# **BÀI 2: TÍCH PHÂN**

## **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

**I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN**

|  |  |
| --- | --- |
| **1. Định nghĩa tích phân**  **Định nghĩa**  Cho hàm số liên tục trên đoạn , với  Nếu là nguyên hàm của hàm số trên đoạn thì giá trị được gọi là tích phân của hàm số trên đoạn .  Kí hiệu (1)  Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; *a* và *b* được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.  **Ý nghĩa hình học của tích phân**  Giả sử hàm số là hàm số liên tục và không âm trên đoạn . Khi đó, tích phân chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong , trục hoành *Ox* và hai đường thẳng với | ***Chẳng hạn:***  *là một nguyên hàm của hàm số nên tích phân*      ***Lưu ý:*** *Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào hằng số C.*  *Trong tính toán, ta thường chọn*  ***Chẳng hạn:*** *Hàm số có đồ thị và , với .*  *Diện tích “tam giác cong” giới hạn bởi , trục Ox và hai đường thẳng và là*    ***Lưu ý:*** *Ta còn gọi hình phẳng trên là “hình thang cong”.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **2. Tính chất cơ bản của tích phân**  Cho hàm số và là hai hàm số liên tục trên khoảng *K*, trong đó *K* có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và khi đó:  **a.** Nếu thì  **b.** Nếu có đạo hàm liên tục trên đoạn thì ta có:    **c.** Tính chất tuyến tính    Với mọi  **d.** Tính chất trung cận  , với  **e**. Đảo cận tích phân    **f.** Nếu thì và khi .  **g.** Nếu thì    **h.** Nếu và thì  **i.** Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có | ***Chẳng hạn:*** *Cho hàm số liên tục, có đạo hàm trên đoạn thỏa mãn và*  *Khi đó*    ***Lưu ý:*** *Từ đó ta cũng có*    *và* |

**II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN**

**1. Phương pháp đổi biến số**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Đổi biến dạng 1**  **Bài toán:** Giả sử ta cần tính tích phân , trong đó ta có thể phân tích thì ta thực hiện phép đổi biến số.  **Phương pháp:**  + Đặt , suy ra  + Đổi cận:   |  |  |  | | --- | --- | --- | | *x* | *a* | *b* | | *u* |  |  |   + Khi đó , với là nguyên hàm của  **Đổi biến dạng 2**   |  |  | | --- | --- | | ***Dấu hiệu*** | ***Cách đặt*** | |  |  | |  | *;* | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | | ***Lưu ý:*** *Phương pháp đổi biến số trong tích phân cơ bản giống như đổi biến số trong nguyên hàm, ở đây chỉ thêm bước* ***đổi cận.*** |

**2. Phương pháp tích phân từng phần**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài toán:** Tính tích phân  ***Hướng dẫn giải***  Đặt  Khi đó (công thức tích phân từng phần) | ***Chú ý:*** *Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân dễ tính hơn .* |

**III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ ĐẶC BIỆT**

**1.** Cho hàm số liên tục trên . Khi đó



**Đặc biệt**  (1)



+ Nếu là hàm số lẻ thì ta có (1.1)



+ Nếu là hàm số chẵn thì ta có (1.2)



và (1.3)



**2.** Nếu liên tục trên đoạn thì



**Hệ quả:** Hàm số liên tục trên , khi đó:



**3.** Nếu liên tục trên đoạn và thì



## **B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

## **Dạng 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất**

### **1. Phương pháp giải**

Sử dụng các tính chất của tích phân.

Sử dụng bảng nguyên hàm và định nghĩa tích phân để tính tích phân.

### **2. Bài tập**

**Bài tập 1:** Biết tích phân , với . Giá trị biểu thức là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 2:** Cho hàm số thỏa mãn và với mọi . Giá trị bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 3:** Cho hàm số xác định trên thỏa mãn và . Khi đó bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 4:** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn thỏa mãn , và Giá trị là



**A.** 1. **B.**  **C.**  **D.** 4.



**Bài tập 5:** Cho là hai hàm số liên tục trên đoạn và là hàm số chẵn, là hàm số lẻ. Biết . Giá trị của là



**A.** 12. **B.** 24. **C.** 0. **D.** 10.



**Bài tập 6:** Cho với *a, b* là các số hữu tỉ. Giá trị của bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 7:** Cho với . Giá trị biểu thức là



**A.** 11. **B.** 21. **C.** 31. **D.** 41.

**Bài tập 8.** Biết rằng tích phân với là các số nguyên. Giá trị biểu thức là bao nhiêu?



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 9:** Cho , với là các số hữu tỉ. Giá trị *abc* bằng



**A.** 0. **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 10:** Cho hàm số liên tục trên .



Biết . Tổng bằng



**A.** 15. **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 11:** Biết . Giá trị của bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



## **Dạng 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến**

### **1. Phương pháp giải**

Nắm vững phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2, cụ thể:

**Đổi biến dạng 1**

**Bài toán:** Giả sử ta cần tính trong đó ta có thể phân tích



***Bước 1:*** Đặt suy ra



**Bước 2:** Đổi cận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *a* | *B* |
| *u* |  |  |

**Bước 3:** Tính



Với là một nguyên hàm của .



**Đổi biến dạng 2**

**Bài toán:** Giả sử ta cần tính , ta có thể đổi biến như sau:



***Bước 1:***Đặt ta có



***Bước 2:*** Đổi cận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *a* | *b* |
| *t* |  |  |

***Bước 3:***

Tính



Với là một nguyên hàm của



|  |  |
| --- | --- |
| ***Dấu hiệu*** | ***Cách đặt*** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

### **2. Bài tập mẫu**

**Bài tập 1:** Biết với là các số nguyên.



Giá trị của là



**A.** 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

**Bài tập 2:** Biết , với là các số nguyên tố.



Giá trị của là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 3:** Biết , với và *a, b, c* là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng bằng



**A.** 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.**



**Bài tập 4:** Cho hàm số liên tục trên và Giá trị của là



**A.** 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 64.

**Bài tập 5:** Cho hàm số xác định và liên tục trên sao cho với mọi . Giá trị của là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 6:** Biết . Giá trị của là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 7:** Cho hàm số liên tục trên và thỏa mãn và . Giá trị của là



**A.** 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

**Bài tập 8:** Cho với là các số nguyên. Giá trị của biểu thức bằng



**A.** 17. **B.** 57. **C.** 145. **D.** 32.

**Bài tập 9:** Cho , với là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức bằng



**A.** 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

## **Dạng 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần**

**Bài tập 1.** Cho tích phân với *a* là số thực *b* và *c* là các số dương, đồng thời là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 2:** Biết với là các số hũu tỉ. Giá trị của là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 3:** Cho với . Giá trị của tổng là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 1.



**Bài tập 4:** Cho hàm số liên tục, có đạo hàm trên , và Tích phân bằng



**A.** 112. **B.** 12. **C.** 56. **D.** 144.

**Bài tập 5.** Cho với là các số hữu tỉ.



Giá trị của *abc* bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 6.** Biết trong đó là các số nguyên dương và là phân số tối giản. Giá trị của là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 7.** Tìm số thực  thỏa mãn 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 8.** Đặt   nguyên dương. Ta có  khi:

**A.  B.  C.  D. **

**Bài tập 9.** Tìm m để .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

## **Dạng 4: Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối**

### **1. Phương pháp**

**Bài toán:** Tính tích phân

*( với* *là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)*

**PP chung:**

*Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên* 

*Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng ( sử dụng tính chất 3 để tách)*

*Tính mỗi tích phân thành phần.*

**Đặc biệt:** Tính tích phân

**Cách giải**

**Cách 1:**

*+) Cho*  *tìm nghiệm trên* 

*+) Xét dấu của*  *trên* *, dựa vào dấu của*  *để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng ( sử dụng tính chất 3 để tách)*

*+) Tính mỗi tích phân thành phần.*

**Cách 2:**

*+) Cho*  *tìm nghiệm trên*  giả sử các nghiệm đó là 

( với  ).

Khi đó 



***+)*** *Tính mỗi tích phân thành phần*

### **2.** Bài tập

**Bài tập 1:**  là phân số tối giản. Giá trị  bằng

**A.** 11. **B.** 25. **C.** 100. **D.** 50.

**Bài tập 2:**  Hỏi  là bao nhiêu?

**A.** 27. **B.** 64. **C.** 125. **D.** 8.

**Bài tập 3:** Biết  với ,  là các số nguyên. Giá trị  bằng

**A.  B.  C.  D. **

**Bài tập 4:** Cho tích phân  và  Giá trị của a và b lần lượt là

**A.**  **B. **

**C.  D. **

**Bài tập 5:** Tính tích phân ta được kết quả . Khi đó tổng  có giá trị bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Bài tập 7:** Cho hàm số  liên tục trên  và ;. Giá trị  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Bài tập 8.**  Giá tị  bằng

**A.** 80. **B.** 83. **C.** 142. **D.** 79.

**Bài tập 9.**  là phân số tối giản. Giá trị  bằng

**A.  B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 10.** , biết  Giá trị  bằng

**A.** 72. **B.** 8. **C.** 65. **D.** 35.

**Bài tập 11.** Cho tích phân  Giá trị  bằng

**A.** 2. **B.** . **C.** 5. **D.** .

## **Dạng 5: Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn**

### **1. Phương pháp giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **a.** Cho hàm số liên tục trên . Khi đó  (1)  Chứng minh  Ta có  Xét Đổi biến  Đổi cận  Khi đó  Do đó (1) được chứng minh.  **Đặc biệt**  + Nếu là hàm số lẻ thì ta có  (1.1).  + Nếu là hàm số chẵn thì ta có  (1.2)  + Nếu là hàm số chẵn thì ta cũng có  (1.3).  **Chứng minh** (1.3):  Đặt (\*).  Đổi biến  Đổi cận  Khi đó  Hay (\*\*).  Suy ra | **Bài tập 1:** Tích phân bằng  **A.**  **B.** 2.  **C.** 0. **D.** 1.  ***Hướng dẫn giải***  Hàm số xác định và liên tục trên đoạn  Mặt khác, với và    Do đó hàm số là hàm số lẻ.  Vậy .  ***Chọn C*.**  **Bài tập 2:** Cho là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn .  Biết rằng và  Tính  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  ***Hướng dẫn giải***  Gọi là một nguyên hàm của hàm số trên đoạn ta có    Do đó hay  Vậy  ***Chọn D*.**  **Bài tập 3:** Tích phân có giá trị là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  ***Hướng dẫn giải***  Áp dụng bài toán (1.3) ở cột bên trái cho hàm số và ta có  Ta có    ***Chọn C*.** |

|  |  |
| --- | --- |
| **b.** Nếu liên tục trên đoạn thì  **Hệ quả:** hàm số liên tục trên , khi đó:    **c.** Nếu liên tục trên đoạn và thì  **d.** Nếu liên tục trên đoạn và với thì và khi | **Bài tập 4:** Cho hàm số liên tục trên thỏa điều kiện với .  Giá trị của là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  ***Hướng dẫn giải***  Ta có  Suy ra  Vậy  ***Chọn D.***  **Bài tập 5:** Cho hàm số liên tục trên và thỏa mãn  Giá trị tích phân là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  ***Hướng dẫn giải***  Ta có  Suy ra  Vậy  ***Chọn C.***  **Bài tập 6:** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn thỏa mãn và Tích phân bằng  **A.**  **B.** 1.  **C.**  **D.** 4.  ***Hướng dẫn giải***  Đặt  Ta có    ***Cách 1:*** Ta có (1).  (2).  (3).  Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra      Do . Mà    Mà  Do đó  Vậy |

**Một số kĩ thuật giải tích phân hàm ẩn**

***Loại 1: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Ta có 

+ Do đó 

Suy ra 

Suy ra được 

***Loại 2: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Nhân hai vế với 

Suy ra 

Suy ra được 

***Loại 3: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Nhân hai vế với 

Suy ra 

Suy ra được 

***Loại 4: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Nhân hai vế với 

Suy ra 

Suy ra được 

Công thức 

### **2. Bài tập**

**Bài tập 1:** Cho số thực Giả sử hàm số liên tục và luôn dương trên đoạn thỏa mãn Giá trị tích phân là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 2:** Cho hàm số liên tục trên và Tích phân bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 3.** Cho là một hàm số liên tục trên thỏa mãn .



Giá trị tích phân là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 4:** Cho là hàm số liên tục trên thỏa mãn với mọi và Tích phân bằng



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 5:** Cho hàm số tuần hoàn với chu kì và có đạo hàm liên tục thỏa mãn , và Giá trị của .



**A.**  **B.** 0. **C.**  **D.** 1.



**Bài tập 6:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thoả mãn  với mọi  Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Bài tập 7:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  với mọi  Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Bài tập 8:** Cho hàm số  có đạo hàm trên  thỏa mãn  với mọi  và  Giá trị  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 9:** Cho hàm số  có đạo hàm và liên tục trên  thỏa mãn  và  Giá trị  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 10:** Xét hàm số  liên tục trên đoạn  và thỏa mãn . Tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Bài tập 11:** Cho  là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn . Biết rằng  và  Giá trị  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 12:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 13:** Cho  là hàm liên tục trên đoạn  thỏa mãn  và , trong đó b, c là hai số nguyên dương và  là phân số tối giản. Khi đó  có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 14:** Cho hàm số  liên tục trên  và  Giá trị của tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**

**Bài tập 15:** Cho hàm số  liên tục trên  và  Giá trị của tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**



**Bài tập 16:** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn   Giá trị của tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**

**Bài tập 17:** Cho hàm số  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên  Biết  và  với mọi  Giá trị tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**

**Bài tập 18:** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn  Giá trị của tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Bài tập 19:** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn  Giá trị của tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Bài tập 20:** Cho hàm số  thỏa mãn  với mọi  và  Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 22:** Cho hàm số  liên tục trên  thỏa mãn. Giá trị  bằng

**A.**  **B.** 1. **C.**  **D.** 

## **Dạng 8: Bất đẳng thức tích phân**

### **1. Phương pháp**

Áp dụng các bất đẳng thức:

+ Nếu  liên tục trên  thì 

+ Nếu  liên tục trên  và  thì 

+ Nếu  liên tục trên  thì  dấu  xẩy ra khi và chỉ khi .

+ Bất đẳng thức AM-GM

### **2. Bài tập**

**Bài tập 1:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn ,  và  Giá trị phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Bài tập 2:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn ,  và  Giá trị  bằng

**A.  B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 3:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và Tích phân  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 4:** Cho hàm số  nhận giá trị dương và có đạo hàm  liên tục trên  thỏa mãn  và  Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Bài tập 5:** Cho hàm số  nhận giá trị dương trên  có đạo hàm dương và liên tục trên  thỏa mãn  và  Giá trị  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 6:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và  Giá trị tích phân  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 7:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa t và  Giá trị của ích phân  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 8:** Cho hàm số  nhận giá trị dương trên  có đạo hàm dương liên và tục trên  thỏa mãn  và   Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 9:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và   Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 10:** Cho hàm số  nhận giá trị dương và có đạo hàm  liên tục trên  thỏa mãn  và   Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 11:** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn , và Biết rằng . Khi đó, giá trị của tích phân thuộc khoảng nào sau đây?



**A.** . **B.**  **C.**  **D.**

