æt $\sqrt{(x+1)(x-5)} = y; \sqrt{x+4} = z$, v¶i $y \geq 0; z \geq 3$.

Ta ®¶c $2y^2+3z^2=5yz \Leftrightarrow (y-z)(2y-3z)=0$, t¶i ®ã ta ®¶c $\begin{cases} y=z \\ y=\frac{3}{2}z \end{cases}$.

NÖu $y=z$ th× ta ®¶c $x = \frac{5+\sqrt{61}}{2}$ (do $x \geq 5$).

NÖu $y = \frac{3}{2}z$ th× ta ®¶c $x=8; x=-\frac{7}{4}$. V¶y ph¬ng tr×nh c¶ ba nghiÖm tr¶n.

VÝ dō 6. Gi¶i ph¬ng tr×nh $7x^2+7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$, v¶i $x > 0$.

NhËn xÐt: D¶ng ph¬ng tr×nh nµy ta thêng ®Æt $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = ay+b$, sau ®ã b×nh ph¬ng l¶n r¶i ta “cè ý” biÖn ®æi vÒ hÖ ®èi x¶ng v¶i hai Ën x, y . T¶i ®ã ta s¶ biÖt ®¶c gi¶ tr¶ c¶a a, b . V¶i b¶i to¶n nµy ta t×m ®¶c $a=1; b=\frac{1}{2}$. (NÖu $a=1$ vµ $b=0$ mµ gi¶i ®¶c th× ®ã lµ ph¬ng tr×nh qu¶ ®¶n gi¶n, ta kh¶ng xÐt Ë ®©y).

HD: §Æt $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = y + \frac{1}{2}$, do $x > 0$ n¶n $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} > \sqrt{\frac{9}{28}} > \frac{1}{2}$, t¶i ®ã $y > 0$.

$$\text{Ta ®íc hÖ} \begin{cases} 7x^2 + 7x = y + \frac{1}{2} \\ 7y^2 + 7y = x + \frac{1}{2} \\ x, y > 0 \end{cases}. \text{Gi¶i hÖ b×nh thêng theo d¹ng ta ®-}$$

$$\text{íc } x = \frac{-6 + \sqrt{50}}{14}.$$

NhËn xÐt: Khi gi¶i mét ph¬ng tr×nh kh«ng ph¶i lóc nµo còng c¶ nghiÖm thùc, c¶ nh÷ng ph¬ng tr×nh v« nghiÖm nhng khi cho hãc sinh lµm bµi ta còng kiÓm tra ®íc n¬ng lúc c¶ hãc sinh khi tr×nh bÇy lêi gi¶i bµi to¸n ®ã. Ch¼ng h¹n nh bµi to¸n trong vÝ dô nµy.

HD: §Æt $\sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt{2 - x^3} = y$ vói $y \geq 0$. Khi ®ã ta ®íc hÖ $\begin{cases} x^2 = y^3 + 2 \\ x^3 = 2 - y^2 \end{cases}$ vµ tï ph¬ng tr×nh ban ®Çu ta c¶ $x \leq -\sqrt{2}$. XÐt hiÖu hai ph¬ng tr×nh c¶ hÖ ta ®íc ph¬ng tr×nh $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - x + y) = 0$.

Vói $x = -y$ th× $x = -\sqrt[3]{x^2 - 2}$, dËn ®Õn v« nghiÖm.

Cßn $x^2 - xy + y^2 - x + y = (y - x)(1 - x) + y^2 > 0$ vói mãi $y \geq 0$ vµ $x \leq -\sqrt{2}$. Do ®ã hÖ v« nghiÖm hay ph¬ng tr×nh ®· cho v« nghiÖm.

2.3 Mét sè bµi tËp t¬ng tù

Bµi 1. Gi¶i c¸c ph¬ng tr×nh sau:

1) $x^2 + \sqrt{2 - x} = 2x^2 \sqrt{2 - x}.$

(HD: §Æt $y = \sqrt{2 - x}; y \geq 0$, ta ®íc $(y - 1)(y^2 + y - 1)(2y^2 - y - 4) = 0$.)

Tï ®ã $y = 1; y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; y = \frac{\sqrt{33} + 1}{8}$ vµ ®íc nghiÖm c¶ ph¬ng tr×nh

lµ

$$x = 1; x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; x = -\frac{\sqrt{33} + 1}{8}.$$

$$2) \quad 2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}.$$

(HD: Tổ ph-nh tr-xnh suy ra $x \neq 1$. §Æt $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} = y$, b-xnh ph-nh d-én ®Ön $y \geq \sqrt{3+2\sqrt{3}}$. Ph-nh tr-xnh trë thnh $2y^2 - 7y + 3 = 0$, ta ®-c $y = 3$. T- ®ã $x = 4 \pm \sqrt{6}$).

Bµi 2. Gi¶i ph-nh tr-xnh $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$.

(HD: §Æt $\sqrt{x^2 + 1} = y$, víi $y \geq 1$. T- ®ã ta ®-c $y = \frac{1}{2}$ v $y = 2x - 1$.

Ph-nh tr-xnh cã nghiÖm $x = \frac{4}{3}$).

Bµi 3. Gi¶i c-c ph-nh tr-xnh sau:

$$1) \quad 3(2 + \sqrt{x - 2}) = 2x + \sqrt{x + 6}.$$

(HD: §Æt $3\sqrt{x - 2} = y, \sqrt{x + 6} = z$, víi $y \geq 0; z \geq 0$.

Ta ®-c $x = 3$ v $y + z = 4$. T- ®ã ph-nh tr-xnh cã 2 nghiÖm $x = 3; x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$).

$$2) \quad \sqrt{2 - \sqrt{2}(1+x)} + \sqrt[4]{2x} = 1.$$

(HD: §k $0 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$. §Æt $\sqrt{2 - \sqrt{2}(1+x)} = \sqrt[4]{2}y \Leftrightarrow y = \sqrt{\sqrt{2} - 1 - x}$

vµ $\sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{2}z \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{x}$ víi $y \geq 0; z \geq 0$.

Suy ra $\begin{cases} \sqrt[4]{2}(y+z) = 1(1) \\ y^2 + z^4 = \sqrt{2} - 1(2) \end{cases}$. T- (1) thay $y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - z$ vµo (2) ta ®-c

$(z^2 + 1)^2 - (z + \frac{1}{\sqrt[4]{2}})^2 = 0$. XÐt hiÖu hai b-xnh ph-nh suy ra

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{4 - 3\sqrt[4]{2}}}{2}.$$

Tổ ®ã ta ®îc nghiÖm cña ph¬ng tr×nh lµ $x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{\frac{4 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2} \right)^4$.

Bµi 4. Gi¶i ph¬ng tr×nh $x^2 - x - 1000\sqrt{1+8000x} = 1000$.

(HD: §Æt $1 + \sqrt{1+8000x} = 2y$, ta ®îc $\begin{cases} x^2 - x = 2000y \\ y^2 - y = 2000x \end{cases}$ (*).

Tổ (*) suy ra $(x - y)(x + y + 1999) = 0$ vµ , do ®ã $x + y + 1999 > 0$.

Suy ra $x = y$, ta ®îc nghiÖm $x = 2001$, lo¹i $x = 0$).

Bµi 5. Gi¶i c¸c ph¬ng tr×nh sau:

1) $\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2+2} = \frac{2}{5}$.

(HD: §Æt $y = \sqrt{x+1} \geq 0; z = \sqrt{x^2 - x + 1}$, ta ®îc

$$5yz = 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow \frac{5y}{z} = 2\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{z}\right)^2 - \frac{5y}{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{z} = 2 \vee \frac{y}{z} = \frac{1}{2}.$$

NÕu $\frac{y}{z} = 2$ ta ®îc $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases}$ (v« nghiÖm).

NÕu $\frac{y}{z} = \frac{1}{2}$ ta ®îc $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$ (th¸a

m·n)).

2) $2x^2 - 5x + 2 = 4\sqrt{2(x^3 - 21x - 20)}$.

(HD: §k $\begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{cases}$. §Æt $\sqrt{2x^2 - 8x - 10} = y$ vµ $\sqrt{x+4} = z$, víi $y \geq 0; z \geq 0$.

Khi ®ã ta ®îc $(y - z)(y - 3z) = 0$. Tổ ®ã ph¬ng tr×nh c¸ bèn

nghiÖm lµ $x = \frac{9 \pm \sqrt{193}}{4}$ vµ $x = \frac{17 \pm 3\sqrt{73}}{4}$).

Bµi 6. Gi¶i c¸c ph¬ng tr×nh sau:

1) $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$.

(HD: §Æt $\sqrt{x+5}=y-2$, ta ®íc $x=-1; x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$).

2) $2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$, ví $x \geq 1$.

(HD: §Æt $\sqrt{\frac{x+3}{2}}=y+1$, ®íc $x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} < 1$ (lo¹i), nÕu $x \geq -1$ thx $x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$).

3) $27x^2+18x=\sqrt{x+\frac{4}{3}}$, ví $x > 0$.

(HD: T¬ng tù, ta ®íc $x=\frac{-5+\sqrt{37}}{18}$).

3. Ph¬ng ph¬p ®¬nh gi.

3.1 Mét sè lu ý

Khi gi¶i ph¬ng tr¬nh v« tû (ch¼ng h¹n $f(x)=g(x)$) b¬ng ph¬ng ph¬p ®¬nh gi, thêng lû ®Ó ta chØ ra ph¬ng tr¬nh chØ cã mét nghiÖm (nghiÖm duy nhÊt). Ta thêng sÏ dông c, c bÊt ®¼ng thøc cæ ®iÖn C« si, Bunhiacopxki, ®a vÕ tr, i vÒ tæng b¬nh ph¬ng c, c biÓu thøc, ®ång thêi vÕ ph¶i b¬ng 0. Ta còng cã thÓ sÏ dông tÝnh ®¬n ®iÖu cña hµm sè (cã thÓ thÊy ngay hoÆc sÏ dông ®¹o hµm xÐt sù biÕn thi¹n cña hµm sè) ®Ó ®¬nh gi, mét c, ch hîp lý.

Thêng ta ®¬nh gi, nh sau:
$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x) \geq C (\leq C) \Leftrightarrow f(x)=g(x)=C, \text{ hoÆc} \\ g(x) \leq C (\geq C) \end{cases}$$

®¬nh gi, $f(x) \geq g(x)$ còng nh lû $f(x) \leq g(x) \dots$

Ngoµi ra ®èi víi bµi cô thÓ nµo ®ã ta sÏ cã c, ch ®¬nh gi, kh, c.

Còng cã mét sè ph¬ng tr¬nh v« tû cã nhiÖu h¬n mét Èn mû ta gi¶i b¬ng ph¬ng ph¬p ®¬nh gi,.

3.2 Mét sè vÝ dō

VÝ dō 1. Gi¶i ph¬ng tr×nh $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$.

HD: Bµi to¸n nµy c¸ trong ®Ò thi vµo §¹i h¸c B¸ch Khoa vµ §HQG n¸m 2001. Bµi nµy c¸ nhiÖu c¸ch gi¶i, ®¸p ¸n sô dōng ®¹o hµm.

Ta c¸ thÓ lµm ®¬n gi¶n nh sau: Ta thÊy $x = \frac{1}{2}$ lµ nghiÖm c¸a ph¬ng tr×nh.

NÕu $x > \frac{1}{2}$ th× $\forall t > 1 = Vp$.

NÕu $x < \frac{1}{2}$ th× $\forall t < 1 = Vp$.

Do ®¸ ph¬ng tr×nh kh«ng c¸ nghiÖm trong hai trêng hîp nµy.

VÊy ph¬ng tr×nh c¸ mét nghiÖm lµ $x = \frac{1}{2}$.

VÝ dō 2. Gi¶i ph¬ng tr×nh $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$.

HD: Bµi nµy qu¸ ®¬n gi¶n, ®¸nh gi¸ $\forall t \geq 5$ cßn $Vp \leq 5$, do ®¸ hai vÕ cïng b»ng 5. Ta ®îc ph¬ng tr×nh c¸ nghiÖm duy nhÊt lµ $x = -1$.

VÝ dō 3. Gi¶i ph¬ng tr×nh $2\sqrt[4]{27x^2+24x+\frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x+6}$.

HD: Ph¬ng tr×nh ®· cho t¬ng ®¬ng vói ph¬ng tr×nh

$$2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3}+4} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}, \text{ ®k } x \geq -\frac{4}{9}. \text{ §Æt } (9x+4)=y, \text{ suy ra } y \geq 0.$$

Khi ®¸ ta ®îc $2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}+4} = 1 + \sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 4\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}+4} = 1 + \frac{3y}{2} + \sqrt{6y}$ (b×nh ph¬ng hai vÕ).

Theo B&T C«-si ta ®íc $\sqrt{6y} \leq \frac{y+6}{2}$, do ®ã

$$4\sqrt{\frac{y^2}{3}+4} \leq 2y+4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{y^2}{3}+4\right) \leq (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2+48 \leq 3y^2+12y+12$$

$$\Leftrightarrow y^2-12y+36 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-6)^2 \leq 0.$$

Tõ ®ã ta ®íc $y=6$, suy ra $x=\frac{2}{9}$ tháa m·n ®k.

Vÿ ph-ng tr×nh cũ nghiÖm duy nhÊt lµ $x=\frac{2}{9}$.

VÝ dõ 5. Gi¶i ph-ng tr×nh $\frac{x-3x^2}{2}+\sqrt{2x^4-x^3+7x^2-3x+3}=2$.

HD: Ph-ng tr×nh ®· cho t-ng ®-ng ví

$$\sqrt{(2x^2-x+1)(x^2+3)}=\frac{3x^2-x+4}{2}=\frac{(2x^2-x+1)+(x^2+3)}{2} \quad (1). \quad \text{Ph-ng tr×nh}$$

x , c ®¶nh víi mãi x lµ sè thùc. Theo B&T C«-si cho hai sè d-ng ta ®íc :

$$Vt(1) \leq Vp(1).$$

Do ®ã (1) $\Leftrightarrow 2x^2-x+1=x^2+3 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$. Tõ ®ã ph-ng tr×nh cũ nghiÖm lµ $x=-1$ vµ $x=2$.

VÝ dõ 6. Gi¶i ph-ng tr×nh $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

HD: §k $\begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$. Víi ®k ®ã, ph-ng tr×nh ®· cho t-ng

$$\text{®-ng víi ph-ng tr×nh: } \sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+x+\frac{1}{x}=4 \quad (1).$$

theo B&T Bunhiacopxki, ta ®íc $\begin{cases} (\sqrt{2-x^2}+x)^2=(\sqrt{2-x^2}.1+x.1)^2 \leq 4 \\ \left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)^2=\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}.1+\frac{1}{x}.1\right)^2 \leq 4 \end{cases}$.

Suy ra $\forall t(1) \leq 4 = V_p(1)$. Do $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x^2} + x = 2 \\ \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 2 \end{cases}$, nghĩa là

đều bằng trong họ xảy ra. Tổ hợp phương trình cả nghiệm duy nhất là $x=1$.

VÝ DỤ 7. Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$.

HD: $-1 \leq x \leq 1$.

Với k là phương trình tổng hợp với

$$|x|(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})=16 \Leftrightarrow x^2(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})^2=256(1)$$

Theo BĐT Bunhiacopski, ta có

$$\begin{aligned} (13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})^2 &= (\sqrt{13}\sqrt{13}\sqrt{1-x^2}+3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{1+x^2})^2 \\ &\leq (13+27)(13(1-x^2)+3(1+x^2)) \\ &= 40(16-10x^2). \end{aligned}$$

Theo BĐT C«-si cho hai số dương ta có

$$10x^2(16-10x^2) \leq \left(\frac{10x^2+(16-10x^2)}{2} \right)^2 = 64.$$

Do $\forall t(1) \leq 4.64=256$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16-10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-9x^2 = 1+x^2 \\ 20x^2 = 16 \end{cases}. \text{ Tổ hợp đến } x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy phương trình cả hai nghiệm là $x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. Phương pháp lượng giác

4.1 Môt số lưu ý

Khi giải phương trình về tử bằng phương pháp lượng giác ta cần chú ý

$$f(x) = \sin \alpha \quad \text{nếu} \quad f(x) \in [-1; 1] \quad \text{với} \quad \text{điều kiện} \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{hoặc}$$

$$f(x) = \cos \alpha \quad \text{với} \quad \text{điều kiện}$$

$\alpha \in [0; \pi]$. Cùng cả khi $f(x) = \tan \alpha; f(x) = \cot \alpha \dots$ Ở đây ta phân tích cho vò phương trình lượng giác. Giải phương trình lượng giác rồi sẽ tìm nghiệm của phương trình cho.

4.2 Mét sè vÝ dō

VÝ dō 1. Giải phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$.

HD: Xét $x = \cos y, y \in (0; \pi), y \neq \frac{\pi}{2}$. Phương trình cho trở thành

$$\frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\sin y} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin y + \cos y = \sqrt{2} \cdot \sin 2y. \text{ Xét } \sin y + \cos y = z, -\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}.$$

suy ra $\sin 2y = 2 \sin y \cos y = z^2 - 1$, ta có $z = \sqrt{2}$ và $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Với $z = \sqrt{2}$ thì $y = \frac{\pi}{4}$, do đó $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Với $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y = \frac{11\pi}{12}$, do đó $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

VÝ dō 2. Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

HD: Xét $-1 \leq x \leq 1$.

Xét $x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $\cos y \geq 0$.

Khi đó phương trình trở thành $\sin^3 y + \cos^3 y = \sqrt{2} \sin y \cos y$.

Xét $\sin y + \cos y = z, z \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ (chính xác là $z \in [-1; \sqrt{2}]$), biến

thay phương trình ta có $z^3 + \sqrt{2}z^2 - 3z - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2} - 1)(z + \sqrt{2} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \vee z = 1 - \sqrt{2}.$$

Nếu $z = \sqrt{2}$ thì $\sin y = \frac{\pi}{4}$, do đó $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Nếu } z = 1 - \sqrt{2} \text{ thì } \sin y + \cos y &= 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{2} - x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình cả 2 nghiệm trên.

4.3 Mét sè bài tập tưng tũ

Bài 1. Giải phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$.

(HD: Đặt $x = \cos y$, phương trình cả tập nghiệm là

$$S = \left\{ \cos \frac{\pi}{8}; \cos \frac{5\pi}{8}; \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Bài 2. Giải phương trình $5 + 3\sqrt{1 - x^2} = 8(x^6 + (1 - x^2)^3)$.

Bài 3. Giải phương trình $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{2}$.

Bài 4. Giải phương trình $(\sqrt{3} - 2x)\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}x - 2x^2$.

Bài 5. Giải phương trình $\frac{x(1 + x^2)}{1 - x^2} = 3\sqrt{1 - x^2}$.

5. Mét sè phương pháp khác

5.1 Mét sè lưu ý

Ngoài những phương pháp thông thường ở trên, đôi khi ta còn cả những lời giải khác là dựa vào một số phương trình và bất đẳng thức. Còn cả thảy ta sẽ tổng kết các phương pháp ở trên để giải một phương trình.

5.2 Mét sè ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y - 3} = 5 - y + \sqrt{x^4 - 16}.$$

Nhận xét: Bài toán này khá khó, chờ kiểm tra tính cần thiết của các sinh mục này sau khi đặt điều kiện

Đến tìm các giá trị của x . Tuy nhiên nếu sinh học hỏi sẽ ngại nhận mệnh đề không đúng các bài.

HD: Xét các cho phương trình x, c phân ta sẽ các $x=2$. Khi

đã phương trình trở thành $|y-1|=2-y$, suy ra $y=\frac{3}{2}$. Vậy phương

trình cần tìm nghiệm là $(x; y) = \left(2; \frac{3}{2}\right)$.

VÝ DÔ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$.

HD: Xét $y = \sqrt[3]{7x+1}; z = \sqrt[3]{x^2-x-8}; t = \sqrt[3]{x^2-8x-1}$,

suy ra $y+z+t=2$ và $y^3+z^3+t^3=8$ (1).

Mặt khác $(y+z+t)^3=8$ (2).

Tổ (1) và (2) ta các $(y+z+t)^3 - (y^3+z^3+t^3) = 3(y+z)(z+t)(t+y) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ z+t=0 \\ t+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z(3) \\ z=-t(4) \\ t=-y(5) \end{cases}.$$

Xét (3) ta các $x=-1$ và $x=9$, xét (4) các $x=1$ và (5) các $x=0$ và $x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 0; 1; 9\}$.

VÝ DÔ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2-4x+20} + \sqrt{x^2+4x+29} = \sqrt{97}$.

HD: Trong mặt phẳng tọa độ xét hai vectơ $a = (x-2; 4)$ và $b = (-x-2; 5)$.

Khi đã ta các $a+b = (-4; 5)$, suy ra $|a+b| = \sqrt{97}$ và ta có cả

$$|a| = \sqrt{x^2-4x+20},$$

$|b| = \sqrt{x^2 + 4x + 29}$. Ph- $\neg$ ng tr-xnh tr- $\grave{e}$ th- $\grave{u}$ nh $|a| + |b| = |a + b|$, $\textcircled{R} \frac{1}{4}$ ng th- $\acute{o}$ c $\textcircled{R}$ $\textcircled{a}$ x- $\grave{a}$ y ra khi a v- μ b c- $\acute{u}$ ng chi- $\acute{o}$ u $\Leftrightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{-x-2}{5}$. T- $\acute{o}$ $\textcircled{R}$ $\textcircled{a}$ ta $\textcircled{R}$ $\textcircled{a}$ c ph- $\neg$ ng tr-xnh c- $\acute{a}$ m- $\acute{e}$ t nghi- $\acute{o}$ m l- μ $x = \frac{2}{9}$.

§2. M- $\acute{e}$ t s- $\acute{e}$ b- $\acute{u}$ i t- $\acute{e}$ p t- $\acute{u}$ l- μ m

Sau $\textcircled{R}$ $\textcircled{C}$ y l- μ m- $\acute{e}$ t s- $\acute{e}$ b- $\acute{u}$ i t- $\acute{e}$ p t- $\acute{u}$ l- μ m m- μ ch- $\acute{o}$ ng ta c- $\acute{a}$ th- $\acute{o}$ s- $\acute{o}$ d- $\acute{o}$ ng c- $\acute{a}$ c ph- $\neg$ ng ph- $\acute{u}$ p $\acute{e}$ tr- $\acute{a}$ n.

B- $\acute{u}$ i 1. Gi- $\acute{a}$ i c- $\acute{a}$ c ph- $\neg$ ng tr-xnh sau:

- 1) $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$.
- 2) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$.
- 3) $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}$.
- 4) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$.
- 5) $\sqrt[3]{3x^2 - x + 2001} - \sqrt[3]{3x^2 - 7x + 2002} - \sqrt[3]{6x - 2003} = \sqrt[3]{2002}$.

B- $\acute{u}$ i 2. Gi- $\acute{a}$ i c- $\acute{a}$ c ph- $\neg$ ng tr-xnh sau:

- 1) $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2}$.
- 2) $\sqrt{\frac{42}{5-x}} + \sqrt{\frac{60}{7-x}} = 6$.
- 3) $(x-2)\sqrt{x-1} - \sqrt{2x+2} = 0$.
- 4) $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$.
- 5) $4x^2 - 4x - 10 = \sqrt{8x^2 - 6x - 10}$.

B- $\acute{u}$ i 3. Gi- $\acute{a}$ i c- $\acute{a}$ c ph- $\neg$ ng tr-xnh sau:

- 1) $x = (2004 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})^2$.
- 2) $\sqrt{\sqrt{3} - x} = x\sqrt{\sqrt{3} + x}$.
- 3) $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}} = 5$.
- 4) $16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x}$.

$$5) \quad x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0.$$

Bµi 4. Gi¶i c¶c ph¬ng tr×nh sau:

$$1) \quad \sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1.$$

$$2) \quad 2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}.$$

$$3) \quad 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x.$$

$$4) \quad \sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5} = 1.$$

KẾT LUẬN

Trên đây là một trích dẫn về sự vận dụng “một số phương pháp giải phương trình vô tỷ trong giải toán”.

Đề tài này đã được bản thân tôi và các đồng nghiệp cùng đơn vị thí điểm trên các em học sinh có học lực khá trở lên. Kết quả thu được rất khả quan, các em học tập một cách say mê hứng thú. Một số em đã đạt được những thành tích tốt qua những đợt thi học sinh giỏi vừa qua. Vì tác dụng tích cực trong việc bồi dưỡng học sinh khá giỏi nên kính mong hội đồng khoa học và quý thầy cô góp ý bổ sung để đề tài này ngày một hoàn thiện hơn, có ứng dụng rộng hơn trong quá trình dạy học ở trường THPT.

Tôi xin cam đoan sáng kiến kinh nghiệm này do tôi viết, không sao chép của người khác.

Xin chân thành cảm ơn!

Xác nhận của thủ trưởng đơn vị

Thanh Hóa, ngày 25/5/2016

Người viết

Lê Đình Hải