HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 09

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m-3)x^4+(2-m)x^2+m-1$ chỉ có một điểm cực trị và là điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

+**TH1**: Xét $m-3=0$

Khi đó: $y=-x^2+2$ chỉ đạt cực đại tại $x=0$.

+**TH2**: Xét $m-3>0$

Khi đó: $y=(m-3)x^4+(2-m)x^2+m-1$ có $\begin{cases} a=m-3>0 \\ b=2-m<0 \end{cases}$ nên hàm số có ba cực trị.

+**TH3**: Xét $m-3<0$

Nếu $b>0$ thì hàm số có ba cực trị.

Nếu $b\le 0$ thì hàm số có một cực trị và là cực đại.

Vậy không tồn tại giá trị m thỏa điều kiện đề bài.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P): ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A,B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mặt phẳng (P).

Khi đó theo giả thiết ta có: $AB=3$, $AH=6$, $BK=3$.

Do đó A,B ở cùng phía với mặt phẳng (P)

Lại có: $AB+BK\ge AK\ge AH\Rightarrow H\equiv K$.

Suy ra A,B,H là ba điểm thẳng hàng và B là trung điểm của AH nên tọa độ $H(5;6;-1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua $H(5;6;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$ là VTPT có nên phương trình

$2(x-5)+2(y-6)-1(z+1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z-23=0$.

Theo bài ra thì $(P): -4x-4y+2z+46=0$, nên $a=-4, b=-4, c=2$.

Vậy $T=a+b+c=-6$.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{1}{|z|+z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{8}$. Mô dun của z bằng:

A. 8. **B.** 16. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=x+yi$, với $x, y\in\mathbb{R}$ và điều kiện $|z|+z\neq 0 \Leftrightarrow y\neq 0$.

Ta có: $$w=\frac{1}{|z|+z}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)+yi}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2+y^2}-\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2+y^2}i$$

Theo giả thiết, ta có: $$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2+y^2}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)=2x^2+2y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)=\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2}=4\\ \sqrt{x^2+y^2}+x=0\end{array}\right.$$

TH1: $\sqrt{x^2+y^2}+x=0\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 0\\ y=0\end{cases}$ (không thỏa mãn điều kiện).

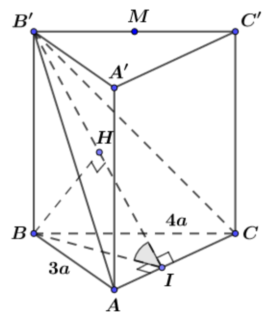
TH2: $\sqrt{x^2+y^2}=4\Leftrightarrow x^2+y^2=16\Leftrightarrow |z|=4$.

Câu 44: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC}=60^\circ$, $AB=3a$ và $AC=4a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng $\dfrac{3a\sqrt{15}}{10}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $27a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $d\left(M;(B'AC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(C';(B'AC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(B;(B'AC)\right)$

Gọi I là hình chiếu của B trên AC và H là hình chiếu của B trên $B'I$

$\Rightarrow BH \perp (B'AC) \Rightarrow d(B;(B'AC)) = BH \Rightarrow BH = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Xét tam giác ABC có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60^\circ = 3a^2\sqrt{3} \Rightarrow BI = \dfrac{2S}{AC} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác $B'BI$ có $B'B = \dfrac{BI.BH}{\sqrt{BI^2 - BH^2}} = 3a\sqrt{3}$

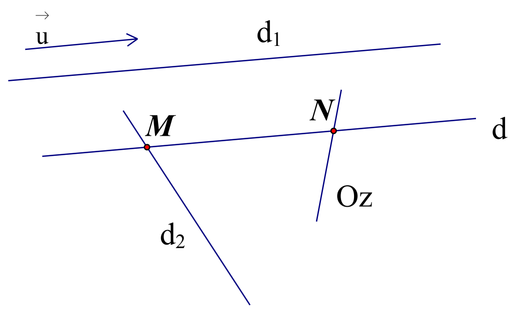
Vậy thể tích lăng trụ là: $V = S_{\Delta ABC}.B'B = 3a^2\sqrt{3}.3a\sqrt{3} = 27a^3$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}; d_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Phương trình của đường thẳng song song với d_1, cắt d_2 và cắt trục Oz là

A. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$. **C.** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $M = d \cap d_2 \Rightarrow M \in d_2 \Rightarrow M(2t;1+2t;t)$.

$N = d \cap Oz \Rightarrow N \in Oz \Rightarrow N(0;0;c)$.

$\overrightarrow{NM} = (2t;1+2t;t-c)$, d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;1)$.

Vì $d // d_1$ nên $\overrightarrow{NM}, \vec{u}$ cùng phương suy ra $\dfrac{2t}{2} = \dfrac{1+2t}{1} = \dfrac{t-c}{1} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ c = 0 \end{cases}$.

Đường thẳng d đi qua điểm $N(0;0;0)$ và nhận $\vec{u} = (2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Thử lại: Ta thấy đường thẳng $d: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ song song với d_1, cắt d_2 và cắt trục Oz nên phương trình $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ thỏa đề bài.

Câu 46: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz+7m-6=0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\Delta'=m^2-7m+6$.

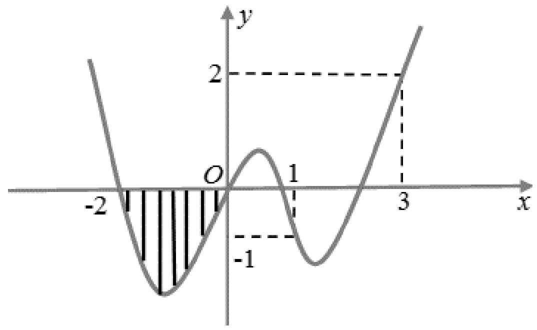
Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>6\\m<1\end{array}\right.$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 thỏa $|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0\Leftrightarrow m=0$.

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow 1<m<6$, phương trình có hai nghiệm phức liên hợp z_1, $z_2=\overline{z_1}$ nên ta luôn có $|z_1|=|z_2|$.

Do đó $m\in(1;6)\cup\{0\}$ và $m\in\mathbb{Z}$ nguyên nên có 5 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\int_1^2 f'(x+1)\mathrm{d}x+\int_2^3 f'(x-1)\mathrm{d}x+\int_3^4 f(2x-8)\mathrm{d}x$$



A. $T=\dfrac{9}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=0$. **D.** $T=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích phần kẻ sọc là: $S=\int_{-2}^{0}|f(x)|\mathrm{d}x=3$.

Vì $f(x)\le 0\quad\forall x\in[-2;0]\Rightarrow 3=\int_{-2}^{0}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}[-f(x)]\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-3$.

Tính $I=\int_3^4 f(2x-8)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x-8\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$; $x=3\Rightarrow t=-2$; $x=4\Rightarrow t=0$.

Suy ra: $I = \int_{-2}^{0} f(t).\frac{1}{2}\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{dx} = -\frac{3}{2}$.

Vậy $T = \int_{1}^{2} f'(x+1)\mathrm{dx} + \int_{2}^{3} f'(x-1)\mathrm{dx} + \int_{3}^{4} f(2x-8)\mathrm{dx}$

$= f(x+1)\Big|_1^2 + f(x-1)\Big|_2^3 + I = f(3) - f(2) + f(2) - f(1) - \frac{3}{2} = 2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y)$?

A. 115. **B.** 58. **C.** 59. **D.** 116.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \\ x,y \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Khi đó $\log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y) \Leftrightarrow x^2+y \geq 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow x^2+y \geq (x+y)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2 - y \geq (x+y)^{\log_3 4} - (x+y)$ (1).

Đặt $t = x+y \Rightarrow t \geq 1$ thì (1) được viết lại là $x^2 - y \geq t^{\log_3 4} - t$ (2)

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 728 nghiệm t.

Nhận thấy $f(t) = t^{\log_3 4} - t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2 - y \geq 729^{\log_3 4} - 729 = 3367$ thì sẽ có ít nhất 729 nghiệm nguyên $t \geq 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2 - x \leq 3367 \Leftrightarrow -57 \leq x \leq 58$.

Mà x nguyên nên x nhận các giá trị $-57, -56, ..., 57, 58$.

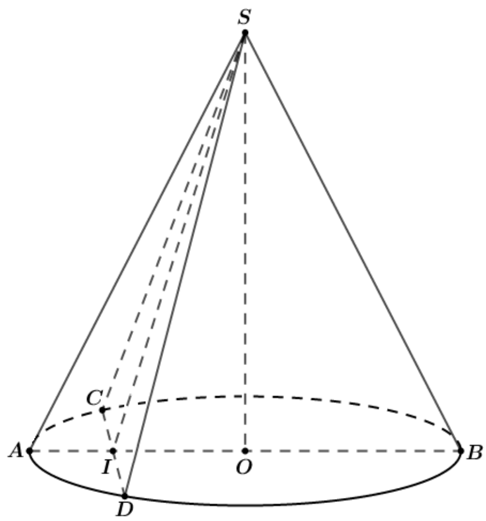
Vậy có tất cả 116 số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 49: Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60°. Diện tích của thiết diện này bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2a^2$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình nón có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O. Thiết diện qua trục là ΔSAB, thiết diện qua đỉnh là ΔSCD; gọi I là trung điểm của CD.

Theo giả thiết ta có ΔSAB vuông cân tại S, cạnh huyền $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$SA = SB = l = a$ $\Rightarrow h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có $\widehat{SIO} = 60^\circ \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$;

$ID = \sqrt{SD^2 - SI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích thiết diện cần tìm là $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}.CD.SI = \frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2019}{2020}$

$\Rightarrow g'(x) = -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m)$

Để $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $g(x)$ nghịch biến và không âm trên khoảng $(1;2)$.

Tức là: $\begin{cases} g'(x) \le 0,\ \forall x \in (1;2) \\ g(2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m) \le 0,\ \forall x \in (1;2) \\ -\frac{1}{3}.2^3 + \frac{1}{2}.(2m+3).2^2 - (m^2+3m).2 + \frac{2}{3} \ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge m+3,\ \forall x \in (1;2) \\ x \le m,\ \forall x \in (1;2) \end{array}\right. \\ -2m^2 - 2m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \\ -2 \le m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Trường hợp 2: $g(x)$ đồng biến và không dương trên khoảng $(1;2)$.

Tức là: $\begin{cases} g'(x) \ge 0,\ \forall x \in (1;2) \\ g(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m) \ge 0,\ \forall x \in (1;2) \\ -\frac{1}{3}.2^3 + \frac{1}{2}.(2m+3).2^2 - (m^2+3m).2 + \frac{2}{3} \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le x \le m+3,\ \forall x \in (1;2) \\ -2m^2 - 2m + 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le m \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$