

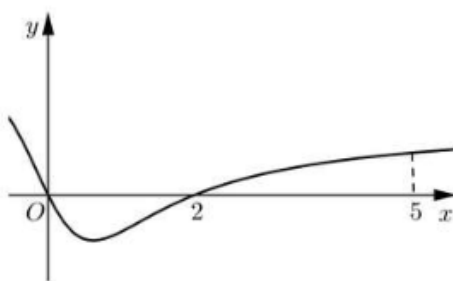
CHỦ ĐỀ 5

BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$, TÌM MIN, MAX HÀM HỢP

DẠNG 1

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là



A. $f(0), f(5)$

B. $f(2), f(0)$

C. $f(1), f(5)$

D. $f(2), f(5)$

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	5	$+\infty$
f'		0	-	0	+
f		$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$	

$$\min_{[2;5]} f(x) = f(2)$$

Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có

$$\text{Và } \max_{[0;5]} f(x) = \max \{ f(0), f(5) \}$$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;5]$ nên

$$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

Do đó $f(5) > f(0)$, vậy $\max_{[0;5]} f(x) = \max[f(0), f(5)] = f(5)$

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y = f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$$S_1 = \int_0^2 |f'(x)| dx = \int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2) \quad S_2 = \int_2^5 |f'(x)| dx = \int_2^5 -f'(x) dx = f(2) - f(5)$$

và

Theo giả thiết, ta có:

$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

$$S_2 = \int_2^5 |f'(x)| dx > \int_3^5 |f'(x)| dx = f(5) - f(3) = S_1$$

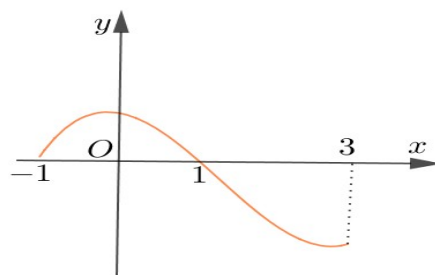
Suy ra

$$S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(5) > f(0) > f(2)$$

$$\min_{[0;5]} f(x) = f(2), \max_{[0;5]} f(x) = f(5)$$

Vậy

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Biết $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$.

- A. $f(1), f(0)$ B. $f(2), f(1)$ C. $f(1), f(-1)$ D. $f(1), f(3)$

Lời giải

Chọn C.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	-1		1		3
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$f(-1)$		$f(1)$		$f(3)$

$$\max_{[-1;3]} f(x) = f(1)$$

Vậy

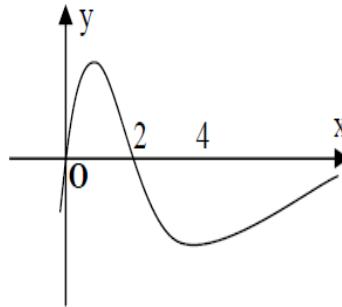
Từ bảng biến thiên ta có $f(0) < f(1), f(2) < f(1)$ vậy $f(0) + f(2) < 2f(1)$

Khi đó $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(0) + f(2) - 2f(1) = f(3) - f(-1)$

Vậy $f(3) - f(-1) > 0 \Rightarrow f(3) > f(-1)$

Khi đó $\min_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.

A. $m = f(4); M = f(2)$.

B. $m = f(4); M = f(1)$.

C. $m = f(0); M = f(2)$.

D. $m = f(1); M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên trên $[0; 4]$

x	0	1	2	3	4
y'	0	+	0	+	
y					

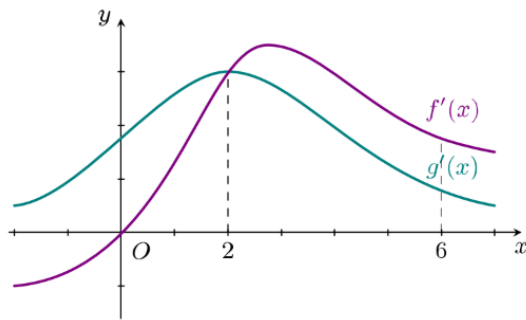
Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = f(2); m = \min\{f(0); f(4)\}$.

Mặt khác có $f(1) < f(2); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) > 0$

Mà $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) = f(0) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(4)$

Do vậy $m = f(4)$.

Câu 4. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x), g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

- A. $h(2), h(6)$ B. $h(6), h(2)$ C. $h(0), h(2)$ D. $h(2), h(0)$

Lời giải

Chọn B.

$$h'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Ta có

x	0	2	6
$h'(x)$	—	0	+
$h(x)$	$h(0)$	$h(2)$	$h(6)$

Từ đồ thị đã cho ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $[0; 6]$

Do đó $\min_{[0; 6]} h(x) = h(2)$.

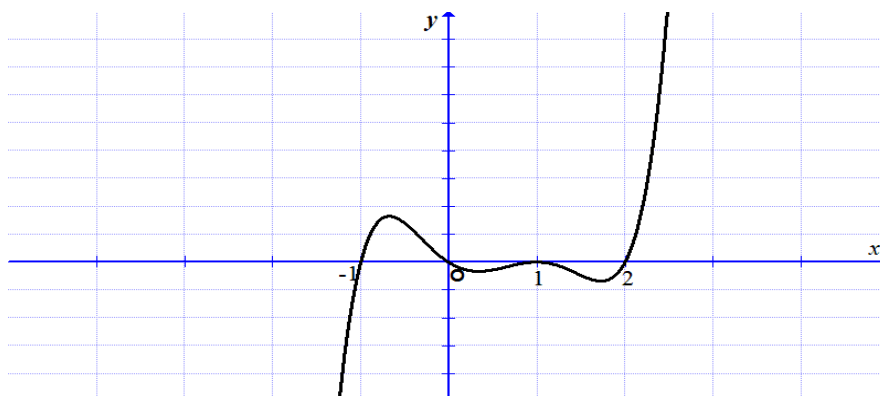
$$f(0) - g(0) < f(6) - g(6) \Leftrightarrow h(0) < h(6). \text{ Vậy } \max_{[0; 6]} h(x) = h(6).$$

Giả thiết ta có

DẠNG 2

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(|x|)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Biết $f(0) < f(3) < f(4)$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-4; 3]$. Tính giá trị của $M - m$.

A. $f(4) + f(2)$

B. $f(4) + f(0)$

C. $f(3) - f(0)$

D. $f(3) + f(2)$

Lời giải

Chọn A.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có

Mặt khác hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f(|x|)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$							

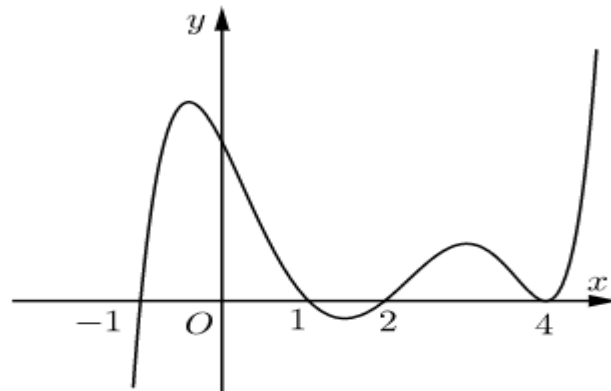
x	-4	-2	0	2	3		
y'	-	0	+	0	-	0	+
$y=f(x)$	The graph shows a function $y=f(x)$ on the interval $[-4, 3]$. The function has a local minimum at $x=0$ and local maxima at $x=-4$ and $x=3$. The function decreases from $x=-4$ to $x=0$, then increases to $x=3$.						

do: $f(0) < f(3) < f(4)$

Mặt khác từ bảng biến thiên hàm số $y = f(|x|)$ ta có: $\min_{[-4;3]} f(|x|) = f(0)$

$$\Rightarrow \max_{[-4;3]} f(|x|) = f(-4) = f(4) = M \Rightarrow M + m = f(4) + f(2)$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$? Biết $f(2) > f(0)$



A. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$

B. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$

C. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$

D. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên $[-1; 4]$:

x	-1	1	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							

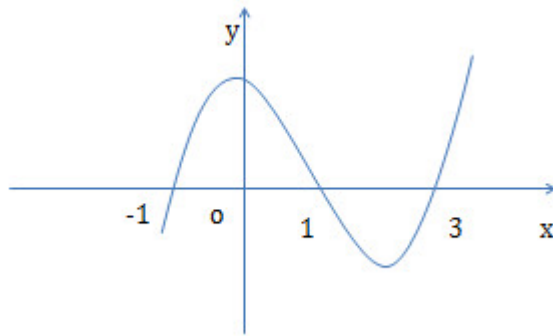
Mà $f(2) > f(0)$

Vậy $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4)$; $\min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = |f(x)|$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1; 1]$. Khi đó $M; m$ là

A. $M = f(-1), m = f(1)$

B. $M = |f(1)|, m = |f(-1)|$

C. $M = |f(-1)|, m = |f(1)|$

D. $M = f(-1), m = |f(1)|$

Lời giải

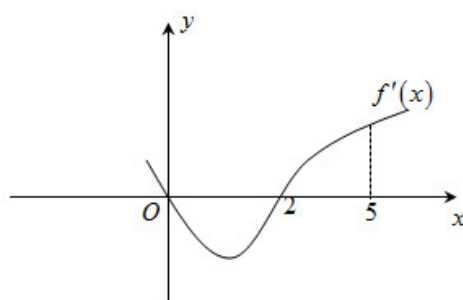
Chọn C.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1; 1]$ nên $f(-1) < f(1) < 0, \forall x \in [-1; 1]$

Do đó $|f(-1)| > |f(1)|, \forall x \in [-1; 1]$ nên

$$\max_{[-1; 1]} g(x) = |f(-1)|; \min_{[-1; 1]} g(x) = |f(1)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(1)|$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[0; 5]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0; 5]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ và $f(5) < 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 5]$.

A. $|f(3)|, |f(5)|$.

B. $|f(2)|, |f(0)|$.

C. $|f(2)|, |f(5)|$.

D. $|f(0)|, |f(5)|$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	-	0	+		+	
$f(x)$	$f(0)$		$f(2)$		$f(3)$		$f(5)$

Theo giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) - f(0) = f(3) - f(2)$ mà $f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) > f(0)$

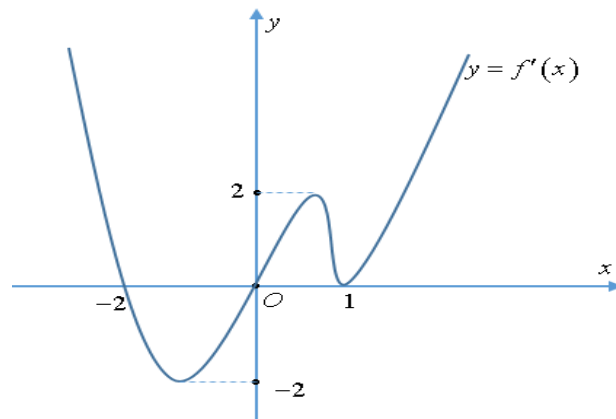
Cũng theo giả thiết ta có $f(5) < 0$ nên $f(2) < f(0) < f(5) < 0 \Rightarrow |f(2)| > |f(0)| > |f(5)|$

Do đó ta suy ra bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	-	0	+		+	
$f(x)$	$f(0)$		$f(2)$		$f(3)$		$f(5)$
$g(x) = f(x) $	$ f(0) $		$ f(2) $				$ f(5) $

Vậy $\max_{[0;5]} g(x) = |f(2)|; \min_{[0;5]} g(x) = |f(5)|$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới và $f(-2) = 3, f(0) = -5, f(1) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)| + 1$ trên $[-2; 1]$. Khi đó $M^2 + m^2$ bằng



A. 8.

B. 25.

C. 37.

D. 34.

Lời giải

Chọn C.

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -5$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$	

Quan sát bảng biến thiên ta có: $x \in [-2; 1]$ thì $f(x) \in [-5; 3] \Rightarrow |f(x)| + 1 \in [1; 6]$.

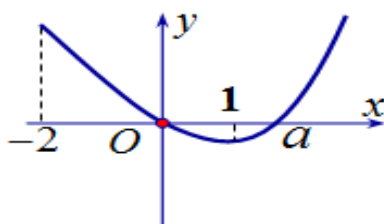
Suy ra $M = 6$ và $m = 1$.

Vậy $M^2 + m^2 = 37$.

DẠNG 4

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = f(|x+a|+b)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ).



Khi đó hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là M, m trên đoạn $[0;1]$.
Khẳng định đúng là:

A. $M - m = f(-1) - f(0)$

B. $M + 2m = f(0) + 2f(-1)$

C. $2M - m = 2f(a) - f(0)$

D. $m - M = f(-1) - f(0)$

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x	-2	0	a			
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$y = f(x)$						

Xét hàm $h(x) = f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y = f(x)$ sang trái 1 đơn vị.

Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x	-1	$a-1$
$h(x) = f(x+1)$	$f(0)$	$f(a)$

Hàm $p(x) = f(|x+1|)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

- + Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x \geq -1$).
- + Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

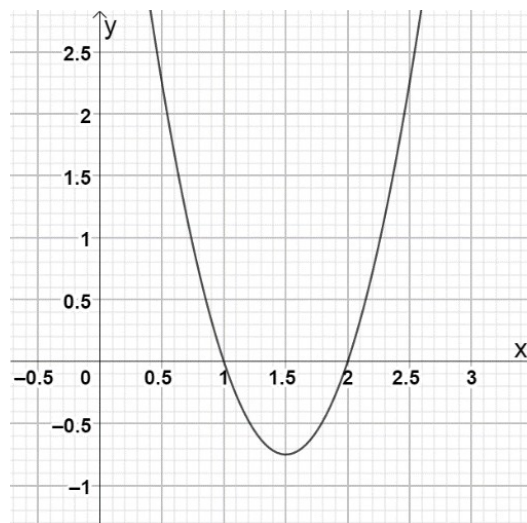
x	$-a-1$	-1	$a-1$
$p(x) = f(x+1)$	$f(a)$	$f(0)$	$f(a)$

Hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 2 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x	$-a+1$	1	$a+1$
$g(x) = f(x+1 -2)$	$f(a)$	$f(0)$	$f(a)$

Vì $a > 1$ nên $-a+1 < 0$ nên trên đoạn $[0;1]$ có $M = \max_{[0;1]} g(x) = f(0)$, $m = \min_{[0;1]} g(x) = f(-1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $\min_{\mathbf{R}} f'(x) = -\frac{3}{4}$, $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x-2|+1)$ trên đoạn $[1;3]$ có

dạng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$ và phân số đó tối giản. Tính $m^2 + n^2$.

A. 85.

B. 74.

C. 61.

D. 58.

Lời giải

Chọn C.

Vì $f'(x)$ là hàm số bậc hai nên $f(x)$ là hàm bậc 3 nó có dạng: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ và giả thiết ta có
$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4} \\ f'(2)=0 \\ f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=2 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x$$

Ta có
$$g'(x)=\frac{x-2}{|x-2|}f'(|x-2|+1)$$
 với $x \neq 2$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|x-2|+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+1=1 \text{ (VN do } x \neq 2) \\ |x-2|+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

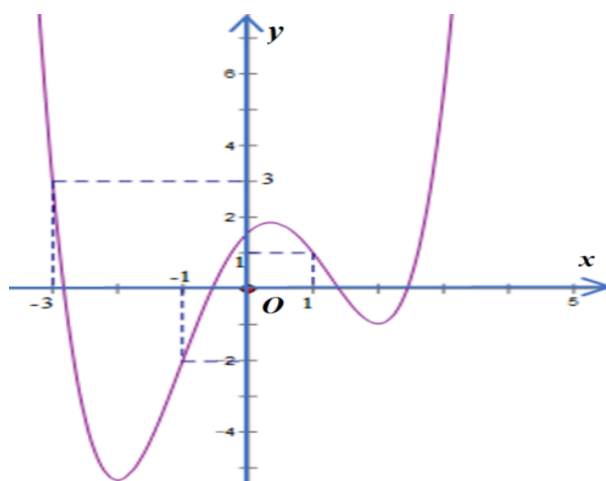
Ta có bảng biến thiên

x	1	2	3
$g'(x)$	0		0
$g(x)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max_{[1;2]} g(x)=g(2)=f(1)=\frac{5}{6}$.

Do đó $m=5, n=6 \Rightarrow m^2+n^2=61$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=\frac{g(-3)+g(1)}{2}$

B. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=g(1)$

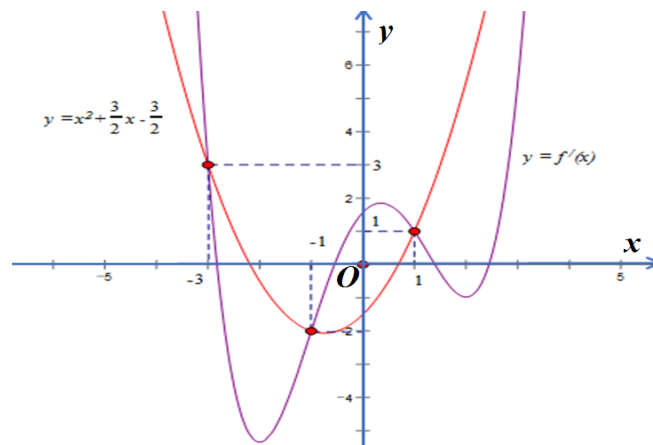
C. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=g(-3)$

D. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=g(-1)$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập Bảng biến thiên

x	-3	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(1)$

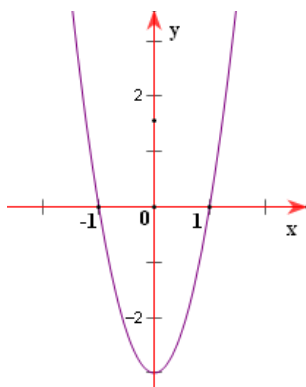
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$

Đặt $t = |x+3| - 4$ với $x \in [-2;2]$ thì $t \in [-3;1]$. Khi đó $\min_{[-2;2]} g(|x+3| - 4) = \min_{[-3;1]} g(t) = g(-1)$

DẠNG 5

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ $y = |f(x) + b|$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5; f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

A. - 10.

B. - 8.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $h(x) = f(x) + m$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

Ta có:
$$h'(x) = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Khi đó $h(1) = m - 5; h(3) = m + 15$.

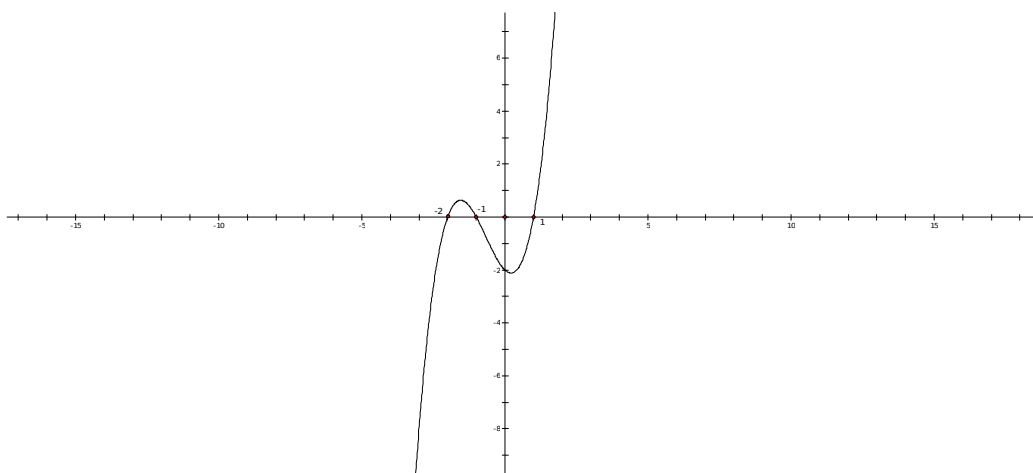
Để hàm số $y = |h(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3 thì đồ thị hàm số $y = h(x)$ phải nằm hoàn toàn phía dưới hoặc phía trên trục hoành (tức không cắt trục hoành) trên $[1; 3]$.

Trường hợp 1: $m + 15 < 0 \Leftrightarrow m < -15$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = |m + 15| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -18 \text{ (tm)} \\ m = -12 \text{ (l)} \end{cases}$.

Trường hợp 2: $m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = m - 5 = 3 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (tm)}$.

Vậy $S = [-18; 8]$. Do đó chọn phương án A.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau và $f(-1) < -2, f(-2) - f(1) > 0$



Khi đó gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + 2|$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là M, m .

Tổng $M + m$ bằng

A. $g(-2) + g(1)$.

B. $g(-2) + g(-1)$.

C. $|f(-1) + 2| + |f(1) + 2|$.

D. $|f(-1) + f(1) + 4|$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có BBT của hàm $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	0 $-$ 0 $+$		
$y = f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$		$+\infty$
		$f(-2)$		$f(1)$	

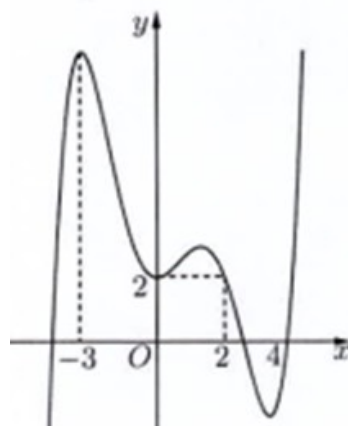
$f(-1) < -2, f(-2) - f(1) > 0 \Rightarrow f(-2) > f(1) \Rightarrow -2 > f(-1) > f(-2) > f(1)$
ta có:

Từ đó $f(1) + 2 < f(-2) + 2 < f(-1) + 2 < 0$ hay $g(1) > g(-2) > g(-1)$.

DẠNG 6

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = f(x) + h(x)$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng



A. $f(0)$.

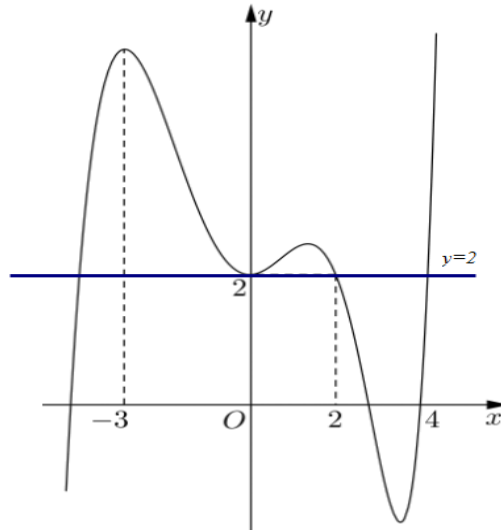
B. $f(-3) + 6$.

C. $f(2) - 4$.

D. $f(4) - 8$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $g'(x) = 2f'(2x) - 4$

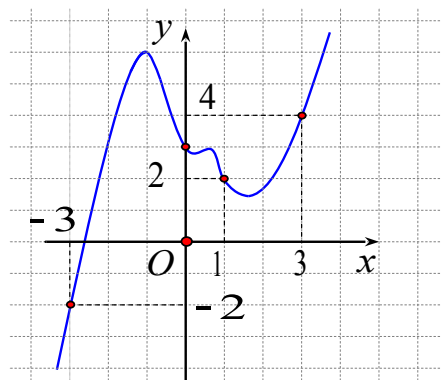
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(2x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x_1 < -3 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \\ 2x = x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -\frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x_2 > 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{3}{2}$	0		1	2	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$g(x)$									

Từ bảng biến thiên ta có: trên $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và $\max_{\left[-\frac{3}{2}; 1\right]} y = f(2) - 4$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$

B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$

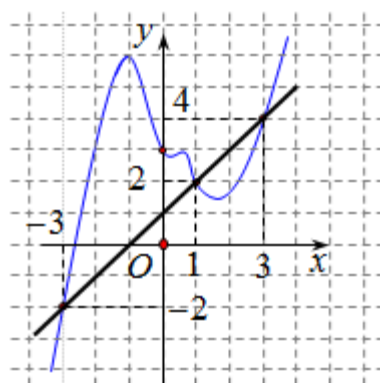
C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B.

$$g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 (*)$$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy đường thẳng $y = x+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại ba điểm

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

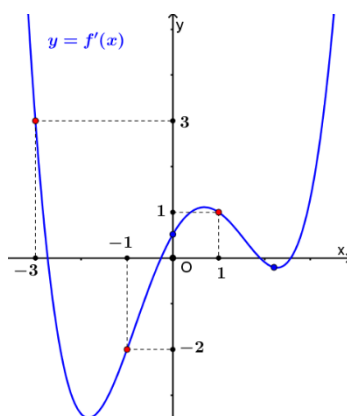
lần lượt có hoành độ là: $-3; 1; 3$. Do đó phương trình

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

t	-3	1	3
$g'(x)$	0	+	0
$g(x)$	$g(-3)$	$g(1)$	$g(3)$

Vậy $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2021$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$

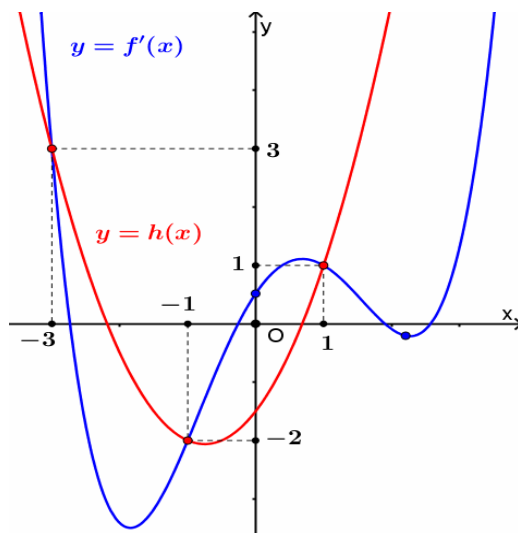
B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

Lời giải

Chọn C.



• Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

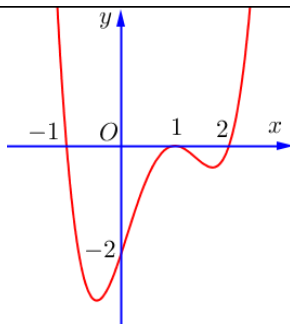
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$			$g(-3)$		$g(-1)$		$g(1)$	

• Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $f(2) + \frac{2}{3}$.

B. $f(-1) + \frac{2}{3}$.

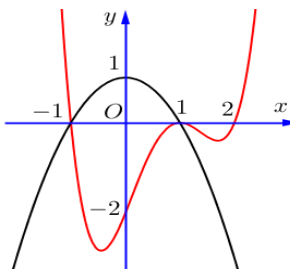
C. $\frac{2}{3}$.

D. $f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x \Rightarrow g'(x) = f'(x) + x^2 - 1$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Bảng biến thiên

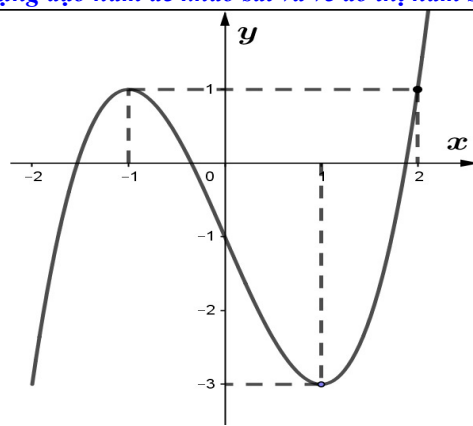
x	-1	1	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$

Từ BBT ta thấy $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(1) = f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ

bên. Gọi $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2021$. Biết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$.

Với $x \in [-1; 2]$ thì $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng



A. $g(2)$.

B. $g(1)$.

C. $g(-1)$.

D. $g(0)$.

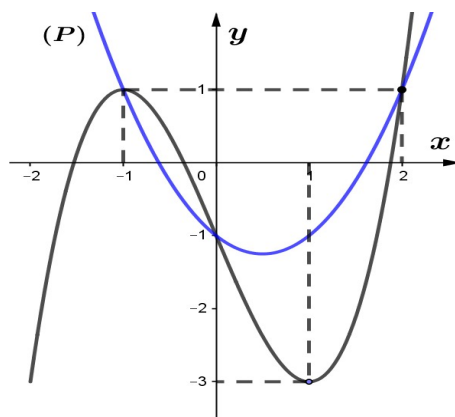
Hướng dẫn giải

Chọn A

+ Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2021$ trên đoạn $[-1; 2]$.

+ Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + x + 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và Parabol $(P): y = x^2 - x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



$$f'(-1) = -1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(2) = 2$$

+ Ta thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - x - 1$

+ Bảng biến thiên :

x	-1	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$

$$g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$$

+ Từ giả thiết

$$\Leftrightarrow g(-1) - g(2) > g(0) - g(1)$$

$\text{Đ } g(-1) - g(2) > 0 \text{ (vì } g(0) > g(1) \text{)}$

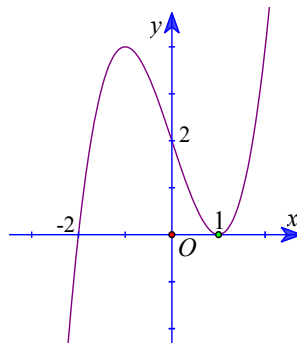
$\text{Vậy } g(-1) > g(2)$

Vậy $\min_{x \in [-1; 2]} g(x) = g(2)$

DẠNG 7

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = f(u(x)); y = f(u(x)) + h(x)$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[-5; 3]$ bằng



A. $f(-2)$

B. $f(1)$

C. $f(-4)$

D. $f(2)$

Lời giải

Chọn A.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -2 \\ \frac{x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < -2 \Leftrightarrow x < -4$$

Bảng biến thiên

x	-5	-4	2	3	
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$					

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-5; 3]$ bằng $g(-4) = f(-2)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -2017)$. C. $(-2017; 0)$. D. $(2017; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = f'(x + 2017) + 2018 = 0$

Từ BXD của $f''(x)$ ta suy ra BBT của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	$-\infty$	3	-2018	$+\infty$	

$$f'(x + 2017) = -2018 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2017 = 2 \\ x + 2017 = a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2015 \\ x_2 < -2017 \end{cases}$$

Từ BBT ta có:

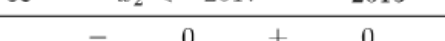
Từ đó ta suy ra BBT của hàm số $f'(x + 2017) + 2018$ như sau:

Tính tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ lên trên 2018 đơn vị.

Tính tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang trái 2017 đơn vị.

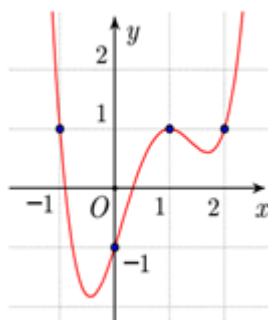
x	$-\infty$	x_2	-2017	-2015	$+\infty$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x+2017)+2018$	The diagram illustrates the transformation of the graph of $y = f'(x)$ to $y = f'(x+2017)+2018$. The original graph (top) has a local minimum at x_2 and a local maximum at -2017. The transformed graph (bottom) has a local minimum at -2017 and a local maximum at -2015. The y-axis is shifted up by 2018 units. The x-axis is shifted left by 2017 units. The transformed graph is shown as a dashed line, and the original graph is shown as a solid line.					

Suy ra BBT của hàm số $y = f(x+2017)+2018x$

x	$-\infty$	$x_2 < -2017$	-2015	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số đạt GTNN tại $x_2 < -2017$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = -f(2x-1)+2x$ trên đoạn $[0;2]$ bằng



A. $-f(1)+2$

B. $-f(-1)$

C. $-f(2)+3$

D. $-f(3)+4$

Lời giải

Chọn C.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(2x-1)+2 = 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -1 \\ 2x-1 = 1 \\ 2x-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < -1 \\ 2x-1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

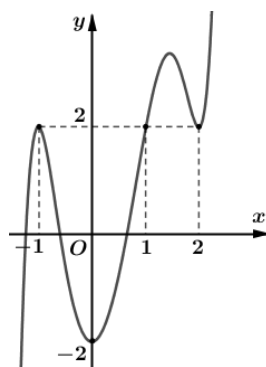
Bảng biến thiên

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$g'(x)$	+	0	0	-
$g(x)$	$g(0)$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$		$g(2)$

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0;2]$ bằng $g\left(\frac{3}{2}\right) = -f(2) + 3$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của

hàm số $g(x) = f(2x+1) - 4x - 3$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$ bằng



A. $f(0)$.

B. $f(-1) + 1$.

C. $f(2) - 5$.

D. $f(1) - 3$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow t \in [-2; 3]$, xét hàm số $h(t) = f(t) - 2t - 1$ trên $[-2; 3]$.

Ta có $h'(x) = f'(x) - 2$, $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$.

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 2 \Leftrightarrow x \in (1; 3)$

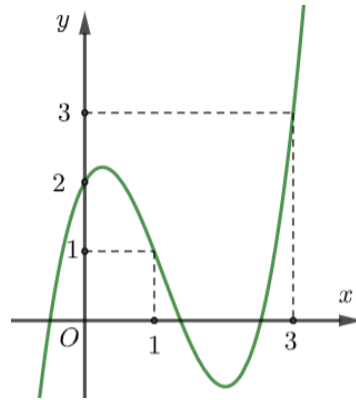
$h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 1)$

Ta có bảng biến thiên sau

t	-2	-1	1	2	3
$h'(t)$	-	0	0	0	+
$h(t)$	$h(1) = f(1) - 3$				

Ta có $\min_{[-2; 3]} h(t) = h(1) = f(1) - 3$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2; 4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

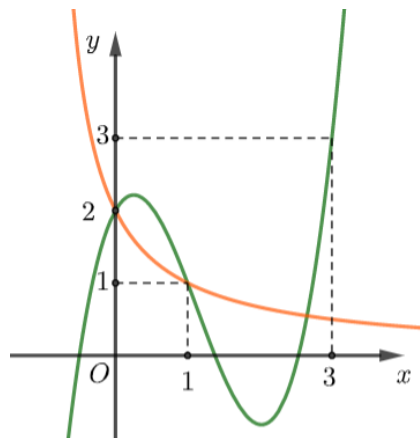
Ta có $g'(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{2x+8}{x^2+8x+16} = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{2}{x+4}$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{4}{x+4}$.

Đặt $t = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow t \in [0; 3]$

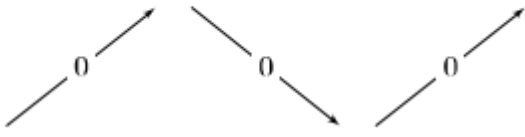
Phương trình trở thành $f'(t) = \frac{4}{2t+2} = \frac{2}{t+1}$.

Vẽ đồ thị $y = \frac{2}{x+1}$ lên cùng một hệ tọa độ ta được:



Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = 1 \Rightarrow x = 0$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$							

- A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(2)$. D. $f(1)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g(x) = f(2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}$.

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có $h(t) = f(t) + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \Rightarrow h'(t) = f'(t) - \frac{1}{2} \sin t$.

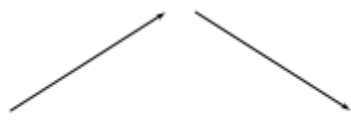
Từ bảng biến thiên ta thấy:

✓ Với $t \in (-2; 0)$ thì $f'(t) > 0$ và $\sin t < 0 \Rightarrow h'(t) > 0$.

✓ Với $t \in (0; 2)$ thì $f'(t) < 0$ và $\sin t > 0 \Rightarrow h'(t) < 0$.

✓ Với $t \in 0$ thì $f'(t) = 0$ và $\sin t = 0 \Rightarrow h'(t) = 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên

t	-2	0	2
h'	$+$	0	$-$
h			

Vậy $\max_{[-1; 1]} g(x) = \max_{[-2; 2]} h(t) = h(0) = f(0)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		5		$-\infty$

A. 15.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Lời giải

Chọn D.

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x]$$

Với $x \in [1; 3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1; 3]$.

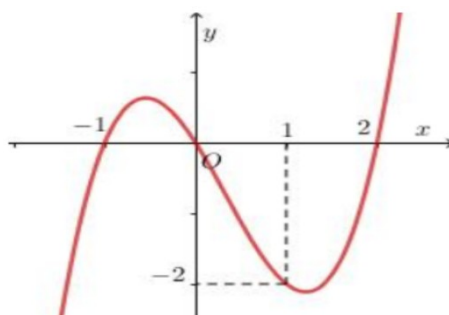
Bảng biến thiên

x	1	2	3
g'	+	0	-
g	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$

$$\max_{[1; 3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$$

Suy ra

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$ bằng

A. $g(1)$.

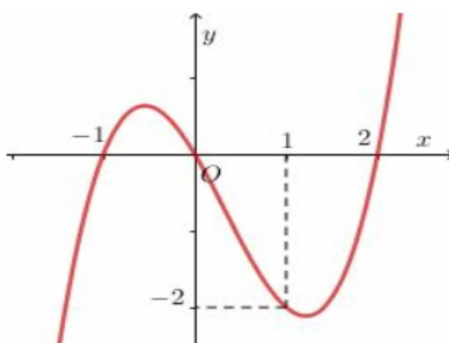
B. $g(-2)$.

C. $g(0)$.

D. $g(2)$.

Lời giải

Chọn C.



Xét $g(x) = 3f(x^2 - 2) - \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + 2 \Rightarrow g'(x) = 6xf'(x^2 - 2) - 6x^3 - 6x$

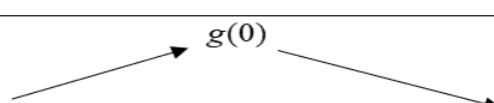
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = x^2 + 1 (*) \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 - 2, x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [-2; 0]$,

Pt (*) có dạng $f'(t) = t + 3(1)$

Pt (1) không có nghiệm $t \in [0; 2]$

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$

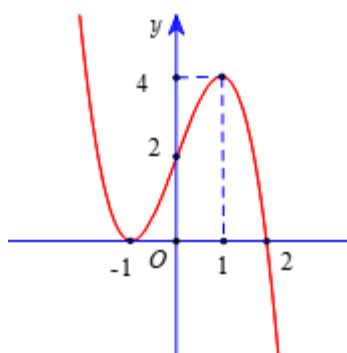
x	-2	0	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(0)$ 		

Suy ra $\max_{[-2; 2]} g(x) = g(0)$

DẠNG 8

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = [f(x)]^k; y = [f(u(x))]^k$

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1) = \frac{13}{4}, f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{1573}{64}$

B. 198

C. $\frac{37}{4}$

D. $\frac{14245}{64}$

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$		

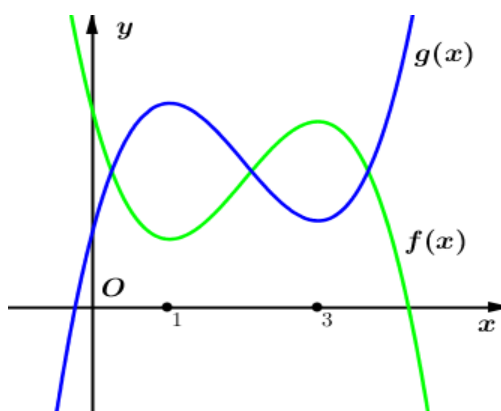
Ta có $g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) - 3f'(x)$

Xét trên đoạn $[-1; 2]$ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

$$g(-1) = \frac{1573}{64}, \quad g(2) = 198$$

Từ đó suy ra $\max_{[-1; 2]} g(x) = 198, \min_{[-1; 2]} g(x) = \frac{1573}{64}$. Vậy $\max_{[-1; 2]} g(x) + \min_{[-1; 2]} g(x) = \frac{14245}{64}$.

Câu 29. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới,



biết rằng $x=1$ và $x=3$ đều là các điểm cực trị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đồng thời $3f(1) = g(3) + 1$, $2f(3) = g(1) + 4$, $f(-2x+7) = g(2x-3) - 1$ (*).

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ của hàm số $S(x) = f(x)g(x) - g^2(x) + f(x) - 4g(x) + 2$. Tính tổng $P = M - 2m$.

A. 39.

B. 107.

C. 19. D. 51.

Lời giải

Chọn B.

Thay lần lượt $x=2, x=3$ vào (*) ta có

$$\begin{cases} f(3) = g(1) - 1 \\ f(1) = g(3) - 1 \end{cases}, \text{ mà } \begin{cases} 3f(1) = g(3) + 1 \\ 2f(3) = g(1) + 4 \end{cases} \text{ nên } f(1) = 1, f(3) = 5, g(1) = 6, g(3) = 2.$$

Nhìn vào đồ thị ta thấy $1 = f(1) \leq f(x) \leq f(3) = 5, 2 = g(3) \leq g(x) \leq g(1) = 6 \forall x \in [1; 3]$.

Đặt $u = f(x), v = g(x)$ với $1 \leq u \leq 5, 2 \leq v \leq 6$, xét

$$h(u, v) = uv - v^2 + u - 4v + 2 = -v^2 + (u - 4)v + u + 2.$$

Xem $h(u, v)$ là một hàm số bậc 2 theo biến v ta có

$$h'(u, v) = -2v + u - 4 \leq -4 + 5 - 4 = -3 < 0 \forall v \in (2; 6) \Rightarrow h(u, v) \text{ nghịch biến trên } [2; 6].$$

Suy ra

$$h(u, 6) \leq h(u, v) \leq h(u, 2) \Rightarrow 7u - 58 \leq h(u, v) \leq 3u - 10$$

$$\Rightarrow -51 \leq h(u, v) \leq 5 \text{ (do } 1 \leq u \leq 5).$$

Từ đó $M = \max_{[1; 3]} S(x) = 5$, dấu bằng xảy ra khi $x = 3$, $m = \min_{[1; 3]} S(x) = -51$, dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

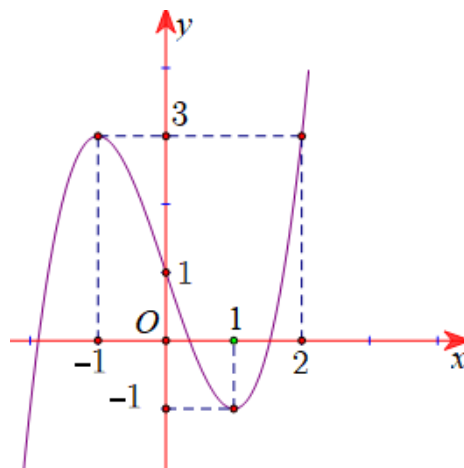
Vậy $P = M - 2m = 107$.

DẠNG 9

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP CHỨA THAM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BIẾT BẢNG

BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Giá trị m để $\max_{[0; 1]} g(x) = -10$ bằng

A. $m = -13$.

B. $m = 5$.

C. $m = 3$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $u(x) = 2x^3 + x - 1 \Rightarrow u'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ hàm số $u(x) = 2x^3 + x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét $x \in [0; 1]$ ta có: $u(x) \in [u(0); u(1)] \Rightarrow u(x) \in [-1; 2]$.

Từ đồ thị suy ra $\max_{[-1; 2]} f(u) = f(2) = 3$.

$\Rightarrow \max_{[0; 1]} f(2x^3 + x - 1) = 3 \Rightarrow \max_{[0; 1]} g(x) = 3 + m$. Từ giả thiết $\Rightarrow 3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số

$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. -1.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = x^3 + x, x \in [0; 2]$.

$t' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0; 2]$, suy ra $0 \leq t \leq 10$.

Ta có $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = \max_{x \in [0; 2]} [f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m] \leq \max_{x \in [0; 2]} f(x^3 + x) + \max_{x \in [0; 2]} (-x^2 + 2x + m)$.

Mà $\max_{x \in [0; 2]} f(x^3 + x) = \max_{t \in [0; 10]} f(t) = 4$.

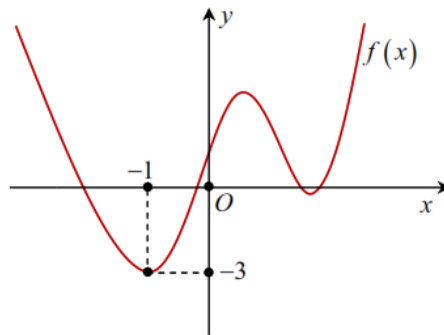
$\max_{x \in [0; 2]} (-x^2 + 2x + m) = 1 + m$.

Suy ra $\max_{x \in [0; 2]} g(x) \leq 4 + 1 + m = m + 5$.

$\max_{x \in [0; 2]} g(x) = m + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^3 + x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Theo giả thiết $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8 \Leftrightarrow m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 32. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m là tham số thực, để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x + 3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng



A. -1.

B. 0.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

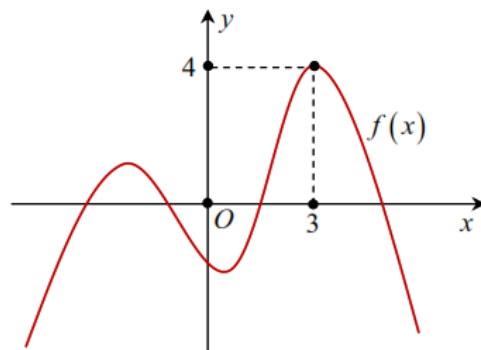
Chọn A.

Nhận thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(2x+3) + (x-2m)^2 - 1 \geq -3 + 0 - 1 = -4$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} f(2x+3) = -3 \\ x-2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x=2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 33. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m và n là hai tham số thực. Để hàm số $g(x) = 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $P = 2m - n$ bằng:



A. 3.

B. 0.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

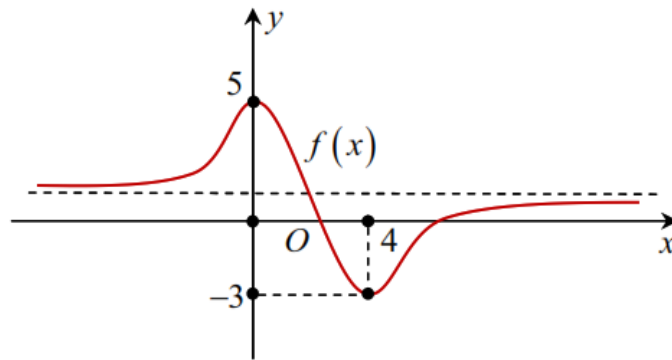
Nhận thấy $\max f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow f(x) \leq f(3) = 4, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $\begin{cases} f(3x-m) \leq f(3) = 4 \\ f(x+n) \leq f(3) = 4 \\ -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \leq 4 \end{cases}$

$\Rightarrow g(x) = 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x \leq 3.4 + 4 + 4 = 20$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 3x - m = 3 \\ x + n = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - m = 3 \\ 2 + n = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow P = 2m - n = 5.$

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m là tham số thực. Để hàm số $g(x) = 2f(2x - m) - f(3x + n) + x^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T = 2m + 3n$ bằng:



A. - 11.

B. - 7.

C. - 13.

D. 5.

Lời giải

Chọn C.

Nhận thấy $-3 = f(4) \leq f(x) \leq f(0) + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq f(4) = -3 \\ -f(x) \geq -f(0) = -5 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Xét hàm số $g(x) = 2f(2x - m) - f(3x + n) + x^2 - 2x = 2f(2x - m) - f(3x + n) + (x - 1)^2 - 1.$

Ta có $\begin{cases} f(2x - m) \geq f(4) = -3 \\ -f(3x + n) \geq -f(0) = -5 \\ (x - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \geq 2 \cdot (-3) - 5 + 0 - 1 = -12.$

Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - m = 4 \\ 3x + n = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m = 4 \\ 3 + n = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = -3 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow T = 2m + 3n = -13.$