

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Phương pháp.

1. Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm

Thực hiện theo các bước sau

B1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$

B2. Tìm các giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới các biên của miền xác định và dựa vào định nghĩa của các đường tiệm cận để kết luận

2. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm

Thực hiện theo các bước sau

B1. Tìm tập xác định của hàm số (đồ thị hàm số f chỉ có thể có tiệm cận xiên nếu tập xác định của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn)

B2. Sử dụng định nghĩa

Hoặc sử dụng định lý:

Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$ thì đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số f

CHÚ Ý: Đối với hàm phân thức: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

i) Tiệm cận đứng.

Nếu $\begin{cases} P(x_0) = 0 \\ Q(x_0) \neq 0 \end{cases}$ thì đường thẳng: $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

ii) Tiệm cận ngang

Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành độ

Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đồ thị hàm có tiệm cận ngang là đường thẳng: $y = \frac{A}{B}$ trong đó A, B lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang

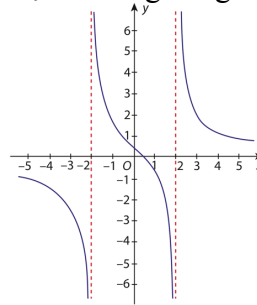
iii) Tiệm cận xiên

Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn hay bằng bậc của $Q(x)$ hoặc lớn hơn bậc của $Q(x)$ từ hai bậc trở lên thì đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên

Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ một bậc và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$ thì đồ thị hàm có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia $P(x)$ cho $Q(x)$ và viết $f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$, trong đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = 0$.

Suy ra đường thẳng: $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2 - 4x}{4 - x^2}$ có đồ thị là đường cong như Hình.



Các đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$ có phải là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho hay không? Vì sao?

Lời giải

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 4x}{4 - x^2} = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - 4x}{4 - x^2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Tương tự:

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2 - 4x}{4 - x^2} = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2 - 4x}{4 - x^2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị $y = f(x)$ đã cho.

Câu 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$.

Vậy đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 3. Giải thích vì sao đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$?

Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 4. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.
Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1.$$

Vậy đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right) = +\infty.$$

Vậy đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 5. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x=1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Tập xác định: $D = (1; +\infty)$. Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 6. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.
Lời giải

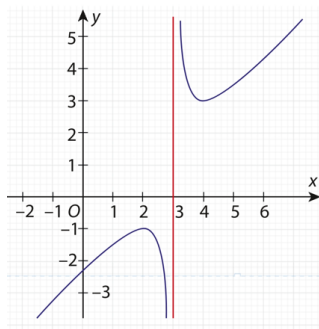
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2$$

Ta có

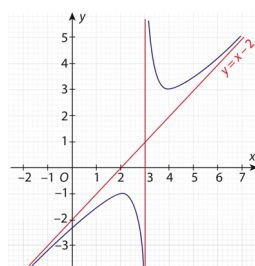
Vậy đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 7. Đường cong ở Hình là đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$.



Chứng minh rằng đường thẳng $\Delta: y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Vẽ Δ lên cùng hệ trục tọa độ với (C).

Lời giải



Ta có
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - 3} \right) = 0$$

Suy ra đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Hình ảnh của đường thẳng $\Delta: y = x - 2$ như Hình.

Câu 8. Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

Lời giải

Do
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$
 nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Chú ý: Để xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể áp dụng công thức sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{và} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \quad \text{hoặc} \quad a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{và} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

(Khi $a=0$ thì ta có tiệm cận ngang $y=b$).

Câu 9. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{x^2+3x}{x-2}$.
Lời giải

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x}{x(x-2)} = 1$$

Ta có:

Vậy đường thẳng $y=x+5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$).

Tương tự, do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 5$ nên đường thẳng $y=x+5$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow -\infty$).

Câu 10. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$.
Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+1}{x^2-2x} = 1;$$

Ta có:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3x+1}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -1$$

Ta cũng có

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-1$.

Câu 11. Tìm tiệm cận của hàm số:

a) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

b) $y = \frac{2-4x}{1-x}$

c) $y = 2x+1 - \frac{1}{x+2}$

d) $y = \frac{x^2}{1-x}$

Lời giải.

a) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, suy ra đường thẳng $y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C).

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$, suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).

$$y = \frac{2 - 4x}{1 - x}$$

b)

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 4$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 4$, suy ra đường thẳng $y = 4$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C).

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$, suy ra đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).

$$y = 2x + 1 - \frac{1}{x + 2}$$

c)

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đường thẳng: $x = -2$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (2x + 1)] = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + 1)] = 0 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của (C).

$$y = -x - 1 + \frac{1}{1 - x}$$

d)

Giới hạn, tiệm cận.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đường thẳng: $x = 1$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x - 1)] = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x - 1)] = 0 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = -x - 1$ là tiệm cận xiên của (C).

Câu 12. Tìm tiệm cận của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

a)

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

b)

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

c)

Lời giải.

a) Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow 0^-$ và $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{hàm số } y \text{ không có tiệm cận xiên khi } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{hàm số } y \text{ không có tiệm cận xiên khi } x \rightarrow +\infty$$

b) Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -1 \Rightarrow y = x - 1 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = 1 \Rightarrow y = -x + 1 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

c) Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \Rightarrow y = 2x \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi } x \rightarrow +\infty.$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi } x \rightarrow -\infty.$$

Câu 13. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x + 1 - \frac{1}{x-5}$

b) $y = \frac{2x^2 - 6x + 1}{3x + 1}$

Lời giải.

a) $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow 5^+$ và khi $x \rightarrow 5^-$)

đồ thị hàm không có tiệm cận ngang

$y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

b) $x = -\frac{1}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow -\frac{1}{3}^+$ và khi $x \rightarrow -\frac{1}{3}^-$)

đồ thị hàm không có tiệm cận ngang.

$y = \frac{2}{3}x - \frac{20}{9}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$)

Câu 14. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+3}{x^2-4}$

b) $y = \frac{4x}{x^2+8}$

Lời giải.

a) $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow 2^+$ và khi $x \rightarrow 2^-$)

$x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow -2^+$ và khi $x \rightarrow -2^-$).

$y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$)

đồ thị không có tiệm cận xiên.

b) $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$)

đồ thị không có tiệm cận xiên.

Câu 15. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-4}{x^3+1} + 2x - 3$

b) $y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$

Lời giải.

a) $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow -1^+$ và khi $x \rightarrow -1^-$)

đồ thị hàm không có tiệm cận ngang.

$y = 2x - 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

b) $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow 0^+$ và khi $x \rightarrow 0^-$).

$x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow 2^+$ và khi $x \rightarrow 2^-$).

đồ thị hàm không có tiệm cận ngang.

$y = x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

Câu 16. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x^3 - x + 4}{x^2 - 4}$

b) $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + 3}$

Lời giải.

a) $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow -2^+$ và khi $x \rightarrow -2^-$).

$x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow 2^+$ và khi $x \rightarrow 2^-$).

đồ thị hàm không có tiệm cận ngang.

$y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

b) $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$ và khi $x \rightarrow -\infty$).

đồ thị hàm không có tiệm cận xiên.

Câu 17. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x + 4 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

b) $y = 3x + \sqrt{x^2 + 4}$

c) $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

Lời giải.

a) $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Từ tập xác định của hàm số suy ra đồ thị hàm không có tiệm cận đứng.

Ta có thể xem tiệm cận ngang như là trường hợp đặc biệt của tiệm cận xiên khi $a = 0$, do đó ta chỉ cần tiệm cận xiên của đồ thị hàm, nếu đường tiệm cận có dạng $y = b$ thì đó là tiệm cận ngang.

$$y = x + 4 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x \left(1 + \frac{4}{x} \right) + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = x \left(1 + \frac{4}{x} \right) + |x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{4}{x} \right) + x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = 2$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2 \right) + 4 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 \right) + 4 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} \right) + 4 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} + 4 \right) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Vậy đường thẳng $y = 2x + \frac{5}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{4}{x} \right) - x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x} - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) + 4 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} + 4 \right) = \frac{11}{2}.$$

Vậy đồ thị hàm số có đường thẳng $y = \frac{11}{2}$ là đường tiệm cận ngang (khi $x \rightarrow -\infty$)

Cách khác. Trong bài toán này ta áp dụng cách biến đổi sau để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| + \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

Với $a > 0$, ta có

$$\varepsilon(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

Đặt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$ thì ta chứng minh được rằng

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \left| x - \frac{3}{2} \right| + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \left| x - \frac{3}{2} \right|$$

Ta có

$$\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \left| x - \frac{3}{2} \right|$$

Đặt , ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \left| x - \frac{3}{2} \right|} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \left| x - \frac{3}{2} \right|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{4|x| \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + \left| 1 - \frac{3}{2x} \right| \right)} = 0.$$

$$y = x + 4 + \left| x - \frac{3}{2} \right| + \varepsilon(x)$$

Suy ra

$$\text{Khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } y = x + 4 + x - \frac{3}{2} + \varepsilon(x) = 2x + \frac{5}{2} + \varepsilon(x)$$

Vi $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + \frac{5}{2})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 2x + \frac{5}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$)

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $y = x + 4 - x + \frac{3}{2} + \varepsilon(x) = \frac{11}{2} + \varepsilon(x)$

Vi $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - \frac{11}{2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0$ nên đường thẳng $y = \frac{11}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow -\infty$)

b) Ta có $\sqrt{x^2 + 4} = |x| + \sqrt{x^2 + 4} - |x|$

Đặt $\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + 4} - |x|$, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - |x|) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + |x|} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} + |x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1 \right)} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $y = 3x + \sqrt{x^2 + 4} = 3x + |x| + \varepsilon(x)$

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y = 3x + x + \varepsilon(x) = 4x + \varepsilon(x)$

Vi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 4x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow +\infty$)

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $y = 3x - x + \varepsilon(x) = 2x + \varepsilon(x)$

Vi $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm (khi $x \rightarrow -\infty$)

Đồ thị hàm không có tiệm cận ngang.

c)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = 2$$

, suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = -2$, suy ra đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm.

* $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} = 0$, suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Dạng 2. Bài toán chứa tham số

Câu 18. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Lời giải

Với $m=0$; ta có hàm số $y = \frac{x-2}{-2x+4} = -2 \Rightarrow$ Không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

$mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1-4m=0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

$mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m=0$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$y = \frac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$$

Câu 19. Hàm số không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng?

Lời giải

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x) = \sqrt{3x+1}+ax+b = (x-1)^2 g(x)$.

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2=0 \\ a+\frac{3}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=-\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=\frac{1}{2}$$

Suy ra

Câu 20. Cho hàm số $y = 2x+1 - \frac{1}{x+2}$ có đồ thị là (C). Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc (C), qua M vẽ hai đường thẳng lần lượt song song với hai đường tiệm cận của (C), hai đường thẳng này tạo với hai đường tiệm cận một hình bình hành, chứng minh hình bình hành này có diện tích không đổi.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Gọi $MNIP$ là hình bình hành tạo bởi hai tiệm cận của (C) và hai đường thẳng vẽ từ M lần lượt song song với hai tiệm cận này.

$$M \in (C) \Rightarrow M \left(x_0; 2x_0 + 1 - \frac{1}{x_0 + 2} \right)$$

$$\begin{cases} N \in TCX \\ MN \perp Ox \end{cases} \Rightarrow N(x_0; 2x_0 + 1) \Rightarrow MN = |y_M - y_N| = \left| \frac{1}{x_0 + 2} \right|$$

Đường thẳng MN qua M và song song với TCĐ nên có phương trình là:

$$x - x_0 = 0 \Rightarrow d(I, MN) = |-2 - x_0| = |2 + x_0|.$$

Diện tích của hình bình hành $MNIP$:

$$S = MN \cdot d(I, MN) = \left| \frac{1}{x_0 + 2} \right| |x_0 + 2| = 1 \quad (\text{hằng số}).$$

Câu 21. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ta có: $y' = m - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

Để hàm số đã cho có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Với $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow m - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{m}} < x_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và điểm cực tiểu của hàm số là $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ nên $(d): y = mx$ là đường tiệm cận xiên.

$$d(A, (d)) = \frac{2}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \frac{\left| m \frac{1}{\sqrt{m}} - 2\sqrt{m} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{17m} = 2\sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow 4m^2 - 17m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \text{ hoặc } m = \frac{1}{4}.$$

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{1 - x^2}{x}$ có đồ thị là (C). Tìm các điểm M thuộc (C) sao cho $d(M, TCĐ) = \sqrt{2}d(M, TCX)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$M \in (C) \Leftrightarrow M \left(x_0; -x_0 + \frac{1}{x_0} \right). \quad \text{Ta có:} \quad d(M; TCX) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \right|, \quad d(M, TCĐ) = |x_0|$$

$$d(M, TCĐ) = \sqrt{2}d(M, TCX) \Leftrightarrow |x_0| = \sqrt{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \right| \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 0 \\ x_0 = -1, y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy, các điểm cần tìm là $M(\pm 1; 0)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$, có đồ thị là (C) . Tìm tất cả các điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

Giả sử $M \left(x_0; 1 + \frac{5}{x_0 - 3} \right)$ là điểm thuộc đồ thị (C) , $x_0 \neq 3$.

Khi đó khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d_1 = |x_0 - 3|$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $d_2 = \frac{5}{|x_0 - 3|}$

Theo giả thiết $d_1 = 5d_2$ hay $|x_0 - 3| = \frac{25}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 = 25$, phương trình này có 2 nghiệm $x_0 = -2$ hoặc $x_0 = 8$

Vậy, $M(-2; 0)$, $M(8; 2)$ là tọa độ cần tìm.

Câu 24. Cho hàm số $y = 2x - 1 - \frac{2}{2x-1}$ có đồ thị là (C) . Tìm hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

M thuộc nhánh phải của (C) , suy ra $M \left(\frac{1}{2} + a; 2a - \frac{1}{a} \right)$, $a > 0$

N thuộc nhánh trái của (C) , suy ra $N \left(\frac{1}{2} - b; -2b + \frac{1}{b} \right)$, $b > 0$

$$MN^2 = (a+b)^2 + \left[2(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]^2 = (a+b)^2 \left(2 + \frac{1}{ab} \right)^2$$

$$\stackrel{C\ddot{a}s\ddot{a}i}{\geq} 4ab \left(4 + \frac{4}{ab} + \frac{1}{a^2b^2} \right) = 16ab + \frac{4}{ab} + 16 \stackrel{C\ddot{a}s\ddot{a}i}{\geq} 2\sqrt{16ab \cdot \frac{4}{ab}} + 16 = 32$$

$$\Rightarrow MN \geq 4\sqrt{2}; \quad MN = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 16ab = \frac{4}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^4 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a=b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy hai điểm cần tìm là } M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{3-2x}{x}$ có đồ thị là (C). Tìm các điểm trên (C) có tổng các khoảng cách từ đó đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$A \in (C) \Rightarrow A(x_0; y_0) \text{ với } y_0 = -2 + \frac{3}{x_0}, \quad d(A, Ox) = |y_0|, \quad d(A, Oy) = |x_0|$$

$$T = d(A, Ox) + d(A, Oy) = |y_0| + |x_0|.$$

Nếu A thuộc nhánh trái của (C) thì $y_0 < -2$ khi đó $T > 2$. Mặt khác giao điểm của (C) với trục Ox

là $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, vì $d(E, Ox) + d(E, Oy) = \frac{3}{2} < 2$, suy ra điểm cần tìm thuộc nhánh phải của (C).

Như vậy ta chỉ cần xét các điểm A thuộc nhánh phải của (C) ($x_0 > 0$).

$$\text{Khi đó } T = |y_0| + x_0 = \left| -2 + \frac{3}{x_0} \right| + x_0.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số T trên $(0; +\infty)$

$$\text{* Nếu } -2 + \frac{3}{x_0} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-2x_0}{x_0} \geq 0 \Leftrightarrow x_0 \in \left(0; \frac{3}{2}\right] \text{ thì } T = -2 + \frac{3}{x_0} + x_0$$

$$\text{Ta có: } T' = -\frac{3}{x_0^2} + 1 = \frac{x_0^2 - 3}{x_0^2} < 0 \text{ với mọi } x_0 \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{* Nếu } -2 + \frac{3}{x_0} \leq 0 \Leftrightarrow x_0 \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \text{ thì } T = 2 - \frac{3}{x_0} + x_0$$

$$\text{Ta có: } T' = \frac{3}{x_0^2} + 1 > 0 \text{ với mọi } x_0 \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$\text{* Tại } x_0 = \frac{3}{2}: T'\left(\frac{3}{2}^+\right) = -\frac{7}{3}, \quad T'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{1}{3}$$

Vì $T'\left(\frac{3^+}{2}\right) \neq T'\left(\frac{3^-}{2}\right)$ nên $T'\left(\frac{3}{2}\right)$ không tồn tại.

Bảng biến thiên của hàm số T.

x_0	$-\infty$	3	$+\infty$
		2	
T'		-	+
T			

Suy ra $\min T = \frac{3}{2}$ đạt được khi $x_0 = \frac{3}{2}$. Vậy điểm cần tìm là $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Câu 26. Tìm giá trị tham số m sao cho $y = \frac{2x^2 + 3mx - m + 2}{x - 1}$ có tiệm cận xiên tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải

Với $m = -2$ hàm số đã cho suy biến thành đường thẳng $y = 2x - 4$ nên không có tiệm cận. Do vậy, $m \neq -2$ hàm số đã cho có tiệm cận xiên là $y = 2x + 3m + 2$

Giả sử tiệm cận xiên cắt trục hoành tại $A\left(-\frac{3m+2}{2}; 0\right)$ và cắt trục tung tại $B(0; 3m+2)$.
 $S_{AOB} = 4$ tức $OA \cdot OB = 8$ hay $(3m+2)^2 = 16 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$ hoặc $m = -2$.

Câu 27. Tìm giá trị tham số m sao cho $y = 2mx + m + 2 - \frac{m^2 + 1}{x + 1}$ có tiệm cận xiên cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

Tiệm cận xiên là $(t): 2mx - y + m - 1 = 0, m \neq 0$

$$d(O; t) = \frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \text{ hay } 13m^2 - 34m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = \frac{8}{13}.$$

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + 1}{x + 1}$. Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số cùng với trục hoành tạo thành một tam giác vuông có một góc 60° .

Lời giải.

Với $m > 0$ hàm số đã cho có điểm cực đại, cực tiểu và tiệm cận xiên có phương trình: $mx - y + 1 - m = 0$ ($m \neq 0$), tiệm cận đứng có phương trình $x + 1 = 0$. Tiệm cận xiên và tiệm cận

đứng cùng với Ox tạo thành một tam giác vuông có một góc là 60° khi và chỉ khi tiệm cận xiên hợp với Ox góc $\pm 60^\circ$ hoặc $\pm 30^\circ$. Ta tìm được $m = \sqrt{3}$ hoặc $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ thỏa.

Câu 29. Tùy theo giá trị m hãy tìm các tiệm cận của hàm số.

a. $y = \frac{mx+1}{x+m}$

b. $y = \frac{x^2 - 4x + m}{x+2}$

Giải:

a. Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Ta có $y = m + \frac{1-m^2}{x+m}$

+ Nếu $1-m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Khi đó, hàm số có dạng suy biến $y=\pm 1$.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận.

+ Nếu $1-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow -m} y = \infty$

Vậy $x=-m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = m$

Vậy $y=m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b. Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y = x - 6 + \frac{m+12}{x+2}$

+ Nếu $m+12=0 \Leftrightarrow m=-12$.

Khi đó, hàm số có dạng suy biến $y=x-6$.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận.

+ Nếu $m+12 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -12$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$

Vậy $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (x-6)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m+12}{x+2} = 0$

Vậy $y=x-6$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ (C)

a. Chứng minh rằng tích số các khoảng cách từ điểm M bất kỳ trên đồ thị (C) của hàm số đến hai đường tiệm cận của nó là hằng số.

b. Tìm những điểm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.

Giải:

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$

Vậy $x = 1 (\Delta_1)$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác $y = x - 1 + \frac{4}{x - 1}$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 1} = 0$

Vậy $y = x - 1$ hay $x - y - 1 = 0 (\Delta_2)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

a. Gọi $M(x_0, y_0) \in C$. Khi đó $y_0 = x_0 - 1 + \frac{4}{x_0 - 1}$

Khi đó

$$d_1 = d(M, \Delta_1) = |x_0 - 1|;$$

$$d_2 = d(M, \Delta_2) = \frac{|x_0 - y_0 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \frac{4}{x_0 - 1} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}|x_0 - 1|}$$

Suy ra $d_1 \cdot d_2 = |x_0 - 1| \cdot \frac{4}{\sqrt{2}|x_0 - 1|} = \frac{4}{\sqrt{2}}$ là hằng số.

b. Ta có $d_1 + d_2 = |x_0 - 1| + \frac{4}{\sqrt{2}|x_0 - 1|} \geq 2\sqrt{|x_0 - 1| \cdot \frac{4}{\sqrt{2}|x_0 - 1|}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

Vậy $d_1 + d_2$ đạt giá trị min khi $|x_0 - 1| = \frac{4}{\sqrt{2}|x_0 - 1|}$

Suy ra $(x_0 - 1)^2 = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \\ x_0 - 1 = -\frac{2}{\sqrt[4]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \left(y_0 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} + 2\sqrt[4]{2} \right) \\ x_0 = 1 - \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \left(y_0 = -\frac{2}{\sqrt[4]{2}} - 2\sqrt[4]{2} \right) \end{cases}$$

Do đó các điểm cần tìm là:

$$M_1\left(1 + \frac{2}{\sqrt[4]{2}}; \frac{2}{\sqrt[4]{2}} + 2\sqrt[4]{2}\right); M_2\left(1 - \frac{2}{\sqrt[4]{2}}; -\frac{2}{\sqrt[4]{2}} - 2\sqrt[4]{2}\right)$$

Câu 31. Cho hàm số: $y = \frac{2m-x}{x+m}$ có đồ thị là (C_m) . Cho $A(0;1)$ và I là tâm đối xứng. Tìm m để trên (C_m) tồn tại điểm B sao cho tam giác ABI vuông cân tại A .

Lời giải.

Xét $B\left(b; \frac{2m-b}{b+m}\right) \in (C_m) \Rightarrow AB = \left(b; \frac{m-2b}{m+b}\right)$. Ta có $I(-m; -1) \Rightarrow AI = (-m; -2)$.

Tam giác ABI vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB \cdot AI = 0 \\ AB^2 = AI^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} mb + 2\frac{m-2b}{m+b} = 0 \\ m^2 + 4 = b^2 + \left(\frac{m-2b}{m+b}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2b}{m+b} = -\frac{bm}{2} \\ m^2 + 4 = b^2 + \frac{m^2b^2}{4} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow m^2(b^2 - 4) + 4(b^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (b^2 - 4)(m^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

$$* b = 2 \text{ thay vào (1) ta được: } \frac{m-4}{m+2} = -m \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = -4$$

$$* b = -2 \text{ thay vào (1) ta được: } \frac{m+4}{m-2} = m \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 4$$

Vậy $m = \pm 1, m = \pm 4$ là những giá trị cần tìm.

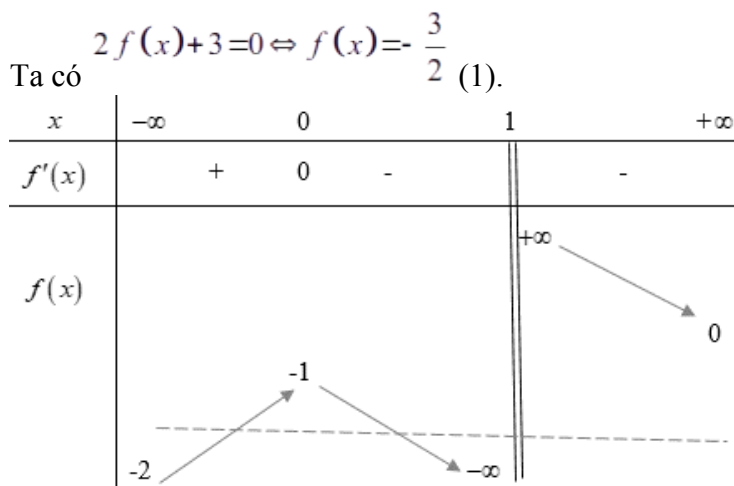
Câu 32. (Bình Giang-Hải Dương -2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

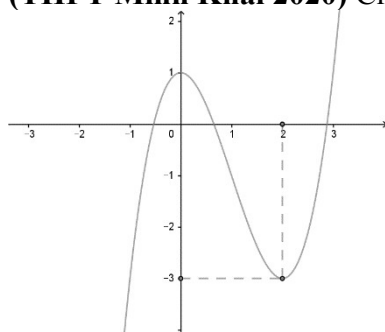
Đặt $y = g(x) = \frac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$



Từ bảng biến thiên có phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-\infty; 0), x_2 \in (0; 1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 33. (THPT Minh Khai 2020) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng

Lời giải

Ta có $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x=0$, $x=2$. Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(2)=-3 \\ y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ c=0 \\ 12a+4b=0 \\ 8a+4b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$$

Vậy $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Khi đó $y = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)[f^2(x) - f(x)]} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)(x^3 - 3x^2 + 1)(x^3 - 3x^2)} = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3 - 3x^2 + 1)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=x_1 \in (-1;0) \\ x=x_2 \in (0;1) \\ x=x_3 \in (2;3) \end{cases}$$

Ta có $x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)=0$

$$y = \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}$$

Hàm số có tập xác định $D = (-\infty; 2] \setminus \{0; x_1; x_2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = -\infty$$

Suy ra $x=0$ là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)} = +\infty$$

Suy ra $x=x_1$ và $x=x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 34. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	0	1	0

Tìm giá trị của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x)-m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f^2(x)-m} = \frac{1}{-m}$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Do đó:

Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x)-m}$ không có tiệm cận ngang.

Mặt khác phương trình $f^2(x)-m=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x)-m}$ có một tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{-m}$.

+ $m < 0$: Phương trình $f^2(x) - m = 0$ vô nghiệm vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$+ m > 0: f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{m} \\ f(x) = -\sqrt{m} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = -\sqrt{m}$ vô nghiệm với $\forall m > 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $f(x) = \sqrt{m}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy $0 < m < 1$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có 3 tiệm cận.