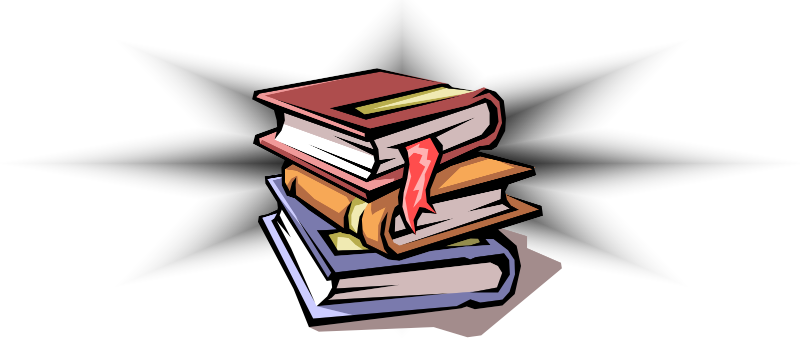
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình sưu tầm tổng hợp



BỘ ĐỀ THI VÀO LỚP 10
MÔN TOÁN CHUYÊN HƯNG YÊN

Thanh Hóa, ngày 3 tháng 4 năm 2020

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 1

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn thi: TOÁN
(Dành cho mọi thí sinh dự thi)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (*2,0 điểm*).

1) Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{20} - 20\sqrt{\frac{1}{5}}$.

2) Cho hai đường thẳng (d): $y = (m-2)x + m$ và $(\Delta): y = -4x + 1$

a) Tìm m để (d) song song với (Δ).

b) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(-1;2)$ với mọi m.

c) Tìm tọa độ điểm B thuộc (Δ) sao cho AB vuông góc với (Δ).

Câu 2 (*2,0 điểm*).

1) Giải phương trình $x^4 + 2x^2 + x\sqrt{2x^2+4} = 4$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^2 = xy + 3y - 1 \\ x + y = \dfrac{x^2+y+1}{1+x^2} \end{cases}$

Câu 3 (*2,0 điểm*). Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1) (m là tham số)

1) Giải phương trình khi $m = 2$.

2) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16$.

Câu 4 (*3,0 điểm*). Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ các nửa đường tròn đường kính AB và AC sao cho các nửa đường tròn này không có điểm nào nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng d đi qua A cắt các nửa đường tròn đường kính AB và AC theo thứ tự ở M và N (khác điểm A). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

1) Chứng minh tứ giác BMNC là hình thang vuông.

2) Chứng minh IM = IN.

3) Giả sử đường thẳng d thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện đề bài. Hãy xác định vị trí của đường thẳng d để chu vi tứ giác BMNC lớn nhất.

Câu 5 (*1,0 điểm*). Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{4}{(y+2)^2} + \dfrac{8}{(z+3)^2}$.

--------------- **HẾT** ---------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 2

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn thi: TOÁN
(Dành cho các lớp chuyên: Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm)

1. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{x}}$ và $B=\sqrt{x}+1+\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0,\ x\neq 1$.

a. Rút gọn biểu thức *A*.

b. Tìm *x* để $A=B$.

2. Cho *a, b* là hai số thực thỏa mãn $0<a<1,\ 0<b<1,\ a\neq b$ và $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$ Tìm giá trị của biểu thức $Q=\sqrt{a^2+b^2}+2019$.

Câu 2 (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=\dfrac{-1}{2020}x+\dfrac{3}{2020}$ và Parabol $(P): y=2x^2$. Biết đường thẳng (*d*) cắt (*P*) tại hai điểm *B* và *C*. Tìm tọa độ điểm *A* trên trục hoành để $|AB-AC|$ lớn nhất.

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy^2-(y-45)^2+2xy+x-220y+2024=0.$$

Câu 3 (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{5x+11}-\sqrt{6-x}+5x^2-14x-60=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2y-xy^2=5\\64x^3-y^3=61\end{cases}$.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho hình vuông *ABCD* tâm *O* cạnh *a*. Lấy *M* là điểm bất kì trên cạnh *AB* $(M\neq A,\ M\neq B)$, qua *A* kẻ đường thẳng vuông góc với *CM* tại *H*, *DH* cắt *AC* tại *K*.

1. Chứng minh rằng *MK* song song với *BD*.

2. Gọi *N* là trung điểm của *BC*, trên tia đối của tia *NO* lấy điểm *E* sao cho $\dfrac{ON}{OE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *DE* cắt *OC* tại *F*. Tính $\dfrac{FO}{FC}$.

3. Gọi *P* là giao điểm của *MC* và *BD*, *Q* là giao điểm của *MD* và *AC*. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác *CPQD* khi *M* thay đổi trên cạnh *AB*.

Câu 5 (1,0 điểm) Với *x, y* là các số thực thỏa mãn điều kiện $(2+x)(y-1)=\dfrac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$.

--------------- **HẾT** ---------------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 3

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn thi: TOÁN
(Dành cho mọi thí sinh dự thi)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (1,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{2}.\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)-1$

b) Tìm m để đường thẳng $y=x+m^2+2$ và đường thẳng $y=(m-2)x+11$ cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung

Câu 2 (2,0 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=m+3 \\ 2x-3y=m \end{cases}$ (1) (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình (1) khi $m=1$

b) Tìm m để hệ (1) có nghiệm $(x;y)$ sao cho $P=98\left(x^2+y^2\right)+4m$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}-\sqrt{6-x-x^2}=1$

b) Tìm m để phương trình $x^4+5x^2+6-m=0$ (m là tham số) có đúng hai nghiệm

Câu 4 (1,0 điểm) Quãng đường AB dài 120 km. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc xác định. Khi từ B trở về A, ô tô chạy với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi từ A đến B là 10 km/h. Tính vận tốc lúc về của ô tô, biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 24 phút.

Câu 5 (3,0 điểm) Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O;R) bất kỳ đi qua B và C (BC < 2R). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh năm điểm A, M, I, O, N cùng thuộc một đường tròn

b) Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MBC, E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MJ với đường tròn (O). Chứng minh $EB=EC=EJ$

c) Khi đường tròn (O) thay đổi, gọi K là giao điểm của OA và MN. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định

Câu 6 (1,0 điểm) Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3xyz$

Chứng minh rằng $\dfrac{x^3}{z+x^2}+\dfrac{y^3}{x+y^2}+\dfrac{z^3}{y+z^2}\ge\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

--------------- **HẾT** ---------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 4

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn thi: TOÁN
(Dành cho các lớp chuyên: Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2 điểm)

Cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{-1}{-x^2+\sqrt{x}}$ và $B=x^4-5x^2-8x+2025$ với $x>0, x\neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm các giá trị của x để biểu thức $T=B-2A^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 2 (2 điểm)

a) Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=x-m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ sao cho $(x_1-x_2)^8+(y_1-y_2)^8=162$
b) Tìm các giá trị nguyên của x để $M=x^4+(x+1)^3-2x^2-2x$ là số chính phương.

Câu 3 (2 điểm)

a) Giải phương trình $2x^3-\sqrt{108x+45}=x\sqrt{48x+20}-3x^2$
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=(x+1)(y+1) \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}$

Câu 4 (3 điểm) Cho đường tròn (O;R) và một đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Trên d lấy một điểm M bất kỳ, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt đường thẳng AB tại E

a) Chứng minh rằng $BE.MB=BC.OB$
b) Gọi N là giao điểm của CM với OE. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng OM và CE vuông góc với đường thẳng BN
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của dây AB khi M di chuyển trên đường thẳng d, biết $R=8cm$ và khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng 10 cm

Câu 5 (1 điểm) Cho a, b là hai số thay đổi thỏa mãn các điều kiện $a>0$ và $a+b\geq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{8a^2+b}{4a}+b^2$

--------------- **HẾT** ---------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 5

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2017 – 2018
Môn thi: TOÁN
(Dành cho các lớp chuyên: Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P=\dfrac{3}{4}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left(\sqrt{x}-4\right)\left(x-1\right)P$.

Câu 2 (1.0 điểm). Cho parabol $\left(P\right): y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right): y=3x+m-2$. Tìm tham số m để $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Câu 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy=2y-x \\ x^2+2x=9-y \end{cases}$

b) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}=\dfrac{3x+x^2}{x^2+1}$

Câu 4 (3.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$, kẻ đường kính AN. Lấy điểm M trên cung nhỏ BN (M khác B, N). Kẻ MD vuông góc với đường thẳng BC tại D, ME vuông góc với đường thẳng AC tại F, MF vuông góc với đường thẳng AB tại F.

a) Chứng minh rằng ba điểm F, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{MF}+\dfrac{AC}{ME}=\dfrac{BC}{MD}$.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{FB}{FA}+\dfrac{EA}{EC}+\dfrac{DC}{DB}\ge 3$.

Câu 5 (1.0 điểm). Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $y^3-2x-2=x\left(x+1\right)^2$

Câu 6(1.0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=3a^4b^4c^4$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^3b+2c^2+1}+\dfrac{1}{b^3c+2a^2+1}+\dfrac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\dfrac{3}{4}$

--------------- **HẾT** ---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 6

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn thi: TOÁN
(Dành cho mọi thí sinh dự thi)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (1.0 điểm). Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Bài 2 (2.0 điểm). Cho Parobol $\left(P\right): y=x^2$ và đường thẳng $\left(d\right): y=mx-m+2$ (m là tham số)

a) Với $m=2$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ đều lớn hơn $\frac{1}{2}$

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2=y+1 \\ y^2=x+1 \end{cases}$

b) Giải phương trình $\sqrt{x+3}=4x^2+5x-1$

Bài 4(1.0 điểm). Hai người thợ cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn người thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao lâu để hoàn thành công việc.

Bài 5 (3.0 điểm). Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ và đường thẳng d cố định, khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d là 2R. Điểm M thuộc đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới $\left(O\right)$(A, B là tiếp điểm).

a) Chứng minh các điểm O, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm đoạn OM với đường tròn $\left(O\right)$. Chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM

c) Điểm M di động trên đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6 (1.0điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc\geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\leq\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

--------------- **HẾT** ---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 7

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2016 – 2017
Môn thi: TOÁN
(Dành cho các lớp chuyên: Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (2.0điểm).

a) Đặt $a=\sqrt{2};b=\sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$

b) Cho $x=\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}+2$. Tính giá trị của biểu thức P = $x^3-6x^2+21x+2016$

Bài 2 (20điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $\left(d_1\right):y=-3x+3$;
$\left(d_2\right):y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ và $\left(d_3\right):y=-ax+a^3-a^2-\frac{1}{3}$. Tìm a để 3 đường thẳng đồng quy

b) Tìm tất cả nghiệm nguyên dương $\left(x;y;z\right)$ và thỏa mãn $x\ge y\ge z\ge 8$ của phương trình:

$$\mathrm{xyz}+\mathrm{xy}+\mathrm{yz}+\mathrm{zx}+\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=2015$$

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0\\2x^2-4x+3=-y^3\end{cases}$

b) Giải phương trình $\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+2}\right)\left(1+\sqrt{4x^2+14x+10}\right)=3$

Bài 4 (0.5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=1cm$ và $\widehat{ABC}=60^0$. Tính thể tích hình tạo được khi cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh BC.

Bài 5 (2.5điểm). Cho hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Gọi P là giao điểm của BC và MN, Q là giao điểm của BD và MN.

a) Chứng minh rằng đường thẳng AE vuông góc với CD.

b) Chứng minh rằng $\frac{BD}{BQ}+\frac{BC}{BP}=\frac{MN}{PQ}$.

c) Chứng minh rằng tam giác EPQ là tam giác cân.

Bài 6 (1.0 điểm). Trong hình vuông cạnh 10 cm, người ta đặt ngẫu nhiên 8 đoạn thẳng mỗi đoạn thẳng có độ dài 2 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm trên hai đoạn thẳng khác nhau trong 8 đoạn thẳng đó mà khoảng cách của chúng không vượt quá $\frac{14}{3}cm$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HƯNG YÊN	**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN**
	NĂM HỌC 2015 – 2016
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN**
	(Dành cho các lớp chuyên: Toán, Tin)
Đề số 8	*Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{x-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $\dfrac{1}{A}$ là số tự nhiên

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ .Xác định tọa độ các điểm A và B trên (P) để tam giác ABO đều.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình

$$(x+2)^2(y-2)+xy^2+26=0$$

Câu 3 *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2+\dfrac{8x^3}{\sqrt{9-x^2}}=9$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3y=y^3+3x \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$

Câu 4 *(2,0 điểm)* Cho tam giác ABC có góc A nhọn nội tiếp trong đường tròn *(O)* và AB > AC. Tia phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại D (D khác A) và cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại E. Gọi F là giao điểm của BD và AC.

a) Chứng minh EF song song với BC

b) Gọi M là giao điểm của AD và BC; các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn (O) cắt nhau tại N. Chứng minh $\dfrac{1}{BN}=\dfrac{1}{BE}+\dfrac{1}{BM}$.

Câu 5 *(2,0 điểm)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn *(O)*, đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh $\dfrac{HB}{HC}+\dfrac{MB}{MC}\ge 2\dfrac{AB}{AC}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào.

Câu 6 *(1,0 điểm)* Trong hình vuông 5 (cm) đặt 2015 hình tròn có đường kính $\dfrac{1}{20}cm$. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 20 đường tròn trong 2015 đường tròn trên.

--------------- **HẾT** ---------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 9

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2013 – 2014
Môn thi: TOÁN
(Dành cho các lớp chuyên: Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1: *(2,0 điểm)*

a) Cho $A = \dfrac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, chứng minh A là một số nguyên.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 = 12y + 6 \\ 2y^2 = x - 1 \end{cases}$

Bài 2: *(2,0 điểm)*

a) Cho parabol (P): $y = \dfrac{1}{3}x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + \dfrac{4}{3}$. Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P), tìm điểm M trên trục tung sao cho độ dài MA + MB nhỏ nhất.

b) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 8 = 3\sqrt{2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}$.

Bài 3: *(2,0 điểm)*

a) Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(1).f(2) = 2013$, chứng minh phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

b) Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.

Bài 4: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn (K) đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F. Gọi H là giao điểm của BF và CE.

a) Chứng minh AE.AB = AF.AC.

b) Chứng minh OA vuông góc với EF.

c) Từ A dựng các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (K) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Bài 5: *(1,0 điểm)*

Cho các số a, b, c, d thỏa mãn điều kiện: $ac - bd = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc \geq \sqrt{3}$$

------------ HẾT ------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 10

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2012 – 2013
Môn thi: TOÁN
(Dành cho các lớp chuyên: Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1: *(2 điểm)*

a) Cho $A=\sqrt{2012^2+2012^2.2013^2+2013^2}$. Chứng minh A là một số tự nhiên.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=3 \\ x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}=3 \end{cases}$

Bài 2: *(2 điểm)*

a) Cho Parbol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m+2)x - m + 6$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

b) Giải phương trình: $5 + x + 2\sqrt{(4-x)(2x-2)} = 4(\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2})$

Bài 3: *(2 điểm)*

a) Tìm tất cả các số hữu tỷ x sao cho $A = x^2 + x + 6$ là một số chính phương.

b) Cho $x > 1$ và $y > 1$. Chứng minh rằng : $\dfrac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} \ge 8$

Bài 4 *(3 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, gọi BC và OS cắt nhau tại M

a) Chứng minh AB. MB = AE.BS

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng

c) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. CMR NP vuông góc với BC

Bài 5: *(1 điểm)* Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau 4 vòng đấu (mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu các đội đã thi đấu 5 trận?

------------ HẾT ------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 11

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2012 – 2013

Môn thi: TOÁN

(Dành cho tất cả thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{27}-2\sqrt{3}-2\sqrt{48}+3\sqrt{75}$
2. Giải phương trình: $x^4-3x^2-6x-8=0$

Bài 2: (2,0 điểm) Cho phương trình $x^2-2x+m-3=0$ (ẩn x)

1. Giải phương trình với m = 3.
2. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2-2x_2+x_1x_2=-12$

Bài 3: (1,0 điểm*)* Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 48 km. Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B, nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về đến bến A hết tất cả 5 giờ 40 phút. Tính vận tốc của canô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 4: (3,0 điểm) Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E′ và F′.

Chứng minh 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh EF // E′F′.

Khi B và C cố định, A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC luôn nhọn. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi.

Bài 5: ***(2,0 điểm)***

1. Cho số thực x thỏa mãn $0<x<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{1}{x}$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2012}\right)=2012\\ x^2+z^2-4(y+z)+8=0\end{cases}$.

------------ HẾT ------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2011 - 2012
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Đề số 12
(Không có đáp án)

PHẦN A: TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (*2,0 điểm*)

Từ câu 1 đến câu 8, hãy chọn phương án đúng và viết chữ cái đứng trước phương án đó vào bài làm.

Câu 1: Đường thẳng song song với đường thẳng có PT y = -2x+1 là:

A. y =2x-1 **B.** y=2(2x-1) **C.** y =1-2x **D.** y = -2x+3

Câu 2: Hàm số y = (m+2011)x + 2011 đồng biến trên R khi:

A. m>-2011 **B.** $m \le -2011$ **C.** $m \ge -2011$ **D.** m<-2011

Câu 3: hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=1 \\ mx+2y=3 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. m<1 **B.** $m \ne 1$ **C.** m>1 **D.** $m \ne 0$

Câu 4: Q($\sqrt{2}$;1) thuộc đồ thị hàm số nào sau đây:

A. $y=\frac{1}{2}x^2$ **B.** $y=-\frac{1}{2}x^2$ **C.** $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$ **D.** $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$

Câu 5: (O;R=7) và (O';R'=3) và OO' = 4 thì vị trí tương đối của hai đường tròn là

A. Cắt nhau **B.** Tiếp xúc trong **C.** Tiếp xúc ngoài **D.** Không giao nhau

Câu 6: Tam giác ABC đều cạnh AB = 2, bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 7: Tam giác ABC vuông tại A, AC = a, AB = 2a thì sinB bằng:

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 8: Một hình trụ có thể tích 432π cm³ và chiều cao gấp hai lần bán kính đáy thì bán kính đáy là

A. 6cm **B.** 12cm **C.** 6π cm **D.** 12π cm

PHẦN B: TỰ LUẬN (*8,0 điểm*)

Bài 1: *(1,5 điểm)*Rút gọn biểu thức

A=$\sqrt{5}(\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80})$ B= $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Bài 2: *(1,5 điểm)* Cho phương trình $x^2-4x+m+1=0$ (ẩn x) (I)

a) Giải phương trình với m=2

b) Tìm m để PT có hai nghiệm dương phân biệt

Bài 3: *(1,0 điểm)* Hai người cùng làm một công việc thì sau 4 giờ 30 phút sẽ xong. Nếu người thứ nhất là 4 giờ, sau đó người thứ hai làm 3 giờ thì được 3/4 công việc. Tính thời gian là một mình để xong của mỗi người.

Bài 4: *(3,0 điểm)* Cho (O;R), điểm A nằm ngoài sao cho OA = 2R. Vẽ Các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn(B, C là các tiếp điểm). Lấy M trên cung nhỏ BC, tiếp tuyến tại M cắt AB, AC lần lượt tại E, F.

a) Tính góc BOC và góc EOF.

b) Gọi OE, OF cắt BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh tứ giác PQFE nội tiếp

c) Tính tỉ số PQ/FE

Bài 5: *(1,0 điểm)* Giải phương trình $x^4\sqrt{x+3}=2x^4-2011x+2011$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC
Đề số 13

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn thi: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi vào các lớp chuyên Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: *(2 điểm)* Cho A= $\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. và

$$B=\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}+\sqrt{\sqrt{5}+2}\right).\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

So sánh A và B

Bài 2: *(2 điểm)*

a) Giải phương trình: $(x-1)^2 - 2\sqrt{x^2-2x}-4=0$

b) Cho hệ $\begin{cases}3x+3y-2xy=4\\ x+y-xy=m-1\end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x;y) sao cho $x > 0$ và $y > 0$

Bài 3: *(2,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên x, y thoả mãn $xy + y = x^3 +4$

b) Cho ba số dương a, b, c và ab+ bc + ca =1 . CMR

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 4: *(3,0 điểm)* Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi (O) thay đổi luôn qua B và C, qua A kẻ các đường thẳng tiếp xúc với (O) tại E và F(E không trùng F). Gọi I là trung điểm của BC và N là giao của AO và EF. Đường thẳng FI cắt (O) tại H. Chứng minh rằng:

a) EH song song với BC

b) AN.AO không đổi.

c) Tâm đường tròn qua ba điểm O, I, N luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 5: *(1,0 điểm)* Trên mặt phẳng có 2011 điểm bất kỳ, ít nhất ba điểm không thẳng hàng, CMR luôn vẽ được một đường tròn qua ba trong số 2011 điểm đã cho mà 2008 điểm còn lại không nằm ngoài đường tròn.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 14

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2009 – 2010
Môn thi: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi vào các lớp chuyên Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: *(1,5 điểm)*

Cho $a = 2 : \left(\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+1}+1} \right)$

Lập một phương trình bậc hai có hệ số nguyên nhận a - 1 là một nghiệm.

Bài 2: *(2,5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3} \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

b) Tìm m để phương trình $\left(x^2 - 2x\right)^2 - 3x^2 + 6x + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 3: *(2,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng nếu số nguyên k lớn hơn 1 thoả mãn $k^2 + 4$ và $k^2 + 16$ là các số nguyên tố thì k chia hết cho 5.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có p là nửa chu vi thì $\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$

Bài 4: *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O và dây AB không đi qua O. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB nhỏ. D là một điểm thay đổi trên cung AB lớn (D khác A và B). DM cắt AB tại C. Chứng minh rằng:

a) $MB.BD = MD.BC$

b) MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

c) Tổng bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ACD không đổi.

Bài 5: *(1,0 điểm)*

Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy E, F thuộc cạnh AB; G, H thuộc cạnh BC; I, J thuộc cạnh CD; K, M thuộc cạnh DA sao cho hình 8 cạnh EFGHIJKM có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình 8 cạnh EFGHIJKM là các số hữu tỉ thì EF = IJ.

------------ HẾT ------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề số 15

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2008 – 2009
Môn thi: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi vào các lớp chuyên Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(1,5 điểm)* Cho $a_1; a_2; a_3; ... ; a_{2007}; a_{2008}$ là 2008 số thực thoả mãn:

$$a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} \text{ với } k = 1; 2; 3; ... ; 2008.$$

Tính tổng $S_{2008} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2007} + a_{2008}$

Bài 2. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $(x^2-4)^2 + x = 4$

2) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3xy - x - y = 3 \\ 3yz - y - z = 13 \\ 3zx - z - x = 5 \end{cases}$$

Bài 3. *(1,5 điểm)*

Cho f(x) là một đa thức bậc 3 có hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu f(x) nhận $3-\sqrt{2}$ là một nghiệm thì f(x) cũng có nghiệm là $3+\sqrt{2}$.

Bài 4. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I, r). Kẻ tiếp tuyến d_1 của đường tròn (I, r) sao cho d_1 song song với BC. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d_1 với các cạnh AB và AC. Gọi D và K lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I; r) với BC và d_1.

1) Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho CH = BD. Chứng minh 3 điểm A, K, H thẳng hàng.

2) Kẻ tiếp tuyến d_2 và d_3 của đường tròn (I, r) sao cho d_2 song song với AC và d_3 song song với AB. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của d_2 với các cạnh AB và BC. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của d_3 với các cạnh BC và AC. Giả sử tam giác ABC có độ dài ba cạnh thay đổi sao cho chu vi của nó bằng 2p không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của EF + MN + PQ.

Bài 5. *(2,0 điểm)* 1) Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $a+b=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{ab} + \dfrac{3}{a^2+b^2} \geq 14$

2) Trên bảng ghi 2008 dấu cộng và 2009 dấu trừ. Mỗi lần thực hiện ta xoá đi hai dấu và thay bởi dấu cộng nếu hai dấu bị xoá cùng loại và thay bởi dấu trừ nếu hai dấu bị xoá khác loại. Hỏi sau 4016 lần thực hiện như vậy trên bảng còn lại dấu gì?

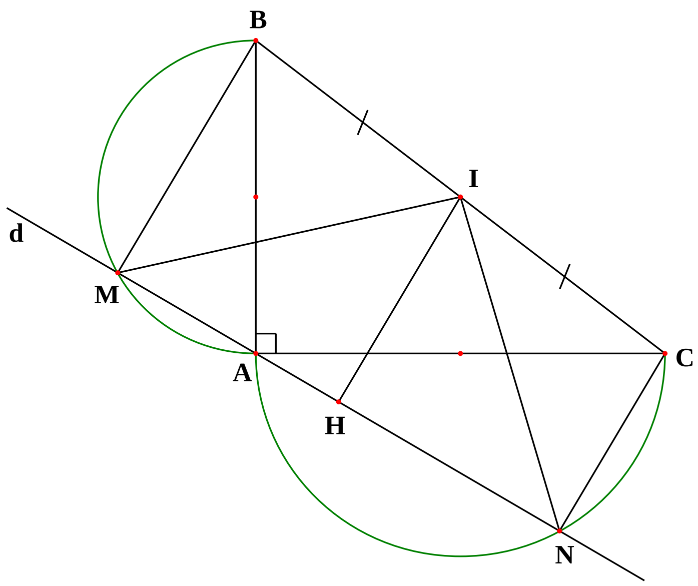
HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề số 1

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Phần</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="4">**Câu 1**
(1,0đ)</td><td>1)</td><td>$A=2\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{20}-20\sqrt{\frac{1}{5}}=2\left|2-\sqrt{5}\right|+2\sqrt{5}-20\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}$
$=2\left(\sqrt{5}-2\right)+2\sqrt{5}-4\sqrt{5}=2\sqrt{5}-4+2\sqrt{5}-4\sqrt{5}=-4$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2a)</td><td>(d) song song với (Δ)
$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2=-4 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$
Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2b)</td><td>Thay $x=-1; y=2$ vào phương trình $y=(m-2)x+m$ được:
$2=(m-2).(-1)+m \Leftrightarrow 2=-m+2+m \Leftrightarrow 2=2$ (đúng với $\forall m$)
Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(-1;2)$ với mọi *m*.</td><td></td></tr>
<tr><td>2c)</td><td><u>*Cách 1:*</u>
Vì điểm *B* thuộc (Δ) nên tọa độ điểm *B* có dạng $\left(x_0;1-4x_0\right)$
ĐK: *B* khác *A* hay $x_0\neq -1$
Giả sử phương trình đường thẳng *AB* là $y=ax+b$
Vì $A(-1;2)$ và $B\left(x_0;1-4x_0\right)$ nên ta có hệ phương trình:
$\begin{cases} -a+b=2 \\ ax_0+b=1-4x_0 \end{cases} \Rightarrow a(x_0+1)=-4x_0-1 \Rightarrow a=\frac{-4x_0-1}{x_0+1}$
AB vuông góc với (Δ)
$\Leftrightarrow aa'=-1$ hay $\frac{-4x_0-1}{x_0+1}\cdot(-4)=-1$
$\Rightarrow 16x_0+4=-x_0-1 \Leftrightarrow x_0=\frac{-5}{17}$
$\Rightarrow y_0=1-4\cdot\frac{-5}{17}=\frac{37}{17}$</td><td></td></tr>
</table>

		Vậy tọa độ điểm B là $\left(\frac{-5}{17};\frac{37}{17}\right)$. *Cách 2:* Giả sử phương trình đường thẳng AB là $y=ax+b$ AB vuông góc với (Δ) $\Leftrightarrow aa'=-1$ hay $a\cdot(-4)=-1\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB có dạng $y=\frac{1}{4}x+b$ Vì đường thẳng $y=\frac{1}{4}x+b$ đi qua $A(-1;2)$ nên: $2=\frac{1}{4}\cdot(-1)+b\Leftrightarrow b=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là $y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$ $\Rightarrow$ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}\\ y=-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-5}{17}\\ y=\frac{37}{17}\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{-5}{17};\frac{37}{17}\right)$	
Câu 2 **(2,0đ)**	1)	$x^4+2x^2+x\sqrt{2x^2+4}=4$ $\Leftrightarrow x^2(x^2+2)+\sqrt{2}.x\sqrt{x^2+2}=4$ (1) Đặt $x\sqrt{x^2+2}=y$. Phương trình (1) trở thành: $y^2+\sqrt{2}.y=4\Leftrightarrow y^2+\sqrt{2}.y-4=0$ (2) Giải phương trình (2) được $y_1=\sqrt{2}$; $y_2=-2\sqrt{2}$ Với $y=\sqrt{2}$ thì $x\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2(x^2+2)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ (x^2+1)^2=3\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+1=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2=\sqrt{3}-1\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$	1.0

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
Với $y=-2\sqrt{2}$ thì
$x\sqrt{x^2+2}=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2(x^2+2)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ (x^2+1)^2=9\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$
Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S=\left\{\sqrt{\sqrt{3}-1};-\sqrt{2}\right\}$
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2)</td><td>
Lời giải của thầy Vũ Văn Luyện – Cẩm Giàng – Hải Dương
$\begin{cases}(x+y)^2=xy+3y-1 & (1)\\ x+y=\dfrac{x^2+y+1}{1+x^2} & (2)\end{cases}$
Dễ thấy $y=0$ không là nghiệm của (1). Với $y\ne 0$, ta có:
$(1)\Leftrightarrow x^2+xy+y^2=3y-1\Rightarrow\begin{cases}x^2+y+1=4y-xy-y^2\\ x^2+1=3y-xy-y^2\end{cases}$
$\Rightarrow\dfrac{x^2+y+1}{x^2+1}=\dfrac{y(4-x-y)}{y(3-x-y)}=\dfrac{x+y-4}{x+y-3}\qquad(3)$
Từ (2) và (3) $\Rightarrow x+y=\dfrac{x+y-4}{x+y-3}\qquad(4)$
Đặt $x+y=a$. Phương trình (4) trở thành:
$a=\dfrac{a-4}{a-3}\Rightarrow a^2-3a=a-4\Leftrightarrow a^2-4a+4=0$
$\Leftrightarrow(a-2)^2=0\Leftrightarrow a=2$
$\Rightarrow x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$
Thay $y=2-x$ vào (2) được:
$2=\dfrac{x^2+2-x+1}{1+x^2}\Leftrightarrow 2+2x^2=x^2-x+3\Leftrightarrow x^2+x-1=0$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5\mp\sqrt{5}}{2}$
Thử lại ta thấy $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ là các nghiệm của hệ đã cho. Vậy …
</td><td>1.0</td></tr>
</table>

	1)	Khi $m = 2$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 - 6x + 8 = 0$ (2) Giải phương trình (2) được $x_1 = 4; x_2 = 6$ Vậy khi $m = 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm: $x_1 = 4; x_2 = 6$.	0.5
Câu 3 (2,0đ)	2)	Xét $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 - 4 = 2m - 3$ Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 1,5$ Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên: $x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m+1)x_1 - m^2 - 4$ Theo đề bài: $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16$ $\Leftrightarrow 2(m+1)x_1 - m^2 - 4 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16$ $\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) = 4m^2 + 20$ Mà $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ (theo hệ thức Vi-ét) nên: $4(m+1)^2 = 4m^2 + 20$ $\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 = 4m^2 + 20$ $\Leftrightarrow m = 2$ (TMĐK) Vậy m = 2 là giá trị cần tìm.	1.5
Câu 4 (3,0đ)			0.25
	1)	Vì $\widehat{AMB}, \widehat{ANC}$ là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên:	0.75

		$\widehat{AMB}=90^o \Rightarrow MA\perp MB$ $\widehat{ANC}=90^o \Rightarrow NA\perp NC$ $\Rightarrow$ MB // NC $\Rightarrow$ BMNC là hình thang Lại có $\widehat{AMB}=90^o$ nên BMNC là hình thang vuông.	
	2)	Gọi H là trung điểm của MN $\Rightarrow$ IH là đường trung bình của hình thang BMNC $\Rightarrow$ IH // BM $\Rightarrow IH\perp MN$ Δ IMN có HM = HN và $IH\perp MN$ $\Rightarrow$ Δ IMN cân tại I	1.0
	3)	Gọi P là chu vi tứ giác BMNC. Ta có: P = BC + BM + MN + CN = BC + (MA + MB) + (NA + NC) Dễ chứng minh bất đẳng thức $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$ Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có: $MA+MB\le\sqrt{2(MA^2+MB^2)}$ Mà $MA^2+MB^2=AB^2$ (theo định lí Py-ta-go) $\Rightarrow MA+MB\le\sqrt{2AB^2}=AB\sqrt{2}$ Tương tự: $NA+NC\le\sqrt{2AC^2}=AC\sqrt{2}$ $\Rightarrow P\le BC+\sqrt{2}(AB+AC)$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} MA=MB \\ NA=NC \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{MAB}=\widehat{NAC}=45^o$ Vậy khi d tạo với tia AB và tia AC các góc 45º thì chu vi tứ giác BMNC đạt giá trị lớn nhất là $BC+\sqrt{2}(AB+AC)$	1.0
Câu 5 ***(1,0đ)***		Lời giải của thầy Vũ Văn Luyện – Cẩm Giàng – Hải Dương Chọn điểm rơi $x=z=1; y=2$ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta có:	1.0

$(x+1)^2 \le 2(x^2+1)$

$(y+2)^2 \le 2(y^2+4)$

$(z+3)^2 = (z+1+1+1)^2 \le 4(z^2+3)$

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{0,5(y^2+4)} + \frac{4}{2(z^2+3)}$$

Dễ chứng minh $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $x, y, z > 0$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$P \ge \frac{(1+1+2)^2}{2(x^2+1)+0,5(y^2+4)+2(z^2+3)} = \frac{16}{2(x^2+z^2)+0,5y^2+10}$$

Từ GT: $x^2+y^2+z^2 \le 3y \Rightarrow x^2+z^2 \le 3y - y^2$

$$\Rightarrow 2(x^2+z^2)+0,5y^2+10 \le 2(3y-y^2)+0,5y^2+10 = -1,5y^2+6y+10$$
$$= 16 - 1,5(y-2)^2 \le 16$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{16}{16} = 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Đề số 2

Câu 2.

1. a. Ta có

$$A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $A = \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$ với $x > 0,\ x \ne 1$.

b. ĐK: $x > 0,\ x \ne 1$.

$$A = B \Leftrightarrow \frac{2(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = \frac{2x-1}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow 2x\sqrt{x} - 2 = 2x\sqrt{x} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMĐK)}.$$

Vậy với $x = 4$ thì $A = B$.

2. $a - b = \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} \Leftrightarrow a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}} \Leftrightarrow a + b = \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} a - b = \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} \\ a + b = \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{1-b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow Q = 2020$.

Câu 3.

1. Ta có $\left|AB - AC\right| \le BC$ nên GTLN $\left|AB - AC\right| = BC$ khi *A, B, C* thẳng hàng hay *A* là giao điểm của (d) với Ox $\Rightarrow A(3;0)$.

2. Ta có $xy^2 - (y-45)^2 + 2xy + x - 220y + 2024 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(xy + x - y - 129) = -128 = -2^7$

$\Rightarrow y + 1 \in \{2;4;8;16;32;64;128\} \Rightarrow y \in \{1;3;7;15;31;63;127\} \Rightarrow (x;y) \in \{(33;1),(25;3),(15;7)\}$.

Câu 4.

1. ĐK: $-\dfrac{11}{5} \le x \le 6$.

Ta có:

$\sqrt{5x+11} - \sqrt{6-x} + 5x^2 - 14x - 60 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{5x+11} - 6) - (\sqrt{6-x} - 1) + (x-5)(5x+11) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(x-5)}{\sqrt{5x+11}+6} + \dfrac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(5x+11) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x+11}+6} + \dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 5x + 11\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

(Do $\dfrac{5}{\sqrt{5x+11}+6} + \dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 5x + 11 > 0$ với $-\dfrac{11}{5} \le x \le 6$).

Vậy Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

2. $\begin{cases} 4x^2y - xy^2 = 5 \\ 64x^3 - y^3 = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(4x - y) = 5 \\ (4x - y)\left((4x-y)^2 + 12xy\right) = 61 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = xy \\ v = 4x - y \end{cases}$ hệ trở thành: $\begin{cases} u.v = 5 \\ v(v^2 + 12u) = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{5}{v} \\ v^3 + 60 = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 1 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} xy = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$. Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) \in \left\{(-1;-5),(\frac{5}{4};4)\right\}$.

Câu 5.

1. Tứ giác $ADCH$ có $\widehat{AHC} + \widehat{ADC} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ tứ giác $ADCH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{ACH}$.

Ta có $\begin{cases} \widehat{AKH} = \widehat{DAK} + \widehat{ADK} = \widehat{MAK} + \widehat{ADH} \\ \widehat{AKH} = \widehat{KCH} + \widehat{CHK} = \widehat{ACH} + \widehat{MHK} \Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{MHK} \Rightarrow AHMK \text{ là tứ giác nội tiếp} \\ \widehat{ADH} = \widehat{ACH} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{AKM} = 90° \Rightarrow MK \perp AC$ mà $BD \perp AC$ (Hai đường chéo hình vuông)$\Rightarrow MK // BD$.

2. ΔONC vuông cân tại $N \Rightarrow \dfrac{ON}{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OE = OC = OD \Rightarrow \Delta DOE$ cân tại O

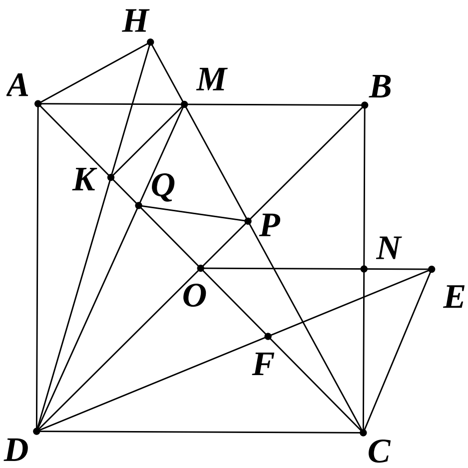
$\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OED}$ (1). Mà $OE // CD \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{OED}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{CDE} \Rightarrow DE$ là tia phân giác của góc $CDO \Rightarrow \dfrac{FO}{FC} = \dfrac{DO}{DC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Đặt $AM = x > 0$ ta có ΔAMK vuông cân tại $K \Rightarrow MK = AK = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow CK = a\sqrt{2} - \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a - x}{\sqrt{2}}$.

Do $AM // CD$

$\Rightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AM}{CD} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{x}{a+x} \Rightarrow AQ = \dfrac{AC.x}{a+x} = \dfrac{a\sqrt{2}.x}{a+x}$

$\Rightarrow CQ = AC - AQ = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{a+x}$.



$OP // MK \Rightarrow \dfrac{OC}{CK} = \dfrac{OP}{MK} \Rightarrow OP = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{2a-x}{\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{ax}{(2a-x)\sqrt{2}}$

$\Rightarrow DP = OP + OD = \dfrac{ax}{(2a-x)\sqrt{2}} + \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2a}{2a-x}$.

$S_{CPQD} = \dfrac{1}{2} DP.CQ = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{a+x} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2a}{2a-x} = a^4 \dfrac{1}{(a+x)(2a-x)}$.

S_{CDPQ} đạt GTNN $\Leftrightarrow (a+x)(2a-x)$ đạt GTLN. Mà $(a+x)(2a-x) \le \frac{1}{4}\left(\frac{a+2a+x-x}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{4}$.

$\Rightarrow S_{CDPQ} \ge \frac{4a^2}{9}$. Dấu "=" xảy ra khi $a+x=2a-x \Leftrightarrow x=\frac{a}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.

Vậy $Min\ S_{CDPQ} = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.

Câu 6.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ v = y-2 \end{cases}$. Ta có: $(2+x)(y-1) = \frac{9}{4} \Rightarrow (u+1)(v+1) = \frac{9}{4}$

Ta có $\frac{9}{4} = (u+1)(v+1) \le \frac{1}{4}(u+v+2)^2 \Leftrightarrow (u+v+2)^2 \ge 9$

Theo Bunhia ta có: $\left(u^2+v^2+1^2\right)\left(1^2+1^2+2^2\right) \ge (u+v+2)^2 \ge 9 \Leftrightarrow u^2+v^2 \ge \frac{1}{2}$

Ta có: theo Mincopxki:

$A = \sqrt{u^4+1} + \sqrt{v^4+1} \ge \sqrt{(u^2+v^2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{(u^2+v^2)^2+4} \ge \sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$. Vậy $Min\ A = \frac{\sqrt{17}}{2}$ khi $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Đề số 3

Câu 1

$a) A = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) - 1$

$= 2 + \sqrt{4-2\sqrt{3}} - 1$

$= 2 + \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2.\sqrt{3}.1 + 1} - 1$

$= 2 + \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} - 1$

$= 2 + \sqrt{3} - 1 - 1 = \sqrt{3}$

b) Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi $a \ne a' \Leftrightarrow 1 \ne m-2 \Leftrightarrow m \ne 3$

Giả sử hai đồ thị cắt nhau tại điểm $A \in Oy \Rightarrow A\left(0; y_A\right)$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$x+m^2+2=(m-2)x+11$

$\Leftrightarrow (m-3)x=m^2-9$

$\Leftrightarrow (m-3)x=(m-3)(m+3)$ (*)

Hai đồ thị cắt nhau tại A nên khi đó $x=0$ là nghiệm của phương trình (*)

$\Rightarrow 0.(m-3)=(m-3)(m+3)$

$\Leftrightarrow (m-3)(m+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3=0 \\ m+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Với $m=3$ (loại) do 2 đường thẳng trùng nhau

Vậy với $m=-3$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung

Câu 2:

a) Thay giá trị $m=1$ vào hệ phương trình ta có:

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy với $m=1$ thì hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;1)$

b) Ta có $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow (I)$ luôn có nghiệm (x;y) với mọi m

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=2m+6 \\ 2x-3y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+3-2y \\ 7y=m+6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=m+3-2y \\ y=\dfrac{m+6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5m+9}{7} \\ y=\dfrac{m+6}{7} \end{cases}$

Theo đề bài ta có: $P=98(x^2+y^2)+4m$

$\Rightarrow P=98.\left(\frac{(5m+9)^2}{49}+\frac{(m+6)^2}{49}\right)+4m$

$=2(26m^2+102m+117)+4m$

$=52m^2+208m+234$

$=52(m^2+4m+4)+234-52.2$

$=52(m+2)^2+26 \geq 26$

$\Rightarrow MinP=26$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$

Vậy $m=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 3

a) Điều kiện : $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \\ 6-x-x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 2$

$Pt \Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}-\sqrt{(x+3)(2-x)}=1(*)$

Đặt $\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}=t(t \ge 0)$

$t^2 = x+3+2-x+2\sqrt{(x+3)(2-x)} = 5+2\sqrt{(x+3)(2-x)}$

$\Rightarrow \sqrt{(x+3)(2-x)} = \frac{t^2-5}{2}$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow t-\frac{t^2-5}{2}=1$

$\Leftrightarrow 2t-t^2+5-2=0$

$\Leftrightarrow t^2-2t-3=0$

$\Leftrightarrow (t+1)(t-3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \\ t-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(ktm) \\ t=3 \quad (tm) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \sqrt{(x+3)(2-x)} = \frac{3^2-5}{2}=2$

$\Leftrightarrow 6-x-x^2=4$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad (tm) \\ x=-2\ (tm) \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{-2;1\}$

$b) x^4+5x^2+6-m=0(*)$

Đặt $x^2=t \quad (t \ge 0)$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow t^2+5t+6-m=0\,(1)$

Để phương trình (*) có đúng hai nghiệm thì phương trình (1) phải có nghiệm dương

$\Leftrightarrow$ (1) phải có hai nghiệm trái dấu hoặc hai nghiệm kép dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac<0 \\ \begin{cases} \Delta=0 \\ x_1x_2>0 \\ x_1+x_2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-m<0 \\ \begin{cases} 5^2-4(6-m)=0 \\ 6-m>0 \\ -5>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ VN \end{array}\right. \Leftrightarrow m>6$

Vậy $m>6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 4.

Gọi vận tốc lúc về của ô tô là $x(km/h) \qquad (x>0)$

Khi đó vận tốc lúc đi của ô tô là : $x+10\ \ (km/h)$

Thời gian về và thời gian đi của ô tô hết quãng đường AB lần lượt là:

$\frac{120}{x}(h);\frac{120}{x+10}(h)$ Đổi 24 phút $=0,4$ giờ

Theo đề bài ta có phương trình:

$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=0,4$

$\Leftrightarrow 120(x+10)-120x=0,4x(x+10)$

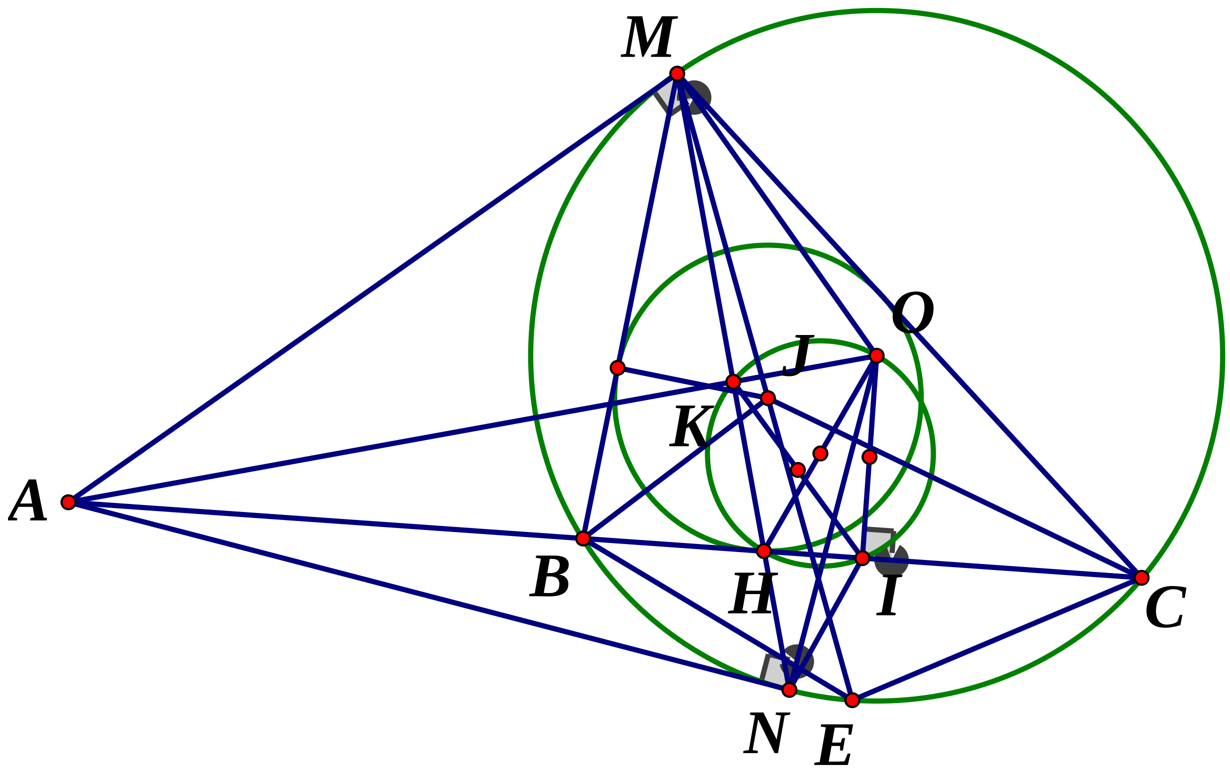
$\Leftrightarrow 0,4x^2+4x-1200=0$

$\Leftrightarrow 0,4.\left(x-50\right)(x+60)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=50\ (tm) \\ x=-60 \qquad (ktm) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc lúc đi của ô tô là $50km/h$

Câu 5.



a) Ta có $\widehat{OMA}=\widehat{ONA}=90^0(gt)$

$\Rightarrow \widehat{OIA}=90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

$\Rightarrow$Các điểm M, I, N cùng nhìn OA dưới 1 góc 90^0 nên cùng thuộc đường tròn đường kính OA

Vậy 5 điểm A,M,O,I,N cùng thuộc đường tròn đường kính OA

b) Ta có MJ là phân giác của $\widehat{BMC}\Rightarrow \widehat{BME}=\widehat{EMC}\Rightarrow sd\,\overset\frown{BE}=sd\,\overset\frown{CE}\Rightarrow EB=EC$ (1)

(hai cung bằng nhau thì căng hai dây bằng nhau)

Ta có: $\widehat{EBC} = \widehat{EMC} = \widehat{BME}; \widehat{CBJ} = \widehat{JBM}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{EBJ} = \widehat{EBC} + \widehat{CBJ} = \widehat{BME} + \widehat{JBM}$

Xét tam giác BMJ có $\widehat{BME} + \widehat{JBM} = \widehat{BJE}$ (góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó) $\Rightarrow \widehat{EBJ} = \widehat{BJE} \Rightarrow \Delta EBJ$ cân tại E $\Rightarrow EB = EJ\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EB = EC = EJ$

c) Gọi H là giao điểm của AC và MN, ta có: $\widehat{OKH} = 90^0$ (Do AM, AN là hai tiếp tuyến cắt nhau nên OA là trung trực của MN)

$\widehat{AIO} = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

Xét ΔAHK và ΔAOI có: $\widehat{AKH} = \widehat{AIO} = 90^0; \widehat{OAI}$ $\quad chung$

$\Rightarrow \Delta AHK \sim \Delta AOI\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AO} = \dfrac{AK}{AI} \Rightarrow AH.AI = AO.AK \qquad (3)$

Xét tam giác vuông AMO có $AO.AK = AM^2$ (4) (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

Xét tam giác AMB và ACM có: $\widehat{MAC}$ chung; $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}$ $\qquad (cmt)$

$\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ACM\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB.AC\,(5)$

Từ (3) (4) (5) suy ra $AH.AI = AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{AI}$

Ta có AB, AC, AI không đổi $\Rightarrow AH$ không đổi. Mà A cố đinh nên H cố định

Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK, chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OIHK \Rightarrow O'$ là trung điểm của OH $\Rightarrow O'$ thuộc trung trực của HI

Mà $H; I$ cố định $\Rightarrow$ Trung trực của HI cố định

Vậy khi (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOIK luôn chạy trên trung trực của HI, với $H = AC \cap MN$

Câu 6

Theo đề bài ta có: $xy + yz + zx = 3xyz$

$\Leftrightarrow \dfrac{xy}{xyz} + \dfrac{yz}{xyz} + \dfrac{zx}{xyz} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3$

Lại có: $3xyz = xy + yz + xz \overset{Cosi}{\geq} 3\sqrt[3]{(xyz)^3} \Rightarrow xyz \geq 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3$

Ta có

$$\frac{x^3}{z + x^2} = x - \frac{xz}{z + x^2} \overset{Cosi}{\geq} x - \frac{xz}{2\sqrt{zx^2}} = x - \frac{\sqrt{z}}{2} \geq x - \frac{z+1}{4}$$

$$(Do \quad z + 1 \geq 2\sqrt{z} \Rightarrow \sqrt{z} \leq \frac{z+1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z}}{2} \leq \frac{z+1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{z}}{2} \geq \frac{z+1}{2})$$

Tương tự ta có: $\begin{cases} \dfrac{y^3}{x+y^3} \geq y - \dfrac{x+1}{4} \\ \dfrac{z^3}{y+z^2} \geq z - \dfrac{y+1}{4} \end{cases}$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{x^3}{z+x^2}+\frac{y^3}{x+y^2}+\frac{z^3}{y+z^2} \geq x+y+z-\frac{x+y+z+3}{4} \geq 3-\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(dpcm)$$

Đề số 4

Câu 1.

a) Điều kiện $x>0; x \neq 1$

$$A=\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{-1}{-x^2+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\left(x^2-\sqrt{x}\right)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}.\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}.\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1$$

b) Ta có: $T=B-2A^2$

$=x^4-5x^2-8x+2025-2\left(x-1\right)^2$

$=x^4-5x^2-8x+2025-2x^2+4x-2$

$=x^4-7x^2-4x+2023$

$=x^4-8x^2+16+x^2-4x+4+2003$

$=\left(x^2-4\right)^2+\left(x-2\right)^2+2023$

Vì $\left(x^2-4\right)^2 \geq 0, \left(x-2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow T \geq 2003$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy với $T_{\min}=2003 \Leftrightarrow x=2$

Câu 2

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$x^2=x-m \Leftrightarrow x^2-x+m=0(*)$

Hai đồ thị hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 1-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Khi đó ta có: $y_1=x_1-m,\quad y_2=x_2-m$

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$(x_1 - x_2)^8 + (y_1 - y_2)^8 = 162$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 + (x_1 - m - x_2 + m)^8 = 162$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 + (x_1 - x_2)^8 = 162$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 = 81 = \left(\sqrt{3}\right)^8$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - x_2 = \sqrt{3} \\ x_1 - x_2 = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 + \sqrt{3} \\ x_1 = x_2 - \sqrt{3} \end{array}\right.$

+) Với $x_1 = x_2 + \sqrt{3} \Rightarrow 2x_2 + \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x_1x_2 = m = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}$ (tm)

+)Với $x_1 = x_2 - \sqrt{3} \Rightarrow 2x_2 - \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x_1x_2 = m = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}$ (tm)

Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Ta có: $M = x^4 + (x+1)^3 - 2x^2 - 2x$

$M = x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - 2x$

$M = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$\Rightarrow 4M = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

+) Ta có:

$(2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + x^2 \le 4x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x^2 + (x+2)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 4M$

Ta thấy dấu $" = "$ không thể xảy ra nên $(2x^2 + x)^2 < 4M$ (1)

+) Với $x = 0 \Rightarrow 4M = 4 \Leftrightarrow M = 1 \Rightarrow$ M là số chính phương

Với $x = 1 \Rightarrow 4M = 20 \Leftrightarrow M = 5 \Rightarrow M$ không là số chính phương.

Với $x = 2 \Rightarrow 4M = 124 \Rightarrow M = 31 \Rightarrow$ M không là số chính phương

Với $x \ne \{0;1;2\}$ ta có: $\left[\begin{array}{l} x - 1 \ge 2 \\ x - 1 \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -1 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)^2 \ge 4 \Leftrightarrow 4 - (x-1)^2 \le 0$

Ta có:

$4M = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

$= 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x + 3$

$= \left(2x^2 + x + 1\right)^2 - \left(x - 1\right)^2 + 4$

$\Rightarrow 4M \le \left(2x^2 + x + 1\right)^2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(2x^2 + 1\right)^2 < 4M \le \left(2x^2 + x + 1\right)^2$.Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4M = \left(2x^2 + x + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x - 1\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = 0;\ \ x = -1\,; x = 3$

Câu 3.

a) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{5}{12}$

$2x^3 - \sqrt{108x + 45} = x\sqrt{48x + 20} - 3x^2$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3\sqrt{12x + 5} = 2x\sqrt{12x + 5} - 3x^2$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 = 2x\sqrt{12x + 5} + 3\sqrt{12x + 5}$

$\Leftrightarrow x^2(2x + 3) = \sqrt{12x + 5}.\left(2x + 3\right)$

$\Leftrightarrow \left(2x + 3\right)\left(x^2 - \sqrt{12x + 5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = 0 \\ x^2 = \sqrt{12x + 5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\dfrac{3}{2} & (ktm) \\ x^4 = 12x + 5 & (1) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2\right)^2 = \left(2x + 3\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = 2x + 3 \\ x^2 + 2 = -2x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 5 = 0 (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1 \pm \sqrt{2}$

b) Điều kiện: $x \ne -1; y \ne -1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = \left(x + 1\right)\left(y + 1\right) \\ \left(\dfrac{x}{y + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x + 1}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 1) + y(y + 1) = (x + 1)(y + 1) \\ \left(\dfrac{x}{y + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x + 1}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y + 1} + \dfrac{y}{x + 1} = 1 \\ \left(\dfrac{x}{y + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x + 1}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

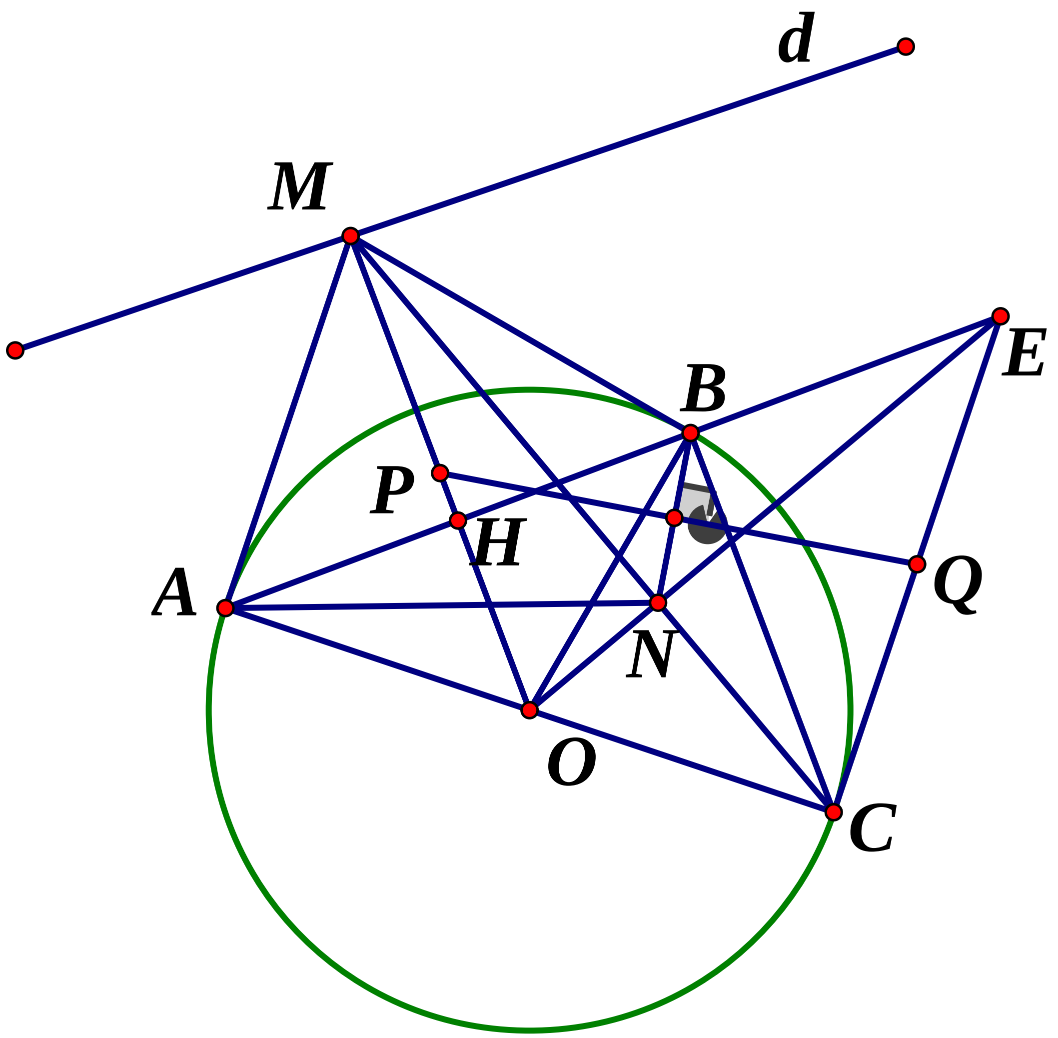
Đặt $a = \dfrac{x}{y + 1}; b = \dfrac{y}{x + 1}$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 2a^2-2a+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 2a(a-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=0 \\ \dfrac{y}{x+1}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=1 \\ \dfrac{y}{x+1}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right. (tm)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;0)$ hoặc $(x;y)=(0;1)$

Câu 4



a) Xét tứ giác $OAMB$ có $\widehat{OAM}+\widehat{OBM}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow$ Tứ giác OAMB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OMB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OB)

Mà $\widehat{OAB} = \widehat{OMB}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{BCE}$

Xét tam giác OMB và tam giác ECB có:

$\widehat{OBM} = \widehat{EBC} = 90^0; \widehat{OMB} = \widehat{BCE}(cmt) \Rightarrow \Delta OMB \sim \Delta ECB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{OB} = \dfrac{BC}{MB} \Leftrightarrow BE.MB = BC.OB\ (dpcm)$

b) Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của OM và CE

$\Delta OMB \sim \Delta ECB \quad (cmt) \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{MOB}$

Xét tam giác EAC và tam giác OMA có:

$\widehat{ECA} = \widehat{OMA} = 90^0; \widehat{CEA} = \widehat{CEB} = \widehat{MOB} = \widehat{MOA}$

$\Rightarrow \Delta EAC \sim \Delta OMA(g.g) \Rightarrow \dfrac{EC}{OA} = \dfrac{AC}{AM} \Rightarrow \dfrac{EC}{OC} = \dfrac{AC}{AM}$

Xét tam giác COE và tam giác AMC có $\widehat{OCE} = \widehat{CAM} = 90^0$

$\dfrac{CE}{CO} = \dfrac{AC}{AM}(cmt) \Rightarrow \Delta COE \sim \Delta ACM \quad (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{COE}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{COE} + \widehat{NOA} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AMC} + \widehat{NOA} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác OAMN là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \widehat{ONM} = 180^0 - \widehat{OAM} = 90^0 \Rightarrow \Delta OMN$ vuông tại N.

$\Rightarrow NP = \dfrac{1}{2}OM$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)

$\Rightarrow NP = BP = \dfrac{1}{2}OM \Rightarrow P$ thuộc trung trực của đoạn thẳng BN

Chứng minh tương tự ta có : $NQ = BQ = \dfrac{1}{2}EC \Rightarrow Q$ thuộc trung trực của đoạn thẳng BN

Vậy PQ là trung trực của đoạn thẳng BN $\Rightarrow PQ \perp BN$

c) Gọi $H = AB \cap OM$ ta có $OH \perp AB \Rightarrow AB_{\min} \Leftrightarrow OH_{\max}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM có:

$OH.OM = OA^2 = R^2 \Rightarrow OH = \dfrac{R^2}{OM} \Rightarrow OH_{\max} \Leftrightarrow OM_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuong góc của O trên đường thẳng d $\Rightarrow OM = d(O;d) = 10 \Rightarrow OH = \dfrac{8^2}{10} = 6,4\ (cm)$

Xét tam giác vuông OAH có $AH = \sqrt{8^2 - 6,4^2} = 4,8(cm) \Rightarrow AB = 2AH = 9,6(cm)$

Vậy dây AM nhỏ nhất là $9,6cm$

Câu 5:

Theo giả thiết ta có: $a + b \geq 1 \Leftrightarrow b \geq 1 - a$

$$\Rightarrow A \geq \frac{8a^2+1-a}{4a}+b^2=2a+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4}+b^2=a+\frac{1}{4a}+a+b^2-\frac{1}{4}$$

$$\geq a+\frac{1}{4a}+a+a^2-2a+1-\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4a}+a^2-a+\frac{3}{4}=a+\frac{1}{4a}+a^2-a+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\overset{Co-si}{\geq} 2\sqrt{a.\frac{1}{4a}}+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4a}; a-\frac{1}{2}=0 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$ (tm)

Vậy $MinA=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Đề số 5

Câu 1. Cho biểu thức $P=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\geq 0; x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

Với $x\geq 0; x\neq 1$ ta có

$$P=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\left(1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{x-1}=\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

b) Tìm các giá trị của x để $P=\frac{3}{4}$.

Với $x\geq 0; x\neq 1$ ta có $P=\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$, khi đó

$$P=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{x-1}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 8\sqrt{x}=3\left(x-1\right)\Leftrightarrow 3x-8\sqrt{x}-3=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(3\sqrt{x}+1\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-3=0\Leftrightarrow x=9$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left(\sqrt{x}-4\right)\left(x-1\right)P$.

Với $x \ge 0; x \ne 1$ ta có $P = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$, khi đó ta được

$$A = \left(\sqrt{x}-4\right)\left(x-1\right)P = \left(\sqrt{x}-4\right)\left(x-1\right)\frac{2\sqrt{x}}{x-1} = 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right) = 2x - 8\sqrt{x}$$

Ta có $A = 2x - 8\sqrt{x} = 2x - 8\sqrt{x} + 8 - 8 = 2\left(\sqrt{x}-2\right)^2 - 8 \ge -8$, dấu bằng xẩy ra khi $x = 4$

thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -8, đạt được tại $x = 4$

Câu 2. Cho parabol $\left(P\right): y = x^2$ và đường thẳng $\left(d\right): y = 3x + m - 2$. Tìm tham số m để $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 3x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - m + 2 = 0$.

Để $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì phương trình trên phải có hai nghiệm dương phân biệt, điều này xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 3^2 + 4\left(m-2\right) > 0 \\ P = 3 > 0 \\ S = -m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 1 > 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{4} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 2$$

Vậy với $-\dfrac{1}{4} < m < 2$ thì $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Câu 3(2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy = 2y - x \\ x^2 + 2x = 9 - y \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2 + x - 2xy - 2y = 0 \Leftrightarrow x\left(x+1\right) - 2y\left(x+y\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x-2y\right) = 0$$

+ Với $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $-1 = 9 - y \Leftrightarrow y = 10$.

+ Với $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4y^2 + 4y = 9 - y \Leftrightarrow 4y^2 + 5y - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{9}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 1 \\ x = -\dfrac{9}{2}; y = -\dfrac{9}{4} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(-1;10),(2;1),\left(-\frac{9}{2};-\frac{9}{4}\right)$.

b) Giải phương trình $\sqrt{\frac{1-2x}{x}}=\frac{3x+x^2}{x^2+1}$.

Cách 1. Điều kiện xác định của phương trình là $0<x\le\frac{1}{2}$. Khi đó dễ thấy $\frac{3x+x^2}{x^2+1}\ge 0$.

Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$\sqrt{\frac{1-2x}{x}}=\frac{3x+x^2}{x^2+1}\Leftrightarrow\frac{1-2x}{x}=\left(\frac{3x+x^2}{x^2+1}\right)^2\Leftrightarrow\frac{1-2x}{x}-1=\left(\frac{3x+x^2}{x^2+1}\right)^2-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-3x}{x}=\left(\frac{3x+x^2}{x^2+1}-1\right)\left(\frac{3x+x^2}{x^2+1}+1\right)\Leftrightarrow\frac{1-3x}{x}=\frac{(3x-1)(2x^2+3x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow(3x-1)\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^4+2x^2+1}+\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-1=0\\ \frac{2x^2+3x+1}{x^4+2x^2+1}+\frac{1}{x}=0\end{array}\right.$$

+ Với $3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện xác định.

+ Với $\frac{2x^2+3x+1}{x^4+2x^2+1}+\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{x^4+2x^3+5x^2+x+1}{x(x^4+2x^2+1)}=0\Leftrightarrow x^4+2x^3+5x^2+x+1=0$

Ta có $x^4+2x^3+5x^2+x+1=(x^2+x)^2+\left(2x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{3}$.

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{1-2x}{x}}-1=\frac{x^2+3x}{x^2+1}-1\Leftrightarrow\frac{\frac{1-2x}{x}-1}{\sqrt{\frac{1-2x}{x}}+1}=\frac{3x-1}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-3x}{\sqrt{x(1-2x)}+x}=\frac{3x-1}{x^2+1}\Leftrightarrow(1-3x)\left[\frac{1}{\sqrt{x(1-2x)}+x}+\frac{1}{x^2+1}\right]=0$$

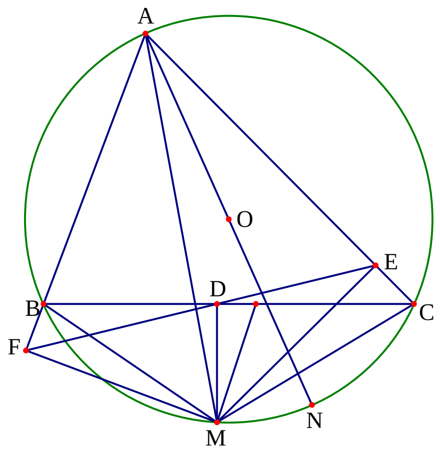
Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{x(1-2x)}+x}+\frac{1}{x^2+1}>0$ với mọi $0<x\le\frac{1}{2}$.

Do đó từ phương trình trên ta được $1-3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{3}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), kẻ đường kính AN. Lấy điểm M trên cung nhỏ BN (M khác B, N). Kẻ MD vuông góc với đường thẳng BC tại D, ME vuông góc với đường thẳng AC tại F, MF vuông góc với đường thẳng AB tại F.

a) Chứng minh rằng ba điểm F, D, E thẳng hàng.



Tứ giác BDMF có $\widehat{BDM}+\widehat{BFM}=90^0+90^0=180^0$ nên nội tiếp đường tròn. Suy ra ta được $\widehat{BMF}=\widehat{BDF}$. Chứng minh tương tự ta được $\widehat{CDE}=\widehat{CME}$.

Dễ thấy các tứ giác ABMC và AFME nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{BMC}=\widehat{\text{EMF}}$ (Vì cùng bù với góc $\widehat{BAC}$), từ đó suy ra $\widehat{BMF}=\widehat{CME}$.

Kết hợp với các kết quả trên ta được $\widehat{BDF}=\widehat{CDE}$ nên suy ra ba điểm E, D, F thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{MF}+\dfrac{AC}{ME}=\dfrac{BC}{MD}$.

Trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $\widehat{BPM}=\widehat{ACM}$, khi đó ta suy ra được $\widehat{CPM}=\widehat{ABM}$.

Xét hai tam giác ACM và BPM có $\widehat{BPM}=\widehat{ACM}$ và $\widehat{CAM}=\widehat{PBM}$ nên $\Delta ACM \backsim \Delta BPM$.

Lại có DM và ME lần lượt là đường cao của tam giác BPM và ACM

Từ đó ta được $\dfrac{MD}{ME}=\dfrac{BP}{AC}$ nên suy ra $\dfrac{AC}{ME}=\dfrac{BP}{MD}$.

Xét hai tam giác ABM và CPM có $\widehat{CAM}=\widehat{PBM}$ và $\widehat{BAM}=\widehat{PCM}$ nên ΔABM $\backsim$ ΔCPM.

Từ đó hoàn toàn tương tự ta cũng được $\frac{AB}{MF}=\frac{CP}{MD}$.

Do đó suy ra $\frac{AB}{MF}+\frac{AC}{ME}=\frac{CP}{MD}+\frac{BP}{MD}=\frac{BC}{MD}$.

c) Chứng minh rằng $\frac{FB}{FA}+\frac{EA}{EC}+\frac{DC}{DB}\geq 3$.

Trước hết ta pháp biểu và chứng minh bổ đề: *Cho tam giác ABC. Các điểm A′, B′, C′ lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho trong chúng hoặc không có điểm nào, hoặc có đúng 2 điểm thuộc các cạnh của tam giác ABC. Khi đó A′, B′, C′ thẳng hàng khi và chỉ khi* $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$

Chứng minh

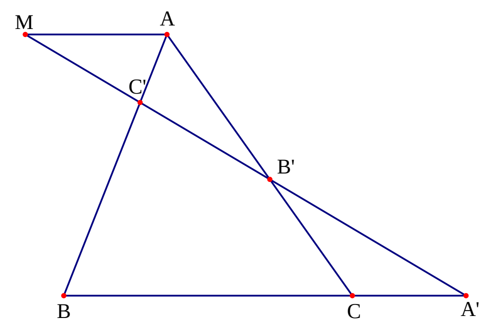
+ Trường hợp 1: Trong 3 điểm A′, B′, C′ có đúng 2 điểm thuộc cạnh tam giác ABC.

Giả sử là B′, C′

- Điều kiện cần: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng B′C′ tại M.

Ta có $\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B};\frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{AM}$. Vậy

$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B}.\frac{A'C}{AM}.\frac{A'B}{A'C}=1$



- Điều kiện đủ: Gọi A′′ là giao của B′C′ với BC.

Áp dụng định lý Menelaus (phần thuận) ta có $\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ mà

$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ nên $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$. Do B′, C′ lần lượt thuộc cạnh CA, AB nên A′′ nằm ngoài cạnh BC.

Vậy $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$ và A′, A′′ nằm ngoài cạnh BC suy ra $A''\equiv A'$. Do đó A′, B′, C′ thẳng hàng

+ Trường hợp 2: Trong 3 điểm A′, B′, C′ không có điểm thuộc cạnh tam giác ABC được chứng minh tương tự.

Trở lại bài toán:

Xét tam giác ABC có ba điểm F, D, F thẳng hàng nên theo bổ đề trên ta có

$\frac{FB}{FA}.\frac{EA}{EC}.\frac{DC}{DB} \geq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{FB}{FA}+\frac{EA}{EC}+\frac{DC}{DB} \geq 3\sqrt[3]{\frac{FB}{FA}.\frac{EA}{EC}.\frac{DC}{DB}} = 3$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 5. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $y^3 - 2x - 2 = x\left(x+1\right)^2$.

Phương trình đã cho tương đương với $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.

+ Xét trường hợp $\left|x\right| > 1$, khi đó dễ thấy $2x^2 + 3x + 2 > 0$.

Do đó từ phương trình ta suy ra được $x^3 < y^3$.

Mặt khác ta có $\left(x+1\right)^3 - \left(x^3 + 2x^2 + 3x + 2\right) = x^2 - 1 > 0$ vì $\left|x\right| > 1$.

Do đó suy ra $y^3 < \left(x+1\right)^3$.

Kết hợp lại ta được $x^3 < y^3 < \left(x+1\right)^3$, điều này vô lý vì x và y là số nguyên.

Như vậy khi $\left|x\right| > 1$ phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

+ Xét trường hợp $\left|x\right| \leq 1$, khi đó do x là số nguyên nên ta được $x \in \left\{-1;0;1\right\}$.

Với $x = -1$ thay vào phương trình đã cho ta được $y = 0$.

Với $x = 0$ thay vào phương trình đã cho ta được $y^3 = 2$, phương trình không có nghiệm nguyên.

Với $x = 1$ thay vào phương trình đã cho ta được $y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $\left(x;y\right) = \left(-1;0\right),\left(1;2\right)$.

Câu 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 3a^4b^4c^4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} + \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} + \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{3}{4}$$

Từ $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 3a^4b^4c^4$ ta được $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^3} = 3$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM là được $a^3b + 2c^2 + 1 = a^3b + c^2 + c^2 + 1 \geq 2ac\sqrt{ab} + 2c$

Từ đó kết hợp với áp dụng bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta được

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}\le\frac{1}{2ac\sqrt{ab}+2c}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{ac\sqrt{ab}}+\frac{1}{c}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{b^3c+2a^2+1}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{ba\sqrt{bc}}+\frac{1}{a}\right);\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{bc\sqrt{ca}}+\frac{1}{b}\right)$.

Gọi vế trái của bất dẳng thức cần chứng minh là P, khi đó cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{ac\sqrt{ab}}+\frac{1}{ba\sqrt{bc}}+\frac{1}{bc\sqrt{ca}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài toán quy về chứng minh $\frac{1}{ac\sqrt{ab}}+\frac{1}{ba\sqrt{bc}}+\frac{1}{bc\sqrt{ca}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 6$.

Áp dụng bất đẳng thức dạng $\left(x+y+z\right)^2\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ ta có

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\le 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le 3\sqrt{3\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^3}\right)}=3\sqrt{3.3}=9$$

Từ đó ta được $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\frac{1}{ac\sqrt{ab}}+\frac{1}{ba\sqrt{bc}}+\frac{1}{bc\sqrt{ca}}\right)^2\le\left(\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

Ta lại có

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\sqrt{3\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)}=3$$
$$\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}\le\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=3$$

Do đó $\left(\frac{1}{ac\sqrt{ab}}+\frac{1}{ba\sqrt{bc}}+\frac{1}{bc\sqrt{ca}}\right)^2\le\left(\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\le 9$.

Suy ra $\frac{1}{ac\sqrt{ab}}+\frac{1}{ba\sqrt{bc}}+\frac{1}{bc\sqrt{ca}}\le 3$.

Do đó $\frac{1}{ac\sqrt{ab}}+\frac{1}{ba\sqrt{bc}}+\frac{1}{bc\sqrt{ca}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 6$.

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

+ Cách 2. Trường hết ta chứng minh bất đẳng thức bổ đề $x^4 + y^4 + z^4 \ge x^3y + y^3z + z^3x$.

Thật vậy $2\left(x^4 + y^4 + z^4\right) \ge x^4 + x^2y^2 + y^4 + y^2z^2 + z^4 + z^2 \ge 2\left(x^2x^3y + y^3z + z^3x\right)$.

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Từ $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 3a^4b^4c^4$ ta được $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^3} = 3$.

Áp dụng bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ ta được

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b+1} + \frac{1}{b^3c+1} + \frac{1}{c^3a+1} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2c^2}\right)$$

Dễ thấy $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2c^2} \le \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}\right)} = \frac{3}{2}$.

Áp dụng thêm lần nữa bất đẳng thức trên và kết hợp với bổ đề ta được

$$\frac{1}{a^3b+1} + \frac{1}{b^3c+1} + \frac{1}{c^3a+1} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b} + \frac{1}{b^3c} + \frac{1}{c^3a}\right) + \frac{3}{4} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}\right) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Do vậy ta được $P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b+1} + \frac{1}{b^3c+1} + \frac{1}{c^3a+1} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2c^2}\right) \le \frac{3}{4}$.

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Đề số 6

Bài 1 (1.0 điểm). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

Ta có

$$A = \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{9.3} - \sqrt{16.3} + \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = -1$$

Bài 2 (2.0 điểm). Cho Parobol $\left(P\right): y = x^2$ và đường thẳng $\left(d\right): y = mx - m + 2$ (m là tham số)

a) Với $m = 2$. Tìm tọa độ giao điểm của $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$.

Với $m = 2$ ta có $\left(P\right): y = x^2$ và $\left(d\right): y = 2x$, khi đó tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = 0 \\ x = 2; y = 4 \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $O(0;0)$ và $A(2;4)$.

b) Hoành độ giao điểm của của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$$x^2 = mx - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx + m - 2 = 0$$

Để (P) và (d) cắt nhau tạ hai điểm phân biệt thì phương trình trên phải có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó $\Delta = m^2 - 4(m-2) = m^2 - 4m + 8 > 0$, đúng với mọi m.

Khi đó để hoành độ giao điểm $x_1; x_2$ đều lớn hơn $\frac{1}{2}$ thì ta cần có

$$\begin{cases} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ x_1 - \frac{1}{2} + x_2 - \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 > 0 \\ 2x_1 + 2x_2 > 2 \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = m; x_1x_2 = m - 2$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 4m - 2(m-2) + 1 > 0 \\ 2m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 5 > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m > 1$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ đều lớn hơn $\frac{1}{2}$.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y^2 = x + 1 \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$x^2 - y^2 = y - x \Leftrightarrow (x-y)(x-y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y - 1 \end{array}\right.$$

+ Với $x = y$ ta tính được nghiệm là $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

+ Với $x = -y - 1$ ta tính được các nghiệm $(-1;0)$ và $(0;-1)$

b) Giải phương trình $\sqrt{x+3} = 4x^2 + 5x - 1$

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -3$. Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$x+3+\sqrt{x+3}+\frac{1}{4}=4x^2+6x+\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}=2x+\frac{3}{2}\\ \sqrt{x+3}+\frac{1}{2}=-2x-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Giải lần lượt các trường hợp ta được nghiệm của phương trình là

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{41}}{8};x_2=\frac{-7-\sqrt{33}}{8}.$$

Bài 4(1.0 điểm). Hai người thợ cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn người thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao lâu để hoàn thành công việc.

Bài giải.

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành công việc là x (giờ) (x > 0)

Thời gian người thứ hai hoàn thành công việc là y (giờ) (y > 0)

Người thứ nhất hoàn thành ít hơn người thứ hai là 6 giờ nên: y – x = 6 (giờ) (1)

1 giờ người thứ nhất hoàn thành được $\frac{1}{x}$ (công việc)

1 giờ người thứ hai hoàn thành được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Do đó 1 giờ 2 người cùng làm thì được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ (công việc)

Do đó nếu 2 người cùng làm thì mấy $1:\frac{x+y}{xy}=\frac{xy}{x+y}$ (giờ)

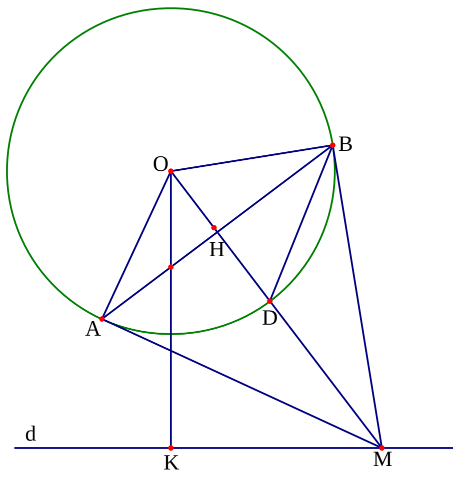
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}y-x=6\\ \frac{xy}{x+y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+6\\ x(x+6)=4(2x+6)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+6\\ x^2-2x-24=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=12\\ x=6\ (do\ x>0)\end{cases}$$

Vậy nếu làm riêng người thứ nhất mất 6 giờ, người thứ 2 mất 12 giờ để hoàn thành công việc.

Bài 5 (3.0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d cố định, khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d là 2R. Điểm M thuộc đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới (O)(A, B là tiếp điểm).

a) Do MA và MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ta có $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^0$, do đó các điểm O, A, B, M cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.



b) Gọi D là giao điểm đoạn OM với đường tròn (O). Chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM

Do D là giao điểm của OM với đường tròn (O) nên D là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Khi đó dễ thấy BD là phân giác của $\widehat{ABM}$. Mặt khác ta lại có MD là phân giác của góc $\widehat{AMB}$. Do vậy D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM

c) Điểm M di động trên đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi H là giao điểm của MO và AB, K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống d

Ta có MH vuông góc với AB và $HA = HB; OK = 2R$

$$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{OM^2 - R^2}$$
$$AH = \frac{AM.AO}{OM} = \frac{R\sqrt{OM^2 - R^2}}{OM^2}$$
$$MH = \frac{AM^2}{OM} = \frac{OM^2 - R^2}{OM}$$

Khi đó $S_{MAB} = \frac{1}{2}MH.AB = MH.HA = \frac{\left(OM^2 - R^2\right)R\sqrt{OM^2 - R^2}}{OM^2}$

$$= R\left[1 - \left(\frac{R}{OM}\right)^2\right].OM.\sqrt{1 - \left(\frac{R}{OM}\right)^2} = R.OM.\left(\sqrt{1 - \left(\frac{R}{OM}\right)^2}\right)^3$$

Với M thuộc đường thẳng d ta có $OM \geq OK = 2R \Leftrightarrow 0 < \frac{R}{OM} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{R}{OM}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$.

Suy ra $S_{AMB} \geq R.2R.\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ (đvdt)

Vậy diện tích tam giác AMB nhỏ nhất khi M trùng với K.

Bài 6 (1.0 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2} \leq \frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz cho bộ số $\left(\sqrt{a^5};b;c\right)$ và $\left(\frac{1}{\sqrt{a}};b;c\right)$ ta có:

$$\left(a^5+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+b^2+c^2\right) \geq \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{a^5+b^2+c^2} \leq \frac{\frac{1}{a}+b^2+c^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{1}{b^5+c^2+a^2} \leq \frac{\frac{1}{b}+c^2+a^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$ và $\frac{1}{c^5+a^2+b^2} \leq \frac{\frac{1}{c}+a^2+b^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

Do đó $\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

Mặt khác ta có $abc \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \leq bc; \frac{1}{b} \leq ac; \frac{1}{c} \leq ab \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq ab+bc+ac$

Mà $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$

Suy ra $\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2} \leq \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} = \frac{3}{a^2+b^2+c^2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Đề số 7

Bài 1 (2.0điểm).

a) Đặt $a=\sqrt{2}; b=\sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$

Ta có $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 \Leftrightarrow 1=\left(a-b\right)\left(\frac{1}{b}+a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)$

$VP=\frac{a}{b}-1+a^2-b^2+\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}$

Do $a=\sqrt{2};b=\sqrt[3]{2}$ nên $\frac{a^2}{b}=\frac{b^3}{b}=b^2;\frac{a}{b}=\frac{b^2}{a}\Rightarrow VP=-1+a^2=-1+2=1=VT$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Cho $x=\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}+2$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^3-6x^2+21x+2016$

Ta có

$$\begin{aligned}(x-2)^3&=\left(\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}\right)^3\\&=\left(\sqrt{28}+1\right)-\left(\sqrt{28}-1\right)-3\left(\sqrt{28}+1\right)\left(\sqrt{28}-1\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}\right)=20-9x\end{aligned}$$

Từ đó ta được $x^3-6x^2+12x-8=20-9x\Leftrightarrow x^3-6x^2+21x=28$.

Do đó $P=x^3-6x^2+21x+2016=28+2016=2044$

Bài 2 (20điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $(d_1):y=-3x+3$; $(d_2):y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

và $(d_3):y=-ax+a^3-a^2-\frac{1}{3}$. Tìm a để 3 đường thẳng đồng quy

Gọi $A(x;y)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) nên $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}y=-3x+3\\y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(1;0)$$

Để $(d_1),(d_2),(d_3)$ đồng quy thì $A\in(d_3)$

Khi đó ta có

$$a^3-a^2-a-\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow 4a^3=a^3+3a^2+3a+1\Leftrightarrow\left(a\sqrt[3]{4}\right)^3=(a+1)^3\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$$

Vậy $a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$ thì $(d_1),(d_2),(d_3)$ đồng quy.

b) Tìm tất cả nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ và thỏa mãn $x\ge y\ge z\ge 8$ của phương trình:

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=2015$$

Biến đổi phương trình đã cho ta có

$$xy(z+1)+y(z+1)+x(z+1)+(z+1)=2016 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1)=2016$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1)=2^5.3^2.7$$

Do $x \ge y \ge z \ge 8$ nên ta được $\mathrm{xyz}+\mathrm{xy}+\mathrm{yz}+\mathrm{zx}+\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z} \ge z^3+3z^2+3z$

Do đó $z^3+3z^2+3z \le 2015 \Rightarrow (z+1)^3 \le 2016 \Rightarrow z+1 \le 12 \Rightarrow z \le 11$.

Vì $z \ge 8$ nên ta được $z \in \{8;9;10;11\}$. Ta đi xét các trường hợp sau

+ Với $z=8$, khi đó ta có phương trình $(x+1)(y+1)=2^5.7$

Vì nên từ phương trình trên ta được $\begin{cases} x+1=16 \\ y+1=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=13 \end{cases}$.

+ Với $z=9$, khi đó ta có phương trình $10.(x+1)(y+1)=2^5.3^2.7$, dễ thấy phương trình vô nghiệm.

+ Với $z=10$, khi đó ta có phương trình $11.(x+1)(y+1)=2^5.3^2.7$, dễ thấy phương trình vô nghiệm.

+ Với $z=11$, khi đó ta có phương trình $12.(x+1)(y+1)=2^5.3^2.7 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=2^3.3.7$

.

Vì $x \ge y \ge z=11$ nên từ phương trình trên ta được $\begin{cases} x+1=14 \\ y+1=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=11 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho trên có các nghiệm là $(x;y;z)=(15;13;8),(13;11;11)$

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3=-y^3 \end{cases}$

Biến đổi hệ phương trình đã cho ta được $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3=-y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{2x}{x^2+1} \\ y^3=-2(x-1)^2-1 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x^2+1 \ge 2x \Rightarrow \dfrac{2x}{x^2+1} \le 1 \Rightarrow y^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$

Mà ta lại có $-2(x-1)^2-1 \le -1 \Leftrightarrow y^3 \le -1 \Leftrightarrow y \le -1$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $y=-1$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x=1$.

Thay $(x;y)=(1;-1)$ vào hệ phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(1;-1)$

b) Giải phương trình $\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+2}\right)\left(1+\sqrt{4x^2+14x+10}\right)=3$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\ge -1$. Đặt $\sqrt{2x+5}=a;\sqrt{2x+2}=b$ (với $a\ge 0;b\ge 0$)

Khi đó ta có $a^2-b^2=3;\sqrt{4x^2+14x+10}=\sqrt{(2x+5)(2x+2)}=ab$

Thay vào phương trình ta được $(a-b)(1+ab)=(a^2-b^2)\Leftrightarrow(a-b)(1-a)(1-b)=0$.

+ Với $a=b$ ta có phương trình $\sqrt{2x+5}=\sqrt{2x+2}$, phương trình vô nghiệm.

+ Với $a=1$ ta có phương trình $\sqrt{2x+5}=1\Leftrightarrow x=-2$.

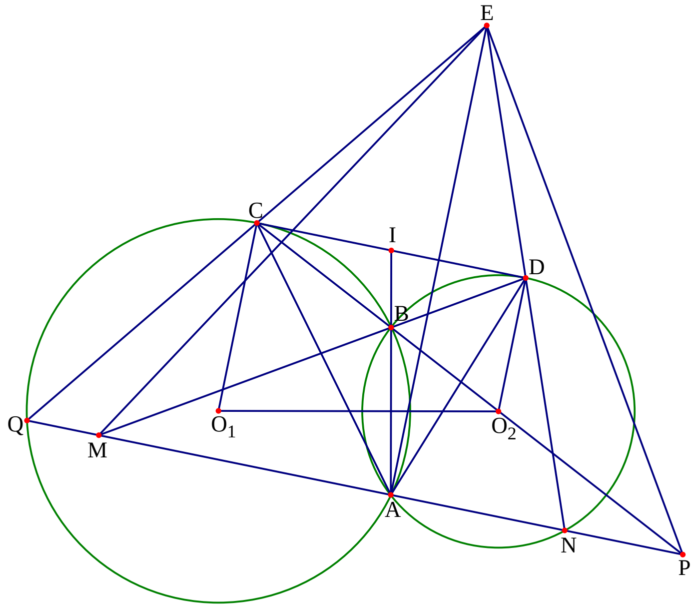
+ Với $b=1$ ta có phương trình $\sqrt{2x+2}=1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=-\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 4 (0.5 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=1cm$ và $\widehat{ABC}=60^0$. Tính thể tích hình tạo được khi cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh BC.

Ta tính được đường cao AH = $\frac{\sqrt{3}}{2}cm$ và $BC=2cm$. Hình tạo thành là hai hình nón có bán kính đáy là AH, chiều cao là HB và HC. Thể tích hình tạo thành là $\frac{1}{3}BC.\pi.AH^2=\frac{\pi}{2}(cm^3)$.

Bài 5 (2.5điểm). Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt (O_1) và (O_2) tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Gọi P là giao điểm của BC và MN, Q là giao điểm của BD và MN.

a) Chứng minh đường thẳng AE vuông góc với CD. Ta có MN song song với CD nên $\widehat{EDC} = \widehat{ENA}$, mà $\widehat{CDA} = \widehat{DNA}$ nên $\widehat{EDC} = \widehat{CDA}$, suy ra DC là phân giác góc $\widehat{EDA}$. Tương tự ta có CD là phân giác góc $\widehat{ECA}$. Từ đó ta suy ra được $\Delta ACD = \Delta ECD$ nên $DA = DE$, do đó tam giác ACE cân tại C. Suy ra đường phân giác CD đồng thời là đường cao nên CD vuông góc với AE.	

b) Chứng minh $\frac{BD}{BQ} + \frac{BC}{BP} = \frac{MN}{PQ}$.

Ta có DC là trung trực của AE và CD song song với MN nên CD là đường trung bình của tam giác MEN, suy ra ta được $CD = \frac{1}{2}MN$. Lại có CD song song với PQ nên theo định lí Talets ta có

$$\frac{BC}{BP} = \frac{BD}{BQ} = \frac{CD}{PQ} \Rightarrow \frac{BC}{BP} + \frac{BD}{BQ} = \frac{2CD}{PQ} = \frac{MN}{PQ}$$

c) Chứng minh rằng tam giác EPQ là tam giác cân.

Do PQ song song với CD nên AE vuông góc với PQ. Gọi I là giao điểm của AB và CD, ta suy ra được tam giác AID đồng dạng với DIB, do đó ta có $\frac{ID}{IA} = \frac{IB}{ID} \Rightarrow ID^2 = IA.IB$.

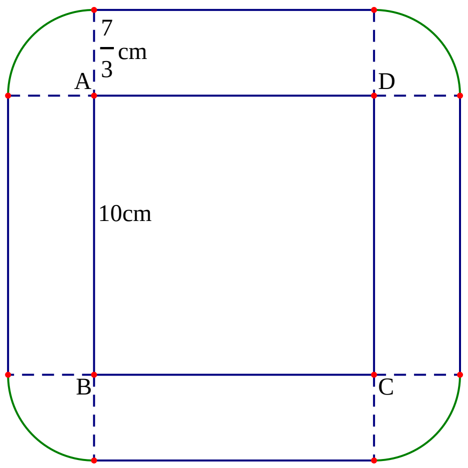
Chứng minh tương tự ta được $IC^2 = IA.IB$. Từ đó suy ra $IC = ID$.

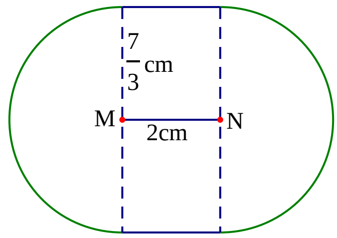
Do CD song song với PQ theo định lý Talét ta có $\dfrac{ID}{AQ}=\dfrac{IB}{AB}=\dfrac{IC}{AP}\Rightarrow AP=AQ$

Kết hợp các kết quả trên ta suy ra được tam giác EMP cân tại E.

Bài 6 (1.0 điểm). Trong hình vuông cạnh 10 cm, người ta đặt ngẫu nhiên 8 đoạn thẳng mỗi đoạn thẳng có độ dài 2 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm trên hai đoạn thẳng khác nhau trong 8 đoạn thẳng đó mà khoảng cách của chúng không vượt quá $\dfrac{14}{3}cm$.

Với mỗi đoạn thẳng và hình vuông đã cho, xét các hình bao như hình vẽ.





Tổng diện tích của 8 hình bao đoạn thẳng là $S_1=8\left[\dfrac{28}{3}+\left(\dfrac{7}{3}\right)^2\pi\right]\approx 211,50\left(cm^2\right)$.

Diện tích hình bao hình vuông là $S_2=100+\dfrac{280}{3}+\left(\dfrac{7}{3}\right)^2\pi\approx 210,44\left(cm^2\right)$

Do $S_1>S_2$ mà các đoạn thẳng nằm hoàn toàn trong hình bao hình vuông nên tồn tại hai đoạn thẳng d_1,d_2 có hình bao giao nhau.

Gọi I là điểm thuộc phần giao đó, suy ra trên hai đoạn thẳng d_1,d_2 tồn tại lần lượt hai điểm E và F sao cho $IE\le\dfrac{7}{3};\text{IF}\le\dfrac{7}{3}$. Khi đó ta có $\text{EF}\le IE+\text{IF}\le\dfrac{7}{3}+\dfrac{7}{3}=\dfrac{14}{3}\left(cm\right)$. Vậy bài toán được chứng minh.

Đề số 8

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Ta có

$$A=\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\frac{1}{x-1}$$
$$=\frac{x+\sqrt{x}+1+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\left(x-1\right)$$
$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}.\left(\sqrt{x}+1\right)$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+2}\left(\sqrt{x}+1\right)$$
$$=\left(\sqrt{x}+1\right)^2$$
$$=x+2\sqrt{x}+1$$

b) để $\frac{1}{A}$ là số tự nhiên thì $\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$ là số tự nhiên suy ra $\left(\sqrt{x}+1\right)^2=1\Leftrightarrow x=0$

Câu 2.

a) Gọi tọa độ hai đỉnh (khác O) của tam giác $A\left(x_A;x_A^2\right)$ và $B\left(x_B;x_B^2\right)$

Vì $OA^2=OB^2\Rightarrow x_A^2+x_A^4=x_B^2+x_B^4$

$$\Rightarrow\left(x_A^2-x_B^2\right)\left(x_A^2+x_B^2+1\right)=0$$
$$\Rightarrow x_A^2=x_B^2$$
$$\Rightarrow x_A=-x_B$$
$$\Rightarrow B\left(-x_A;x_A^2\right)$$
$$\Rightarrow AB^2=\left(x_A+x_A\right)^2+\left(x_A^2-x_A^2\right)^2=4x_A^2$$

$Do\,AB^2=OA^2\Rightarrow x_A^2+x_A^4\Rightarrow x_A^2\left(x_A^2-3\right)=0\Rightarrow x_A=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow A\left(\sqrt{3};3\right);B\left(-\sqrt{3};3\right)$$

b) Đặt $a=y-2\Rightarrow y=a+2$

Khi đó:

$$a\left(x+2\right)^2+x\left(a+2\right)^2+26=0$$
$$\Leftrightarrow ax^2+4ax+4a+a^2x+4ax+4x+26=0$$
$$\Leftrightarrow\left(ax+4\right)\left(a+x+8\right)=6$$

Giải ra ta được

$\left(a;x\right)=\left(1;-3\right);\left(-3;1\right);\left(1;-10\right);\left(-10;1\right)\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(3;-3\right);\left(1;-1\right);\left(1;-8\right);\left(-10;3\right)$

Câu 3.

a) Điều kiện: $9-x^2>0 \Leftrightarrow -3<x<3$

$$x^2+\frac{8x^3}{\sqrt{9-x^2}}=9 \Leftrightarrow (2x)^3=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3 \Leftrightarrow 2x=\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 5x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$$

b) $$\begin{cases} x^3+3y=y^3+3x \\ x^2+2y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2-3\right)=0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+y^2=3 \end{array}\right. \\ x^2+2y^2=1 \quad (*) \end{cases}$$

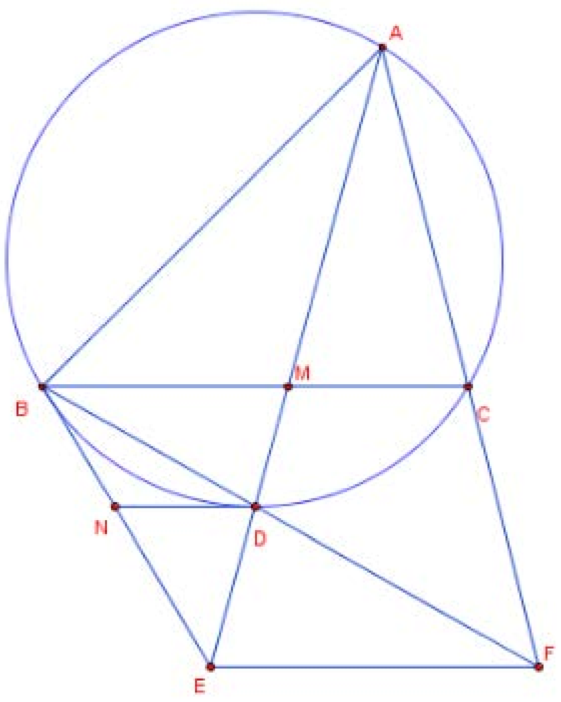
Với x = y thay vào (*) được: $3x^2=1 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}, x=y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Với $x^2 + xy + y^2 = 3$ thì

$$x^2+xy+y^2=3x^2+6y^2 \Leftrightarrow 2x^2-xy+6y^2=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{16}y^2\right)+\frac{6.16-1}{16}y^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{y}{4}\right)^2+\frac{6.16-1}{16}y^2=0 \Rightarrow x=y=0\ (L)$$

Câu 4.



a) Do $\angle EBF=\angle BAD=\angle EAF$ nên BEAF nội tiếp. Suy ra $\angle BEF+\angle BAF=180^o$

Mà $\angle BAF=\angle CBE$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

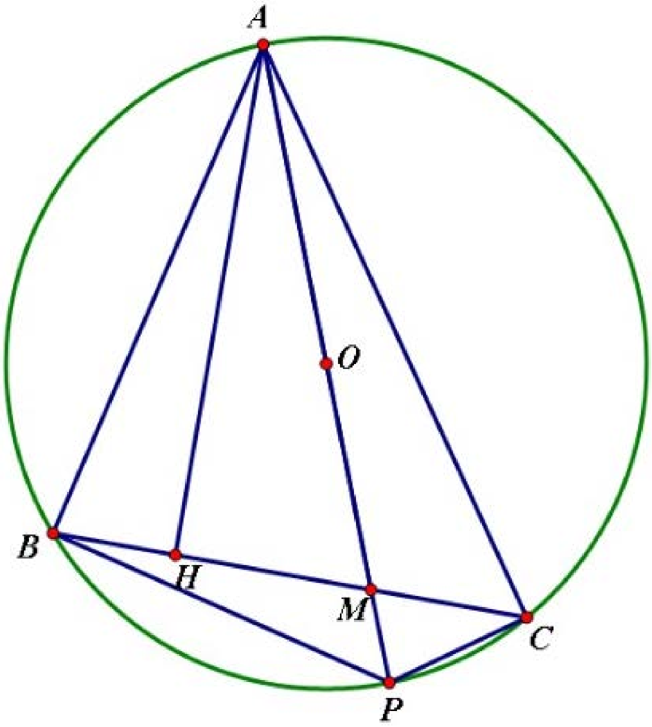
Nên $\angle BEF+\angle CBE=180^o$, mà đây là hai góc trong cùng phía nên BC//EF

b) Ta có: $\angle NDB = \angle BAD = \angle CAD = \angle CBD \Rightarrow ND//BC$

Theo Thales: $\frac{NB}{BE} = 1 - \frac{NE}{BE} = 1 - \frac{ND}{BM} \Rightarrow \frac{NB}{BE} + \frac{ND}{BM} = 1$

Mà ND = NB . Do đó $\frac{NB}{BE} + \frac{NB}{BM} = 1 \Rightarrow \frac{1}{BN} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BM}$

Câu 5.



Kẻ đường kính AP

Dễ dàng chứng minh $\Delta AHB \sim \Delta ACP$ nên: $\frac{HB}{PC} = \frac{AH}{AC}$

Tương tự: $\frac{HC}{PB} = \frac{AH}{AB}$.

Do đó $\frac{HB}{PC} : \frac{HC}{PB} = \frac{AH}{AC} : \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{HB}{HC} . \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{PC}{PB} . \frac{AB}{AC}$

Lại có $\Delta AMC \sim \Delta BMP$ nên $\frac{MC}{AC} = \frac{MP}{PB}$

Tương tự: $\frac{MB}{AB} = \frac{MP}{PC}$. Do đó: $\frac{MB}{MC} . \frac{AC}{AB} = \frac{PB}{PC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PC} . \frac{AB}{AC}$

Cộng lại ta có: $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} = \left(\frac{PB}{PC} + \frac{PC}{PB}\right) . \frac{AB}{AC} \geq 2\frac{AB}{AC}$

Câu 6.

Kẻ 106 đường thẳng song song cách đều chia hình vuông thành 107 hình chữ nhật có chiều rộng là $\frac{5}{107}$

Vì đường kính của mỗi hình tròn là $\frac{1}{20}$ lớn hơn $\frac{5}{107}$ nên mỗi đường tròn bị ít nhất một trong 106 đường thẳng vừa kẻ cắt.

Nếu mỗi đường thẳng chỉ cắt không quá 19 đường tròn thì số đường tròn không quá $19.106 = 2014$.

Vì có 2015 đường tròn nên ít nhất phải có một đường thẳng cắt 20 đường tròn.

Đề số 9

Bài 1: *(2,0 điểm)*

a) Chứng minh A là một số nguyên.	**1,0 đ**
Ta có: $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	*0,25 đ*
$= \frac{2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	*0,25 đ*
$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1}$	*0,25 đ*
$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{3}+1} = 1$ Vậy A là một số nguyên.	*0,25 đ*
b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \mathbf{x}^2 = 12\mathbf{y}+6 \ (1) \\ 2\mathbf{y}^2 = \mathbf{x}-1 \ (2) \end{cases}$	**1,0 đ**
$\begin{cases} x^2 = 12y+6 \\ 2y^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12y+6 \\ 4y^2 = 2x-2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4y^2 = 12y - 2x + 8$	*0,25 đ*
$\Rightarrow (x+1)^2 = (2y+3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y+2 \\ x = -2y-4 \end{array}\right.$	*0,25 đ*
Với $x = 2y+2$, thay vào phương trình (2) ta có: $2y^2 - 2y - 1 = 0$	*0,25 đ*

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$ Hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(3+\sqrt{3};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right);\left(3-\sqrt{3};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$	
Với x = - 2y - 4, thay vào phương trình (2) ta có: $2y^2+2y+5=0$ (vô nghiệm) Vậy hệ phương trình có hai nghiệm.	*0,25 đ*

Bài 2: *(2,0 điểm)*

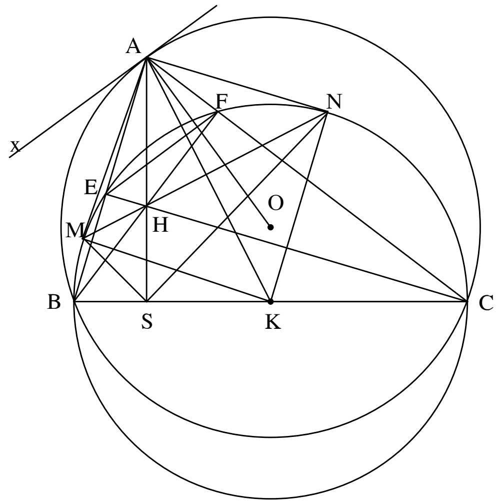
a) Cho parabol (P): $y=\frac{1}{3}x^2$ và đường thẳng (d): $y=-x+\frac{4}{3}$. Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P), tìm điểm M trên trục tung sao cho độ dài MA + MB nhỏ nhất.	**1,0 đ**
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $\frac{1}{3}x^2=-x+\frac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$	*0,25 đ*
Tọa độ hai giao điểm là: $A\left(1;\frac{1}{3}\right);B\left(-4;\frac{16}{3}\right)$ Nhận xét: A, B nằm về hai phía so với trục tung.	*0,25 đ*
Suy ra MA + MB nhỏ nhất khi M là giao điểm của AB với trục tung.	*0,25 đ*
Tọa độ M là: $M\left(0;\frac{4}{3}\right)$	*0,25 đ*
b) Giải phương trình: $x^2+5x+8=3\sqrt{2x^3+5x^2+7x+6}$.	**1,0 đ**
Nhận xét: $2x^3+5x^2+7x+6=(2x+3)\left(x^2+x+2\right)$ Điều kiện: $x\ge -\frac{2}{3}$ $(1)\Leftrightarrow \left(x^2+x+2\right)+2(2x+3)=3\sqrt{(2x+3)\left(x^2+x+2\right)}$	*0,25 đ*
Đặt: $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+2}=a\ (a>0) \\ \sqrt{2x+3}=b\ (b\ge 0) \end{cases}$. Phương trình trở thành: $a^2-3ab+2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=2b \end{array}\right.$	*0,25 đ*

Với a = b, trở lại phép đặt ta có: $\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ Phương trình có 2 nghiệm: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ (TM); x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ (TM)$	*0,25 đ*
Với a = 2b, trở lại phép đặt ta có: $\sqrt{x^2+x+2}=2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2-7x-10=0$ Phương trình có 2 nghiệm: $x=\dfrac{7+\sqrt{89}}{2}\ (TM); x=\dfrac{7-\sqrt{89}}{2}\ (L)$ Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{7+\sqrt{89}}{2}$.	*0,25 đ*

Bài 3: *(2,0 điểm)*

a) Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(1).f(2)=2013$, chứng minh phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.	**1,0 đ**
Giả sử phương trình $f(x)=0$ có nghiệm nguyên x = a Suy ra: $f(x)=(x-a).g(x)$ với $g(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên	*0,25 đ*
Ta có: $f(1)=(1-a).g(1); f(2)=(2-a).g(2)$ Suy ra $f(1).f(2)=(1-a).(2-a).g(1).g(2)=2013$	*0,25 đ*
Do 1 - a và 2 - a là hai số nguyên liên tiếp nên $f(1).f(2)$ là số nguyên chẵn	*0,25 đ*
Mà 2013 là một số lẻ suy ra vô lý Vậy phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.	*0,25 đ*
b) Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.	**1,0 đ**
Do p là số nguyên tố nên các ước số nguyên dương của p^4 là: 1; p; p^2; p^3; p^4	*0,25 đ*
Đặt $S = 1+p+p^2+p^3+p^4$ Giả sử $S=n^2 \Rightarrow 4n^2=4p^4+4p^3+4p^2+4p+4\ (1)\ (n\in\mathbb{Z})$	*0,25 đ*
Ta có: $4p^4+4p^3+p^2<(2n)^2<4p^4+p^2+4+4p^3+8p^2+4p$ $\Leftrightarrow (2p^2+p)^2<(2n)^2<(2p^2+p+2)^2$	*0,25 đ*
$\Leftrightarrow 4n^2=(2p^2+p+1)^2\ (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $p^2-2p-3=0 \Leftrightarrow p=3$ Thử lại với p = 3 thỏa mãn. Vậy số nguyên tố cần tìm là: p = 3.	*0,25 đ*

Bài 4: *(3,0 điểm)*



a) Chứng minh AE.AB = AF.AC.	**1,0 đ**
Ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Nên $\widehat{AFB} = \widehat{AEC} = 90^0$	*0,5 đ*
Xét hai tam giác AEC, AFB vuông tại E và F có: $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ $\Rightarrow AE.AB = AF.AC$ (đpcm)	*0,5 đ*
b) Chứng minh OA vuông góc với EF.	**1,0 đ**
Dựng tiếp tuyến Ax của đường tròn tâm (O) tại A $\Rightarrow$ $OA \perp Ax$ (1)	*0,25 đ*
$\widehat{BCA} = \widehat{BAx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)	*0,25 đ*
Mà $\widehat{BCA} = \widehat{FEA}$ (cùng bù với $\widehat{BEF}$) nên $\widehat{BAx} = \widehat{FEA}$	*0,25 đ*
Suy ra EF // Ax (hai góc so le trong bằng nhau) (2) Từ (1) và (2) ta có: OA vuông góc với EF (đpcm)	*0,25 đ*
c) Từ A dựng các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (K) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.	**1,0 đ**
Ta có: $CE \perp AB; BF \perp AC$ nên H là trực tâm tam giác ABC Gọi S là giao điểm của AH và BC. Suy ra: $\widehat{AMK} = \widehat{ASK} = \widehat{ANK} = 90^0$ Do đó: M, S, N cùng thuộc đường tròn đường kính AK: $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ASM} = \widehat{AMN}(3)$	*0,25 đ*
$\Delta AFN, \Delta ANC$ đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AN} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AN^2 = AF.AC$	*0,25 đ*

$\cos\widehat{SAC} = \frac{AF}{AH} = \frac{AS}{AC} \Rightarrow AF.AC = AH.AS \Rightarrow AN^2 = AH.AS \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AS}{AN}$	*0,25 đ*
Do đó: $\Delta ANH, \Delta ASN$ đồng dạng $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{ASN} = \widehat{AMN}\ (4)$ Từ (3) và (4) ta có: $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{ANM}$. Vậy M, H, N thẳng hàng (đpcm).	*0,25 đ*

Bài 5: *(1,0 điểm)*

Cho các số a, b, c, d thỏa mãn điều kiện: $\mathbf{ac - bd = 1}$**. Chứng minh rằng:** $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc \ge \sqrt{3}}$	**1,0 đ**
Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc \ge 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + ad + bc$	*0,25 đ*
$\ge 2\sqrt{(ad+bc)^2 + (ac-bd)^2} + ad + bc \ge 2\sqrt{(ad+bc)^2 + 1} + ad + bc\ (1)$	*0,25 đ*
Đặt $ad + bc = x$, ta chứng minh: $S = 2\sqrt{x^2+1} + x \ge \sqrt{3}$ với mọi x. Thật vậy, do $2\sqrt{x^2+1} + x > 0$ với mọi x nên: $S^2 = 4x^2 + 4x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 + 3 = \left(2x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 + 3$	*0,25 đ*
Suy ra: $S^2 \ge 3 \Leftrightarrow S \ge \sqrt{3}\ (2)$. Từ (1) và (2) ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc \ge \sqrt{3}$ (đpcm)	*0,25 đ*

Đề số 10

Bài 1: *(2 điểm)*

a) Cho $A = \sqrt{2012^2 + 2012^2.2013^2 + 2013^2}$

Đặt 2012 = a, ta có $\sqrt{2012^2 + 2012^2.2013^2 + 2013^2} = \sqrt{a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2}$

$= \sqrt{(a^2+a+1)^2} = a^2 + a + 1$

b) Đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = a \\ x + \dfrac{1}{y} = b \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$

nên $\begin{cases} b^2 - a = 3 \\ b + a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + b - 6 = 0 \\ b + a = 3 \end{cases}\ \begin{cases} a = 6 \\ b = -3 \end{cases} \text{v} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Bài 2:

a) ycbt tương đương với PT $x^2 = (m+2)x - m + 6$ hay $x^2 - (m+2)x + m - 6 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Đặt t = $\sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$

Bài 3:

a) x = 0, x = 1, x= -1 không thỏa mãn. Với x khác các giá trị này, trước hết ta chứng minh x phải là số nguyên.

+) $x^2 + x + 6$ là một số chính phương nên $x^2 + x$ phải là số nguyên.

+) Giả sử $x = \frac{m}{n}$ với m và n có ước nguyên lớn nhất là 1.

Ta có $x^2 + x = \frac{m^2}{n^2} + \frac{m}{n} = \frac{m^2 + mn}{n^2}$ là số nguyên khi $m^2 + mn$ chia hết cho n^2

nên $m^2 + mn$ chia hết cho n, vì mn chia hết cho n nên m^2 chia hết cho n và do m và n có ước nguyên lớn nhất là 1, suy ra m chia hết cho n(mâu thuẫn với m và n có ước nguyên lớn nhất là 1). Do đó x phải là số nguyên.

Đặt $x^2 + x + 6 = k^2$

Ta có $4x^2 + 4x + 24 = 4k^2$ hay $(2x+1)^2 + 23 = 4k^2$ tương đương với $4k^2 - (2x+1)^2 = 23$

$$\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$$
$$= \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{y-1} + \frac{(y-1)^2+2(y-1)+1}{x-1}$$
$$= \left[\frac{(x-1)^2}{y-1} + \frac{(y-1)^2}{x-1}\right] + \left[\frac{2(y-1)}{x-1} + \frac{2(x-1)}{y-1}\right] + \left[\frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1}\right].$$

Theo BĐT Côsi

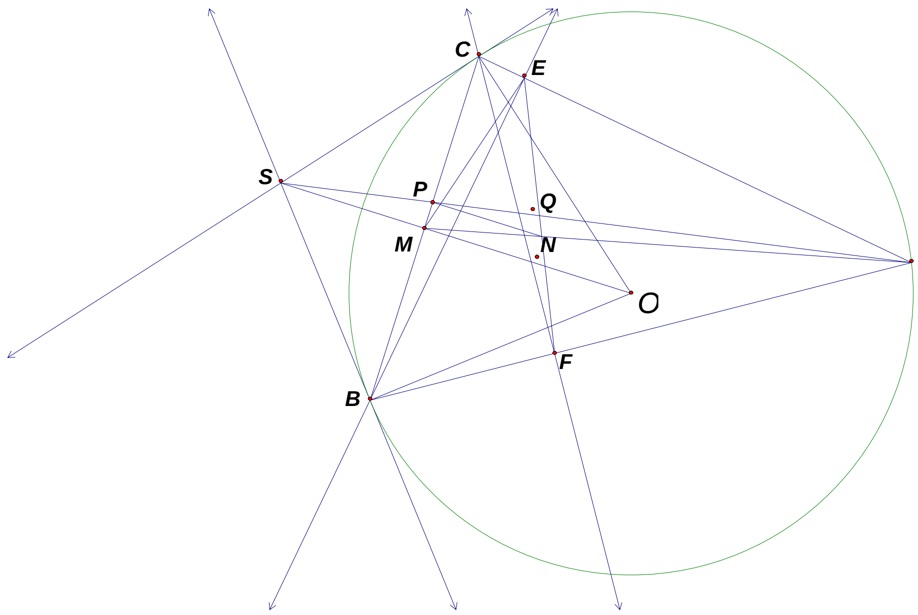
$$\frac{(x-1)^2}{y-1} + \frac{(y-1)^2}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{(x-1)^2}{y-1}.\frac{(y-1)^2}{x-1}} = 2\sqrt{(x-1)(y-1)}$$

$$\frac{2(y-1)}{x-1} + \frac{2(x-1)}{y-1} \geq \sqrt{\frac{2(y-1)}{x-1}.\frac{2(x-1)}{y-1}} = 4$$

$$\frac{1}{y-1} + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y-1}.\frac{1}{x-1}}$$

$$2\left[\sqrt{\frac{1}{y-1}.\frac{1}{x-1}} + \sqrt{(x-1)(y-1)}\right] \geq 2.2\sqrt{\sqrt{\frac{1}{y-1}.\frac{1}{x-1}}.\sqrt{(x-1)(y-1)}} = 4$$

Bài 4



a) Suy ra từ hai tam giác đồng dạng là ABE và BSM

b) Từ câu a) ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{MB}{BS}$ (1)

Mà MB = EM(do tam giác BEC vuông tại E có M là trung điểm của BC

Nên $\frac{AE}{AB} = \frac{EM}{BS}$

Có $\widehat{MOB} = \widehat{BAE}, \widehat{EBA} + \widehat{BAE} = 90^0, \widehat{MBO} + \widehat{MOB} = 90^0$

Nên $\widehat{MBO} = \widehat{EBA}$ do đó $\widehat{MEB} = \widehat{OBA}(= \widehat{MBE})$

Suy ra $\widehat{MEA} = \widehat{SBA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác AEM và ABS đồng dạng(đpcm.)

c) Dễ thấy SM vuông góc với BC nên để chứng minh bài toán ta chứng minh NP //SM.

+ Xét hai tam giác ANE và APB:

Từ câu b) ta có hai tam giác AEM và ABS đồng dạng nên $\widehat{NAE} = \widehat{PAB}$,

Mà $\widehat{AEN} = \widehat{ABP}$ (do tứ giác BCEF nội tiếp)

Do đó hai tam giác ANE và APB đồng dạng nên $\frac{AN}{AP}=\frac{AE}{AB}$

Lại có $\frac{AM}{AS}=\frac{AE}{AB}$ (hai tam giác AEM và ABS đồng dạng)

Suy ra $\frac{AM}{AS}=\frac{AN}{AP}$ nên trong tam giác AMS có NP//SM(định lí Talet đảo)

Do đó bài toán được chứng minh.

Bài 5

a. Giả sử kết luận của bài toán là sai, tức là trong ba đội bất kỳ thì có hai đội đã đấu với nhau rồi. Giả sử đội 1 đã gặp các đội 2, 3, 4, 5. Xét các bộ (1; 6; i) với i Є{7; 8; 9;…;12}, trong các bộ này phải có ít nhất một cặp đã đấu với nhau, tuy nhiên 1 không
gặp 6 hay i nên 6 gặp i với mọi i Є{7; 8; 9;…;12} , vô lý vì đội 6 như thế đã đấu hơn 4 trận. Vậy có đpcm.

b. Kết luận không đúng. Chia 12 đội thành 2 nhóm, mỗi nhóm 6 đội. Trong mỗi nhóm này, cho tất cả các đội đôi một đã thi đấu với nhau. Lúc này rõ ràng mỗi đội đã đấu 5 trận. Khi xét 3 đội bất kỳ, phải có 2 đội thuộc cùng một nhóm, do đó 2 đội này đã đấu với nhau. Ta có phản ví dụ.

Có thể giải quyết đơn giản hơn cho câu a. như sau:

Do mỗi đội đã đấu 4 trận nên tồn tại hai đội A, B chưa đấu với nhau. Trong các đội còn lại, vì A và B chỉ đấu 3 trận với họ nên tổng số trận của A, B với các đội này nhiều nhất là 6 và do đó, tồn tại đội C trong số các đội còn lại chưa đấu với cả A và B. Ta có A, B, C là bộ ba đội đôi một chưa đấu với nhau.

Đề số 11

Bài 1: *(1,5 điểm)* a) $A=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-8\sqrt{3}+15\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

b) $x^4=3x^2+6x+8\Leftrightarrow x^4-2x^2+1=x^2+6x+9\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2=\left(x+3\right)^2$

* Nếu $x^2-1=x+3\Leftrightarrow x^2-x-4=0$. $\Delta=1+16=17>0$

Phương trình có nghiệm là: $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

* Nếu $x^2-1=-x-3\Leftrightarrow x^2+x+2=0$ $\Delta=1-8=-7<0$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

Bài 2: (1,5 điểm) a) Với m = 3 ta được phương trình: $x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0,x=2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;2\}$

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 & (1) \\ x_1x_2=m-3 & (2) \end{cases}$

Theo bài ra ta có: $x_1^2-2x_2+x_1x_2=-12 \Leftrightarrow x_1(x_1+x_2)-2x_2=-12 \Leftrightarrow x_1-x_2=-6$

Kết hợp với (1) $\Rightarrow$ $x_1=-2$; $x_2=4$. Kết hợp với (2) $\Rightarrow$ $m=-5$ (TMĐK)

Bài 3: (1,0 điểm) Đổi 40 phút = $\dfrac{2}{3}$ giờ ; 5 giờ 40 phút = $\dfrac{17}{3}$ giờ

Gọi vận tốc của canô khi nước yên lặng là x (km/h ; x > 4)

Ca nô đi xuôi với vận tốc là x + 4, hết thời gian là $\dfrac{48}{x+4}$

Ca nô đi ngược với vận tốc là x - 4, hết thời gian là $\dfrac{48}{x-4}$

Ta có phương trình: $\dfrac{2}{3}+\dfrac{48}{x+4}+\dfrac{48}{x-4}=\dfrac{17}{3} \Rightarrow 5x^2-96x-80=0 \Leftrightarrow x=20, x=-\dfrac{4}{5}$

Ta thấy x = 20 thỏa mãn điều kiện .Vậy vận tốc của canô khi nước yên lặng là 20km/h

Bài 4: (3,0 điểm)

a) Xét tứ giác BCEF có E, F cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^O $\Rightarrow$ tứ giác BCEF nội tiếp

b) Ta có: $\widehat{BCF}=\widehat{BEF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

mà $\widehat{BCF}=\widehat{BE'F'}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF′)$\Rightarrow$ $\widehat{BEF}=\widehat{BE'F'}$

Mà $\widehat{BEF}$; $\widehat{BE'F'}$ là hai góc ở vị trí đồng vị nên EF//E′F′.

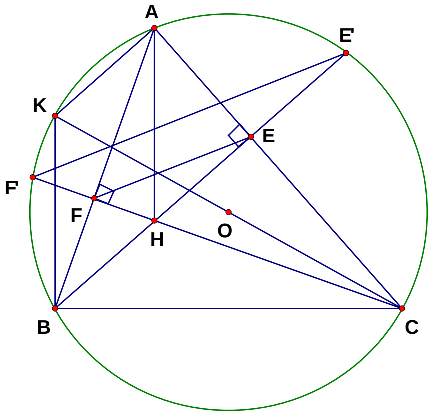
c) Gọi H là giao điểm của BE và CF $\Rightarrow$ H là trực tâm ΔABC. Xét tứ giác AEHF có $\widehat{AEH}+\widehat{AFH}=90^O+90^O=180^O$ $\Rightarrow$ tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH. Do đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔAEF có độ dài bằng $\dfrac{AH}{2}$. Kẻ đường kính CK của

(O) $\Rightarrow$ K cố định. Ta có $\widehat{KBC}=90^O$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ KB $\perp$ BC

Mà AH $\perp$ BC (do H là trực tâm) $\Rightarrow$ BK // AH. Tương tự AK // BH

Suy ra tứ giác AHBK là hình bình hành$\Rightarrow$ AH = BK (không đổi)

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn không đổi



Cách 2: c) Dễ thấy bốn điểm A, E, H, F thuộc đường trũn đường kính AH(với H là giao điểm của BE và CF). Từ đó suy ra $\widehat{BHF} = \widehat{BAC}$ (không đổi)

Mà tam giác BHF vuông tại F nên góc HBF không đổi hay góc E'BA không đổi

Suy ra Sđ cung AE' không đổi. Do đó AE' không đổi

Ta lại chứng minh được tam giác AHE' cân tại A nên AH = AE'.Từ các lập luận trên suy ra đpcm.

Bài 5: (2,0 điểm): Ta có $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{(2-2x)+2x}{1-x} + \frac{(1-x)+x}{x} = 2+1+\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x}$

Theo BĐT Cô si: $A \geq 3+2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}} \Leftrightarrow A \geq 3+2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}-1$. Vậy GTNN của A là $3+2\sqrt{2}$

2, $\begin{cases} (x+\sqrt{x^2+2012})(y+\sqrt{y^2+2012}) = 2012 & (1) \\ x^2+z^2-4(y+z)+8=0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2012}\right)\left(\sqrt{y^2+2012}-y\right) = 2012\left(\sqrt{y^2+2012}-y\right)$

(Do $\sqrt{y^2+2012}-y \neq 0 \forall y$)

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+2012}\right)2012 = 2012\left(\sqrt{y^2+2012}-y\right) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+2012} = \sqrt{y^2+2012}-y$

$\Leftrightarrow x+y = \sqrt{y^2+2012}-\sqrt{x^2+2012} \Leftrightarrow x+y = \frac{\left(\sqrt{y^2+2012}-\sqrt{x^2+2012}\right)\left(\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}\right)}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}}$

$\Leftrightarrow x+y = \frac{y^2-x^2}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}} \Leftrightarrow (x+y)\frac{\sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x}{\sqrt{y^2+2012}+\sqrt{x^2+2012}} = 0$

Do $\left.\begin{matrix}\sqrt{y^2+2012}>|y|\geq y\forall y\\ \sqrt{x^2+2012}>|x|\geq -x\forall x\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt{y^2+2012}-y+\sqrt{x^2+2012}+x>0\Rightarrow y=-x$

Thay y=-x vào(2)$\Rightarrow x^2+z^2+4x-4z+8=0\Leftrightarrow (x+2)^2+(z-2)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)^2=0\\(z-2)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\z=2\end{cases}\Rightarrow y=-x=2$ Vậy hệ có nghiệm (x;y;z)=(-2;2;2).

Đề số 13

Bài 1: HS tự giải.

Bài 2:

a) ĐK $x^2-2x\geq 0$

PT tương đương với $x^2-2x+1-2\sqrt{x^2-2x}-4=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x}$ (ĐK $t\geq 0$)

b) Hệ PT tương đương với $\begin{cases}3(x+y)-2xy=4\\2(x+y)-2xy=2m-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6-2m\\xy=7-m\end{cases}$

Do đó x và y là nghiệm của PT: $t^2+2(m-3)t+7-m=0$ (*)

Nên ycbt tương đương với PT (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 3:

a) Tìm các số nguyên x, y thoả mãn $xy+y=x^3+4$

PT$\Leftrightarrow y(x+1)=(x+1)(x^2-x+1)+3\Leftrightarrow (x+1)[y-(x^2-x+1)]=3$

Do x, y là số nguyên nên có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}x+1=3\\y-\left(x^2-x+1\right)=1\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}x+1=1\\y-\left(x^2-x+1\right)=3\end{cases}$

TH3: $\begin{cases}x+1=-3\\y-\left(x^2-x+1\right)=-1\end{cases}$

TH4: $\begin{cases}x+1=-1\\y-\left(x^2-x+1\right)=-3\end{cases}$

b) từ ab+ bc + ca =1 ta có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$

nên áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc} = \frac{\sqrt{(a+b)(a+c)}-a}{bc} \le \frac{\frac{a+b+a+c}{2}-a}{bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

tương tự $\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$ và $\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ từ đó suy ra đpcm.

Bài 4:

a) Ta có năm điểm A, E, O, I, F cùng thuộc một đường tròn đường kính AO

Nên $\widehat{AEF} = \widehat{AIF}$ mà $\widehat{AEF} = \widehat{EHF}$ và $\widehat{AIF} = \widehat{HIC}$ do vậy $\widehat{HIC} = \widehat{EHF}$ suy ra đpcm.

b) Tam giác ABF đồng dạng với tam giác AFC nên ta có $AF^2 = AB.AC$. Trong tam giác vuông AFO vuông tại F và đường cao FN ta có $AF^2 = AN.AO$ nên AN.AO = AB.AC(không đổi- do A, B, C là ba điểm cố định)

c) gọi EF cắt AB tại K, dễ thấy bốn điểm K, N, O, I cùng thuộc một đường tròn nên đường tròn qua I, N, O cũng đi qua K. Ta chứng minh được Tam giác AOI đồng dạng với tam giác AKN nên có AN.AO = AK.AI, do AI, AN.AO không đổi nên K cố định nên đường tròn qua I, N, O có tâm nằm trên trung trực của IK cố định suy ra đpcm.

Bài 5:

Ta giải bài toán trong trường hợp tổng quát. Ta sẽ chứng minh khi có n điểm($n > 2$) ít nhất có ba điểm không thẳng hàng, ta sẽ chứng minh tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong n điểm và n-3 điểm còn lại không nằm ngoài đường tròn này.

Ta tìm được hai điểm A_1A_2 mà tất cả các điểm còn lại đều nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng A_1A_2.

Trong số các góc có dạng $\widehat{A_1A_iA_2}$ (với mọi i chạy từ 3 đến n) ta tìm được một điểm A_k sao cho gúc $\widehat{A_1A_kA_2}$ nhỏ nhất.

Nên $\widehat{A_1A_iA_2} \ge \widehat{A_1A_kA_2}$ với mọi i chạy từ 3 đến n, do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác $\widehat{A_1A_kA_2}$ chứa tất cả các điểm còn lại hoặc đi qua một số điểm và chứa các điểm còn lại.Tóm lại là không có điểm nào trong n-3 điểm nằm ngoài đường tròn này.

Thật vậy, nếu có điểm A_j nào đó nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác $\widehat{A_1A_kA_2}$ thì ta có $\widehat{A_1A_jA_2} < \widehat{A_1A_kA_2}$ điều này mâu thuẫn.

Vậy ta chứng minh xong bài toán