

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT LÊ VIỆT TẠO

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**NÂNG CAO KỸ NĂNG TÍNH GIỚI HẠN HÀM SỐ
CHO HỌC SINH LỚP 11 THÔNG QUA
VIỆC PHÂN TÍCH CÁC SAI LẦM THƯỜNG GẶP**

Người thực hiện: Nguyễn Thị Thuận
Chức vụ: Giáo viên
SKKN môn: Toán

THANH HÓA, NĂM 2017

MỤC LỤC

STT	Nội dung	Trang
1.	Mở đầu	1
1.1.	<i>Lí do chọn đề tài</i>	1
1.2.	<i>Mục đích nghiên cứu</i>	1
1.3.	<i>Đối tượng nghiên cứu</i>	1
1.4.	<i>Phương pháp nghiên cứu</i>	2
2.	Nội dung sáng kiến kinh nghiệm	2
2.1.	<i>Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm</i>	2
2.2.	<i>Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm</i>	2
2.3.	<i>Giải pháp thực hiện</i>	2
2.3.1.	Hệ thống kiến thức cơ bản	3
2.3.2.	Dạng và phương pháp tính giới hạn hàm số	4
2.3.3.	Phân tích sai lầm của học sinh thông qua một số ví dụ cụ thể	6
2.4.	<i>Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm</i>	11
2.4.1.	Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục	11
2.4.2.	Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với đồng nghiệp	12
3.	Kết luận, kiến nghị	12
	<i>Kết luận</i>	12
	<i>Kiến nghị</i>	12

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài.

Theo A. A. Stoliar: Dạy toán là dạy hoạt động toán học. Ở trường phổ thông, đối với học sinh, giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. Các bài toán ở trường phổ thông là một phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hoàn thiện kỹ năng, kỹ xảo.

Ở cấp học Trung học Phổ thông (THPT), môn Toán được chia thành ba phân môn: Hình học, Đại số và Giải tích, trong đó Giải tích là một phân môn khó và hoàn toàn mới mẻ. Nếu Đại số đặc trưng bởi kiểu tư duy “hữu hạn”, “rời rạc”, “tĩnh tại” thì khi học Giải tích, kiểu tư duy chủ yếu được vận dụng liên quan đến “vô hạn”, “liên tục”, “biến thiên” khiến cho học sinh gặp nhiều khó khăn. Phân môn Giải tích trong chương trình THPT được bắt đầu bằng khái niệm “giới hạn” ở đầu học kỳ II của lớp 11. Lúc này, các em học sinh bước từ “mảnh đất hữu hạn” sang “mảnh đất vô hạn” với những đại lượng vô cùng bé, vô cùng lớn rất trừu tượng. Có thể nói đây là các khái niệm nền móng cho các khái niệm khác của Giải tích. Và trong phạm vi chương trình THPT, một lớp các bài toán quan trọng như đạo hàm, tính biến thiên, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, tiệm cận ... của hàm số đều có liên quan chặt chẽ với bài toán giới hạn. Với ý nghĩa quan trọng, thiết thực như vậy nhưng quá trình học khái niệm “Giới hạn” và làm một lớp các bài toán về giới hạn, các em học sinh lại rất dễ bị mắc sai lầm.

Nhà tâm lý và giáo dục học J. A. Komensky đã khẳng định: “Bất kì một sai lầm nào cũng có thể làm cho học sinh học kém đi nếu như giáo viên không chú ý ngay tới sai lầm đó, bằng cách hướng dẫn học sinh nhận ra và sửa chữa, khắc phục sai lầm”. A. A. Stoliar nhấn mạnh: “Không được tiếc thời gian để phân tích trên lớp những sai lầm của học sinh”.

Bắt đầu từ năm học 2016- 2017, kì thi THPT Quốc gia môn Toán được đổi mới với hình thức thi trắc nghiệm, mỗi câu hỏi trong đề có bốn phương án trả lời để học sinh lựa chọn, trong đó chỉ có một phương án đúng và ba phương án gây nhiễu, hơn nữa thời gian trả lời câu hỏi ngắn, do đó chỉ một chút sai lầm cũng khiến học sinh lựa chọn phương án sai.

Vì vậy, nhằm giúp cho các em học sinh biết cách tránh những sai lầm đáng tiếc khi làm các bài toán về giới hạn của hàm số để các em học tập phân môn Giải tích có hiệu quả cao, từ đó chất lượng dạy học môn Toán tốt hơn, tôi xin đóng góp sáng kiến kinh nghiệm:

“Nâng cao kĩ năng tính giới hạn hàm số cho học sinh lớp 11 thông qua việc phân tích các sai lầm thường gặp”

1.2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu các sai lầm thường gặp của học sinh lớp 11 khi giải bài toán về tính giới hạn của hàm số, đồng thời đề xuất biện pháp sửa chữa các sai lầm này, nhằm rèn luyện năng lực giải toán cho học sinh lớp 11 THPT.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Các sai lầm thường gặp khi giải bài toán tính giới hạn hàm số thuộc

nội dung Bài 2. Giới hạn của hàm số, chương IV. Giới hạn, chương trình toán lớp 11 THPT.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Xuất phát từ đối tượng nghiên cứu, để đạt được mục đích đề ra tôi đã chủ yếu sử dụng các phương pháp sau :

- Phương pháp nghiên cứu tài liệu.
- Phương pháp tìm hiểu và tổng kết kinh nghiệm giảng dạy.

Tôi đã sử dụng các kiến thức về Giới hạn của hàm số thuộc chương IV. Giới hạn trong chương trình môn Toán lớp 11 THPT để phân tích một số sai lầm thường gặp khi tính giới hạn hàm số của học sinh. Cụ thể, xuất phát từ lời giải sai, tôi phân tích các nguyên nhân dẫn đến sai lầm và đề xuất lời giải đúng cho bài toán.

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm

Việc nghiên cứu đề tài : **“Nâng cao kĩ năng tính giới hạn hàm số cho học sinh lớp 11 thông qua việc phân tích các sai lầm thường gặp”** được dựa trên các cơ sở lý luận sau đây:

- Dựa vào mục tiêu dạy học nội dung Giới hạn của Sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11:
- + Cho học sinh tiếp cận với các khái niệm cơ sở của Giải tích: giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số và qua đó bước đầu hình thành kiểu tư duy toán học gắn liền với sự vô hạn.
- + Cung cấp một số định lý cơ bản làm công cụ cho việc nghiên cứu giới hạn của hàm số. Học sinh biết vận dụng định lý để giải một số bài tập tính giới hạn.
- Dựa vào quan điểm của các nhà giáo dục học như R.A.Axanop : “Việc tiếp thu tri thức một cách có ý thức được kích thích bởi việc học sinh phân tích một cách có suy nghĩ nội dung của từng sai lầm mà học sinh phạm phải, giải thích nguồn gốc các sai lầm này và tư duy, lý luận về bản chất của các sai lầm”. Thông qua sai lầm học sinh tiếp thu tri thức một cách trọn vẹn hơn.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Trong quá trình dạy học nội dung giới hạn ở các năm học trước, tôi nhận thấy khi làm các bài tính giới hạn, học sinh thường mắc các sai lầm cơ bản sau:

- Hiểu không đầy đủ và chính xác khái niệm giới hạn dẫn đến khi trình bày bài dùng sai kí hiệu giới hạn: thứ tự kí hiệu không đúng, không có kí hiệu lim, không có kí hiệu $x \rightarrow a$ hay $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ dưới kí hiệu lim.
- Thực hiện các phép biến đổi đại số sai, tính toán sai.
- Không nắm vững giả thiết và kết luận của các định lý về giới hạn dẫn đến học sinh áp dụng định lý ra ngoài phạm vi của giả thiết. Do đó học sinh thực hiện các phép tính giới hạn một cách tùy tiện.
- Không nắm vững phương pháp tìm giới hạn dạng vô định dẫn đến thực hiện các phép toán dạng vô định như các phép toán đại số.

2.3. Giải pháp thực hiện

Trước thực trạng đã nêu ở trên, nhằm hạn chế và sửa chữa sai lầm khi giải

bài toán tính giới hạn của học sinh, tôi đã thực hiện các giải pháp sau:

Một là trang bị đầy đủ, chính xác những kiến thức cơ bản về khái niệm, định nghĩa, định lý giới hạn cho học sinh.

Hai là chia các bài toán tính giới hạn theo dạng và nêu phương pháp giải cho từng dạng.

Ba là thông qua các sai lầm của học sinh khi tính giới hạn, tôi phân tích nguyên nhân sai lầm và nêu lời giải đúng để từ đó, học sinh thêm một lần nắm vững nội dung định nghĩa, định lý và thành thực kỹ năng tính giới hạn hàm số, tránh được những sai lầm ở các bài toán tiếp theo.

Cụ thể:

Đầu tiên, cần trang bị cho học sinh hệ thống kiến thức cơ bản.

2.3.1. Hệ thống kiến thức cơ bản

2.3.1.1. Các định nghĩa

Giả sử K là một khoảng và điểm $x_0 \in K$, $f(x)$ là một hàm số xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

- **Định nghĩa 1 (Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm):** Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K, x_n \neq x_0$ và

$x_n \rightarrow x_0$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

- **Định nghĩa 2 (Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực):** Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a, +\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Định nghĩa tương tự đối với giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

- **Định nghĩa 3 (Giới hạn vô cực của hàm số):** Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K, x_n \neq x_0$ và

$x_n \rightarrow x_0$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Định nghĩa tương tự đối với giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

- **Định nghĩa 4 (Giới hạn một bên):**

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (x_0, b) . Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn phải là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (x_0, b)$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, x_0) . Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn trái là số thực L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a, x_0)$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

2.3.1.2. Các quy tắc

- *Quy tắc 1: Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương, căn thức*

Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$; $A, B \in \mathbb{R}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A + B$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A - B$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.B$;

Nếu $B \neq 0$ thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$;

Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $A \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$.

- *Quy tắc 2: Liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực*

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x) = \pm\infty; \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \end{cases}$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, g(x) > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, g(x) > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, g(x) < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, g(x) < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

- *Quy tắc 3: Liên hệ giữa giới hạn và giới hạn trái, giới hạn phải*

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

Sau khi học sinh đã được học định nghĩa, quy tắc tính giới hạn, tôi đã chia các bài toán tính giới hạn theo từng dạng như sau:

2.3.2. Dạng và phương pháp tính giới hạn hàm số

Dạng 1: Cho $f(x)$ là hàm sơ cấp xác định trên D và $x_0 \in D$. Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Phương pháp giải: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dạng 2 : Giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Trường hợp 1: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì phương pháp giải là:

- Phân tích $f(x)$ và $g(x)$ thành tích các nhân tử để làm xuất hiện các nhân tử chung dạng $(x - x_0)$.

- Rút gọn biểu thức $\frac{f(x)}{g(x)}$ ở mức tối đa các nhân tử chung dạng $(x - x_0)$ để đưa

về dạng giới hạn áp dụng được các quy tắc đã học.

Trường hợp 2: Nếu $f(x)$, $g(x)$ chứa các căn thức cùng bậc (thường chứa căn bậc hai hoặc căn bậc ba) thì phương pháp giải là: nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp nhằm trục các nhân tử $(x - x_0)$ ra khỏi căn thức.

Chú ý cho học sinh các biểu thức liên hợp.

Trường hợp 3: Nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ chứa các căn thức không cùng bậc, ví dụ

$f(x) = \sqrt[m]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ ($m \neq n, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) thì phương pháp giải là:

- Xác định hằng số $c = \sqrt[m]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)}$.

- Biến đổi bằng cách thêm, bớt hằng số c vào biểu thức của $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[\sqrt[m]{u(x)} - c] - [\sqrt[n]{v(x)} - c]}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[m]{u(x)} - c}{g(x)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[n]{v(x)} - c}{g(x)}$$

đưa về trường hợp 2.

Dạng 3 : Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty. \end{cases}$

Phương pháp giải:

- Chia cả tử và mẫu cho x với lũy thừa cao nhất có mặt ở mẫu.

Dạng 4: Giới hạn dạng vô định $\infty - \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)]$ trong đó

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty. \end{cases}$$

và $f(x)$ hoặc $g(x)$ có dạng căn thức, đồng thời giới hạn vô cực của $f(x)$ và $g(x)$ luôn cùng dấu.

Phương pháp giải:

- Nhân và chia biểu thức $[f(x) - g(x)]$ với liên hợp của nó để đưa giới hạn về dạng 3.

Dạng 5: Giới hạn dạng vô định $\infty.0$: $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow x_0)}} [f(x).g(x)]$ trong đó $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow x_0)}} f(x) = 0; \\ \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow x_0)}} g(x) = \infty. \end{cases}$

Trường hợp 1: Nếu $x \rightarrow \infty$ thì phương pháp giải là biến đổi giới hạn về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Trường hợp 2: Nếu $x \rightarrow x_0$ thì phương pháp giải là biến đổi giới hạn về dạng $\frac{0}{0}$.

Mặc dù đã được học định nghĩa, quy tắc, phương pháp tính giới hạn nhưng trong quá trình làm bài học sinh vẫn vấp phải một số sai lầm. Từ chính những sai lầm này của học sinh, tôi đã phân tích cho các em thấy lỗi sai ở đâu, hướng khắc phục như thế nào. Nhờ đó các em có thể rút ra bài học cho mình.

2.3.3. Phân tích sai lầm của học sinh thông qua một số ví dụ cụ thể

Đầu tiên có thể nói đến lỗi sai của học sinh trong cách trình bày như ở ví dụ 1 dưới đây:

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2}$.

- Học sinh giải như sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$.

- Phân tích sai lầm:

- Lời giải trên có cách làm và kết quả đúng nhưng đã trình bày sai: thiếu kí hiệu

“ $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ ” đứng trước biểu thức $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$. Giáo viên cần nhắc học sinh quá trình biến

đổi đại số biểu thức cần tính giới hạn còn chưa kết thúc thì đằng trước biểu thức đó vẫn phải viết kí hiệu $\lim_{x \rightarrow a}$

- Lời giải đúng là: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$.

Lỗi sai như ở ví dụ trên là lỗi sai về mặt hình thức, thường gặp ở những học sinh không cẩn thận. Qua ví dụ này, giáo viên có thể rèn luyện tính cẩn thận cho học sinh.

Ngoài lỗi sai về mặt hình thức, học sinh thường vấp phải nhiều sai lầm về phương pháp, quy tắc tính giới hạn, về việc thực hiện các phép toán không phải là phép toán đại số hoặc học sinh còn sai ngay cả phép biến đổi đại số như trong các ví dụ sau:

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$.

- Học sinh giải như sau: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = \frac{4 - (-2)^2}{-2 + 2} = \frac{0}{0} = 0$.
- Phân tích sai lầm:
 - Học sinh hiểu sai rằng tính giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x dần đến x_0 tức là thay $x = x_0$ vào biểu thức $f(x)$.
 - Không có phép toán $\frac{0}{0}$ nên không thể viết $\frac{0}{0} = 0$.
 - Học sinh không nắm vững phương pháp giải giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$.

- Lời giải đúng là:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2 - x) = 2 - (-2) = 4.$$

- Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 15};$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15};$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}.$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x + 3}$.

- Học sinh giải như sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3)} = \frac{+\infty}{+\infty} = 1$.
- Phân tích sai lầm:
 - Học sinh đã nghĩ: giới hạn của thương bằng thương các giới hạn theo như quy tắc 1 (giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương) mà không để ý điều kiện áp dụng quy tắc là: tử và mẫu phải có giới hạn hữu hạn.
 - Học sinh đã coi $+\infty$ như là một số để từ đó rút gọn theo phép toán đại số mà không hiểu $+\infty$ chỉ là một kí hiệu biểu thị sự vô hạn.
 - Học sinh không nắm vững phương pháp giải giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

- Lời giải đúng là: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2$.

- Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 1}{-3x^2 - 10};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 18};$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{-8x + 15};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{-5x + 1}.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

- Học sinh giải như sau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty - (+\infty) = 0.$$

- Phân tích sai lầm:

- Học sinh đã nghĩ: giới hạn của hiệu bằng hiệu các giới hạn theo như quy tắc 1 (giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương) mà không để ý điều kiện áp dụng quy tắc là: các giới hạn được tách phải là giới hạn hữu hạn.
- Học sinh đã coi $+\infty$ như là một số để từ đó triệt tiêu theo phép toán đại số mà không hiểu $+\infty$ chỉ là một kí hiệu biểu thị sự vô hạn.
- Học sinh không nắm vững phương pháp giải giới hạn dạng vô định $\infty - \infty$.

- Lời giải đúng là:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

- Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 2x - 1);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x).$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \sqrt{\frac{x}{2x^4 + x^2 + 1}}$.

- Học sinh giải như sau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \sqrt{\frac{x}{2x^4 + x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{2x^4 + x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \infty \cdot 0 = 0.$$

- Phân tích sai lầm:

- Học sinh đã nghĩ: giới hạn của tích bằng tích các giới hạn theo như quy tắc 1 (giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương) mà không để ý điều kiện áp dụng quy tắc là: từng nhân tử phải có giới hạn hữu hạn.
- Học sinh đã coi ∞ như là một số để từ đó thực hiện phép nhân với số 0 được kết quả bằng 0 mà không hiểu $+\infty$ chỉ là một khái niệm biểu thị sự vô hạn.
- Học sinh không nắm vững phương pháp giải giới hạn dạng vô định $\infty \cdot 0$.

- Lời giải đúng là:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \sqrt{\frac{x}{2x^4 + x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x+1)^2 x}{2x^4 + x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \sqrt{\frac{0}{2}} = 0.$$

- Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}};$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\sqrt{\frac{x}{x^2-4}} \cdot (1-2x) \right);$

d) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3+1) \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}.$

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+3}.$

- Học sinh giải như sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}}{\frac{2x+3}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2}.$$

- Nhận xét: Lời giải trên thể hiện học sinh đã biết nhận dạng giới hạn và nắm được phương pháp giải nhưng quá trình thực hiện lời giải vẫn bị mắc sai lầm.

- Phân tích sai lầm:

- Sai lầm xuất hiện khi học sinh đưa x vào trong căn bậc hai: $x = \sqrt{x^2}$ mà không chú ý ở đây $x \rightarrow -\infty$, tức là $x < 0$ nên $x = -\sqrt{x^2}$.

Học sinh cần lưu ý phép biến đổi đại số: $x = \sqrt{x^2}$ nếu $x \geq 0$;

$$x = -\sqrt{x^2} \text{ nếu } x < 0.$$

- Lời giải đúng là:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}}{\frac{2x+3}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{5 - 2x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 1);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{3x - \sqrt{x^2 + 1}};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x + 7}}{\sqrt[3]{27x^3 + 5x^2 + x + 4}}.$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} & \text{neá } x > 1; \\ 2 & \text{neá } x \leq 1. \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

- Học sinh giải như sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3.$$

- Phân tích sai lầm:

- Ở lời giải trên, học sinh đã mặc nhiên chỉ xét $x > 1$, tức là chỉ xét giới hạn phải khi x dần tới 1 và coi giới hạn cần tính là giới hạn phải.

Khi tính giới hạn của dạng hàm số cho bởi nhiều công thức, học sinh thường không nghĩ đến việc phải tính các giới hạn một phía. Vì vậy, khi gặp dạng giới hạn này, giáo viên cần lưu ý cho học sinh.

- Lời giải đúng là:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x). \text{ Do đó không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

- Bài tập tương tự:

a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x > 1; \\ 1 & \text{khi } x \leq 1. \end{cases}$ Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Cho hàm số $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-4x + 1} - 3}{x^2 - 4} & \text{khi } x < -2; \\ -\frac{1}{4}x - \frac{1}{3} & \text{khi } x \geq -2. \end{cases}$ Tính $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$.

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4}}$.

- Học sinh giải như sau:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{(x-2)^2 \cdot (2x+1)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)}{\sqrt{2x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

- Phân tích sai lầm:

- Học sinh đã coi $|x-2|$ như là $(x-2)$ khi $x \rightarrow 2$ để rút gọn biểu thức mà không nghĩ đến việc xét dấu $(x-2)$ tương ứng với hai trường hợp khi $x \rightarrow 2^+$ và $x \rightarrow 2^-$

- Lời giải đúng là:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{(x-2)^2 \cdot (2x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|\sqrt{2x+1}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|\sqrt{2x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-3)}{\sqrt{2x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|\sqrt{2x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)}{-\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|\sqrt{2x+1}} &\neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|\sqrt{2x+1}}\end{aligned}$$

Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|\sqrt{2x+1}}$ hay $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{2x^3 - 7x^2 + 4x + 4}}$ không tồn tại

- Bài tập tương tự: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x+1|};$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{\sqrt{x^3 - 11x^2 + 35x - 25}};$

Trên đây là những giải pháp tôi đã sử dụng để thực nghiệm ở lớp 11C, trường THPT Lê Viết Tạo. Tôi nhận thấy việc áp dụng sáng kiến thu được hiệu quả như sau:

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

2.4.1. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục

Trong năm học 2016- 2017, tôi được phân công dạy hai lớp học sinh có lực học tương đối đồng đều là 11C và 11E. Tôi đã thực nghiệm sư phạm nội dung sáng kiến này ở lớp 11C và chọn lớp 11E là lớp đối chứng.

Sau khi áp dụng các giải pháp đã được nêu trong SKKN, tôi nhận thấy học sinh lớp 11C đã tiến bộ nhiều so với lớp 11E khi giải bài toán tìm giới hạn nói chung và giới hạn hàm số nói riêng, thể hiện qua các điểm sau:

- Học sinh đã có ý thức sử dụng chính xác khái niệm, quy tắc, phương pháp giải cho các bài toán giới hạn hàm số.
- Học sinh đã có thói quen tự kiểm tra lời giải, biết nhận xét và phân tích các lời giải sai, biết sửa chữa lời giải sai để có lời giải đúng.
- Trong các tiết học, không khí học tập sôi nổi, tích cực. Chất lượng giờ học được nâng cao, học sinh ít bị sai trong quá trình làm bài nên hứng thú học tập bộ môn hơn, năng lực giải toán có nhiều tiến bộ.

Kết quả thu được qua bài kiểm tra nội dung giới hạn hàm số ở hai lớp như sau:

Lớp	Điểm 0- 4	Điểm 4,5	Điểm 5- 6,5	Điểm 7- 8	Điểm 8,5- 10
11C (41 hs)	0	01 hs	13	20	7
11E (40 hs)	0	03 hs	23	12	2

2.4.2. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với đồng nghiệp

- Tôi đã trình bày chuyên đề này trong các buổi sinh hoạt chuyên môn của tổ, được các đồng nghiệp thảo luận, ủng hộ và áp dụng trong giảng dạy tạo nên hiệu ứng tích cực.

3. Kết luận, kiến nghị

- Kết luận

Trên đây là những kinh nghiệm mà tôi đúc rút được trong quá trình giảng dạy nội dung giới hạn tại trường THPT Lê Viết Tạo. Đề tài của tôi đã hệ thống được các sai lầm mà học sinh thường mắc phải khi giải bài toán tìm giới hạn hàm số, đồng thời phân tích các nguyên nhân kiến thức chủ yếu gây nên các sai lầm đó. Đề tài cũng đã nêu được các giải pháp nhằm hạn chế và sửa chữa sai lầm cho học sinh một cách có hiệu quả.

Tôi rất mong được các đồng nghiệp quan tâm bổ sung, góp ý cho đề tài ngày càng hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

- Kiến nghị

Những sai lầm của học sinh khi giải toán là một hiểu biết quan trọng của giáo viên toán. Đó thực sự là một hiểu biết có tính nghề nghiệp. Vì vậy tôi đề nghị các tổ bộ môn toán ở trường phổ thông đặt vấn đề nghiên cứu và biên soạn thành chuyên đề về những dạng sai lầm của học sinh trong quá trình giải toán ở tất cả các nội dung toán trong chương trình phổ thông.

Mặc dù hiện nay môn Toán thi theo hình thức trắc nghiệm nhưng tôi thiết nghĩ, trong quá trình giảng dạy, việc phát hiện sai lầm và sửa chữa sai lầm cho học sinh từ bài tự luận là cần thiết. Điều đó để phương án lựa chọn của học sinh trong mỗi câu hỏi trắc nghiệm là kết quả của quá trình nắm vững kiến thức, thành thạo kỹ năng, tư duy mạch lạc biết sàng lọc đúng, sai.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 18 tháng 5 năm 2017</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Nguyễn Thị Thuận
---	--

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2015, *Đại số và Giải tích 11*, NXB Giáo dục.
- [2] Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2015, *Đại số và Giải tích nâng cao 11*, NXB Giáo dục.
- [3] Trần Phương- Nguyễn Đức Tấn, 2008, *Sai lầm thường gặp và các sáng tạo khi giải toán*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.