# **BÀI 2: TÍCH PHÂN**

## **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

**I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN**

|  |  |
| --- | --- |
| **1. Định nghĩa tích phân****Định nghĩa**Cho hàm số liên tục trên đoạn , với Nếu là nguyên hàm của hàm số trên đoạn thì giá trị được gọi là tích phân của hàm số trên đoạn .Kí hiệu (1)Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; *a* và *b* được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.**Ý nghĩa hình học của tích phân**Giả sử hàm số là hàm số liên tục và không âm trên đoạn . Khi đó, tích phân chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong , trục hoành *Ox* và hai đường thẳng với   | ***Chẳng hạn:***  *là một nguyên hàm của hàm số nên tích phân* ***Lưu ý:*** *Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào hằng số C.**Trong tính toán, ta thường chọn* ***Chẳng hạn:*** *Hàm số có đồ thị và , với .**Diện tích “tam giác cong” giới hạn bởi , trục Ox và hai đường thẳng và là* ***Lưu ý:*** *Ta còn gọi hình phẳng trên là “hình thang cong”.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **2. Tính chất cơ bản của tích phân**Cho hàm số và là hai hàm số liên tục trên khoảng *K*, trong đó *K* có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và khi đó:**a.** Nếu thì **b.** Nếu có đạo hàm liên tục trên đoạn thì ta có: **c.** Tính chất tuyến tính Với mọi **d.** Tính chất trung cận, với **e**. Đảo cận tích phân  **f.** Nếu thì và khi .**g.** Nếu thì  **h.** Nếu và thì**i.** Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có  | ***Chẳng hạn:*** *Cho hàm số liên tục, có đạo hàm trên đoạn thỏa mãn và* *Khi đó****Lưu ý:*** *Từ đó ta cũng có**và*  |

**II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN**

**1. Phương pháp đổi biến số**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Đổi biến dạng 1****Bài toán:** Giả sử ta cần tính tích phân , trong đó ta có thể phân tích thì ta thực hiện phép đổi biến số.**Phương pháp:**+ Đặt , suy ra + Đổi cận:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *a* | *b* |
| *u* |  |  |

+ Khi đó , với là nguyên hàm của **Đổi biến dạng 2**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Dấu hiệu*** | ***Cách đặt*** |
|  |  |
|  | *;* |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

 | ***Lưu ý:*** *Phương pháp đổi biến số trong tích phân cơ bản giống như đổi biến số trong nguyên hàm, ở đây chỉ thêm bước* ***đổi cận.*** |

**2. Phương pháp tích phân từng phần**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài toán:** Tính tích phân ***Hướng dẫn giải***Đặt Khi đó (công thức tích phân từng phần) | ***Chú ý:*** *Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân dễ tính hơn .* |

**III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ ĐẶC BIỆT**

**1.** Cho hàm số liên tục trên . Khi đó

**Đặc biệt**  (1)

+ Nếu là hàm số lẻ thì ta có (1.1)

+ Nếu là hàm số chẵn thì ta có (1.2)

và (1.3)

**2.** Nếu liên tục trên đoạn thì

**Hệ quả:** Hàm số liên tục trên , khi đó:

**3.** Nếu liên tục trên đoạn và thì


## **B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

## **Dạng 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất**

### **1. Phương pháp giải**

Sử dụng các tính chất của tích phân.

Sử dụng bảng nguyên hàm và định nghĩa tích phân để tính tích phân.

### **2. Bài tập**

**Bài tập 1:** Biết tích phân , với . Giá trị biểu thức là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 2:** Cho hàm số thỏa mãn và với mọi . Giá trị bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 3:** Cho hàm số xác định trên thỏa mãn và . Khi đó bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 4:** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn thỏa mãn , và Giá trị là

**A.** 1. **B.**  **C.**  **D.** 4.

**Bài tập 5:** Cho là hai hàm số liên tục trên đoạn và là hàm số chẵn, là hàm số lẻ. Biết . Giá trị của là

**A.** 12. **B.** 24. **C.** 0. **D.** 10.

**Bài tập 6:** Cho với *a, b* là các số hữu tỉ. Giá trị của bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 7:** Cho với . Giá trị biểu thức là

 **A.** 11. **B.** 21. **C.** 31. **D.** 41.

**Bài tập 8.** Biết rằng tích phân với là các số nguyên. Giá trị biểu thức là bao nhiêu?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 9:** Cho , với là các số hữu tỉ. Giá trị *abc* bằng

**A.** 0. **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 10:** Cho hàm số liên tục trên .

Biết . Tổng bằng

**A.** 15. **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 11:** Biết . Giá trị của bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**


## **Dạng 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến**

### **1. Phương pháp giải**

Nắm vững phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2, cụ thể:

**Đổi biến dạng 1**

**Bài toán:** Giả sử ta cần tính trong đó ta có thể phân tích

***Bước 1:*** Đặt suy ra

**Bước 2:** Đổi cận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *a* | *B* |
| *u* |  |  |

**Bước 3:** Tính

Với là một nguyên hàm của .

**Đổi biến dạng 2**

**Bài toán:** Giả sử ta cần tính , ta có thể đổi biến như sau:

***Bước 1:***Đặt ta có

***Bước 2:*** Đổi cận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *a* | *b* |
| *t* |  |  |

***Bước 3:***

Tính

Với là một nguyên hàm của



|  |  |
| --- | --- |
| ***Dấu hiệu***  | ***Cách đặt*** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

### **2. Bài tập mẫu**

**Bài tập 1:** Biết với là các số nguyên.

Giá trị của là

**A.** 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

**Bài tập 2:** Biết , với là các số nguyên tố.

Giá trị của là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 3:** Biết , với và *a, b, c* là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng bằng

**A.** 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.**

**Bài tập 4:** Cho hàm số liên tục trên và Giá trị của là

**A.** 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 64.

**Bài tập 5:** Cho hàm số xác định và liên tục trên sao cho với mọi . Giá trị của là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 6:** Biết . Giá trị của là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 7:** Cho hàm số liên tục trên và thỏa mãn và . Giá trị của là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

**Bài tập 8:** Cho với là các số nguyên. Giá trị của biểu thức bằng

**A.** 17. **B.** 57. **C.** 145. **D.** 32.

**Bài tập 9:** Cho , với là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức bằng

**A.** 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

## **Dạng 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần**

**Bài tập 1.** Cho tích phân với *a* là số thực *b* và *c* là các số dương, đồng thời là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 2:** Biết với là các số hũu tỉ. Giá trị của là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 3:** Cho với . Giá trị của tổng là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 1.

**Bài tập 4:** Cho hàm số liên tục, có đạo hàm trên , và Tích phân bằng

**A.** 112. **B.** 12. **C.** 56. **D.** 144.

**Bài tập 5.** Cho với là các số hữu tỉ.

Giá trị của *abc* bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 6.** Biết trong đó là các số nguyên dương và là phân số tối giản. Giá trị của là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 7.** Tìm số thực  thỏa mãn 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 8.** Đặt   nguyên dương. Ta có  khi:

**A.  B.  C.  D. **

**Bài tập 9.** Tìm m để .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

## **Dạng 4: Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối**

### **1. Phương pháp**

**Bài toán:** Tính tích phân

*( với* *là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)*

**PP chung:**

*Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên* 

*Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng ( sử dụng tính chất 3 để tách)*

*Tính mỗi tích phân thành phần.*

**Đặc biệt:** Tính tích phân

**Cách giải**

**Cách 1:**

*+) Cho*  *tìm nghiệm trên* 

*+) Xét dấu của*  *trên* *, dựa vào dấu của*  *để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng ( sử dụng tính chất 3 để tách)*

*+) Tính mỗi tích phân thành phần.*

**Cách 2:**

*+) Cho*  *tìm nghiệm trên*  giả sử các nghiệm đó là 

( với  ).

Khi đó 



***+)*** *Tính mỗi tích phân thành phần*

### **2.** Bài tập

**Bài tập 1:**  là phân số tối giản. Giá trị  bằng

**A.** 11. **B.** 25. **C.** 100. **D.** 50.

**Bài tập 2:**  Hỏi  là bao nhiêu?

**A.** 27. **B.** 64. **C.** 125. **D.** 8.

**Bài tập 3:** Biết  với ,  là các số nguyên. Giá trị  bằng

**A.  B.  C.  D. **

**Bài tập 4:** Cho tích phân  và  Giá trị của a và b lần lượt là

**A.**  **B. **

**C.  D. **

**Bài tập 5:** Tính tích phân ta được kết quả . Khi đó tổng  có giá trị bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Bài tập 7:** Cho hàm số  liên tục trên  và ;. Giá trị  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Bài tập 8.**  Giá tị  bằng

**A.** 80. **B.** 83. **C.** 142. **D.** 79.

**Bài tập 9.**  là phân số tối giản. Giá trị  bằng

**A.  B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 10.** , biết  Giá trị  bằng

**A.** 72. **B.** 8. **C.** 65. **D.** 35.

**Bài tập 11.** Cho tích phân  Giá trị  bằng

**A.** 2. **B.** . **C.** 5. **D.** .

## **Dạng 5: Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn**

### **1. Phương pháp giải**

|  |  |
| --- | --- |
| **a.** Cho hàm số liên tục trên . Khi đó (1)Chứng minhTa có Xét Đổi biến Đổi cận Khi đó Do đó (1) được chứng minh.**Đặc biệt**+ Nếu là hàm số lẻ thì ta có  (1.1).+ Nếu là hàm số chẵn thì ta có (1.2)+ Nếu là hàm số chẵn thì ta cũng có (1.3).**Chứng minh** (1.3):Đặt (\*).Đổi biến Đổi cận Khi đó Hay (\*\*).Suy ra  | **Bài tập 1:** Tích phân bằng**A.**  **B.** 2.**C.** 0. **D.** 1.***Hướng dẫn giải***Hàm số xác định và liên tục trên đoạn Mặt khác, với và Do đó hàm số là hàm số lẻ.Vậy .***Chọn C*.****Bài tập 2:** Cho là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn .Biết rằng và Tính **A.**  **B.** **C.**  **D.** ***Hướng dẫn giải***Gọi là một nguyên hàm của hàm số trên đoạn ta có Do đó hay Vậy ***Chọn D*.****Bài tập 3:** Tích phân có giá trị là**A.**  **B.** **C.**  **D.** ***Hướng dẫn giải***Áp dụng bài toán (1.3) ở cột bên trái cho hàm số và ta cóTa có ***Chọn C*.** |

|  |  |
| --- | --- |
| **b.** Nếu liên tục trên đoạn thì**Hệ quả:** hàm số liên tục trên , khi đó: **c.** Nếu liên tục trên đoạn và thì**d.** Nếu liên tục trên đoạn và với thì và khi   | **Bài tập 4:** Cho hàm số liên tục trên thỏa điều kiện với .Giá trị của là**A.**  **B.** **C.**  **D.** ***Hướng dẫn giải***Ta có Suy ra Vậy ***Chọn D.*****Bài tập 5:** Cho hàm số liên tục trên và thỏa mãn Giá trị tích phân là**A.**  **B.** **C.**  **D.** ***Hướng dẫn giải***Ta có Suy ra Vậy ***Chọn C.*****Bài tập 6:** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn thỏa mãn và Tích phân bằng**A.**  **B.** 1.**C.**  **D.** 4.***Hướng dẫn giải***Đặt Ta có  ***Cách 1:*** Ta có (1). (2). (3).Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra  Do . Mà  Mà Do đó Vậy  |

**Một số kĩ thuật giải tích phân hàm ẩn**

***Loại 1: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Ta có 

+ Do đó 

Suy ra 

Suy ra được 

***Loại 2: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Nhân hai vế với 

Suy ra 

Suy ra được 

***Loại 3: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Nhân hai vế với 

Suy ra 

Suy ra được 

***Loại 4: Biểu thức tích phân đưa về dạng:*** 

**Cách giải:**

+ Nhân hai vế với 

Suy ra 

Suy ra được 

Công thức 

### **2. Bài tập**

**Bài tập 1:** Cho số thực Giả sử hàm số liên tục và luôn dương trên đoạn thỏa mãn Giá trị tích phân là

 **A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 2:** Cho hàm số liên tục trên và Tích phân bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 3.** Cho là một hàm số liên tục trên thỏa mãn .

Giá trị tích phân là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 4:** Cho là hàm số liên tục trên thỏa mãn với mọi và Tích phân bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.**

**Bài tập 5:** Cho hàm số tuần hoàn với chu kì và có đạo hàm liên tục thỏa mãn , và Giá trị của .

**A.**  **B.** 0. **C.**  **D.** 1.

**Bài tập 6:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thoả mãn  với mọi  Tính .

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Bài tập 7:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  với mọi  Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Bài tập 8:** Cho hàm số  có đạo hàm trên  thỏa mãn  với mọi  và  Giá trị  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 9:** Cho hàm số  có đạo hàm và liên tục trên  thỏa mãn  và  Giá trị  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 10:** Xét hàm số  liên tục trên đoạn  và thỏa mãn . Tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Bài tập 11:** Cho  là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn . Biết rằng  và  Giá trị  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 12:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 13:** Cho  là hàm liên tục trên đoạn  thỏa mãn  và , trong đó b, c là hai số nguyên dương và  là phân số tối giản. Khi đó  có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 14:** Cho hàm số  liên tục trên  và  Giá trị của tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**

**Bài tập 15:** Cho hàm số  liên tục trên  và  Giá trị của tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**



**Bài tập 16:** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn   Giá trị của tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**

**Bài tập 17:** Cho hàm số  nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên  Biết  và  với mọi  Giá trị tích phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. .**

**Bài tập 18:** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn  Giá trị của tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Bài tập 19:** Cho hàm số  liên tục trên  và thỏa mãn  Giá trị của tích phân  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Bài tập 20:** Cho hàm số  thỏa mãn  với mọi  và  Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 22:** Cho hàm số  liên tục trên  thỏa mãn. Giá trị  bằng

**A.**  **B.** 1. **C.**  **D.** 

## **Dạng 8: Bất đẳng thức tích phân**

### **1. Phương pháp**

Áp dụng các bất đẳng thức:

+ Nếu  liên tục trên  thì 

+ Nếu  liên tục trên  và  thì 

+ Nếu  liên tục trên  thì  dấu  xẩy ra khi và chỉ khi .

+ Bất đẳng thức AM-GM

### **2. Bài tập**

**Bài tập 1:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn ,  và  Giá trị phân  bằng

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Bài tập 2:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn ,  và  Giá trị  bằng

**A.  B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 3:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và Tích phân  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 4:** Cho hàm số  nhận giá trị dương và có đạo hàm  liên tục trên  thỏa mãn  và  Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Bài tập 5:** Cho hàm số  nhận giá trị dương trên  có đạo hàm dương và liên tục trên  thỏa mãn  và  Giá trị  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 6:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và  Giá trị tích phân  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 7:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa t và  Giá trị của ích phân  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 8:** Cho hàm số  nhận giá trị dương trên  có đạo hàm dương liên và tục trên  thỏa mãn  và   Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 9:** Cho hàm số  có đạo hàm liên tục trên  thỏa mãn  và   Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 10:** Cho hàm số  nhận giá trị dương và có đạo hàm  liên tục trên  thỏa mãn  và   Giá trị của  bằng

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Bài tập 11:** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn , và Biết rằng . Khi đó, giá trị của tích phân thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** . **B.**  **C.**  **D.**

