TRÖÔØNG ÑAÏI HOÏC QUY NHÔN
KHOA TOAÙN

Nhoùm thöïc hieän

1. Leâ Nguyeãn Minh Trung
2. Nguyeãn Anh Tuaán
3. Nguyeãn Thuyù Uyeân
4. Nguyeãn Thò Thanh Vui
5. Traàn Ñöùc Vöông
6. Nguyeãn Thò Kim Xuyeán

NHAÄN DAÏNG TAM GIAÙC

Giaùo vieân höôùng daãn: Döông Thanh Vyõ

Quy Nhơn, tháng 11/2009

LÔØI NOÙI ÑAÀU

[illegible] daïng tam giaùc laø moät vaán ñeà khoâng môùi, chu[illegible]eå tìm h[illegible]ùc saùch treân thò tröôøng vôùi nhieàu taùc giaû kha[illegible] Nhöng chuùng toâi thaáy caùc taøi lieäu naøy trình baøy chöa chaët cheõ vaø khaùi quaùt, chöa ñi saâu vaøo phöông phaùp thieát laäp ñeà toaùn.

Vôùi baøi tieåu luaän naøy chuùng ta mong raèng seõ ñoùng goùp moät soá kieán thöùc ñeå giaûi baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc vaø phöông phaùp ra ñeà cho daïng naøy.

Baøi tieåu luaän cuûa chuùng toâi goàm:

Chöông 1: Nhaän daïng tam giaùc caân
Chöông 2: Nhaän daïng tam giaùc vuoâng
Chöông 3: Nhaän daïng tam giaùc ñeàu
Chöông 4: Nhaän daïng tam giaùc khaùc.

Trong moãi chöông chuùng toâi ñeàu ñöa ra moät soá ví duï ñieån hình cho phöông phaùp giaûi, ñoàng thôøi coù moâ roäng vaø nhaän xeùt, cuoái moãi chöông laø phöông phaùp ra ñeà cho daïng toaùn ñoù.

Chuùng toâi xin ñöôïc toû lôøi caùm ôn chaân thaønh ñeán thaày giaùo Döông Thanh Vyõ cuøng moät soá baïn lôùp sö phaïm Toaùn K29 Tröôøng Ñaïi hoïc Quy Nhôn.

Vì thôøi gian vaø khaû naêng coù haïn neân baøi tieåu luaän naøy chaéc chaén coù nhieàu sai xoùt vaø haïn cheá. Chuùng toâi raát mong ñöôïc söï ñoùng goùp yù kieán xaây döïng vaø pheâ bình cuûa ñoäc giaû.

Nhoùm thöïc hieän

Moät soá heä thöùc löôïng trong tam giaùc:

1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{4}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$
2. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$
3. $tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} - tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} - tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 0$
4. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
5. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$ (ΔABC khoâng laø tam giaùc vuoâng)
6. $\cot anA.\cot anB + \cot anB.\cot anC + \cot anC.\cot anA = 1$
7. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$
8. $Co\tan\frac{A}{2} + Co\tan\frac{B}{2} + Co\tan\frac{C}{2} = Co\tan\frac{A}{2}.Co\tan\frac{B}{2}.Co\tan\frac{C}{2}$
9. $Co\tan A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ (Ñaúng thöùc haøm Coâsin suy roäng)

Moät soá baát ñaúng thöùc löôïng trong tam giaùc:

1. $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$
2. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$
3. $\cos A.\cos B.\cos C \le \frac{1}{8}$
4. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$
5. $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$
6. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$
7. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$
8. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$
9. $\cot anA + \cot anB + \cot anC \ge \sqrt{3}$

Daáu baèng xaûy ra trong caùc baát ñaúng thöùc treân $\Leftrightarrow \Delta$ABC ñeàu.
Vieäc chöùng minh caùc bñt naøy xin daønh cho baïn ñoïc.

CHÖÔNG 1: NHAÄN DAÏNG TAM GIAÙC CAÂN

- Caùc baøi toaùn thuoäc loaïi naøy coù caùc daïng nhö sau: cho tam giaùc ΔABC thoaû maõn moät ñieàu kieän naøo ñoù, thöôøng laø cho döôùi daïng heä thöùc. Haõy chöùng minh ΔABC caân.

- Phaûi löu yù tính ñoái xöùng cuûa baøi toaùn ñeå ñònh höôùng caùc pheùp bieán ñoåi. Chaúng haïn caân taïi C thì taäp trung vaøo chöùng minh A=B.

- Caùc baøi toaùn veà nhaän daïng tam giaùc caân coù theå chia thaønh 2 loaïi chính nhö sau:

LOAÏI I: **SÖÛ DUÏNG CAÙC PHEÙP BIEÁN ÑOÅI ÑAÚNG THÖÙC**

Töø giaû thieát ñi ñeán keát luaän baèng caùch vaän duïng caùc heä thöùc löôïng trong tam giaùc, caùc coâng thöùc bieán ñoåi löôïng giaùc.

VD1:

Cho ΔABC thoaû $\frac{\sin C}{\sin B}=2\cos A$ ***(1)***

CM ΔABC caân

$(1)\Leftrightarrow \sin C=2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin C=\sin(B+A)+\sin(B-A)$

$\Leftrightarrow \sin C=\sin C+\sin(B-A)$

$\Leftrightarrow \sin(B-A)=0\Leftrightarrow A=B \quad (\text{vì } |A-B|<\pi)$

⇔ ΔABC caân taïi C.

NX: *Töø (1) neáu thay goùc C baèng goùc B thì ta ñöôïc 2 baøi toaùn:*

$\left[\begin{array}{l}\frac{\sin B}{\sin C}=2\cos A\\ \frac{\sin B}{\sin A}=2\cos C\end{array}\right.$ ñeàu cho ΔABC caân taïi B

Töông töï neáu thay goùc C baèng goùc A thì ta ñöôïc 2 baøi toaùn:

$\left[\begin{array}{l}\frac{\sin A}{\sin B}=2\cos C\\ \frac{\sin A}{\sin C}=2\cos B\end{array}\right.$ ñeàu cho ΔABC caân taïi A

Nhö vaäy trong baøi toaùn CM ΔABC caân, neáu ta hoaùn ñoåi vò trí caùc goùc thì ta seõ thu ñöôïc ΔABC caân taïi caùc vò trí khaùc nhau.

VD2: ***Cho ΔABC coù*** $\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ ***(1)***

CM ΔABC caân

Ta thaáy trong (1) chöùa caû 2 yeáu toá goùc vaø caïnh. Ñoái vôùi baøi toaùn naøy ta coù theå CM ΔABC caân theo 2 caùch

1. A=B
2. a=b

Tuyø vaøo bieåu thöùc cuûa baøi toaùn maø ta choïn bieán ñoåi veà goùc hay veà caïnh sao cho thuaän lôïi hôn.

Caùch 1:

(1) $\Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B}=\frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B}=\frac{2a+c}{2a-c}$

Aùp duïng ñònh lyù haøm Sin ta ñöôïc:

$\frac{1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2\sin A+\sin C}{2\sin A-\sin C}$

$\Leftrightarrow 2\sin A-\sin C+2\sin A\cos B-\sin C\cos B=2\sin A+\sin C-2\sin A\cos B-\sin C\cos B$

$\Leftrightarrow 4\sin A\cos B = 2\sin C$
$\Leftrightarrow 2\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right] = 2\sin C$
$\Leftrightarrow 2\left[\sin C+\sin(A-B)\right] = 2\sin C$
$\Leftrightarrow \sin(A-B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
$\Leftrightarrow$ ΔABC caân taïi C

<u>Caùch 2</u>:

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \sqrt{\dfrac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{tg\frac{B}{2}} = \sqrt{\dfrac{2a+c}{2a-c}}$

$$\Leftrightarrow tg^2\frac{B}{2} = \frac{2a-c}{2a+c} \Leftrightarrow \frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)} = \frac{2a-c}{2a+c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^2-(c-a)^2}{(c+a)^2-b^2} = \frac{2a-c}{2a+c} \Leftrightarrow \frac{b^2-(c-a)^2}{(c+a)^2-b^2}+1 = \frac{2a-c}{2a+c}+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{4ac}{(c+a)^2-b^2} = \frac{4a}{2a+c} \Leftrightarrow c(2a+c) = (c+a)^2-b^2$$
$$\Leftrightarrow 2ac+c^2 = c^2+a^2+2ca-b^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2$$

$\Leftrightarrow$ a = b $\Leftrightarrow$ Δ ABC caân taïi C

<u>Chuù y**ù:** </u> *Ta coù* $r_B = \dfrac{S}{p-b} = p.tg\dfrac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow tg\frac{B}{2} = \frac{S}{p(p-b)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-b)} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

<u>VD3</u>**: Cho ΔABC thoaû* $\sin\dfrac{A}{2}\cos^3\dfrac{B}{2} = \sin\dfrac{B}{2}\cos^3\dfrac{A}{2}$ ***(1)

CM ΔABC caân.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}} = \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} \Leftrightarrow tg\dfrac{A}{2}(1+tg^2\dfrac{A}{2}) = tg\dfrac{B}{2}(1+tg^2\dfrac{B}{2})$ (*)

$\Leftrightarrow (tg\frac{A}{2}-tg\frac{B}{2})+tg^3\frac{A}{2}-tg^3\frac{B}{2} = 0$

$\Leftrightarrow (tg\frac{A}{2}-tg\frac{B}{2})(1+tg^2\frac{A}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg^2\frac{B}{2}) = 0$

$Vì\ 0 < \frac{A}{2},\frac{B}{2} < \frac{\Pi}{2} \Rightarrow tg\frac{A}{2},tg\frac{B}{2} > 0$

Neân $tg\frac{A}{2}-tg\frac{B}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC$ caân taïi C

<u>NX:</u> *Töø (1) ta coù theå bieán ñoåi nhö sau*

$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}(1-\sin^2\frac{B}{2}) = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}(1-\sin^2\frac{A}{2})$

Tieáp tuïc chuyeån veá vaø ñaët thöøa soá chung ta ñöôïc:

$\sin\frac{A-B}{2} = 0$

<u>Caùch khaùc:</u>

Töø (*) ta xeùt $f(x)=x(1+x^2), x>0$

$f'(x)=1+3x^2>0, \forall x>0$

$\Rightarrow f$ laø haøm taêng treân $(0,+\infty)$

Vì vaäy: (*) $\Leftrightarrow f\left(tg\frac{A}{2}\right)=f\left(tg\frac{B}{2}\right)$

$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2}=tg\frac{B}{2}$

<u>Chuù y</u>ù: *Trong baøi toaùn CM tam giaùc caân ta thöôøng gaëp 2 veá cuûa bieåu thöùc ñoái xöùng. Trong tröôøng hôïp naøy ta coù theå söû duïng phöông phaùp haøm soá:*

<u>Tính chaát</u>: Neáu haøm f taêng (hoaëc giaûm) trong khoaûng (a,b)

Thì : $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v, \forall u,v\in(a,b)$

<u>VD4</u>: ***Cho*** Δ***ABC thoûa:*** $\sin(B+C)+\sin(C+A)-\cos(A+B)=\frac{-3}{2}$ ***(1)***

Tam giaùc ABC laø tam giaùc gì ?

(1) $\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\cos C=\frac{-3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C=\frac{-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)=\frac{-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{C}{2}-2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{2}=0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin\frac{A-B}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\\ A=B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C=120^o\\ A=B=30^o\end{cases}$$

<u>NX</u>: *Ta coù theå duøng tính chaát tam thöùc baäc hai ñeå nhaän daïng ña giaùc naøy. Thaät vaäy:*

Ñaët $t=\cos\frac{C}{2}\in(0,1)$

$(*)\Leftrightarrow 2t^2-2\cos\frac{A-B}{2}t+\frac{1}{2}=0$ *luoân coù nghieäm.*

$\Delta'=\cos^2\frac{A-B}{2}-1=-\sin^2\frac{A-B}{2}\le 0$

Neân: $\Delta'=0\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{2}=0\Leftrightarrow A=B$

Khi ñoù: $t=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow C=120^0$

<u>VD5</u>: ***Cho*** Δ***ABC thoûa maõn heä thöùc***

$atgB+btgA=(a+b)tg\frac{A+B}{2}$ ***vaø C≠ 90^0(1)***

CM Δ***ABC laø tam giaùc caân***.

$$\Leftrightarrow a(tgB - tg\frac{A+B}{2}) = b(tg\frac{A+B}{2} - tgA)$$

(1) $$\Leftrightarrow 2R\sin A\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}} = 2R\sin B.\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-A}{2}(\sin A\cos A - \sin B\cos B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B-A}{2}(\sin 2A - \sin 2B) = 0$$

Coù 2 khaû naêng sau:

1)Neáu $\sin\frac{B-A}{2} = 0 \Rightarrow B = A$

2)Neáu sin2A – sin2B =0 $\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B$ (2)

Do C≠ 90^0 $\Rightarrow$ A+B ≠ 90^0 $\Rightarrow$ 2A+2B ≠ 180^0 vaø hieån nhieân

0<2A+2B <360^0, neân töø (2) suy ra 2A = 2B hay A = B

Vaäy trong caû hai tröôøng hôïp ta ñeàu coù ΔABC caân taïi C

NX: *Giaû thieát C ≠ 90^0 laø caàn thieát vì neáu khoâng coù noù thì töø (2) coù theâm khaû naêng 2A+2B=180^0 ⇔ C=90^0, töùc tam giaùc ñaõ cho coù theå khoâng caân maø chæ vuoâng taïi C. Noùi caùch khaùc, neáu chæ thoûa maõn ñieàu kieän* $atgB + btgA = (a+b)tg\frac{A+B}{2}$ *thì ΔABC hoaëc laø caân taïi C, hoaëc laø vuoâng taïi C. Dó nhieân ΔABC coù theå laø tam giaùc vuoâng caân taïi C.*

<u>LOAÏI II</u>: SÖÛ DUÏNG BAÁT ÑAÚNG THÖÙC

- Khaùc vôùi tam giaùc ñeàu coù voâ soá heä thöùc "ñeïp" thöôøng söû duïng BÑT ñeå chöùng minh, nhöõng heä thöùc ñeïp cuûa tam giaùc caân raát ít.

- Cho ΔABC coù caùc caïnh vaø caùc goùc thoûa maõn moät heä thöùc:

F(A,B,C,a,b,c)=0

CM ΔABC caân taïi C baèng BÑT nhö sau:

- Duøng BÑT chöùng minh F(A,B,C,a,b,c)≥ 0
- Daáu baèng xaûy ra khi vaø chæ khi a=b (hoaëc A=B)
- Vaäy F(A,B,C,a,b,c)=0 ⇔ a=b ⇔ ΔABC caân taïi C

<u>VD1</u>: ***Cho a,b,c, laø ñoä daøi 3 caïnh cuûa moät tam giaùc***

Bieát raèng $4p - a - b = \sqrt{c^2 + bc + ac + ab}$ ***(1)***

CM tam giaùc treân laø tam giaùc caân

$$(1) \Leftrightarrow 4\frac{a+b+c}{2} - a - b = 2\sqrt{(c+a)(c+b)}$$

$$\Leftrightarrow 2c + a + b = 2\sqrt{(c+a)(c+b)}$$

$$\Leftrightarrow (c+a) + (c+b) = 2\sqrt{(c+a)(c+b)}$$ (2)

Aùp duïng BÑT Cauchy cho 2 soá c+b ta coù

$$(c+a) + (c+b) \geq 2\sqrt{(c+a)(c+b)}$$ (3)

Daáu "=" xaûy ra ⇔ c+a = c+b ⇔ a=b

Ñeå (2) xaûy ra thì trong (3) xaûy ra daáu ñaúng thöùc.

Töùc laø a=b hay tam giaùc ñaõ cho laø tam giaùc caân.

<u>NX</u>: *Töø (2) ta hoaøn toaøn coù theå giaûi theo caùch thoâng thöôøng baèng caùch laáy bình phöông 2 veá, ta ñöôïc:*

$$\left[(a+c)-(c+b)\right]^2=0 \Leftrightarrow c+a=c+b$$

** Caùch ra ñeà cho baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc baèng BÑT Cauchy:*

Töø $\left[\begin{array}{l} a=b \\ A=B \end{array}\right.$

Ta bieán ñoåi 2 veá ñeå ñöôïc moät ñaúng thöùc töông ñöông

Ñaët VT=α, VP=β. Aùp duïng BÑT Cauchy cho 2 soá α, β

Taïi vò trí daáu "=" xaûy ra ta ñöôïc baøi toaùn chöùng minh ΔABC caân taïi C

Töø baøi toaùn ñoù ta coù theå tieáp tuïc bieán ñoåi ñeå ñöôïc 1 baøi toaùn phöùc taïp hôn döïa vaøo caùc pheùp bieán ñoåi töông ñöông hay bieán ñoåi löôïng giaùc.

VD2:** **Cho ΔABC thoaû maõn heä thöùc:

$$h_a=\sqrt{p(p-a)} \qquad \textbf{(1)}$$

CM ΔABC laø tam giaùc caân

Ta coù: $h_a=\dfrac{2s}{a}=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$

Do ñoù:

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}=\sqrt{p(p-a)}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)}=a$ (2)

Aùp duïng BÑT Cauchy cho 2 soá: p-b, p-c

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)}\le(p-b)+(p-c)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)}\le a$ (3)

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow p-b=p-c \Leftrightarrow b=c$

Vaäy töø (2) suy ra trong (3) xaûy ra daáu ñaúng thöùc, töùc laø ta coù b = c $\Leftrightarrow$ ΔABC caân taïi A.

NX: *Neáu khoâng aùp duïng BÑT thì töø (2) $\Leftrightarrow$ $4(p-b)(p-c)=a^2$*

$\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{a+c-b}{2}\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)=a^2 \quad \Leftrightarrow a^2(c-b)^2=a^2$

$\Leftrightarrow (c-b)^2=0 \Leftrightarrow c=b$

VD3: ***Cho ΔABC thoaû maõn heä thöùc:***

$$4(\sin B+2\sin C)+3(\cos B+2\cos C)=15 \qquad \textbf{(1)}$$

CM ΔABC caân.

$(1)\Leftrightarrow (4\sin B+3\cos B)+(8\sin C+6\cos C)=15$

Aùp duïng BÑT Bunhiacopxki, ta coù:

$4\sin B+3\cos B\le\sqrt{(4^2+3^2)(\sin^2 B+\cos^2 B)}=5$

$8\sin C+6\cos C\le\sqrt{(8^2+6^2)(\sin^2 C+\cos^2 C)}=10$

Do ñoù: $(4\sin B+3\cos B)+(8\sin C+6\cos C)\le 15$

Daáu "=" xaûy ra $\Longleftrightarrow \begin{cases} 6\sin B+3\cos B=5 \\ 8\sin C+6\cos C=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sin B}=\dfrac{3}{\cos B} \\ \dfrac{8}{\sin C}=\dfrac{6}{\cos C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ tgB = tgC = $\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$ B = C

NX: caùch ra ñeà cho baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc caân baèng BÑT Bunhiacopxki töông töï vd 3:

Töø $\triangle$ABC caân taïi A => B=C . Laáy tg hoaëc cotg 2 veá

Gs tgB = tg C $\Leftrightarrow \left\{ \dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}\overset{cho}{=}\dfrac{a}{b} \right.$, vôùi b $\neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sin B} = \dfrac{b}{\cos B} \\ \dfrac{a}{\sin C} = \dfrac{b}{\cos C} \end{cases}$ (a,b) coù theå thay baèng (A,B) sao cho $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$

Aùp duïng BÑT Bunhiacopxki cho caùc soá a,b, sinB, cosB
vaø A,B, sinC, cosC

Coäng 2 BÑT laïi vôùi nhau, taïi vò trí daáu "=" xaûy ra ta ñöôïc baøi toaùn.

VD4: ***Cho △ABC thoaû maõn ñieàu kieän.***

$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} = 2\sqrt{\cos\frac{c}{2}}$

CM △ABC caân

Aùp duïng BÑT Bunhiacopxki ta coù:

$\left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)^2 \overset{(1)}{\le} 2(\sin A + \cos A) = 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)^2 \le 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

Vì cos $\frac{A-B}{2} \le 1, \cos\frac{C}{2} > 0$ neân

4 cos $\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \overset{(2)}{\le} 4\cos\frac{C}{2}$ .Vaäy $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \le 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \sin B \\ \cos\frac{A-B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B$

$\Leftrightarrow$ △ABC caân taïi C

NX: *Baøi naøy aùp duïng BÑT Bunhiacopxki seõ ñôn giaûn hôn laø caùch bieán ñoåi ñaúng thöùc*.

Caùch ra ñeà töông töï : töø 2 goùc baèng nhau, bieán ñoåi ñeå ñöôïc 1 ñaúng thöùc töông ñöông. Ñaët VT = α , VP = β

Aùp duïng BÑT Bunhiacopxki cho 4 soá a,α,b,β vôùi a,b laø caùc heä soá tuyø yù tröôùc α vaø β. Taïi vò trí daáu "=" xaûy ra ta ñöôïc baøi toaùn.

VD5: ***CM ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå △ABC caân laø.***

cos $\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} = 2\cos 15^0$ ***, bieát C = 120⁰***

Xeùt f(x) = cosx treân (0,$\frac{\pi}{2}$), ta coù;

f (x) =- sinx , f''(x) = - cosx<0, $\forall x \in$ (0,$\pi/2$)

Theo BÑT Jensen ta coù:

$f\left(\dfrac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2}}{2}\right) \ge \dfrac{f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right)}{2}$

$\Leftrightarrow$ cos $\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} \le 2\cos 15^0$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B = 30^0$

$\Leftrightarrow$ △ABC caân.

NX: **Caùch ra ñeà**:

Töø 2 goùc baèng nhau, bieán ñoåi ñeå ñöôïc 1 ñaúng thöùc töông ñöông.

Ñaët VT = α , VP = β.

Aùp duïng BÑT Jensen cho 2 soá α, β.

$$\left[\begin{array}{ll} f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \le \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} & (1) \\ f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \ge \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} & (2) \end{array}\right.$$

- Vôùi (1) ta choïn haøm f (x) sao cho coù ñaïo haøm caáp 2: f''(x)>0, $\forall x \in D$
- Vôùi (2) ta choïn haøm f (x) sao cho coù ñaïo haøm caáp 2: f''(x)<0, $\forall x \in D$

Sau ñoù thay haøm f vaøo (1) hoaëc (2) töông öùng

Taïi vò trí daáu "=" xaûy ra ta ñöôïc baøi toaùn.

<u>VD6:</u> ***Cho tam giaùc ABC coù l_b= l_c. CMR Δ ABC caân***.

Aùp duïng coâng thöùc tính ñöôøng phaân giaùc trong, ta coù:

$$l_b = l_c \Leftrightarrow \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{ac}.\frac{1}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{a+b}{ab}.\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{B}{2}}(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}) = \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \quad (1)$$

Giaû söû b $\neq$ c, khi ñoù ta coù theå cho laø b>c. Töø ñoù suy ra:

B>C => $90^0 > \frac{B}{2} > \frac{C}{2} > 0$ => $0 < \cos\frac{B}{2} < \cos\frac{C}{2}$

$$\frac{1}{\cos\frac{B}{2}} > \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \quad (2)$$

Do b>c => $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ > $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (3)

Töø (2) vaø (3) suy ra:

$\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}) > \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$: maâu thuaãn vôùi (1)

Vaäy b=c $\Rightarrow$ Δ ABC caân taïiA.

<u>Chuù yù:</u> *Töø l_b= l_c ta döï ñoaùn b=c*

Ta chöùng minh baèng phöông phaùp phaûn chöùng

Döïa vaøo BÑT quan heä giöõa caùc goùc vaø caïnh.

$a \le b \le c \Leftrightarrow A \le B \le C$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A \le \sin B \le \sin C \\ tgA \le tgB \le tgC \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A \ge \cos B \ge \cos C \\ \cot gA \ge \cot gB \ge \cot gC \end{cases}$

CHÖÔNG 2: NHAÄN DAÏNG TAM GIAÙC VUOÂNG

So vôùi nhöõng loaïi tam giaùc khaùc tam giaùc vuoâng coù moät soá tính chaát ñaëc bieät nhö toång bình phöông cuûa 2 caïnh goùc vuoâng baèng bình phöông caïnh huyeàn. Soá ño cuûa goùc vuoâng baèng soá ño cuûa hai goùc coøn laïi. Töø xa xöa Pitago ñaõ phaùt hieän moät daáu hieäu ñeå nhaän daïng tam giaùc vuoâng laø ñònh lyù Pitago. Trong phaàn naøy chuùng toâi xin cung caáp moät soá daáu hieäu ñeå nhaän bieát tam giaùc vuoâng.

Ñeå nhaän daïng tam giaùc vuoâng ta thöôøng ñöa veà moät soá daáu hieäu sau ñaây:

1. sinA = 1 2. cosA = 0 3. sin2A = 0

4. cos2A = -1 5. $\tan\frac{A}{2} = 1$ 6. tanA = cotanB

7. sinA=Sin(B-C) 8. $a^2 = b^2 + c^2$

<u>LOAÏI I:</u>SÖÛ DUÏNG PHÖÔNG PHAÙP BIEÁN ÑOÅI TÖÔNG ÑÖÔNG

<u>Ví duï</u>: ***Chöùng minh raèng trong ΔABC thoaû maõn: $\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2$ (1) thì ΔABC vuoâng.***

Ta coù: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$

Töø (1) suy ra cosA.cosB.cosC =0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuoâng

Nhaän xeùt: Neáu $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = m$,

Vôùi m = 2 thì ∆ABC vuoâng,

m < 2 thì ∆ ABC tuø,

m >2 thì ∆ ABC nhoïn.

Thaät vaäy vôùi m<2.Töø (1) suy ra cosA.cosB.cosC < 0 ⇒ toàn taïi moät soá trong 3 soá cosA, cosB, cosC beù hôn 0. Suy ra, moät goùc phaûi lôùn hôn 90^0 hay ∆ABC tuø

Vôùi m>2 ⇒ cosA.cosB.cosC>0. Suy ra trong 3 soá cosA, cosB, cosC phaûi coù moät soá döông hoaëc 3 soá ñeàu döông

Giaû söû $\begin{cases} \cos A > 0 \\ \cos B < 0 \Rightarrow 90^0 < B < 180^0 \\ \cos C < 0 \end{cases}$

$\{ CosC < 0$ $90^0 < C < 180^0$ ⇒B+C>180^0 voâ lyù

Do ñoù CosA, CosB, CosC ñeàu döö

<u>Ví duï 2:</u> ***Cho tam giaùc ABC thoaõ maõn heä thöùc***

$r_c = r + r_a + r_b$ (2) vôùi r_a laø baùn kính ñöôøng troøn baøng tieáp.

Chöùng minh raèng ΔABC vuoâng.

Ta coù S = pr $\Rightarrow r = \frac{S}{p}$

S = (p-a) $r_a \Rightarrow r_a = \frac{S}{p-a}$

Khi ñoù (2) töông ñöông vôùi $\frac{S}{p-a} = \frac{S}{P} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$

$\Leftrightarrow \frac{p(p-a)}{p(p-a)} = \frac{p-c+p-b}{(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = (a+c-b)(a+b-c)$

$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = a^2 - (b-c)^2 \Leftrightarrow (b+c)^2 \Leftrightarrow (b-c)^2 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

⇒ΔABC vuoâng.

Neáu aùp duïng heä thöùc cô baûn trong tam giaùc, ta coù

r_c = ptg$\frac{C}{2}, r = (p-c)tg\frac{C}{2}, r_a = ptg\frac{A}{2}, r_b = btg\frac{B}{2}$

Töø (2) ta ñöôïc ptg$\frac{C}{2} = (p-c)tg\frac{C}{2} + ptg\frac{A}{2} + ptg\frac{B}{2}$

$\Rightarrow ctg\frac{C}{2} = ptg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}$ (2')

Maët khaùc p = R(sinA+ sinB + sinC)=4Rcos$\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Töø (2) ta coù 2RsinC.tg$\frac{C}{2} = 4R.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow \sin^2\frac{C}{2} = \cos^2\frac{C}{2} \Rightarrow tg^2\frac{C}{2} = 1$

Do $tg\frac{C}{2} > 0 \Rightarrow tg\frac{C}{2} = 1 \Rightarrow \frac{C}{2} = 45^o \to C = 90^o$.

⇒ΔABC vuoâng.

<u>Chuù yù:</u> *Khi gaëp 1 baøi toaùn coù chöùa caùc yeáu toá khaùc caïnh vaø goùc ta neân chuyeån veà baøi toaùn coù chöùa goùc hoaëc caïnh ñeå giaûi, khi ñoù coù nhieàu coâng cuï ñeå giaûi hôn.*

<u>LOAÏI II</u>: SÖÛ DUÏNG BAÁT ÑAÚNG THÖÙC

<u>Ví duï 1:</u>

Cho ΔABC coù A, B nhoïn vaø thoaû maõn heä thöùc $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[3]{\sin C}$. (1)

Chöùng minh raèng ΔABC vuoâng.

Vì 0 < sinC ≤ 1 $\Rightarrow \sqrt[3]{\sin C} \geq \sin^2 C$.

Töø (1) $\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \geq \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow CosC \geq 0$

$\Rightarrow C \leq 90^0$.

Neáu C = $90^0 \Rightarrow$ A+ B = 90^0

$\Rightarrow \sin^2A+\sin^2B= \sin^2A+\cos^2A = 1.$

Vaäy neáu ABC laø tam giaùc vuoâng taïi C thì thoaõ maõn heä thöùc ñaõ cho.

Neáu C < 90^0. Töø giaû thieát ta coù

$\frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} = \sqrt[3]{\sin C}$

$\Leftrightarrow$ 1 - cos (A+B).cos(A-B) = $\sqrt[3]{\sin C} \Leftrightarrow 1 + \cos C.\cos(A - B) = \sqrt[3]{\sin C}$ (3).

Ta coù sinC < 1. Maët khaùc do A, B, C nhoïn neân cosC > 0, cos(A-B) > 0, vaäy töø (3) ta suy ra ñieàu voâ lyù. Do ñoù tröôøng hôïp C < 90^0 khoâng xaûy ra. Vaäy ABC laø tam giaùc vuoâng taïi C.

<u>Nhaän xeùt</u>:

** Neáu C = 90^0 ta khoâng thöû laïi maø keát luaän ΔABC vuoâng laø khoâng chaët cheõ. Vì ΔABC chöa chaéc thoaû maõn (1).*

** Neáu xeùt tröôøng hôïp C < 90^0 ta ñi ñeán keát luaän loaïi tröôøng hôïp naøy. Töø ñaây ta phaûi coù C = 90^0, khoâng caàn thöû laïi.*

** Ñieåm quan troïng cuûa baøi taäp naøy laø ôû choã vôùi a $\in$ R, 0 <a ≤ 1 thì ta coù $a^n > a^m$, 1 < n < m, n,m $\in Q$. Töø ñaáy baøi toaùn (1) coù theå môû roäng neáu $\sin^2A + \sin^2B = \sqrt[n]{\sin C}, \forall n \geq 1$ thì ΔABC vuoâng.*

<u>Ví duï 2:</u> Chöùng minh raèng neáu tam giaùc ABC thoaû

$\sin^4A + 2\sin^4B + 2\sin^4C = 2\sin^2A (\sin^2B + \sin^2C)$ (1).

Chöùng minh ΔABC vuoâng caân.

- Aùp duïng baát ñaúng thöùc coâsi cho 2 soá döông $\frac{1}{2}\sin^4 A$ vaø $2\sin^4B$ ta coù:

$$\frac{1}{2}\sin^4 A + 2\sin^4 B \geq 2.\sqrt{\frac{1}{2}\sin^4 A.2\sin^4 B} = 2\sin^2 A.\sin^2 B$$

Töông töï $\frac{1}{2}\sin^4 A + 2\sin^4 C \geq 2\sin^2 A.\sin^2 C$

$\Rightarrow \sin^4 A + 2\sin^4 B + 2\sin^4 C \geq 2\sin^2 A(\sin^2 B + \sin^2 C).$ (2)

(1) ñuùng $\Leftrightarrow$ (2) xaûy ra daáu "=" khi vaø chæ khi

$\begin{cases} \frac{1}{2}\sin^4 A = 2\sin^4 B \\ \frac{1}{2}\sin^4 A = 2\sin^4 C \end{cases}$ (3) $\Rightarrow \sin^4 B = \sin^4 C \Rightarrow \sin B = \sin C \Rightarrow B = C$.

Töø (3) $\Rightarrow \begin{cases} \sin^4 A = 4\sin^4 B \\ \sin^4 A = 4\sin^4 C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 A = 2\sin^2 B \\ \sin^2 A = 2\sin^2 C \end{cases} \Rightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$

Aùp duïng ñònh lyù haøm Sin ta ñöôïc

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ABC vuoâng caân.

<u>Nhaän xeùt</u>:

Neáu ñeà baøi cho nhaän daïng tam giaùc ABC thoaû maõn ñieàu kieän (1) thì raát nhieàu baïn chæ giaûi ñeán B = C vôùi keát luaän ∆ABC caân laø chöa ñuû, maø caàn phaûi xeùt ñeán caùc tính chaát khaùc cuûa tam giaùc ñeå keát luaän chính xaùc.

Baøi toaùn treân ta coù theå bieán ñoåi nhö sau:

$\sin^4A + 2\sin^4B + \sin^4C = 2\sin^2A(\sin^2B + \sin^2C)$

$\Leftrightarrow 2\sin^4A + 4\sin^4B + 4\sin^4C = 4\sin^2A.\sin^2B + 4\sin^2A.\sin^2C$

$\Leftrightarrow (\sin^4A - 4\sin^2A.\sin^2B + 4\sin^4B) + (\sin^4A - 4\sin^2A.\sin^2C + 4\sin^4C) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin^2A - 2\sin^2B)^2 + (\sin^2A - 2\sin^2C)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2A = 2\sin^2B\\ \sin^2A = 2\sin^2C\end{cases} \Rightarrow \sin^2A = \sin^2B + \sin^2C$ vaø $\sin^2B = \sin^2C$

$\Rightarrow \begin{cases}a^2 = b^2 + c^2\\ B = C\end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ vuoâng caân.

Sau ñaây chuùng toâi ñöa ra 1 soá baøi taäp ñeå caùc baïn reøn luyeän kyõ naêng giaûi toaùn.

Chöùng minh raèng ∆ABC laø tam giaùc vuoâng neáu thoaû moät trong caùc ñieàu kieän sau

Baøi 1: cos2A + cos2B + cos2C = -1.

Baøi 2: a) sinA + sinB + sinC = 1 + cosA + cosB + cosC

Höôùng daãn: Chöùng minh tam giaùc naøy vuoâng taïi 1 trong 3 goùc.

b) sinA + sinB + sinC = 1- cosA + cosB + cosC.

Höôùng daãn: Chöùng minh vuoâng taïi C.

Baøi 3: $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos c} = \frac{a}{\sin B - \sin C}$

Höôùng daãn: A ùp duïng ñònh lyù haøm sin

Baøi 4: r(sinA + sinB)= $\sqrt{2}.c.\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

Höôùng daãn: Ta söû duïng heä thöùc cô baûn

r = 4R$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ vaø=2RsinC

Baøi 5: $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$

Aùp duïng coâng thöùc löôïng cô baûn r =ptg$\frac{A}{2}$, $r_a = (p-a)tg\frac{A}{2}$

p = 4Rcos$\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ vaø ñònh haøm sin.

Hay coù theå aùp duïng coâng thöùc $S = r_c(p-c)$, S=rp.

Baøi 6: 3cosB + 4sinB + 6sinC +8cosC =15 (6)

HD: Aùp duïng BÑT Schwartz cho caùc caëp (3,4), (cosB,sinB) vaø (6,8), (sinC,cosC).

Caùch khaùc: Baøi 6 coù theå vaän duïng pheùp bieán ñoåi töông ñöông vaø tính chaát bò chaën cuûa haøm sinx, cosx.

(6) $\Leftrightarrow 5(\frac{4}{5}\sin B+\frac{3}{5}\cos B)+10(\frac{3}{5}\sin C+\frac{4}{5}\cos C)=15.$ (6′)

Ñaët $\frac{4}{5}=\cos\varphi, \frac{3}{5}=\sin\varphi, 0\le\varphi\le 90^0.$ Thì töø (6′) ta suy ra

5sin(B+φ) + 10cos(C-φ) = 15

$\Rightarrow \begin{cases}\sin(B+\varphi)=1\\ \cos(C+\varphi)=1\end{cases} \Rightarrow B+C=90^0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuoâng.

Baøi 7: sin3A + sin2B = 4sinAsinB. (7)

HD: Duøng coâng thöùc bieán ñoåi toång thaønh tích cho veá traùi vaø tích thaønh toång, ruùt goïn ta ñöôïc cos(A-B).(sinC-1) = cosC

$\Rightarrow$ $\cos^2$(A-B).($\sin^2$C-1) = 1 – $\sin^2$C.

$\Rightarrow$ (1-sinC)[$\cos^2$(A-B)(1-sinC) - 1- sinC] = 0.

Ñaùnh giaù $\cos^2$(A-B)(1-sinC)- 1 – sinC < 0 Töø ñoù suy ra sinC = 1

$\Rightarrow$ C = 90^0

Baøi 8: Cho ΔABC coù ñöôøng cao AH, p, p_1, p_2 laø nöûa chu vi cuûa ΔABC, ΔABH, ΔACH, bieát $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ (1). Chöùng minh ΔABC vuoâng.

Gôïi yù: Nhaän xeùt vò trí cuûa H vaø vaän duïng tæ soá löôïng giaùc cuûa ΔABC ñeå ñöa baøi toaùn thaønh bieåu thöùc theo goùc.

Baøi 9: ΔABC coù ñaëc ñieåm gì neáu

cosA (1 – sinB) = cosB.

Gôïi yù: 1 – sinB vaø cosB cuøng chöùa nhaân töû chung laø $\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}$.

Baøi 10: ΔABC coù ñaëc ñieåm gì neáu

2sin2A – sin2B = sinC + $\frac{1}{\sin C}$.

HD: Duøng phöông phaùp ñaùnh giaù ñeå giaûi.

*** Moät soá phöông phaùp thieát laäp baøi toaùn.**

1. **Phöông phaùp bieán ñoåi töông ñöông töø tính chaát cuûa tam giaùc hoaëc töø nhöõng daáu hieäu ñaõ coù.**

Giaû söû ΔABC vuoâng taïi A $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow$ 2bc = $\frac{1}{2}$ $(b+c)^2 – a^2$ $\Leftrightarrow$ bc = $\frac{1}{2}[(b+c)^2-a^2]=\sqrt{2}\sqrt{p(p-a)}$

$Sbc=S\sqrt{2}\sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}=2p\sqrt{2}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ Coù

$\Leftrightarrow h_a=2p\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

theå môû roäng moät soá daáu hieäu ñaõ coù nhö:

Töø baøi toaùn ΔABC thoûa $\sin^2 A+\sin^2 B=\sqrt[3]{\sin C}$ thì ΔABC vuoâng.

Ta suy ra ñöôïc $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[m]{\sin C}$, m ≥ 1 thì ΔABC vuoâng.

2**. Duøng baát ñaúng thöùc döïa vaøo tính chaát bò chaën cuûa haøm sinx, cosx hoaëc nhöõng baát ñaúng thöùc khaùc**

<u>**Ví duï1**:</u> Ta coù

$$m\cos B + n\sin B = \sqrt{m^2+n^2}\left(\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\cos B + \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\sin B\right) \le \sqrt{m^2+n^2}$$

thoaû maõn cosB + nsinB + kmsinC + kncosC = (k+1)$\sqrt{m^2+n}$ thì ΔABC vuoâng taïi A.

<u>**Ví duï 2**: </u> Töø $\sin^2\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2} > \sqrt{2\sin\frac{A+B}{2}}$. Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos^2\frac{C}{2} + \frac{1}{2} \ge \sqrt{2\cos\frac{C}{2}}$$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi $\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Coäng veá theo veá 2 baát ñaúng thöùc treân ta seõ coù

$$\sin^2\frac{A+C}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 1 = \sqrt{2\sin\frac{A+B}{2}} + \sqrt{2\cos\frac{C}{2}}$$

thì ΔABC vuoâng.

CHÖÔNG 3:NHAÄN DAÏNG TAM GIAÙC ÑEÀU

Tam giaùc ñeàu laø moät tam giaùc ñeïp, ñoù laø tam giaùc coù 3 caïnh baèng nhau vaø ba goùc baèng nhau. Baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc ñeàu laø lôùp baøi toaùn quan troïng nhaát vaø cuõng laø lôùp baøi toaùn ña daïng nhaát trong chuyeân muïc "nhaän daïng tam giaùc".

Trong muïc naøy, moät soá phöông phaùp hay söû duïng ñeå nhaän daïng tam giaùc ñeàu nhö

Loaïi I:Söû duïng phöông phaùp bieán ñoåi töông ñöông

1/ Phöông phaùp söû duïng 9 baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc ñeàu.

2/ Phöông phaùp söû duïng meänh ñeà. $\begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0 \\ A_n \ge 0, i = \overline{1,n} \end{cases}$ ⇔ $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$

3/ Nhaän daïng tam giaùc ñeàu töø moät heä ñieàu kieän.

Loaïi II:Söû duïng baát ñaúng thöùc.

Sau ñaây chuùng toâi ñi vaøo töøng phöông phaùp cuï theå.

<u>LOAÏI I</u>:SÖÛ DUÏNG PHÖÔNG PHAÙP BIEÁN ÑOÅI TÖÔNG ÑÖÔNG

1<u>**/ Phöông phaùp söû duïng 9 baøi toaùn cô baûn nhaän daïng tam giaùc ñeàu.**</u>

* △ ABC thoaû maõn caùc heä thöùc sau thì △ ABC laø tam giaùc ñeàu.

a) cos A + cosB + cosC = $\frac{3}{2}$

b) sin$\frac{A}{2}$ sin$\frac{B}{2}$ sin$\frac{C}{2}$ = $\frac{1}{8}$

c) cosA cosB cosC = $1/8$

d) sin²A + sin²B + sin²C = $\frac{9}{4}$

e) tg$\frac{A}{2}$ + tg$\frac{B}{2}$ + tg$\frac{C}{2}$ = $\sqrt{3}$

f) cotgA + cotgB + cotgC = $\sqrt{3}$

g) sinA + sinB + sinC = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

h) cos$\frac{A}{2}$ + cos$\frac{B}{2}$ + cos$\frac{C}{2}$ = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

i) sin$\frac{A}{2}$ + sin$\frac{B}{2}$ + sin$\frac{C}{2}$ = $\frac{3}{2}$

<u>**Chöùng minh:**</u>

Ôû ñaây chuùng toâi chæ chöùng minh vaøi heä thöùc, caùc hình thöùc coøn laïi ñoäc giaû töï chöùng minh

a***) cos A + cosB + cosC =*** $\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos(A+B) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2(A+B) + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \left(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \left(\cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{4}\cos^2\frac{(A-B)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ \cos\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = \pi/3 \end{cases}$$

Vaäy △ ABC ñeàu.

b) ***sin***$\frac{A}{2}$ ***sin***$\frac{B}{2}$ ***sin***$\frac{C}{2}$ **=** $\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

$\Leftrightarrow\ 4\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2}=1$

$\Leftrightarrow\ 4\cos^2\frac{A+B}{2}-4\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+1=0$

$\Leftrightarrow\ \left(2\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2}=0$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\sin\frac{A+B}{2}=0\\ \cos\frac{A+B}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}A=B\\ \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}A=B\\ C=\pi/3\end{cases}$

Vaäy △ ABC ñeàu.

e) ***tg*** $\frac{A}{2}$ **+ *tg*** $\frac{B}{2}$ **+ *tg*** $\frac{C}{2}$ **=** $\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\ \left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)^2=3$

$\Leftrightarrow\ tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}+2\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right)=3$ (*)

Maø $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1$

Töø (*) suy ra $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}-tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}-tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=0$

$\Leftrightarrow\ \left(tg\frac{A}{2}-tg\frac{B}{2}\right)^2+\left(tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}\right)^2+\left(tg\frac{C}{2}-tg\frac{A}{2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases}tg\,A/2-tg\,B/2=0\\ tg\,B/2-tg\,C/2=0\\ tg\,C/2-tg\,A/2=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ A = B = C

Vaäy △ ABC ñeàu.

f) ***cotgA + cotgB + cotgC =*** $\sqrt{3}$ ***.***

Baèng caùch aùp duïng heä thöùc cô baûn.

cotgA cotgB + cotgB cotgC + cotgCcotgA = 1 roài bieán ñoåi gioáng phaàn (e)

Tacoù: (cotgA – cotgB $)^2$ + (cotgB – cotgC$)^2$ + (cotgC – cotgA$)^2$ = 0

=> $\begin{cases}cotgA-cotgB=0\\ cotgB-cotgC=0\\ cotgC-cotgA=0\end{cases}$ => A = B = C

Vaäy △ABC ñeàu.

<u>**Ví duï1**</u>: ***Giaû söÛ △ ABC thoaû maõn ñieàu kieän: 2(acosA + bcosB + ccosC) = a + b + c. Chöùng minh △ ABC ñeàu.***

Aùp duïng ñònh lyù Sin ta coù a=2RsinA , b = 2RsinB , c = 2RsinC (vôùi R laø baùn kính ñöôøng troøn ngoaïi tieáp △ ABC), heä thöùc ñaõ cho töông ñöông vôùi:

2sinA cosA + 2sinB cosB + 2sinCcosC = sinA + sinB + sinC

⇔ sin2A + sin2B + sin2C = sinA + sinB + sinC (*)

Tacoù sin2A + sin2B + sin2C = 2sin(A + B)cos(A – B) – 2sin(A + B)cos(A + B) = 2sin (A + B)(cos(A + B) – cos (A + B)) = 4sinAsinBsinC.

Tacoù sinA + sinB + sinC = $2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

$(*)\Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}$

(daïng baøi toaùn cô baûn.)

Vaäy △ ABC ñeàu.

<u>Ví duï 2</u> : ***CMR neáu A,B,C laø ba goùc cuûa moät tam giaùc thoaû maõn***

$\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}=\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)$ ***thì tam giaùc aáy ñeàu***

Heä thöùc ñaõ cho töông öùng vôùi

$4\cos^3\frac{A}{3}+4\cos^3\frac{B}{3}+4\cos^3\frac{C}{3}=\frac{3}{2}+3\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\left(4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}\right)+\left(4\cos^3\frac{B}{3}-3\cos\frac{B}{3}\right)+\left(4\cos^3\frac{C}{3}-3\cos\frac{C}{3}\right)=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C=\frac{3}{2}.$

(daïng baøi toaùn cô baûn)

Vaäy △ ABC ñeàu.

<u>Ví duï3</u> : ***Cho △ ABC ñeàu thoaû maõn haèng thöùc:***

$a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}\ \ S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Chöùng minh △ ABC laø tam giaùc ñeàu.

Bieán ñoåi giaû thieát ñaõ cho veà daïng sau

2ab + 2ac + 2bc = $a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}$ S (1)

Aùp duïng ñònh lí haøm soá Coâsin suy roäng, ta coù $a^2 + b^2 + c^2$ = (cotgA + cotgB + cotgC)4S

Keát hôïp coâng thöùc ab = $\frac{2S}{\sin C}$, bc = $\frac{2S}{\sin A}$, ca = $\frac{2S}{\sin B}$

Khi ñoù (1)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A}=\cot gA+\cot gB+\cot gC+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A}-\cot gA\right)+\left(\frac{1}{\sin B}-\cot gB\right)+\left(\frac{1}{\sin C}-\cot gC\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}=\sqrt{3}\Leftrightarrow tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}=\sqrt{3}. \quad (*)$$

(daïng baøi toaùn cô baûn)

Vaäy △ ABC ñeàu.

***Chuù yù**: neáu △ ABC thoaû maõn haèng thöùc $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}$ S thì △ ABC cuõng laø tam giaùc ñeàu.*

Thaät vaäy (*) ⇔ cotgA + cotgB + cotgC = $\sqrt{3}$ (daïng baøi toaùn cô baûn)

Vaäy △ ABC ñeàu.

***Nhaän xeùt**: Qua moät soá ví duï treân, ta coù theå taïo ra moät soá baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc ñeàu baèng phöông phaùp naøy nhö sau: Ta coù theå xuaát phaùt töø caùc baøi toaùn cô baûn, keát hôïp vôùi caùc heä thöùc löôïng trong tam giaùc, ñònh lí sin, cosin, bieán ñoåi vaø ñöa ra moät baøi toaùn môùi.*

2) Phöông phaùp söû duïng meänh ñeà $\begin{cases}A_1+A_2+...+A_n=0\\ A_i\geq 0, i=\overline{1,n}\end{cases}\Leftrightarrow A_1=A_2=A_n=0$

Ví duï1: ***Chöùng minh △ABC coù $h_a+h_b+h_c$ = 9r thì △ ABC ñeàu***

Ta coù $h_a + h_b + h_c = 9r \Leftrightarrow \frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}=9r\Leftrightarrow 2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9r.$

$$\Leftrightarrow 2pr\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9r <=> 2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)=0\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}=0$$

$$\Leftrightarrow a=b=c.$$

Vaäy △ ABC ñeàu.

Ví duï 2: ***CMR neáu trong △ ABC ta coù $\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a\sin B+b\sin C+c\sin A}=\frac{2p}{9r}$***

(p: nöûa chu vi, R laø baùn kính ñöôøng troøn ngoaïi tieáp △ ABC) thì △ ABC laø tam giaùc ñeàu.

Ta coù: (*) ⇔ $\frac{2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C}{a.\frac{b}{2R}+b.\frac{c}{2R}+c.\frac{a}{2R}}=\frac{2p}{9R}$

$$\Leftrightarrow \frac{2R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}{ab+bc+ca}=\frac{a+b+c}{9R}(**).$$

Ta coù sin2A + sin2B + sin 2C = 4 sinAsinBsinC = $4.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}=\frac{abc}{2R^3}$

(**) ⇔ $\frac{abc}{(ab+bc+ca)R}=\frac{a+b+c}{9R}$ ⇔ (ab + bc+ ca) (a + b + c)=9abc

⇔ $a^2b + bc^2 + ab^2 + ac^2 + b^2c + a^2c = 6abc$

⇔ $b(a^2+c^2- 2ac) + a(b^2+ c^2 - 2bc) + c(a^2 + b^2 – 2ab)=0$

⇔ $b(a - c)^2 + a(b - c)^2 + c(a - b)^2$ ⇔ $\begin{cases} a-c=0 \\ b-c=0 \\ a-b=0 \end{cases}$ ⇔ a=b=c .

Vaäy ∆ ABC ñeàu.

<u>Ví duï 3:</u> *CMR neáu trong ∆ ABC ta coù $b+c=\frac{a}{2}+h_a\sqrt{3}$ thì ∆ ABC ñeàu*

Ta coù $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2abc}{4aR}=\frac{bc}{2R}$.

Suy ra heä thöùc ñaõ cho töông öùng $b+c=\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}bc}{2R}$ (*)

Theo ñònh lyù haøm sin, ta coù

a= 2RsinA, b =2RsinB, c= 2RsinC

(*) ⇔ 2RsinB + 2RsinC = $\frac{2R\sin A}{2}+\frac{4\sqrt{3}R^2\sin B\sin C}{2R}$

⇔ 2RsinB + 2RsinC = sinA + $2\sqrt{3}\sin B\sin C$

⇔ 2RsinB + 2RsinC = sin(B+C) + $2\sqrt{3}\sin B\sin C$

⇔ 2RsinB + 2RsinC = sinBcosC+ sinCcosB + $2\sqrt{3}SinBSinC$

⇔ (2RsinB - sinB cosC- $\sqrt{3}\sin B\sin C$) +(2sinC- sinCcosB - $\sqrt{3}\sin B\sin C)$ =0

⇔ 2sinB $\left[1-(\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C)\right]$ + 2 sinC$\left[1-(\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B)\right]$ =0

⇔ 2sinB $\left[1-\cos(\frac{\pi}{3}-C)\right]+2\sin C\left[1-\cos(\frac{\pi}{3}-B)\right]$ =0

⇔ $\begin{cases} 1-\cos(\frac{\pi}{3}-C)=0 \\ 1-\cos(\frac{\pi}{3}-B)=0 \end{cases}$ ⇔ $\left[\begin{array}{l} C=\frac{\pi}{3} \\ B=\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$ Vaäy ∆ ABC ñeàu

<u>Ví duï 4</u>: *Cho ∆ ABC thoaû*

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}$ ***(1) CMR ∆ ABC ñeàu***

Ñaët $\begin{cases} 2x=b+c>0 \\ 2y=c+a>0 \\ 2z=a+b>0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} a=y+z-x \\ b=z+x-y \\ c=x+y-z \end{cases}$

Khi ñoù (1) ⇔ $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=\frac{3}{2}$

⇔ $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2)+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2)+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2)=0$

⇔ $\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-x)^2}{zx}=0$

⇔ z = y = x ⇔ 2x = 2y = 2z

⇔ a = b =c

Vaäy ∆ ABC ñeàu.

<u>LOAÏI II</u>: SÖÛ DUÏNG BAÁT ÑAÚNG THÖÙC

- Töø ñieàu kieän cuûa baøi toaùn (thöôøng laø caùc heä thöùc, caùc baát ñaúng thöùc)söû duïng caùc pheùp bieán ñoåi löôïng giaùc ñeå daãn ñeán moät baát ñaúng thöùc ñôn giaûn, coù theå ñaùnh giaù ñöôïc ñieàu kieän daáu baèng xaûy ra.

- Thieát laäp moät heä phöông trình xaùc ñònh moái quan heä giöõa caùc goùc, caùc caïnh cuûa tam giaùc, qua ñoù nhaän daïng ñöôïc tam giaùc.

<u>Ví duï 1</u>: *Cho Δ ABC thoûa ñieàu kieän cosAcosBcosC =* $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ***(*)***

Chöùng minh ΔABC ñeàu.

Töø giaû thieát suy ra ΔABC nhoïn (cos A > 0, cos B > 0, cos C > 0)

Ta coù: cosA cosB = $\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]\le\frac{1}{2}\left[1+\cos(A+B)\right]$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos C)=\sin^2\frac{C}{2}$$

Vaäy 0 < cosA cosB $\le\sin^2\frac{C}{2}$

Töông töï ta cuõng coù $0\le\cos B\cos C\le\sin^2\frac{A}{2};0\le\cos C\cos A\le\sin^2\frac{B}{2}$

Suy ra $\cos A\cos B\cos C\le\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Hay $\begin{cases}\text{cosA CosB} = \sin^2\frac{C}{2}\\ \text{cosB cosC} = \sin^2\frac{A}{2}\\ \text{cosC cosA} = \sin^2\frac{B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(A-B)=1\\ \cos(B-C)=1\\ \cos(C-A)=1\end{cases} \Leftrightarrow A = B = C$

Vaäy ΔABC ñeàu

<u>Ví duï 2</u>*: Cho ΔABC thoûa ñk* $\begin{cases}C\le B\le A\le 90^O\\ \cos A+\cos B=\cos(A-B)\end{cases}$

Xaùc ñònh daïng cuûa ΔABC ?

Töø ñieàu kieän $C\le B\le A\le 90^0$

$\Rightarrow\ 0<C\le B\le 90^0\Rightarrow\ \sin B\ge\sin C>0,$ cosA $\ge 0,\cos B>0$

Maët khaùc sin2A + Sin2B =2sin(A+B)cos(A-B)

$$\Rightarrow\ \cos(A-B)=\frac{\sin 2A+\sin 2B}{2\sin(A+B)}=\frac{2\sin A\cos A+2\sin B\cos B}{2\sin C}$$

$$=\frac{\sin A}{\sin C}\cos A+\frac{\sin B}{\sin C}\cos B\ge\cos A+\cos B.$$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi $\begin{cases}\cos A=0\\ \sin B=\sin C\end{cases}$ hoaëc SinA = SinB = SinC

Vaäy ΔABC vuoâng caân taïi A hoaëc ñeàu.

❖ Hai ví duï treân söû duïng caùc bñt löôïng giaùc ñôn giaûn cuûa tam giaùc ñeå nhaän daïng tam giaùc ñeàu. Ngoaøi caùc bñt treân ta coøn coù theå söû duïng caùc bñt cô baûn trong ñaïi soá nhö bñt Cosi, bñt Bunhiacopxki, Jesen,……..ñeå nhaän daïng tam giaùc.

Nhaän daïng tam giaùc ñeàu baèng caùch söû duïng BÑT Cosi

<u>Ví duï 3</u>: *CMR ΔABC ñeàu neáu* $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Xeùt ΔABC tuø

Giaû söû A > $\frac{\pi}{2}>B\geq C$ thì C $\leq\frac{\pi}{4}$

Vaäy tgC ≤ 1 vaø 0 $<\sin\frac{\pi}{2}<\sin C<\cos C$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos C}<\frac{1}{\sin\frac{C}{2}};\quad \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}=\left(2\cos\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos B}\right)<0$$

Vaäy $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}<\frac{1}{\cos C}<\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}<\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}<\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}<\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Xeùt tröôøng hôïp ΔABC nhoïn. AÙp duïng bñt Cosi ta coù

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}\geq\frac{2}{\sqrt{\cos A\cos B}}\geq\frac{4}{\cos A+\cos B}=\frac{4}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{4}{2\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{2}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi $A=B$

Töông töï $\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{2}{\sin\frac{A}{2}}$ Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow B=C$

$\frac{1}{\cos C}+\frac{1}{\cos A}\geq\frac{2}{\sin\frac{B}{2}}$ Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi $A=C$

Suy ra $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}+\frac{1}{\cos A}\geq\frac{2}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{2}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{2}{\sin\frac{A}{2}}.$

hay $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi ΔABC ñeàu.

<u>Xeùt ví duï 1: Phaàn I,2</u>. Ta coù theå chöùng minh baèng caùch söû duïng baát ñaúng thöùc Cosi

Ta coù $\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}=9r$

$$\Leftrightarrow 2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9r\Leftrightarrow 2pr\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9r$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$$

AÙp duïng baát ñaúng thöùc Cosi ta ñöôïc

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi ΔABC ñeàu.

<u>Ví duï 2</u>: *Cho ΔABC, thoaû* $\left(3-\frac{b+c}{a}\right)\left(3-\frac{a+c}{b}\right)\left(3-\frac{a+b}{c}\right)\leq 1$ ***(1)***

CMR ΔABC ñeàu khi daáu "=" xaûy ra.

Ta coù (1) $\Leftrightarrow (3a-b-c)(3b-a-c)(3c-a-b)\leq abc$.

Ta chæ caàn xeùt khi VT(1) ≥ 0. Khi ñoù deã chöùng minh ñöôïc caû 3 thöøa soá cuûa noù ñeàu

lôùn hôn hoaëc baèng khoâng.

Ñaët x = 3a-b-c ≥ 0

y = 3b-a-c ≥ 0

z = 3c-a-b ≥ 0

Khi ñoù a= $\frac{1}{4}(2x+y+z)$

b= $\frac{1}{4}(x+2y+z)$

c= $\frac{1}{4}(x+y+2z)$

(1) $\Leftrightarrow 64xyz\geq(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$ (2)

Theo baát ñaúng thöùc Cosi ta coù

2x+y+z = x+x+y+z $\geq 4\sqrt[4]{x^2yz}$ (3)

x+2y+z $\geq 4\sqrt[4]{xy^2z}$ (4)

x+y+2z $\geq 4\sqrt[4]{xyz^2}$ (5)

Nhaân töøng veá (3),(4) vaø (5) $\Rightarrow$ (2) ñuùng $\Rightarrow$ ñpcm

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi ñoàng thôøi coù daáu "=" trong (3),(4) vaø (5)

töùc $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$ Vaäy ΔABC ñeàu.

<u>Ví duï 3</u>: *Cho ΔABC thoûa* $\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a\sin A+b\sin B+c\sin C}=\frac{a+b+c}{9R}$. ***(1)***

CMR ΔABC ñeàu.

Theo ñònh lí haøm soá Sin ta coù

acosA + bcosB + ccosC = R (sin2A+sin2B+sin2C)

= 4Rsin2Asin2Bsin2C. (2)

Theo baát ñaúng thöùc Cosi, ta coù

acosA + bcosB + ccosC $\geq 6R\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}$ (3)

asinA + bsinB + csinC $\geq 3\sqrt[3]{abc\sin A\sin B\sin C}$

Do vaäy töø (2) vaø (3) suy ra

$$\frac{\text{acosA}+\text{bcosB}+\text{ccosC}}{\text{asinA}+\text{bsinB}+\text{csinC}}\leq\frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \quad (4)$$

Daáu "=" trong (4) xaûy ra khi vaø chæ khi daáu "=" trong (3) xaûy ra.

Khi ñoù aSinA = bSinB = cSinC

$\Leftrightarrow$ $Sin^2A = Sin^2B = Sin^2C$ $\Leftrightarrow$ SinA = SinB = SinC

$\Leftrightarrow$ A = B = C.

Laïi theo baát ñaúng thöùc Coâsi ta coù

$$\frac{a+b+c}{9R} = \frac{2(\sin A+\sin B+\sin C)}{9} \geq \frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \qquad (5)$$

Daáu "=" trong (5) xaûy ra khi vaø chæ khi A = B = C.

Töø (5) vaø (6) suy ra $\frac{\text{acosA}+\text{bcosB}+\text{ccosC}}{\text{asinA}+\text{bsinB}+\text{csinC}} = \frac{a+b+c}{9R}$

Söû duïng baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki nhaän daïng tam giaùc ñeàu

<u>Ví duï 4</u>: *Cho ΔABC thoaû $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} = \frac{1}{9}$*

CMR ΔABC ñeàu.

Ta coù $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} \geq tg^3\frac{A}{2}tg^3\frac{B}{2} + tg^3\frac{B}{2}tg^3\frac{C}{2} + tg^3\frac{C}{2}tg^3\frac{A}{2}$

Daáu "=" trong (1) xaûy ra khi vaø chæ khi $tg^3\frac{A}{2} = tg^3\frac{B}{2} = tg^3\frac{C}{2} \Leftrightarrow$ A = B = C.

Ñaët x = $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$, y = $tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$, z = $tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}$ thì x+y+z=1.

AÙp duïng baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki ta coù $(x+y+z)(x^3+y^3+z^3) \geq (x^2+y^2+z^2)$

Daáu "=" trong (2) xaûy ra khi vaø chæ khi x = y = z $\Leftrightarrow$ A = B + C.

<u>Ví duï 5</u>: *Cho ΔABC thoaû $2(l_a + l_b + l_c) = \sqrt{3}(a + b + c)$*

CMR ΔABC ñeàu.

AÙp duïng coâng thöùc $l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$

AÙp duïng baát ñaúng thöùc Cosi suy ra $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ (1)

Daáu "=" trong (1) xaûy ra $\Leftrightarrow$ b=c

Töông töï ta coù $l_b \leq \sqrt{p(p-b)}$ (2)

$l_c \leq \sqrt{p(p-c)}$ (3)

Daáu "=" trong (2) xaûy ra $\Leftrightarrow$ a=c vaø trong (3) $\Leftrightarrow$ a=b

Töø (1),(2) vaø (3) suy ra $l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})$ (4)

Daáu "=" trong (4) xaûy ra $\Leftrightarrow$ ñoàng thôøi coù daáu "=" trong (1),(2) vaø (3)

Vaäy ΔABC ñeàu.

Aùp duïng baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki vôùi 2 daõy $\sqrt{p-a},\sqrt{p-b},\sqrt{p-c}$ vaø 1, 1, 1,ta coù

$$3(p-a+p-b+p-c) \geq \left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3p} \geq \sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}.(5)$$

Daáu "=" trong (5) xaûy ra khi vaø chæ khi p – a = p – b = p – c

Vaäy ΔABC ñeàu

Töø (4) vaø (5) ta coù $2(l_a+l_b+l_c) \leq \sqrt{3}(a+b+c)$

Daáu “=” xaûy ra khi vaø chæ khi ñoàng thôøi coù daáu “=” trong (4) vaø (5) töùc ΔABC ñeàu.

** Ví duï 1, phaàn I, 2 coù theå söû duïng BÑT Bunhiacopxki*

Ta coù $h_a + h_b + h_c = 9r$

$\Rightarrow \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 9r$

$\Rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 9$.

Duøng baát ñaúng thöùc Bunnhiacopxki, ta coù

9 = $(\sqrt{a}.\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}.\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}.\frac{1}{\sqrt{c}})^2 \le (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$

Daáu “=” xaûy ra khi vaø chæ khi $(\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{b}}}{\sqrt{b}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{c}}}{\sqrt{c}})^2 \le (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$

Daáu “=” xaûy ra khi vaø chæ khi $\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{b}}}{\sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{c}}}{\sqrt{c}}$ ⇔ a = b = c.

<u>Ví duï 6</u>: *Cho Δ ABC thoaû $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} = \frac{1}{9}$. CMR Δ ABC ñeàu.*

Ta coù $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} \ge tg^3(\frac{A}{2})tg^3(\frac{B}{2}) + tg^3(\frac{B}{2})tg^3(\frac{C}{2}) + tg^3(\frac{C}{2})tg^3(\frac{A}{2})$ (1)

Daáu “=” trong (1) xaûy ra khi vaø chæ khi $tg^3\frac{A}{2} = tg^3\frac{B}{2} = tg^3\frac{C}{2}$ ⇔ A=B=C.

Ñaët $x = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$, $y = tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$, $z = tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}$ thì x+y+z=1.

Aùp duïng baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki vôùi hai daõy $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ vaø $\sqrt{x^3}, \sqrt{y^3}, \sqrt{z^3}$

Ta coù $(x+y+z)(x^3+y^3+z^3) \ge (x^2+y^2+z^2)$ (2)

Daáu “=” trong (2) xaûy ra khi vaø chæ khi x = y = z ⇔ A=B=C

Töø (1) vaø (2) suy ra $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} \ge \frac{1}{9}$

Daáu “=” xaûy ra khi vaø chæ khi ñoàng thôøi coù daáu baèng trong (1) vaø (2).

Vaäy Δ ABC ñeàu

<u>Nhaän daïng tam giaùc ñeàu baèng caùch söû duïng bñt Jensen</u>

<u>Ví duï 1</u>: *CMR Δ ABC thoaû $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = 12$ thì ñeàu*

Xeùt haøm soá f(x)= $\frac{1}{\sin^2 x}$, vôùi 0<x<π

Ta coù f′(x) = - $\frac{2\cos x}{\sin^3 x} \Rightarrow f''(x) = \frac{2\sin^2 x + 6\cos^2 x}{\sin^4 x} > 0$

Vaäy f(x) laø haøm loài treân (0,π).

Khi ñoù $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)\geq\frac{1}{\sin^2\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 12$$

Daáu baèng xaûy ra khi vaø chæ khi Δ ABC ñeàu .

❖ Hoaøn toaøn töông töï ta coù theå cm ñöôïc caùc baát ñaúng thöùc

$1)\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}=6$

$2)\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=2\sqrt{3}$

$3)\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}=2\sqrt{3}$

ñöôïc thoaû maõn thì Δ ABC ñeàu

<u>Ví duï2</u>: *Cho Δ ABC nhoïn thoaû maõn*

$(tgA+tgB+tgC)(\cot gA+\cot gB+\cot gC)\geq$

$\geq(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2})$

Chöùng minh Δ ABC ñeàu.

Xeùt haøm soá f(x) = tgx vaø g(x) = cotgx vôùi $0<x<\frac{\pi}{2}$

Ta coù f''(x) = $\frac{\sin 2x}{\cos^4 x}$ vaø $g''(x)=\frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$

⇒ f''(x)>0 vaø g''(x)>0 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f(x)$ vaø g(x) laø haøm loài treân $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Theo tính chaát baát ñaúng thöùc Jensen, ta coù $\frac{1}{2}(f(A)+f(B))\geq f\left(\frac{A+B}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}(tgA+tgB)\geq tg\frac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow \quad tgA+tgB\geq 2\cot g\frac{C}{2}$ (1)

Töông töï, ta coù: $tgB+tgC\geq 2\cot g\frac{A}{2}$ (2)

$tgC+tgA\geq 2\cot g\frac{B}{2}$ (3)

Coäng tröø töøng veá (1), (2) vaø (3) suy ra tgA + tgB + tgC $\geq\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}$ (4)

Daáu baèng xaûy ra trong (4) khi vaø chæ khi ñaúng thöùc coù daáu "=" trong (1), (2) vaø (3) suy ra A = B = C.

Töông töï g(x) = cotgx laø haøm loài khi x $\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

⇔ cotgA + cotgB + cotgC $\ge tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}$ (5)

Daáu "=" trong (5) xaûy ra khi vaø chæ khi A = B = C

Nhaân töøng veá cuûa (4), (5). Suy ra ñpcm. Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi ñaúng thöùc coù daáu baèng trong (4) (5) töùc Δ ABC ñeàu.

<u>Nhaän xeùt:</u>

Töø caùc baøi toaùn nhaän daïng treân ta coù theå ñöa ra nhöõng baøi toaùn nhaän daïng cho tam giaùc ñeàu baèng caùch töø nhöõng baát ñaúng thöùc ñaïi soá coù ñieàu kieän (maø ta coù theå ñaùnh giaù ñöôïc ñieàu kieän daáu baèng xaûy ra) keát hôïp vôùi nhöõng yeáu toá löôïng giaùc, caùc yeáu toá goùc caïnh trong tam giaùc ñeå ñi ñeán moät ñaúng thöùc veà tam giaùc.

CHÖÔNG 4:NHAÄN DAÏNG TAM GIAÙC KHAÙC

Tieáp theo chuùng toâi xin trình baøy moät soá baøi toaùn lieân quan ñeán giaûi tam giaùc coù nhöõng tính chaát khaùc.

<u>Ví duï 1</u>: ***Xaùc ñònh caùc goùc cuûa Δ ABC neáu:***

$$\sin A+\sin B-\cos C=\frac{3}{2} \quad \textbf{(1)}$$

<u>Caùch 1</u>: (1) ⇔ $2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos C=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \cos C-2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{C}{2}-2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{2}=0$ (1')

Ñaët t = $\cos^2\frac{C}{2}$ t ∈ (0,1)

(1') $\Leftrightarrow 2t^2-2\cos\frac{A-B}{2}t+\frac{1}{2}=0$

Ñaët $f(t)$ = $2t^2-2t\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{2}$, t ∈ (0,1)

Ta coù: Δ' = $\cos^2\frac{A-B}{2}-1\le 0\Rightarrow f(t)\ge 0$, ∀ t ∈ (0,1).

$$f(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{-b}{2a} \\ f(\frac{-b}{2a})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \cos^2\frac{A-B}{2}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2} \\ \cos\frac{A-B}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C}{2}=60^o \\ \frac{A-B}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=120^o \\ A=B=30^o \end{cases}$$

<u>Caùch 2</u>: $\sin A+\sin B-\sin C=\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{C}{2} - 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2\frac{(A-B)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ 1 - \cos^2\frac{A-B}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \sin^2\frac{A-B}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A-B}{2} = 0 \\ \frac{C}{2} = 60^o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 120^o \\ A = B = 30^o \end{cases}$$

<u>Ví duï 2</u>: $\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0$ (*)

$$tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} - tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} - tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 0$$

$\Delta = 12(\cos^2(B-C) - 1) \leq 0$

(*) xaûy ra khi vaø chæ khi $\begin{cases} \cos^2(B-C) = 1 \\ \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C) \end{cases}$

Neáu cos(B-C) < 0

$\Rightarrow B > 90^0$ hoaëc C > 90^0

$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C) < 0$

$\Rightarrow A > 90^0$

Do ñoù $\cos(B-C) = 1$.

Suy ra B = C

Vaø $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^0 \quad \Rightarrow B = C = 75^0$

<u>Nhaän xeùt</u>: *Töø caùch giaûi hai ví duï naøy ta thaáy vieäc nhaän xeùt $|\cos\alpha| \leq 1$ laø cöïc kì quan troïng. Nhôø nhaän xeùt naøy maø ta giaûi ñöôïc baøi toaùn.*

<u>Ví duï 3</u>: ***Cho Δ ABC thoaû $b(a^2-b^2) = c(c^2-a^2)$. Nhaän daïng tam giaùc naøy***.

Ta coù $b(a^2 - b^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow ba^2 - b^3 = c^3 - ca^2$

$\Leftrightarrow (b+c)a^2 = b^3 + c^3 \Leftrightarrow a^2(b+c) = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = b^2 - bc + c^2 \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0$

Baøi naøy ta cuõng coù theå bieán ñoåi nhö sau:

$b(a^2 - b^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b(b^2 + c^2 - 2bc.\cos A - b^2) = c\left[c^2 - (b^2 + c^2 - 2bc.\cos A)\right]$

$\Leftrightarrow b(c^2 - 2bc\cos A) = c(bc.\cos A - b^2) \Leftrightarrow bc^2 + b^2c = (bc^2 + b^2c)(2\cos A)$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^0$.

<u>Nhaän xeùt</u>: *Qua nhöõng ví duï treân ta thaáy vieäc giaûi moät baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc caàn chuù yù caùc ñieåm sau:*

+ Caàn phaân bieät moät baøi toaùn nhaän daïng vaø moät baøi toaùn chöùng minh. (Töùc laø phaûi tìm taát caû caùc tính chaát cuûa tam giaùc)

+ Khi giaûi baøi toaùn nhaän daïng thöôøng hay duøng caùc pheùp bieán ñoåi töông ñöông veà daïng phöông trình tích hoaëc toång cuûa nhöõng soá haïng (khoâng aâm hoaëc khoâng döông) ñeå ñaùnh giaù.

<u>Moät soá baøi taäp ñeà nghò</u>:

<u>Baøi 1</u>: Tam giaùc ABC coù ñaëc ñieåm gì neáu:

sin6A + sin6B + sin6C = 0

HD: Duøng pheùp bieán ñoåi töông ñöông chuyeån veà phöông trình tích

Baøi 2: Nhaän danïg tam giaùc ABC neáu thoaû

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3} \qquad (2)$$

HD:

(2) $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C\right)=0$

Sau ñoù chuyeån veà daïng:

$$\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$\Rightarrow \Delta$ ABC coù ít nhaát moät goùc baèng 60^0

Trong tröôøng hôïp veá phaûi cuûa (2) thay baèng $\sqrt{2}$ thì keát quaû nhö theá naøo?

Baøi 3: Cho tam giaùc ABC coù caùc caïnh thoaû:

$a=x^2+x+1$, $b=2x+1$, $c=x^2+1$, $x\in R$. Haõy nhaän daïng tam giaùc ABC.

HD: Xeùt ñieàu kieän cuûa x ñeå toàn taïi tam giaùc

Baøi 4: Nhaän daïng tam giaùc ABC bieát: sin5A + sin5B + sin5C = 0

HD: Ta bieán ñoåi töông ñöông ñaúng thöùc treân veà daïng:

$$4\cos\frac{5C}{2}.\cos\frac{5A}{2}.\cos\frac{5B}{2}=0$$

Ta coù theå khaùi quaùt: Nhaän daïng tam giaùc ABC neáu thoaû

sin(mA) + sin(mB)+ sin(mC) = 0

sin(mA) + sin(mB) + sin(mC) = 0

$$\Leftrightarrow -4\cos\frac{mA}{2}.\cos\frac{mB}{2}.\cos\frac{mC}{2}=0$$

$$\cos\frac{mA}{2}=0\Leftrightarrow\frac{mA}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{m}+\frac{k}{m}2\pi;\frac{-m-1}{2}<k<\frac{m-1}{2};k\in Z.$$

Baøi 5: Cho tam giaùc ABC thoaû maõn ñieàu kieän:

$$\begin{cases}\sin 5A+\sin 5C=0 & (1)\\ \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1 & (2)\end{cases}$$

Chöùng minh Δ ABC coù ít nhaát 1 goùc baèng 36^0.

HD: (1) $\Rightarrow \cos\frac{5A}{2}.\cos\frac{5B}{2}.\cos\frac{5C}{2}=0$

Giaû söû $\cos\frac{5A}{2}=0$ $\Rightarrow$ A=36 hoaëc A= 108^0

Töø (2) $\Rightarrow 1-2\cos A.\cos B.\cos C>1\Rightarrow \cos A.\cos B.\cos C<0$

[cosA; cosB; cosC <0 (Voâ lyù)
[cosA, cosB, cosC coù ít nhaát moät phaàn töû < 0 (khi ñoù seõ toàn taïi moät phaàn töû >0)

Ñeå thoaû maõn (1) vaø (2) thì A=36^0

KEÁT LUAÄN

Trong khuoân khoå ñeà taøi naøy chuùng ta ñaõ laøm ñöôïc:

1. Toång hôïp moät soá baøi toaùn lieân quan ñeán nhaän daïng tam giaùc.

2. Sau moãi laàn baøi toaùn, chuùng toâi ruùt ra nhöõng nhaän xeùt, nhöõng löu yù cuûa baøi toaùn vaø môû roäng baøi toaùn.

3. Sau moãi chöông chuùng toâi neâu ra nhöõng phöông phaùp ñeå thieát laäp baøi toaùn nhaän daïng tam giaùc ñeå caùc baïn tham khaûo.

Chuùng toâi hy voïng tieåu luaän naøy seõ laø taøi lieäu tham khaûo cho nhöõng ngöôøi daïy vaø hoïc moân löôïng giaùc noùi chung vaø nhaän daïng tam giaùc noùi rieâng. Raát mong nhaän ñöôïc söï goùp yù cuûa baïn ñoïc.

TAØI LIEÄU THAM KHAÛO

1.Ñaäu Theá Caáp (chuû bieân):Toaùn naâng cao löôïng giaùc, NXB Ñaïi hoïc Quoác Gia TP.HCM.

2. Nguyeãn Ñöùc Ñoàng – Nguyeãn Vaên Vónh: 23 phöông phaùp chuyeân ñeà baát ñaúng thöùc vaø toaùn cöïc trò löôïng giaùc, NXB treû.

3. Voõ Giang Giai: Chuyeân ñeà heä thöùc löôïng trong tam giaùc, NXB Ñaïi hoïc Quoác Gia TP.HCM.

4. Phan Huy Khaûi – Nguyeãn Ñaïo Phöông: Caùc phöông phaùp giaûi toaùn sô caáp löôïng giaùc, NXB Haø Noäi – 2000.

5. Phan Huy Khaûi: 10000 baøi toaùn sô caáp baát ñaúng thöùc kinh ñieån, NXB Haø Noäi – 1998.

6. Tröông Quang Linh:140 baøi toaùn heä thöùc löôïng trong tam giaùc.

7.103 trigonometry problems.

8.Taïp chí toaùn hoïc vaø tuoåi treû.

9.Caùc trang web:

-www.Thuvienbachkim.vn

-www.violet.vn

-www.math@.vn