

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT BA ĐÌNH

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

MỘT SỐ KINH NGHIỆM HƯỚNG DẪN HỌC SINH LỚP 12
CÁCH GIẢI CÁC DẠNG TOÁN VỀ TÍNH TÍCH PHÂN CƠ BẢN
Ở BẬC THPT

Người thực hiện: Mai Huy Sáu
Chức vụ: Giáo Viên
SKKN thuộc môn: Toán

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

	Trang
1. Mở đầu	
- Lý do chọn đề tài.....	1
- Mục đích nghiên cứu.....	2
- Đối tượng nghiên cứu.....	2
- Phương pháp nghiên cứu.....	2
2. Nội dung sáng kiến.	
2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm	2
2.2. Thực trạng vấn đề	3
2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc các giải pháp đã được sử dụng	
2.3.1. Một số tích phân cơ bản của hàm số phân thức hữu tỷ.....	4
2.3.2. Một số tích phân cơ bản của hàm số vô tỷ	6
2.3.3. Một số tích phân cơ bản của hàm số lượng giác	12
2.3.4. Một số tích phân cơ bản của hàm số mũ và lôgarit.....	15
2.4. Hiệu quả SKKN	19
3. Kết luận, kiến nghị.....	19

1. Mở đầu

- Lý do chọn đề tài.

+ Tính tích phân là bài toán thường gặp trong các kỳ thi tốt nghiệp THPT và kỳ thi tuyển sinh vào đại học. Rèn luyện cho học sinh có kỹ năng tính tích phân là nhiệm vụ đặc biệt quan trọng. Trong quá trình dạy học môn Toán nói chung và dạy bài tập về tính tích phân trong chương trình trung học phổ thông học sinh thường lung tung không biết hướng suy nghĩ tìm tòi lời giải, học sinh không biết bài này thì đổi biến hay dùng phương pháp tích phân từng phần.

+ Đối với những bài toán như vậy, giáo viên cần hướng dẫn học sinh tìm tòi để phát hiện ra lời giải, nhằm trang bị cho học sinh tri thức suy luận, tư duy sáng tạo trong giải toán. Chúng ta có thể thông qua những hướng dẫn giải bài toán “bài toán gốc” có trong sách giáo khoa dân truyền thụ cho học sinh suy nghĩ phát hiện lời giải. Xuất phát từ bài toán “bài toán gốc” định hướng cho học sinh “suy luận” từ đó “quy bài toán lạ” về “bài toán quen” củng cố lòng tin cho học sinh học toán, say mê với toán và giải toán có hiệu quả. Dạy và hướng dẫn học sinh giải toán tích phân ở cấp THPT, tôi đặt câu hỏi: “Làm thế nào để giúp học sinh chủ động giải toán tích phân, học sinh tin tưởng là giải được bài toán tích phân có trong sách giáo khoa, các bài toán tích phân trong kỳ thi THPT Quốc gia?”.

+ Trong khoảng thời gian giảng dạy và nghiên cứu về tích phân, tôi nhận thấy hiện chưa có các tài liệu nghiên cứu nào bàn sâu và chi tiết về cách giải bài tập tích phân cơ bản thường gặp.

+ Qua giảng dạy, tôi đúc rút kinh nghiệm và mong muốn trao đổi với đồng nghiệp một số hướng suy nghĩ để giải quyết một số bài tập tích phân cơ bản - dạng quen thuộc (không có ý tìm ra hay đưa ra cách giải tổng quát cho một dạng toán tích phân cụ thể, hay nêu bài toán tổng quát và lời giải tổng quát cho tích phân ấy, mà tôi chỉ nêu các hướng giúp học sinh “biết định hướng cách giải”, suy luận được khi giải toán tích phân).

- Mục đích nghiên cứu:

+ Nghiên cứu đề tài nhằm tổng hợp các bước hướng dẫn học sinh giải bài tập tích phân cơ bản một cách hợp lý và đạt hiệu quả nhanh nhất.

+ Trên cơ sở những kinh nghiệm của bản thân, cùng với những trao đổi với đồng nghiệp để tìm ra các giải pháp hữu hiệu vận dụng trong quá trình hướng dẫn học sinh giải bài tập tích phân cơ bản. Góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn Toán ở lớp 12.

- Đối tượng nghiên cứu: Các bài toán tích phân cơ bản thường gặp trong chương trình giải tích lớp 12.

- Phương pháp nghiên cứu:

+ Xây dựng cơ sở lý thuyết.

+ Khảo sát thực tế.

+ Phương pháp phân tích, suy luận, tổng hợp, so sánh...

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm

1) Bảng các nguyên hàm cơ bản, các tính chất của nguyên hàm, các tính chất của tích phân (SGK giải tích lớp 12)

2) Để giải toán tích phân học sinh phải nắm được các vi phân “cơ bản” thường gặp,

Chẳng hạn: $dx = d(x+b) = \frac{1}{a} d(ax+b)$ với $a \neq 0$; $d(e^x) = d(e^x + c) = e^x dx$; $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$;

$\sin x dx = -d(\cos x) = -d(\cos x + b)$; $\sin kx dx = -\frac{1}{k} d(\cos kx) = -\frac{1}{k} d(\cos kx + b)$, với $k \neq 0$

Các vi phân phức tạp hơn: $\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = d\left(\frac{1}{\cos x}\right)$; $\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = d(\sqrt{x^2 + a^2})$

$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -d(\sqrt{a^2 - x^2})$; $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = d\left[\ln(x + \sqrt{x^2 + k})\right]$; $(1 - \frac{1}{x^2})dx = d(x + \frac{1}{x}) \dots$

3) Ngoài ra học sinh phải nắm được các vấn đề cốt yếu sau đây:

a) Sử dụng thành thạo định lý Niu tơn – Leibnitz (SGK GT 12):

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) \text{ thì } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Chú ý: Giả thiết $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ là điều kiện bắt buộc phải có để được sử dụng định lý. Một số học sinh cứ tưởng có được $F(x)$ là tính được tích phân,

chẳng hạn nếu viết $I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = 1(?)$ Ta đã biết $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ không

xác định tại $x = \frac{\pi}{2} \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ nên I không tồn tại.

b) Phương pháp đổi biến số.

Cơ sở của nó là định lý sau: Nếu $t = \varphi(x)$ đơn điệu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt. \quad (\text{SGK giải tích lớp 12})$$

c) Phương pháp tích phân từng phần.

$$\text{Ta có: } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (\text{SGK giải tích lớp 12})$$

2.2 Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm:

Qua giảng dạy bài toán tính tích phân, học sinh thường lúng túng gặp nhiều khó khăn. Không biết bài này dùng phương pháp tính nào đổi biến hay tích phân từng phần, nếu đổi biến số thì đổi như thế nào (đặt $x = \varphi(t)$ hay $t = \varphi(x)$), còn nếu dùng phương pháp tích phân từng phần thì không biết chọn u và dv sao cho thích hợp...

Kết quả khảo sát khi tôi dạy phân tích phân cho học sinh lớp 12 năm học 2013-2014 khi chưa áp dụng sáng kiến này:

Lớp	Sĩ số	Điểm < 5		Điểm 5 → < 8		Điểm ≥ 8	
		số lượng	%	số lượng	%	số lượng	%
12D	38	13	34,21	23	60,52	2	5,27
12P	47	17	36,17	24	51,06	6	12,77

Từ kết quả trên tôi nhận thấy tỉ lệ học sinh có số điểm dưới trung bình là quá cao, trong khi đó học sinh đạt điểm giỏi lại quá thấp. Điều này khiến bản thân tôi phải trăn trở tìm ra phương pháp hướng dẫn học sinh biết cách giải các dạng toán tích phân cơ bản một cách dễ dàng và hiệu quả nhất.

2.3 Các giải pháp được sử dụng trong việc hướng dẫn học sinh giải các tích phân cơ bản.

Thông qua một số dạng tích phân cơ bản tôi hướng dẫn cho học sinh các cách tiếp cận khác nhau, áp dụng vào giải các tích phân đơn giản khác:

Các tích phân “cơ bản” và các cách tính phổ biến (với giả thiết hàm số dưới dấu tích phân liên tục trong đoạn đang xét):

2.3.1. Một số tích phân cơ bản của hàm số phân thức hữu tỷ:

a) Tích phân $I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| \Big|_{\alpha}^{\beta}$

Ví dụ 1: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

Ta có: $I = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} (*) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^1$

Chú ý: Tích phân (*) có dạng I_1

Bài tập tương tự: Tính $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$ (Trích ĐH khối D năm 2013)

b) - Tích phân $I_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} dx$ (với bậc của $f(x)$ nhỏ hơn hai)

Ta viết $\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}$

- Tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_0)^2} dx$ với bậc của $f(x)$ nhỏ hơn ba

Ta tìm các hệ số A, B, C sao cho:
$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_0)^2} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_0)} + \frac{C}{(x-x_0)^2}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{4x+5}{x^2+3x+2} dx$

Mẫu số là tam thức bậc hai có hai nghiệm: $x=-1; x=-2$, nên ta tìm A, B sao cho:

$$\frac{4x+5}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

Bằng phương pháp hệ số bất định ta tìm được: $A=1; B=3$

Vậy: $I = \int_0^1 \frac{4x+5}{x^2+3x+2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + 3 \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = (\ln|x+1| + 3 \ln|x+2|) \Big|_0^1 = 3 \ln 3 - 2 \ln 2$

Bài tập tương tự: Tính $I = \int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x^2+x} dx$ (Trích ĐH khối B năm 2014)

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+3x+2)^2} dx$

Ta có: $I = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+3x+2)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right)^2 dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2} - 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - 2 \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 2 \ln \frac{3}{4}$

Ví dụ 4. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{x+2}{(x+1)(x^2+2x+4)} dx$

Ta tìm $A; B; C$ sao cho:
$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

Theo phương pháp hệ số bất định ta có $A = \frac{1}{3}; B = -\frac{1}{3}; C = \frac{2}{3}$. Khi đó:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{(x-2)dx}{x^2+2x+4} = \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6} \int_0^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx + \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2 + \sqrt{3}^2}.$$

Tính $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2 + \sqrt{3}^2}$ ta đổi biến: $x+1 = \sqrt{3} \tan t$. Từ đó tính được tích phân I

Chú ý : Khi gặp tích phân dạng : $I_4 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x^2+a^2}$

ta có thể đặt : $x=a \tan t$ hoặc $x=a \tan t$

Bài tập tương tự: Tính $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$ (Trích ĐH khối B năm 2012)

c) Việc sử dụng thành thạo các vi phân cơ bản giúp ta định hướng cách giải, chẳng hạn: $(1 + \frac{1}{x^2})dx = (x - \frac{1}{x})' dx = d(x - \frac{1}{x})$.

Ví dụ 5. Tính tích phân sau $I = \int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ Ta có: $\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$.

Nên ta đặt $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow dt = (1 + \frac{1}{x^2})dx$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^2 (\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}}) dt = \dots = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})$$

Ví dụ 6. Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^3} dx$.

Ta có: $\frac{1-x^2}{x+x^3} dx = \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{-d(x + \frac{1}{x})}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$, nên ta đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow I = \ln \frac{4}{5}$

2.3.2. Một số tích phân cơ bản của hàm số vô tỷ:

a) Tích phân $J_1 = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Ta có thể thực hiện theo các cách giải sau:

+) Cách 1: Đổi biến số $x = \frac{a}{\sin t}$

+) Cách 2: Đổi biến số $x = \frac{a}{\cos t}$

+) Cách 3: Đổi biến số $t = x + \sqrt{x^2 - a^2}$

+) Cách 4: Đổi biến số $t = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

+) Cách 5: Ta viết $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{(x+a)\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}$ và đặt $t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$

Nhận xét: Trong mỗi bài tập ta chọn cách nào là còn tùy vào tình huống đối cặn.

Ví dụ 7. Tính các tích phân sau : $I = \int_{\frac{4}{\sqrt{3}}}^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$; $J = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Đối với tích phân I ta đặt $x = \frac{2}{\sin t} \Rightarrow dx = \frac{-2 \cos t dt}{\sin^2 t}$. Đổi cận khi $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$

còn khi $x = 4$ thì $t = \frac{\pi}{6}$. Vậy $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t}$ (Ta sẽ nói kỹ về tích phân này ở phần sau).

Đối với tích phân J ta đặt $t = x + \sqrt{x^2 - 1}$ thì ta được : $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{dt}{t}$.

$$\text{Tích phân } J = \int_{1+\sqrt{2}}^{3+2\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{1+\sqrt{2}}^{3+2\sqrt{2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

b) - Tích phân $J_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

Ta có thể thực hiện theo các cách giải sau:

- +) Cách 1: Đổi biến số $x = a \tan t$
- +) Cách 2: Đổi biến số $x = a \cot t$
- +) Cách 3: Đổi biến số $t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$
- +) Cách 4: Đổi biến số $t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
- +) Cách 5: Đổi biến số $\sqrt{x^2 + a^2} = a + tx$

Nhận xét: Trong mỗi bài tập ta chọn cách nào là còn tùy vào tình huống đổi cận

- Tích phân $J_3 = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + a^2} dx$

- +) Cách 1: Đổi biến số $x = a \tan t$
- +) Cách 2: Đổi biến số $x = a \cot t$

+) Cách 3: Tích phân từng phần $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + a^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } J &= J = x\sqrt{x^2 + a^2} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + b^2}} = x\sqrt{x^2 + a^2} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 + b^2} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 + b^2} dx + a^2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow J_3 = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 J_2 \quad (\text{đã có}) \end{aligned}$$

- +) Cách 4: Đổi biến số $t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$

Nhận xét: Trong mỗi bài tập ta chọn cách nào là còn tùy vào tình huống đổi cận

Ví dụ 8. Tính tích phân sau: $I = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$

Đặt $x = 2 \tan t \Rightarrow dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt$ và khi $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{4}$, khi $x = 2\sqrt{3}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{4 \sin^2 t} \quad (\text{tích phân này có thể chuyển về tích phân hàm hữu tỷ khi đặt } u = \sin t)$$

Ví dụ 9. Tính tích phân: $I = \int_2^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$ ta dùng phương pháp tích phân từng phần:

Do biểu thức trong dấu tích phân có chứa căn bậc hai, nên ta đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - 1} \\ dv = dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = x\sqrt{x^2 - 1} \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = x\sqrt{x^2 - 1} \Big|_2^3 - \int_2^3 \sqrt{x^2 - 1} dx - \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{hay } 2I = x\sqrt{x^2 - 1} \Big|_2^3 - \int_2^3 \sqrt{x^2 - 1} dx \quad (\text{Đây là tích phân đã đề cập phần a) tích phân } J_1)$$

$$\text{c) Tích phân } J_4 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Đổi biến số $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$

Ví dụ 9: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$. Ta đặt $x = a \sin t$ thì $I = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \dots$

$$\text{Bài tập tương tự: a) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{4 - x^2})^3} \quad ; \quad \text{b) } \int_0^1 x^2 \sqrt{4 - 3x^2} dx$$

$$\text{d) Tích phân: } J_5 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(ax + b) \sqrt{mx^2 + nx + p}} \quad \text{với } mx^2 + nx + p > 0, \forall x \in R$$

Đổi biến số: $ax + b = \frac{1}{t}$ ta sẽ đưa tích phân J_5 về dạng $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (Tích phân J_2).

Ví dụ 10: Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 4}}$, (ĐH khối A - 2003)

ta đặt $x = \frac{1}{t}$ ta có $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{dt}{\sqrt{4t^2 + 1}}$ (tích phân J_2)

Nhận xét: Trong ví dụ 10 nhiều học sinh nghĩ là đặt $x = 2 \tan t$, nhưng vấp phải việc đổi cận tích phân.

Bài tập tương tự. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$; $J = \int_1^2 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 + 1}}$

e) Tích phân $J_6 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ (với $a > 0, m \neq 0$)

Cách tính: $J_6 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = A \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + B \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Tìm A, B bằng phương pháp hệ số bất định

Ví dụ 11. Tính tích phân: $I = \int_2^3 \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} dx$

Ta tìm $A; B$ sao cho $\frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} = A \cdot \frac{(2x^2 + 8x + 1)'}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} + B \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}}$

$\Rightarrow A = \frac{5}{4}; B = -13$ Khi đó $I = \frac{5}{4} \int_2^3 \frac{d(2x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} - 13 \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}} =$
 $= \frac{5}{4} 2 \int_2^3 (2x^2 + 8x + 1)^{\frac{1}{2}} d(2x^2 + 8x + 1) - 13J$

Với $J = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}}$ đưa về dạng $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$ (quen thuộc)

f) Khi gặp tích phân dạng: $x\sqrt{ax^2 + b}$ hoặc dạng $\frac{\sqrt{ax^2 + b}}{x}$ thì đặt $t = \sqrt{ax^2 + b}$

còn khi gặp dạng $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ ta đặt $x = \frac{a}{b} \sin t$.

Ví dụ 12. Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$.

+) Cách 1: Đặt $t = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow t^2 = 4 - x^2 \Rightarrow t dt = -x dx$ và $x = 0$ thì $t = 2$; $x = 1$ thì $t = \sqrt{3}$

Vậy: $I = \int_{\sqrt{3}}^2 dt = t \Big|_{\sqrt{3}}^2 = 2 - \sqrt{3}$

+) Cách 2: Nhận thấy trong căn có dạng $a^2 - x^2$ nên ta đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

khi đó: $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t dt$.

Ví dụ 13. Tính tích phân: $I = \int_0^1 x \sqrt{2 - x^2} dx$ (ĐH khối B – 2013)

+) Cách 1: Đặt $t = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow t^2 = 2 - x^2 \Rightarrow t dt = -x dx$ và $x = 0$ thì $t = \sqrt{2}$; khi $x = 1$ thì

$t = \sqrt{3}$. Vậy: $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$.

+) Cách 2: Nhận thấy trong căn có dạng $a^2 - x^2$ nên ta đặt $x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow$

$dx = \sqrt{2} \cos t dt$. khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{1}{2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Bài tập tương tự. Tính tích phân $I = \int_0^1 x \sqrt{4 + 3x^2} dx$;

g) Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa $\sqrt[n]{ax + b}$ thì ta thường đặt $t = \sqrt[n]{ax + b}$

Ví dụ 14: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x-1}}$ (ĐH. A-2004)

Đổi biến số dạng 1: Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow dx = 2t dt$;

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 0$; khi $x = 2$ thì $t = 1$

$I = \int_0^1 \frac{(1+t^2) \cdot 2t dt}{1+t} = 2 \int_0^1 \frac{t+t^3}{1+t} dt$ (đây là tích phân hàm hữu tỉ, từ đó tính được I).

Ví dụ 15. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

Ta có $I = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{7}{3}} \left[\frac{(3x+1)+2}{\sqrt[3]{3x+1}} \right] dx = \frac{1}{9} \int_0^{\frac{7}{3}} \left[(3x+1)^{\frac{2}{3}} + 2(3x+1)^{-\frac{1}{3}} \right] d(3x+1)$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{3}{5} (3x+1)^{\frac{5}{3}} + 3(3x+1)^{\frac{2}{3}} \right] \Big|_0^{\frac{7}{3}} = \frac{46}{15}$$

Bài tập tương tự: $I = \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$; $J = \int_0^1 (x-1)^2 \sqrt{x} dx$

2.3.3. Một số tích phân cơ bản của hàm số lượng giác:

a) Tích phân $K_1 = \int_a^b \frac{dx}{\sin x}$ Ta có thể tính bằng các cách đổi biến sau:

+) Cách 1: Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow K_1 = \int_a^b \frac{dt}{t}$

+) Cách 2: $K_1 = \int_a^b \frac{dx}{\sin x} = \int_a^b \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = - \int_a^b \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x}$ (Đặt $t = \cos x$, đưa về cách tính tích phân hàm phân thức hữu tỷ)

b) Tích phân $K_2 = \int_a^b \frac{dx}{\cos x}$

- Cách 1: Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$ thay $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \Rightarrow K_2 = \int_a^b \frac{dt}{1 - t^2}$

- Cách 2: Nhân tử và mẫu với $\cos x$, ta có $K_2 = \int_a^b \frac{dx}{\cos x} = \int_a^b \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x}$ (Đặt $t = \sin x$, đưa về cách tính tích phân hàm phân thức hữu tỷ quen thuộc)

- Cách 3: $K_2 = \int_a^b \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \int_a^b \frac{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} dx = - \int_a^b \frac{d\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$
 $= - \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_a^b$

c) Tích phân dạng: $K_3 = \int_a^b R(\sin x; \cos x) dx$ (trong đó R là hàm số phân thức hữu tỷ)

Thông thường ta đưa về tích phân của hàm hữu tỷ bằng phép đổi biến đặt $t = \tan \frac{x}{2}$

i) Trường hợp đặc biệt:

+) Nếu $R(\sin x; \cos x)$ là hàm số lẻ đối với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$

+) Nếu $R(\sin x; \cos x)$ là hàm số lẻ đối với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$

+) Nếu $R(\sin x; \cos x)$ là hàm số đều chẵn đối với $\sin x$ và $\cos x$ thì ta đặt $t = \tan x$

ii) Trường hợp tổng quát: Ta hướng dẫn học sinh áp dụng mệnh đề sau:

Giả sử phải tính $\int_a^b R(\sin x; \cos x) dx$, (trong đó R là hàm số phân thức hữu tỷ)

Ta kí hiệu $\omega(x) = R(\sin x, \cos x) dx$ gọi là vi phân của hàm phải tính.

+) Nếu $\omega(-x) = \omega(x)$ thì ta đổi biến số: $u = \cos x$

+) Nếu $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ thì ta đổi biến số: $u = \sin x$.

+) Nếu $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ thì ta đổi biến số: $u = \tan x$.

Ví dụ 16. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx$ (Đề thi TN năm 2006)

Đặt $\omega(x) = \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x}$. Ta có $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ nên đổi biến số $u = \cos x$,

đưa tích phân $I = \int_0^1 \frac{t}{4 - t^2} dt$, đây là tích phân quen thuộc.

Bài tập tương tự: Tính các tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$; $J = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$;

Ví dụ 17. Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^4 x dx$.

Biểu thức trong tích phân $\cos x$ có bậc lẻ ($\omega(\pi - x) = \omega(x)$) nên đặt $u = \sin x$, đưa tích phân về dạng: $I = \int_0^1 (1 - u^2)u^4 du$, áp dụng bảng nguyên hàm ta được $I = \frac{2}{35}$

Bài tập tương tự: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$

Ví dụ 18. Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$ (Trích ĐH A – 2008)

Đặt $\omega(x) = \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}$ thì có $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ nên ta đổi biến số $u = \tan x$,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)} dx = \int_0^1 \frac{t^4}{1 - t^2} dt \quad (\text{Tích phân htỷ})$$

Bài tập tương tự: Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x (\tan^2 x - 2 \tan x + 5)}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x (\sin x - \cos x)}$

Ví dụ 19. Tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^3 x}$ (Đề thi HSG tỉnh năm 2005)

Cách 1: Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1 - t^2)^2}$ (Tích phân hàm hữu tỷ)

Cách 2: Đặt $u = \frac{1}{\cos x}$ và $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ ta có $du = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$ và $v = \tan x$.

Vậy $2I = \frac{1}{\cos x} \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}$ (Đưa về tích phân cơ bản K_2 , đã trình bày cách giải)

Ví dụ 20. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$,

Ta nhận thấy biểu thức dưới dấu tích phân là bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$, nên thông thường ta sẽ đặt $t = \tan x \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ và $I = \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$

Bài tập tương tự: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{2 \sin x + \cos x}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$

2.3.4. Tích phân chứa hàm số mũ và lôgarít.

a) Sử dụng thành thạo các vi phân cơ bản.

Chẳng hạn: $dx = d(x+b) = \frac{1}{a} d(ax+b)$ với $a \neq 0$; $d(e^x) = d(e^x + c) = e^x dx$; $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$,

$\sin x dx = -d(\cos x) = -d(\cos x + b)$; $\sin kx dx = -\frac{1}{k} d(\cos kx) = -\frac{1}{k} d(\cos kx + b)$, với $k \neq 0$

Ví dụ 21. Tính tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{(1+e^x)^3}} dx$.

Ta thấy: $e^x dx = d(e^x + 1)$ nên $I = \int_0^{\ln 3} \frac{d(1+e^x)}{\sqrt{(1+e^x)^3}}$, từ đó đặt $t = \sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2 - 1 \Rightarrow$

$e^x dx = 2t dt$. Vậy $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2tdt}{t^3} = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t^2} = -\frac{2}{t} \Big|_{\sqrt{2}}^2 = \sqrt{2} - 1$

Bài tập tương tự: $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$; $J = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(1+e^x)e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$ (Đề thi TN năm 2006)

Ví dụ 22. Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{\sqrt[3]{3 \ln x + 1} \cdot \ln x}{x} dx$. (ĐH khối B - 2004) Vì

$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ nên $I = \int_1^e \sqrt[3]{3 \ln x + 1} \ln x d(\ln x)$. Biểu thức dưới dấu tích phân chứa hàm số $\ln x$. Khi đó đặt $t = \ln x$ thì bài toán được giải quyết

Bài tập tương tự: Tính: $I = \int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x \sqrt{\ln x + 1}} dx$; $J = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3 - 2 \ln x}{x \sqrt{2 \ln x + 1}} dx$

Ví dụ 23. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$ (ĐH. A - 2010)

Ta có: $\frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} = \frac{x^2(1 + 2e^x) + e^x}{1 + 2e^x} = x^2 + \frac{e^x}{1 + 2e^x}$. Do đó:

$I = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx$. Đặt $J = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx$. Vì: $e^x dx = \frac{1}{2} d(2e^x + 1)$ nên J tính được.

Bài tập tương tự: Tính $I = \int_1^e \frac{x^2 e^{\sqrt{\ln x}} + 1}{x^3} dx$

Ví dụ 24. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$ (Đề thi ĐH khối D năm 2005)

Ta viết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

Vì $\cos x dx = d(\sin x)$ nên đối với tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$, ta đặt $\sin x = t$

b) Sử dụng thành thạo quy tắc chọn u và dv trong phương pháp tích phân từng

phần: Ta có: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Chú ý: Nguyên tắc chung để chọn u , dv như sau: Ta chọn sao cho dv dễ tìm được nguyên hàm của dv .

Đặc biệt: Giả sử $f(x)dx = f_1(x) \cdot f_2(x)dx$ với $f_1(x)$ là đa thức thì việc lựa chọn u và dv phụ thuộc vào $f_2(x)$, cụ thể:

+) Nếu $f_2(x)$ là các hàm số lôgarit, các hàm số vô tỷ... thì đặt $u = f_2(x)$.

+) Nếu $f_2(x)$ là các hàm số lượng giác, hàm số mũ, ... thì đặt $u = f_1(x)$

Tuy nhiên đó chỉ là gợi ý chính, trong từng bài cụ thể và tình huống phức tạp các bạn phải thử vận dụng theo nhiều cách để chọn cách thích hợp.

Ví dụ 25. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$ (Đề thi TN năm 2006)

Theo quy tắc chọn u và dv ở trên thì ta đặt : $\begin{cases} u=2x+1 \\ dv=e^x dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du=2 dx \\ v=e^x \end{cases}$

Vậy: $I = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1 = e+1$

Bài tập tương tự: Tính $I = \int_0^1 (x-3).e^x dx$ (trích : đề thi THPT QG năm 2015)

Ví dụ 26. Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x^3 + \ln x) dx$ (đề thi minh họa-THPTQG năm 2015);

Ta có $I = \int_1^2 2x^3 dx + \int_1^2 (\ln x) dx$. Theo quy tắc chọn u và dv ở trên thì ta đặt :

$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=x \end{cases}$ Khi đó: $I = \frac{1}{2} x^4 \Big|_1^2 + x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx$ từ đó

tính được I .

Bài tập tương tự: Tính $K = \int_1^3 (2x \ln x) dx$ (TN năm 2007); $J = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$ (ĐH-D2007)

Ví dụ 27. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{(x^2 + x + 1) \ln x dx}{x(x+1)^2}$

Ta biến đổi như sau : $\frac{(x^2 + x + 1) \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{[(x+1)^2 - x] \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{(x+1)^2}$

Vậy : $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$

Ta nhận thấy: $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, với cách nhìn này thì ta dễ dàng tính được tích phân

$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. Còn tích phân : $\int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$, ta đặt : $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases}$ và dùng công thức tích

phân từng phần ta dễ dàng tính được.

Ví dụ 28. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 1 + (x^3 + x \ln x + 2) \ln x}{(1+x \ln x)} dx$

Ta có tử thức : $x^2 + 1 + (x^3 + x \ln x + 2) \ln x = (x \ln x + 1)(x^2 + \ln x) + (x \ln x + 1)'$

Do đó : $I = \int_1^e (x^2 + \ln x) dx + \int_1^e \frac{(x \ln x + 1)'}{x \ln x + 1} dx$.

Đặt $I_1 = \int_1^e x^2 dx$, $I_2 = \int_1^e \frac{(x \ln x + 1)'}{x \ln x + 1} dx$; $I_3 = \int_1^e \ln x dx$, ta thấy I_1, I_2 là các dạng tích phân đã được trình bày ở trên, đối với tích phân I_3 theo quy tắc chọn u và dv thì ta đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases}$ khi đó $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$. Vậy: $I_3 = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx$, đến đây hoàn toàn tính được

Nhận xét: Khi gặp tích phân dạng này ta thường biến đổi như sau:

Giả sử cần tính tích phân có dạng $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ta biến đổi là: $f(x) = h(x).g(x) + g'(x)$

Bài tập tương tự : $J = \int_1^2 \frac{(\ln x + 1)x - 3 \ln x}{x^3 - 3x^2} dx$

Ví dụ 28. Tính tích phân $I = \int_3^8 \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} dx$

Tích phân từng phần (biểu thức dưới dấu tích phân có chứa hàm số lôgarit)

+) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = 2\sqrt{x+1} \end{cases}$ Khi đó $I = 2\sqrt{x+1} \ln x \Big|_1^3 - 2 \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

+) Quy về tính $I = \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$ (là dạng tích phân quen thuộc và đơn giản)

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow dx = 2t dt$ và $x=3$ thì $t=2$, $x=8$ thì $t=3$

Khi đó $I = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt$ (tích phân hữu tỉ quen thuộc)

Bài tập tương tự: $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$ (ĐH-A 2012); $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$ (ĐH- B 2010)

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm.

- Sau khi tìm tòi và áp dụng sáng kiến kinh nghiệm vào thực tiễn giảng dạy, bản thân tôi nhận thấy chất lượng giảng dạy được nâng lên rõ rệt. Các em học sinh thực sự hứng thú với môn học, đa số học sinh giải tốt bài tập trong sách giáo khoa và làm được các bài tính tích phân của các kỳ thi tuyển sinh vào đại học. Qua kết quả khảo sát thực hiện trên các lớp học năm 2015-2016 (Có cùng điểm đầu vào so với 2 lớp trong năm học 2013-2014), chất lượng bài làm của các em đã đạt kết quả cao hơn so với các năm trước. Kết quả cụ thể :

Lớp	Số số	Điểm < 5		Điểm 5 → < 8		Điểm ≥ 8	
		số lượng	%	số lượng	%	số lượng	%
12G	46	2	4,34	16	34,78	28	60,88
12C	47	4	8,5	19	40,42	24	51,08

- Bản thân khi trao đổi cùng đồng nghiệp thì được đồng nghiệp ủng hộ và công nhận tính hiệu quả của sáng kiến khi đồng nghiệp dạy trực tiếp trên các lớp 12.

3. Kết luận, kiến nghị:

Có thể nói việc hướng dẫn học sinh giải các bài toán về tích phân cơ bản là một trong những phần quan trọng của chương trình giải tích lớp 12. Để giúp học sinh có kỹ năng giải tốt các dạng toán này thì cần:

- Cho học sinh tiếp cận với nhiều bài toán khác nhau, những cách giải khác nhau.

- Rèn luyện cho học sinh phân tích bài toán theo chiều hướng khác nhau để tìm ra lời giải tối ưu nhất.

- Rèn luyện cho học sinh trình bày ngắn gọn, chặt chẽ, hợp logic.

- Phát huy tối đa tính tích cực, chủ động, sáng tạo của học sinh.

- Tạo điều kiện tối đa để học sinh chủ động giải quyết các bài cơ bản qua mỗi cách giải tự nhận ra khó khăn(hạn chế), thuận lợi(ưu thế) của mỗi cách giải mà lựa chọn một cách giải thích hợp nhất cho một bài toán.

Trên đây là những kinh nghiệm của bản thân tôi đúc rút được trong quá trình giảng dạy. Rất mong được sự góp ý xây dựng của đồng nghiệp để đề sáng kiến của tôi được hoàn thiện hơn, giúp học sinh học tốt hơn về toán tích phân, nhằm nâng cao chất lượng giáo dục.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	Thanh Hóa, ngày 24 tháng 05 năm 2016 Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. <i>Mai Huy Sáu</i>
---	--

