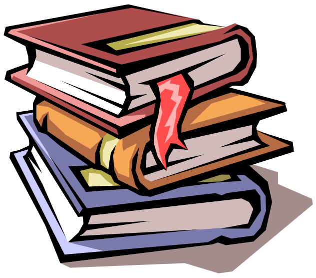
Tailieumontoan.com

Sưu tầm



CÁC CHỦ ĐỀ TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO MÔN TOÁN THCS

Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

Mục Lục

CHƯƠNG I. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ 2
CHƯƠNG II: PHƯƠNG TRÌNH... 32
CHƯƠNG IV. HÀM SỐ.. 92
CHƯƠNG V: BẤT ĐẲNG THỨC_GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 121
CHƯƠNG VI. TAM GIÁC VÀ TỨ GIÁC.. 150
CHƯƠNG VII. ĐƯỜNG TRÒN 175
MỘT SỐ ĐỀ TOÁN DẠNG TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN.......................... 204

CHƯƠNG I. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Một số công thức thường dùng:

1. $\dfrac{1}{n(n+r)}=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+r}\right)$
2. $\dfrac{1}{n(n+r)(n+2r)}=\dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{1}{n(n+r)}-\dfrac{1}{(n+r)(n+2r)}\right)$
3. Bình phương một tổng $(a_1+a_2+...+a_n)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2+2a_1(a_2+a_3+...+a_n)$
   $+2a_2(a_3+a_4+...+a_n)+...+2a_{n-1}a_n$
4. Tổng các lập phương $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
5. Hiệu các lập phương $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
6. Tổng hiệu của hai lũy thừa cùng bậc
   $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+.....+b^{n-1})$
   $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+.....+b^{n-1})$. Với n lẻ
7. Với $a,b\ge 0$ thì $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$
8. Nếu $b\ge 0$ thì $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$
9. Nếu $ab\ge 0$ thì $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\begin{cases}\sqrt{ab}\,(a>0)\\ -\sqrt{ab}\,(a<0)\end{cases}$
10. Nếu $x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\Leftrightarrow x^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}$
11. Nếu $x=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\Leftrightarrow x^3=a-b-3\sqrt[3]{ab}$

Chú ý học sinh thường mắc sai lầm ở dạng 7,8,9. Ví dụ $(x-9)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-9}}=\sqrt{(x-9)(x+3)}$

Một số dạng toán thường gặp

1. Tìm giá trị của một biểu thức
2. Biến đổi, rút gọn biểu thức
3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
4. Tìm điều kiện để biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN THÔNG QUA CÁC VÍ DỤ

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức

a. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 1. Cho $f(x)=ax^2+bx+c$. Tính $f(2)+f(-2)$

A. $8a-2c$ B. $8a+2c$ C. $2a+8c$ D. $8b+2c$

Hướng dẫn giải: $f(2)+f(-2)=(4a+2b+c)+(4a-2b+c)=8a+2c$. Đáp án B

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức $M=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-31$

A. $\sqrt{3}-32$ B. $\sqrt{3}+32$ C. $32-\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}-31$

Hướng dẫn giải: $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-31=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-31=\sqrt{3}-1-31=-32$. Đáp án A

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{36}{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}-\sqrt{\dfrac{25}{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}}$

A. $2-11\sqrt{3}$ B. $-2+11\sqrt{3}$ C. $2+11\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}-31$

Hướng dẫn giải: $P=\dfrac{6}{\left|\sqrt{3}-2\right|}-\dfrac{5}{\sqrt{3}+2}=6\left(\sqrt{3}+2\right)-5\left(\sqrt{3}-2\right)=2+11\sqrt{2}$. Đáp án C

Ví dụ 4. Cho $a<0<b$, rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{b}}{a-b}\sqrt{\dfrac{(b-a)^2}{-ab}}$

A. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ B. $\dfrac{-1}{\sqrt{-a}}$ C. $\dfrac{1}{\sqrt{-a}}$ D. $\dfrac{-1}{\sqrt{a}}$

Hướng dẫn giải : $P=\dfrac{\sqrt{b}}{a-b}.\dfrac{b-a}{\sqrt{-a}\sqrt{b}}=\dfrac{-1}{\sqrt{-a}}$. Đáp án B

Ví dụ 5. Cho $a>\dfrac{7}{5}$, tính giá trị của biểu thức $E=|a|-\sqrt{1-2a+a^2}$

A. $a-1$ B. 2 C. $2a$ D. 1

Hướng dẫn giải : $E=|a|-\sqrt{1-2a+a^2}=a-|a-1|=a-a+1$. Đáp án D

Ví dụ 6. $x=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ là nghiệm của phương trình nào sau đây:

A. $x^2+2\sqrt{2}x=0$ B. $x^2-2\sqrt{2}x=0$ C. $x^2-4x+3=0$ D. $x^2-x+1=0$

Hướng dẫn giải : $x=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{2}$. Đáp án B

Ví dụ 7. Giá trị của biểu thức $\dfrac{\sqrt{80}-\sqrt{125}+\sqrt{45}+\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$ là

A. 1 B. 0 C. 2 D. $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải : $\sqrt{80}-\sqrt{125}+\sqrt{45}+\sqrt{20}=4\sqrt{5}-5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

Vậy giá trị của biểu thức là 2. Đáp án C

Ví dụ 8. Biết rằng $\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=a+b\sqrt{5}$ với a,b là các số nguyên.

Tính $199a+3b$.

A. 199 B. -6 C. 9 D. 6

Hướng dẫn giải : $\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=2+\sqrt{5}-2+\sqrt{5}=2\sqrt{5}\Rightarrow a=0,b=2$. Đáp án D

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 9. Cho $a<0,b<0$. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

A. $1-2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ B. 0 C. -1 D. 1

Hướng dẫn giải : $P=\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}+1-\sqrt{\dfrac{a}{b}}=1$. Đáp án D

Ví dụ 10. Cho $a=\sqrt{5}-\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^4-3a^2+3a+20$

A. 30 B. 32 C. 36 D. 29

Hướng dẫn giải : $a=\sqrt{5}-\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{5}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=2\Rightarrow P=30$

Đáp án A

Ví dụ 11. $x_0=\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}$ là nghiệm của phương trình nào dưới đây.

A. $x^2-3x-4=0$ B. $x^2+4x+4=0$ C. $x^2-3x+2=0$ D. $x^2-8x+15=0$

Hướng dẫn giải : $x_0=\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}=1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}=2$ nên x_0 là nghiệm của phương trình $x^2-3x+2=0$. Đáp án C.

Ví dụ 12. Cho $a+b=1$. Tính giá trị của biểu thức
$S=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2\left(a+b\right)+9$

A. 8 B. 7 C. $2\sqrt{3}$ D. 1

Hướng dẫn giải :

$$S=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2\left(a+b\right)+9$$
$$=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2+9$$
$$=\left(a+b\right)^2-3ab+3ab\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]+6a^2b^2+9$$
$$=1-3ab+3ab(1-2ab)+6a^2b^2+9=10$$

Ví dụ 13. Rút gọn biểu thức $M=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$ ta được

A. 3 B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 1

Hướng dẫn giải :

$$M=\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$$
$$=\sqrt{8+2\sqrt{15}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=2$$

Đáp án B.

Ví dụ 14. Nếu a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c+11=6\sqrt{a-2}+4\sqrt{b-1}+2\sqrt{c}$

thì $a+b+c$ bằng

A. 15 B. 16 C. 17 D. 19

Hướng dẫn giải :

$$\left(a-2-6\sqrt{a-2}+9\right)+\left(b-1-4\sqrt{b-1}+4\right)+\left(c-2\sqrt{c}+1\right)=0$$

Ta có $\Leftrightarrow\left(\sqrt{(a-2)}-3\right)^2+\left(\sqrt{b-1}-2\right)^2+\left(\sqrt{c}-1\right)^2=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(a-2)}-3=0\\ \sqrt{b-1}-2=0\\ \sqrt{c}-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=11\\ b=5\\ c=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c=17$$

Đáp án C

Ví dụ 15. Rút gọn biểu thức $Q=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

A. 2 B. 1 C. $2\sqrt{3}$ D. 3

Hướng dẫn giải :

$$Q=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}=1$$

Đáp án B

Ví dụ 16. Rút gọn biểu thức $M=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1}$

A. $\sqrt{n+1}+1$ B. $\sqrt{n}-1$ C. $\sqrt{n}+1$ D. $\sqrt{n+1}-1$

Hướng dẫn giải :

$$M=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+...+\left(\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+\left(\sqrt{n}+1-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1$$

Đáp án D.

c. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 17. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực thỏa mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Tính giá trị của biểu thức $Q=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

A. $a+b+c$ B. $2a$ C. 1 D. 0

Hướng dẫn giải :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1\Leftrightarrow Q+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ca}\right)=1\Leftrightarrow Q+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}\right)=1$$

Do $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0\Rightarrow Q=1$. Đáp án C

Ví dụ 18. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$\sqrt{a-3}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c-1}=\frac{a+b+c-3}{2}$. Tính $S=a+2b+3c$

A. 16 B. 17 C. 18 D. 13

Hướng dẫn giải : Từ giả thiết ta có

$$\left(a-3-2\sqrt{a-3}+1\right)+\left(b-2-2\sqrt{b-2}+1\right)+\left(c-1-2\sqrt{c-1}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a-3}-1\right)^2+\left(\sqrt{b-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{c-1}-1\right)^2=0$$

$$\Rightarrow a=4,b=3,c=2$$

Đáp án A

Ví dụ 19. Tính giá trị của biểu thức $a=\sqrt{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$

A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải : $a^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3a\sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)}$

$\Leftrightarrow a^3 = 2 - a \Leftrightarrow (a-1)\left(a^2+a+2\right) = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Đáp án A

Ví dụ 20. Rút gọn biểu thức $Q = \frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$

A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải :

$$Q = \frac{3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}+1\right)} - \frac{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)} = \frac{3\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}{2+1} - \frac{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{2-1} = 2$$. Đáp án C

Ví dụ 21. Cho a,b,c là các số thỏa mãn $abc \neq 0$ và $a+b+c=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

A. 1 B. -1 C. 0 D. 3

Hướng dẫn giải :

Từ giả thiết $(a+b)^2 = (-c)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2 = -2ab$

Tương tự $\left(b^2+c^2\right) = (-a)^2 \Leftrightarrow^2 b^2+c^2-a^2 = -2bc$

Tương tự $(c+a)^2 = (-b)^2 \Leftrightarrow^2 c^2+a^2-b \; = -2ac$

Do đó $M = \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{1}{-2abc}(a+b+c) = 0$. Đáp án C

Ví dụ 22. Tính giá trị của biểu thức $P = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 101.102$

A. 353720 B. 353702 353700 C. 353270

Hướng dẫn giải :

$3P = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + 101.102.3 = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + 101.102.(103-100)$

$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + ... + 101.102.103 - 100.102.103 = 101.102.103 \Rightarrow P = 353702$

Ví dụ 22. Cho a,b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^3+b^3+15$.

A. 0 B. -15 C. 15 D. 12

Hướng dẫn giải : Từ giả thiết ta có $\left(a-\sqrt{1+a^2}\right)\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=\left(a-\sqrt{1+a^2}\right)\Leftrightarrow\left(-b-\sqrt{1+b^2}\right)=\left(a-\sqrt{1+a^2}\right)$(1)

$\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)\left(b-\sqrt{1+b^2}\right)=\left(b-\sqrt{1+b^2}\right)\Leftrightarrow\left(-a-\sqrt{1+a^2}\right)=\left(b-\sqrt{1+b^2}\right)$(2)

Cộng (1) vs (2) Ta có $a=-b\Leftrightarrow a^3=(-b)^3\Rightarrow\Rightarrow P=15$. Đáp án C.

Ví dụ 24. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$2a^2+2b^2-4c^2-4bc-4ac+2ab+2b-6a+10=0$. Tính giá trị của biểu thức

$Q=(a-2)^{100}+(b+1)^{200}+(c-1)^{201}$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Hướng dẫn giải : Từ giả thiết ta có

$(a+b-2c)^2+\left(a-3^2\right)+(b+1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}a+b-2c=0\\a-3=0\\b+1=0\end{cases}\Rightarrow a=3,b=-1,c=1\Rightarrow Q=1$. Đáp án C

Dạng 2: Biến đổi rút gọn biểu thức

a. *Các bài toán đơn giản*

Ví dụ 25. Rút gọn biểu thức $E=(2a+b-4c)-(a+2b-3c)+c$ ta được

A. $a-b-c$ B. $a-b$ C. $2a-b$ D. $a-c$

Hướng dẫn giải : $E=(2a+b-4c)-(a+2b-3c)+c=a-b$. Đáp án B

Ví dụ 26. Phân tích đa thức $a^2+5a-14$ thành tích ta được

A. $(a+2)(a-7)$ B. $(a-2)(a-7)$ C. $(a-2)(a+7)$ D. $(a-3)(a+5)$

Hướng dẫn giải : $a^2+5a-14=a^2+7a-2a-14=a(a+7)-2(a+7)=(a-2)(a+7)$

Đáp án C

Ví dụ 27. Cho đa thức $M=a^2-6a+15$. Khẳng định nào dưới đây đúng

A. $M<0$ với mọi giá trị của a B. $M\geq 6$ với mọi giá trị của a

C. $M\geq 8$ với mọi giá trị của a D. $M\leq 20$ với mọi giá trị của a

Hướng dẫn giải : $M=a^2-6a+15=(a-3)^2+6\geq 6, M=6\Leftrightarrow a=3$. Đáp án B

Ví dụ 28. Cho $a \le 5$, giá trị của biểu thức $E = \sqrt{a^2 - 10a + 25} - 2a + 3$ bằng

A. $8 - 3a$ B. $8 + 3a$ C. $7 - 3a$ D. $3a - 8$

Hướng dẫn giải : $E = \sqrt{a^2 - 10a + 25} - 2a + 3 = \sqrt{(a-5)^2} - 2a + 3 = |a - 5| - 2a + 3 = 8 - 3a$

Đáp án A.

Ví dụ 29. Phép biến đổi nào dưới đây là sai

A. $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = |a - 3|$

B. $\sqrt{a^4\left(a^2+1\right)^2} = a^2\left(a^2+1\right)$

C. $\sqrt{a^2\left(a^2+2\right)} = |a|\sqrt{\left(a^2+2\right)}$

D. $\sqrt{(a-1)(a-3)} = \sqrt{(a-1)}\sqrt{(a-3)}$

Hướng dẫn giải : $\sqrt{(a-1)(a-3)} = \sqrt{(a-1)(a-3)}$ có tập xác định là $a \le 1$ hoặc $a \ge 3$. $\sqrt{(a-1)}\sqrt{(a-3)}$ có tập xác định là $a \ge 3$. Do đó ở đáp án D làm thay đổi tập xác định vậy đáp án D.

Ví dụ 30. Cho $a < 0 < b$, thì $\frac{-1}{3}ab^5\sqrt{\frac{81a^2}{b^{10}}}$ bằng

A. $-3a$ B. $3a^2$ C. $3a^2b$ D. $2a^2$

Hướng dẫn giải : $\frac{-1}{3}ab^5\sqrt{\frac{81a^2}{b^{10}}} = \frac{-1}{3}ab^5\frac{9|a|}{b^5} = 3a^2$. Đáp án B

Ví dụ 31. Cho $a < 0, b \ne 0$. Rút gọn biểu thức $E = \frac{\sqrt{64a^{10}b^{54}}}{\sqrt{256a^{12}b^{54}}}$

A. $\frac{1}{2a}$ B. $\frac{-1}{2a}$ C. $\frac{1}{4a}$ D. $\frac{-1}{4a}$

Hướng dẫn giải : $E = \sqrt{\frac{1}{4a^2}} = \frac{-1}{2a}$. Đáp án B

Ví dụ 32. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a < b < 0$. Biểu thức $P = \frac{15}{b-a}\sqrt{a^{10}(a-b)^2}$ sau khi rút gọn bằng

A. $15a^2$ B. $15a^9$ C. $-15a^5$ D. $15(a-b)$

Hướng dẫn giải: $P = \frac{15}{b-a}\sqrt{a^{10}(a-b)^2} = \frac{15}{b-a}\left|a^5\right||a-b| = -15a^5$.Đáp án C

b. Các bài toán về giá trị trung bình

Ví dụ 33. Nếu $\sqrt{a+42} - \sqrt{a-42} = 4$ thì $\sqrt{a+42} + \sqrt{a-42}$ bằng bao nhiêu?

A. 42 B. 22 C. 20 D. 21

Hướng dẫn giải:

$4\left(\sqrt{a+42}+\sqrt{a-42}\right)=\left(\sqrt{a+42}-\sqrt{a-42}\right)\left(\sqrt{a+42}+\sqrt{a-42}\right)\Rightarrow\left(\sqrt{a+42}+\sqrt{a-42}\right)=21$

Đáp án D

Ví dụ 34. Cho $a\neq 0, a\neq 1, a\neq 3$. Biểu thức $M=\frac{2a}{a^2-3a}+\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a^2-4a+3}$ sau khi rút gọn bằng

A. $\frac{a-2}{a-3}$ B. $\frac{-a-2}{a-3}$ C. $\frac{a+2}{a-3}$ D. $\frac{a+1}{a-1}$

Hướng dẫn giải:

$M=\frac{2}{a-3}+\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{(a-1)(a-3)}=\frac{a^2+a-2}{(a-1)(a-3)}=\frac{a+2}{a-3}$. Đáp án C

Ví dụ 35. Rút gọn biểu thức sau $E=\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a+1}{a}\right):\left(\frac{a}{a+1}-\frac{a-1}{a}\right)$

A. $\frac{a+1}{a-1}$ B. $\frac{a-1}{a+1}$ C. $\frac{2a+1}{a-1}$ D. $\frac{a+2}{a-1}$

Hướng dẫn giải: $E=\frac{a^2-\left(a^2-1\right)}{a(a-1)}:\frac{a^2-\left(a^2-1\right)}{a(a+1)}=\frac{a+1}{a-1}$. Đáp án A

Ví dụ 36. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\right):\left(\frac{2}{a^2-1}-\frac{a}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)$

A. $\frac{2a}{1-a^2}$ B. $\frac{3a}{1-a^2}$ C. $\frac{4a}{1-a^2}$ D. $\frac{1-a}{1+a}$

Hướng dẫn giải: $P=\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{a^2-1}:\frac{2-a(a+1)+a-1}{a^2-1}=\frac{4a}{a^2-1}.\frac{a^2-1}{1-a^2}=\frac{4a}{1-a^2}$. Đáp án C

Ví dụ 37. Cho các số thực a,b thỏa mãn $a\geq 0, b\geq 0$. Trong các khẳng định sau có mấy khẳng định sai?

I. $2a\geq\sqrt{a}$ II. $a\leq\sqrt{3a}$

III.Nếu $a\geq b$ thì $\sqrt{a}\geq\sqrt{b}$ IV. $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Với $a=\frac{1}{16}$ thì khẳng định I là sai

Với $a=4$ thì khẳng định II là sai

Dễ dàng chứng minh khẳng định III, IV là đúng

Ví dụ 38. Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+8+6\sqrt{a-1}}$

A. -2 B. 2 C. $\sqrt{a-1}-2$ D. $\sqrt{a-1}+2$

Hướng dẫn giải:

$\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1}-\sqrt{a-1+6\sqrt{a-1}+9}=\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+3\right)^2}=-2$. Đáp án A

Ví dụ 39. Cho $P=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $P<-2$ B. $-2\le P\le -1$ C. $-1<P<1$ D. $P\ge 1$

Hướng dẫn giải:

$\sqrt{2}P=\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=-2\Rightarrow P=-\sqrt{2}$. Đáp án B

Ví dụ 40. Cho a,b,c,A,B,C là các số dương thỏa mãn $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$. Giá trị của biểu thức

$P=\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC}-\sqrt{(a+b+c)(A+B+C)}$ bằng:

A. 1 B. -1 C. 0 D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{a+b+c}{A+B+C}=k\Rightarrow a=kA,b=kB,c=kC$

$\Rightarrow\sqrt{k}\left(A+B+C\right)-\sqrt{(kA+kB+kC)(A+B+C)}=\sqrt{k}\left(A+B+C\right)-\sqrt{k}\left(A+B+C\right)=0$. Đáp án C

c. Các dạng toán phức tạp

Ví dụ 41. Các số thực x,y,z thỏa mãn $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. Trong các số x,y,z tồn tại ít nhất một số khác 0

B. $x=y=z=0$

C. Tồn tại ít nhất một trong các số x,y,z là số vô tỷ

D. $x<y<z$

Hướng dẫn giải: Từ giả thiết ta có :

$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=2\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow\left(x+y+z\right)^2=2\left(x^2+y^2+z^2\right)\Rightarrow x=y=z=0$.

Đáp án B.

Ví dụ 42. Rút gọn biểu thức $P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)...\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right), n\in N^*$

A. $\frac{n+1}{n+2}$ B. $\frac{2(n+1)}{n+2}$ C. $\frac{2}{n+2}$ D. $\frac{2n}{n+2}$

Hướng dẫn giải: Ta có $1+\frac{1}{k^2+2k}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$. Do đó ta có :

$P=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}...\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{2(n+1)}{(n+2)}$. Đáp án B.

Ví dụ 43. Cho a,b,c là các số thực khác nhau. Biểu thức $Q=\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ sau khi rút gọn bằng

A. $\left|\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|$ B. $\left|\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b-c}-\frac{1}{c-a}\right|$

C. $\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|$ D. $\left|\frac{2}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|$

Hướng dẫn giải: Đặt $x=a-b, y=b-c, z=c-a \Rightarrow x+y+z=0$. Khi đó

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xyz}(x+y+z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\Rightarrow Q=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right|$. Đáp án C

Ví dụ 44. Cho biểu thức $S=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$. Tìm đoạn có giá trị lớn nhất sao cho S có giá trị lớn nhất trên đoạn đó

A. $[1;5]$ B. $[1;10]$ C. $[5;10]$ D. $[8;15]$

Hướng dẫn giải:

$$S=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=\left|\left(\sqrt{x-1}-2\right)\right|+\left|\left(\sqrt{x-1}-3\right)\right|$$

$$=\begin{cases}-2\sqrt{x-1}+5;1\le x<5\\1;5\le x\le 10\\2\sqrt{x-1}-5;x>10\end{cases}$$

Do đó với $5\le x\le 10$ thì $S=1$ không đổi. Đáp án C

Ví dụ 44. $x_0=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ là nghiệm của phương trình nào sau đây.

A. $x^2-4=0$ B. $x^2-4x=0$ C. $x^2-6x+9=0$ D. $x^2+4x=0$

Hướng dẫn giải:

$x_0=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$. Do đó x_0 là nghiệm của phương trình $x^2-4x=0$. Đáp án B.

Ví dụ 46. Cho $M=\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$, $N=a^4+20a^3+102a^2+40a+200$. Có bao nhiêu giá trị của a, để $M+N=0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải:

$M=\sqrt{20a+92+\sqrt{\left(a^2+8\right)^2}}=\sqrt{a^2+20a+100}=|a+10|\geq 0$

$N=\left(a^2+10a\right)^2+2\left(a+10\right)^2\geq 0$.

Khi đó $M+N=0\Leftrightarrow M=N=0\Leftrightarrow a=-10$. Đáp án B

Ví dụ 47. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Khi đó biểu thức $Q=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}$. Sau khi biến đổi bằng:

A. $\frac{1}{x^3+y^3+z^3}$ B. $\frac{2}{x^3+y^3+z^3}$ C. $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ D. $x^3+y^3+z^3$

Hướng dẫn giải: Từ giả thiết ta có

$$\frac{xy+yz+xz}{xyz}=\frac{1}{x+y+z}\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+xz)=xyz\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$$

Nếu $x+y=0\Rightarrow y=-x\Rightarrow y^3=-x^3\Rightarrow Q=\frac{1}{z^3}$. Với hai trường hợp còn lại ta có kết quả tương tự. Đáp án A

Ví dụ 48. Cho n là số nguyên dương. Rút gọn biểu thức

$P=\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+...+\frac{2n+1}{[\text{n(n+1)}]^2}$.

A. $\frac{n^2-n}{(n+1)^2}$ B. $\frac{n^2-2n}{(n+1)^2}$ C. $\frac{n^2+n}{(n+1)^2}$ D. $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

Hướng dẫn giải: Ta có $\frac{2k+1}{\left[k(k+1)\right]^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$.

Do đó $P=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n^2+2n}{\left(n+1\right)^2}$. Đáp án D.

Dạng 3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a. Các bài tập đơn giản

Ví dụ 49. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=a^2-6a+32$

A. 22 B. 23 C. 24 D. 25

Hướng dẫn giải: $M=(a-3)^2+23\ge 23$. Đáp án B

Ví dụ 50. Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất $P=\frac{18}{x^2-2x+4}$

A. 1 B. -1 C. 6 D. 2

Hướng dẫn giải: $P=\frac{18}{(x-1)^2+3}\Rightarrow \max P=6$ khi $x=1$. Đáp án A

Ví dụ 51. Khi $x\in Z$ thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E=\frac{31}{2x+5}$ là :

A. 31 B. -31 C. -32 D. -62

Hướng dẫn giải: Biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất khi $2x+5=-1\Leftrightarrow x=-3$. Khi đó $MinE=-31$.

Đáp án C

Ví dụ 52. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\sqrt{8+2x-x^2}$ là :

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Hướng dẫn giải: $M=\sqrt{-\left(x^2-2x+1\right)+9}=\sqrt{-(x-1)^2+9}\le 3$. Do đó, $\max M=3\Leftrightarrow x=1$.

Đáp án B

Ví dụ 53. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{42}{5+\sqrt{1-19x^2}}$ là:

A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

Hướng dẫn giải: Ta có $5+\sqrt{1-19x^2}\le 6\Rightarrow \frac{42}{5+\sqrt{1-19x^2}}$. Đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7 khi $x=0$.

Đáp án C

Ví dụ 54. Cho $M=-x^2+4x-19$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $M\ge 0$ với mọi giá trị của x B. $M\le -15$ với mọi giá trị của x

C. $M \le -16$ với mọi giá trị của x D. $-20 \le M \le 0$ với mọi giá trị của x

Hướng dẫn giải: $M = -\left(x^2 - 4x - 4\right) - 15 = -\left(x-2\right)^2 - 15 \le -15$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Đáp án B.

b. Các dạng toán trung bình

Ví dụ 55. Tìm giá trị của x để biểu thức $M = \sqrt{24x + 139 + \sqrt{x^4 + 18x^2 + 81}}$. Nhận giá trị nhỏ nhất

A. -11 B. -12 C. -9 D. 11

Hướng dẫn giải: $M = \sqrt{24x + 139 + \sqrt{\left(x+9\right)^2}} = \sqrt{\left(x^2 + 24x + 144\right) + 4} = \sqrt{\left(x+12\right)^2 + 4} \ge 2$

Vậy min $M = 2 \Leftrightarrow x = -12$. Đáp án B

Ví dụ 56. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 14x + 49}$

A. 10 B. 11 C. 9 D. 8

Hướng dẫn giải: $P = \sqrt{\left(x+3\right)^2} + \sqrt{\left(x-7\right)^2} = \left|x+3\right| + \left|7-x\right| \ge \left|x+3+7-x\right| = 10$. Min $P = 10 \Leftrightarrow -3 \le x \le 7$. Đáp án A

Ví dụ 57. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x - 2\sqrt{x+1} - 5$

A. -10 B. -9 C. -8 D. -7

Hướng dẫn giải: $Q = \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 - 7 \ge -7$. Min $Q = -7 \Leftrightarrow x = 0$. Đáp D

Ví dụ 58. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \sqrt{x - 2\sqrt{x-2} - 1} + \sqrt{x + 6\sqrt{x-2} + 7}$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Hướng dẫn giải: $S = \sqrt{\left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-2} + 3\right)^2} = \left|\sqrt{x-2} - 1\right| + \sqrt{x-2} + 3$

Nếu $2 \le x \le 3$ thì $S = 4$

Nếu $x > 3$ thì $S = 2\sqrt{x-2} + 2 > 4$. Do đó min $S = 4$ khi $2 \le x \le 3$. Đáp án B

Ví dụ 59. Cho a, b, c, d là các số dương thay đổi và $x = 2a + b - 2\sqrt{cd}$, $y = c + d - 2\sqrt{ab}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $x < 0$ và $y < 0$ B. $x > 0$ và $y > 0$

C. $x > 0$ hoặc $y > 0$ D. $x < 0$ hoặc $y < 0$

Hướng dẫn giải:

$x+y=(a-2\sqrt{ab}+b)+(c-2\sqrt{cd}+d)+a=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)^2+a>0$

$\Rightarrow x>0$ hoặc $y>0$. Đáp án C

c. Các dạng toán phức tạp

Ví dụ 60. Cho $x\ge 2, y\ge 3$ và $x+y=7$. Khi đó $M=\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}$. Đạt giá trị lớn nhất thì xy bằng.

A. 15 B. 14 C. 12 D. 10

Hướng dẫn giải: $M^2=\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}\right)^2\le 2\left(x+y-5\right)=4\Rightarrow M\le 2.$

$\max M=2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{1}=\frac{\sqrt{y-3}}{1}\Rightarrow x=3, y=4\Rightarrow xy=12$

Ví dụ 61. Giá trị nhỏ nhất của $S=\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{17}{2}}$ là .

A. 9 B. 10 C. 8 D. 9

Hướng dẫn giải: Đặt $t=\sqrt{x+\frac{1}{4}}\Rightarrow x=t^2-\frac{1}{4}\Rightarrow S=\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{17}{2}}\ge 9$, min $S=9$ khi $x=\frac{-1}{4}$. Đáp án A.

Ví dụ 62. Cho $a+b+ab=8$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a^2+b^2$ là

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

Hướng dẫn giải:

$\left(a-2\right)^2\ge 0\Rightarrow a^2+4\ge 4a(1)$

$\left(b-2\right)^2\ge 0\Rightarrow b^2+4\ge 4b(2)$

$\left(a-b\right)^2\ge 0\Rightarrow 2a^2+2b^2\ge 4ab(3)$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow 3Q+8\ge 4(a+b+ab)=32\Rightarrow Q\ge 8$. Vậy min $Q=8$ khi $a=b=2$. Đáp án C

Ví dụ 63.

Dạng 4. Điều kiện để biểu thức thỏa mãn điều kiện cho trước

a. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 64. Cho $P=\frac{\left(x^2-16\right)\left(x^2-x+7\right)}{x^2+1}$, có bao nhiêu giá trị của x để $P=0$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: $P=0\Leftrightarrow x^4-16=0\Leftrightarrow x=\pm 2$. Đáp án B

Ví dụ 65. $x=3$ không thuộc tập xác định của biểu thức nào dưới đây

A. $\dfrac{5x+1}{2x+6}$ B. $\dfrac{17}{x^2+2x-3}$ C. $\dfrac{21x^4}{x^2-3}$ D. $\dfrac{9}{x^2-2x-3}$

Hướng dẫn giải: Ta có $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3$. Đáp án D

Ví dụ 66. Biểu thức $E=\sqrt{x-3}+\sqrt{12-x}+\sqrt{x^2+1}$ có nghĩa khi

A. $x\le 3$ hoặc $x\ge 12$ B. $x\le 12$ C. $3\le x\le 12$ D. $x\ge 3$

Hướng dẫn giải: E có nghĩa khi $\begin{cases} x-3\ge 0 \\ 12-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le x\le 12$. Đáp án C

Ví dụ 67. Biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x-7}}{x^2-16}$ có nghĩa khi

A. $x\ne \pm 4$ B. $x\ge 7$ C. $x<7$ D. $x\ne \pm 16$

Hướng dẫn giải: $P=\dfrac{\sqrt{x-7}}{x^2-16}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x-7\ge 0 \\ x^2-16\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 7$. Đáp án B

Ví dụ 68. Tìm số nguyên a nhỏ nhất để biểu thức $M=\sqrt{\dfrac{-192}{15-a}}$ có nghĩa

A. 16 B. 17 C. 14 D. 15

Hướng dẫn giải: M có nghĩa khi $15-a<0 \Leftrightarrow a>15$. Do $a\in Z$ nên $a=16$. Đáp án A

Ví dụ 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $\sqrt{169-x^2}+\sqrt{x^2-169}$ được xác định.

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải: Q xác định khi $x^2-169=0 \Leftrightarrow x=\pm 13$. Đáp án C

Ví dụ 70. Biểu thức nào sau đây xác định với mọi giá trị của x

A. $\sqrt{x^2-11}$ B. $\sqrt{x^2-12x+20}$ C. $\dfrac{1}{x^2-4}$ D. $\dfrac{5}{x^2-2x+7}$

Hướng dẫn giải: Do $x^2-2x+7=(x-1)^2+6>0$ với mọi $x\in R$

b. Các dạng toán trung bình

Ví dụ 71. Biểu thức $Q=\sqrt{x-\sqrt{x^2-12x+36}}$ có nghĩa khi

A. $x\le 12$ B. $x\ge 2$ C. $x\ge 3$ D. $-3\le x\le 12$

Hướng dẫn giải: $Q=\sqrt{x-\sqrt{(x-6)^2}}=\sqrt{x-|x-6|} \Rightarrow x\ge 3$. Đáp án C

Ví dụ 72. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M=\frac{2\sqrt{x}+11}{\sqrt{x}-1}$ nhận giá trị nguyên

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: $M=2+\frac{13}{\sqrt{x}-1}$, M nguyên khi $\sqrt{x}-1\in\{\pm1;\pm13\}\Rightarrow x\in\{0,4,196\}$. Đáp án C

Ví dụ 73. Cho $a>1, P=\frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}-\frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+1$, khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $P\ge|P|$ B. $P<|P|$ C. $P=|P|$ D. $P=\frac{1}{2}|P|$

Hướng dẫn giải: Sau khi rút gọn ta được $P=a-\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)>0$ do $a>1\Rightarrow P=|P|$

Ví dụ 74. Nếu $|2a-1|=7$ thì $M=\frac{a^4-5a^2+4}{a^4-10a^2+9}$ bằng

A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{-12}{7}$ C. 3 D. $\frac{12}{7}$

Hướng dẫn giải: $M=\frac{(a-1)^2\left(a^2-4\right)}{\left(a^2-1\right)\left(a^2-9\right)}=\frac{a^2-4}{a^2-9}$ với $a\ne\pm1,\pm3$. Do $|2a-1|=7\Rightarrow a=4$ hoặc $a=-3$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow a=4$. Với $a=4$ thì $M=\frac{12}{7}$. Đáp án D

Ví dụ 75. Cho $P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)-1$

Có bao nhiêu giá trị của x để $P=-4$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Sau khi rút gọn ta được $P=\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}$. Với $x\ge0, x\ne1, P=-4\Leftrightarrow x+4\sqrt{x}-2=0$, có một giá trị của x thỏa mãn điều kiện. Đáp án A

c. Các dạng toán phức tạp

Ví dụ 76. Có bao nhiêu số tự nhiên để n, $n+20$ và $n-39$ là số chính phương

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải: Giả sử $n+20=p^2$ và $n-39=q^2$. Khi đó

$p^2-q^2=59\Leftrightarrow(p-q)(p+q)=59\Rightarrow\begin{cases}p-q=1\\p+q=59\end{cases}\Rightarrow p=30, q=29\Rightarrow n=880$. Đáp án B

Ví dụ 77. Có bao nhiêu số tự nhiên n để $n+3, n+13, n+17$ là các số nguyên tố

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Nếu $n=3k+1 (k\geq 0)$ thì $n+17=3k+18$ không là số nguyên tố

Nếu $n=3k+2$ thì $n+13=3k+15$ không là số nguyên tố

Nếu $n=3k$ thì $n+3=3k+3$ là số nguyên tố khi $k=0\Rightarrow n=0$. Đáp án A

Ví dụ 78. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=\frac{2020}{2021}$$

A. 2022 B. 2021 C. 2020 D. 2019

Hướng dẫn giải: Ta có $1+\frac{1}{k(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{k+1}{k}.\frac{k+1}{k+2}$. Cho k nhận các giá trị $1,2,3,...,n$

Ta được $\frac{n+1}{n+2}=\frac{2020}{2021}\Rightarrow n=2019$. Đáp án D

Ví dụ 79. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a.b.c=17$. Tính giá trị của biểu thức

$$M=\frac{1}{1+b+bc}+\frac{17}{17+a+ab}+\frac{17}{17+17c+ac}$$

A. 17 B. 0 C. 1 D. 8

Hướng dẫn giải:

$$\frac{1}{1+b+bc}=\frac{a}{a+ab+abc}=\frac{a}{a+ab+17}$$

$$\frac{17}{a+ab+17}$$

$$\frac{17}{17+17c+ac}=\frac{abc}{abc+17c+ac}=\frac{ab}{ab+17+a}$$

Cộng từng vế ta được $M=1$. Đáp án C

Ví dụ 80. Cho $S=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $S\leq 15$ B. $5<S\leq 17$ C. $17<S<18$ D. $S\geq 18$

Hướng dẫn giải:

Với mọi $n\in N^*$ thì $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$. Áp dụng với $n=2,3,4,...,100$ ta được

$2\sqrt{101}-\sqrt{2}<S<2\sqrt{100}-2\Rightarrow 17<S<18$. Đáp án C

Ví dụ 81. Cho $P=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{101^2}+\frac{1}{102^2}}$. Khẳng định nào là đúng.

A. $99<P<100$ B. $100<P<101$ C. $101<P<102$ D. $102<P<103$

Hướng dẫn giải:

Ta có a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b=c$ thì $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$. Khi đó

$P=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)=100+\frac{1}{2}-\frac{1}{102}\Rightarrow 100<P<101$. Đáp án B

Ví dụ 82. Cho $a=\frac{1}{3}\left(1-\sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}}\right)$. Tính giá trị của biểu thức

$P=a^3-a^2+2021$

Hướng dẫn giải:

$1-3a=\sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}}\Leftrightarrow (1-3a)^3=25+3(1-3a)\ a^3-a^2=-1\Rightarrow P=2020$. Đáp án D

Bài Tập

1.1. Cho $P=\dfrac{(x^2-16)\left(x^2-8x+15\right)}{x^2+3}$ có bao nhiêu giá trị của x để $P=0$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

1.2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $\dfrac{12}{x-5}$ nhận giá trị nguyên

A. 4 B. 8 C.16 D. 12

1.3. Khi $a=-4$ thì giá trị của biểu thức $P=a^3+12a^2+48a+2084$ bằng

A. 2018 B. 2019 C. 2020 D. 2021

1.4. Phân tích đa thức $x^2+3x-18$ thành nhân tử ta được

A. $(x-3)(x+6)$ B. $(x+3)(x-6)$ C. $(x-3)(x-6)$ D. $(x-2)(x+9)$

1.5. Với giá nào của a thì đa thức $M=a^3+a^2+a-3$ nhận giá trị dương?

A. $a\ge 0$ B. $a>1$ C. $0<a<5$ D. $a<8$

1.6. Biểu thức $S=\sqrt{a+3}+\sqrt{25-a^2}+\sqrt{a^2-2a+9}$ có nghĩa

A. $-5\le a\le 5$ B. $a\le -5$ hoặc $a\ge 5$ C. $-3\le a\le 5$ D. $a>-3$

1.7. $x=4$ không thuộc tập xác định nào dưới đây

A. $\dfrac{17}{x^2-4}$ B. $\dfrac{25x^2}{x^2-3x-4}$ C. $\dfrac{1}{x^2+5x+4}$ D. $\sqrt{x^2-3x+17}$

1.8. Cho biểu thức $\sqrt{\dfrac{-(m^2+3)\left(m^2-m+4\right)}{7-m}}$ có nghĩa khi

A. $m<7$ B. $-7<m<7$ C. $m>7$ D. $m>6$

1.9. $x_0=\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ là nghiệm phương trình nào sau đây?

A. $x^2-8x=0$ B. $x^2+6x=0$ C. x^2-4x+3 D. $x^2-6x=0$

1.10. Nếu $\sqrt{37-20\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$ với $a,b\in Z$ thì $3a+2b$ bằng

A.10 B. 11 C. 12 D. 13

1.11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $\dfrac{1372}{x^2-5x+5}$ nhận giá trị nhỏ nhất

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

1.12. Có mấy phép biến đổi dưới đây là SAI?

$\sqrt{a^4(a^2-a+3)}=a^2\sqrt{a^2-a+3}(I)$

$\sqrt{(a-5)(a+3)}=\sqrt{a-5}\sqrt{a+3}(II)$

$(a-7)\sqrt{\dfrac{a+2}{a-7}}=\sqrt{(a-7)(a+2)}(III)$

$\sqrt{(a^2+1)(a^2-3a+4)}=\sqrt{a^2+1}\sqrt{\left(a^2-3a+4\right)}(IV)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

1.13. Rút gọn biểu thức $M=\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

A. 2　　B. 4　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

1.14. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+10a+25}+\sqrt{a^2-10a+25}$

A. 7　　B. 8　　C. 10　　D. 12

1.15. Cho $x>5$, rút gọn biểu thức $E=\dfrac{12\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1}$

A. 6　　B. 12　　C. 13　　D. 24

1.16. Rút gọn biểu thức $F=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$

A. $\dfrac{n+1}{n}$　　B. 1　　C. $\dfrac{n-1}{n+1}$　　D. $\dfrac{n}{n+1}$

1.17. Phép biến đổi nào dưới đây là tương đương

A. $\sqrt{(x-5)^2}=(x-5)$　　B. $\sqrt{\left(x-9\right)\left(x+17\right)}=\sqrt{x-9}\sqrt{x+17}$

C. $\left(x^2+3\right)\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x^2+3}=\sqrt{x^4-9}$　　D. $(x+4)\sqrt{\dfrac{x-2}{x+4}}=\sqrt{\left(x-2\right)\left(x+4\right)}$

1.18. a là số thực thỏa mãn $0<a<1$. Đặt $M=\sqrt{82}+\sqrt{25+a^2}, N=\sqrt{80}+\sqrt{25-a}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $14<M<N$　　B. $N<14<M$　　C. $M<14<N$　　D. $N<M<14$

1.19. Biểu thức nào dưới đây xác định trên R

A. $\sqrt{(x^2+1)(x^2-3x+5)}$　　B. $\dfrac{1}{x^4-4x^2+3}$　　C. $\dfrac{1}{2x^3-3x^2-x+2}$　　D. $\sqrt{x^2-8x+15}$

1.20. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{36\sqrt{83}}{\sqrt{87+4\sqrt{83}}+\sqrt{87-4\sqrt{83}}}$

A. 9　　B. 15　　C. 18　　D. 20

1.21. Rút gọn biểu thức $E=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$

A. $\sqrt{5}$　　B. $-\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

1.22. Cho $a=\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}$, giá trị của biểu thức $a^4-3a^2-3a-2020$ là:

A. 1860　　B. 1862　　C. 1870　　D. 1853

1.23. Cho $a=\frac{1}{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^3-3a+8$

A. 18 B. 19 C. 20 D. 22

1.24. Cho $x_0=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ là nghiệm của phương trình nào sau đây là đúng?

A. $x^2+4x=0$ B. $x^2-5x+6=0$ C. $x^2-4x=0$ D. $x^2-12x+20=0$

1.25. Cho $P=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $P<\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}<P<\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}<P<1$ D. $P>1$

1.26. Tính giá trị của biểu thức $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}+\sqrt{20}+7}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

A. $2\sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}+1$ C. $2\sqrt{5}+1$ D. $\sqrt{5}+3$

1.27. Nếu $\sqrt{3a+64}+\sqrt{3a-64}=32$ thì $\sqrt{3a+64}-\sqrt{3a-64}=?$

A. 8 B. 7 C. 5 D. 4

1.28. Rút gọn biểu thức $E=\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$

A. 4 B. 6 C. 8 D.10

1.29. Rút gọn biểu thức $M=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

A. $5+2\sqrt{2}$	B. $5+3\sqrt{2}$	C. $3+2\sqrt{2}$	D. 4

1.30. Rút gọn biểu thức $Q=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 1 D. 3

1.31. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\sqrt{a-2-2\sqrt{a-3}}-\sqrt{a+1-4\sqrt{a-3}}$

A. $\frac{1}{2}$ B. -1 C. $\frac{3}{2}$ D. 1

1.32. Cho $Q=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$. Tính giá trị của Q khi $5\le x\le 10$

A. $2\sqrt{x-1}+5$ B. $-2\sqrt{x-1}+5$ C. 1 D. 2

1.33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức sau nhận giá trị nguyên

$$P=\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

1.34. Rút gọn biểu thức $M=\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right).\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ với $a>0, a\neq 1$

A. $\dfrac{2}{\sqrt{a}+1}$ B. $\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$ C. $\dfrac{3}{a-1}$ D. $\dfrac{2}{a-1}$

1.35. Rút gọn biểu thức $Q=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}}+\dfrac{2a}{9-a}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-3\sqrt{a}}-\dfrac{2}{\sqrt{a}}\right)$ với $(a>0, a\neq 9, a\neq 25)$

A. $\dfrac{\sqrt{a}}{a-5}$ B. $\dfrac{a}{\sqrt{a}-5}$ C. $\dfrac{2a}{\sqrt{a}-5}$ D. $\dfrac{a}{\sqrt{a}-3}$

1.36. Cho $a>0; a\neq 1$. Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}+\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$

A. $\dfrac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}}$ B. $\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{a}$ C. $\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}}$ D. $\dfrac{a}{\sqrt{a}-3}$

1.37. Cho $a>0, a\neq 9$. Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-3}+\dfrac{3-11\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}$

A. $\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}$ B. $\dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}$ C. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$ D. $\dfrac{a}{\sqrt{a}-3}$

1.38. Cho $M=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, N=\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$ với $a,b>0, a\neq b$. Tính $M.N$

A. $a+b$ B. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ C. $a-b$ D. ab

1.39. Cho $M=\sqrt{a+8+6\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$ với $a\geq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $M<2$ B. $M=2$ C. $2<M<3$ D. $M\geq 3$

1.40. Rút gọn biểu thức $Q=\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}$

A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. 2 D. $2\sqrt{3}-1$

1.41. Cho $a\geq 0, a\neq 4, a\neq 9$. Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{9\sqrt{a}-4a}{a-5\sqrt{a}+6}-\dfrac{2\sqrt{a}+3}{3-\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}$

A. $\dfrac{3+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}$ B. $\dfrac{3-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$ C. $\dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$ D. $\dfrac{3-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}$

1.42. Cho $a\neq 0, a\neq \pm 8$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{8-a}{2+\sqrt[3]{a}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2+\sqrt[3]{a^2}}\right)+\left(\sqrt[3]{a}+\frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2}\right)\frac{\sqrt[3]{a^2}-4}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}}$$

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

1.43. Tìm x để giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}$ bằng 2

A. $-1<x<1$ B. $x\le -1$ C. $1\le x\le 2$ D. $x>2$

1.44. Cho các số thực a,b,c,x,y,z thỏa mãn $a+b+c=x+y+z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^2x+b^2y+c^2z$

A. 0 B. -1 C. 1 D. $a+b+c$

1.45. Cho các số a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$. Tính $E=a+b+c-abc$

A. -1 B. 1 C. 2 D. 0

1.46. Cho các số dương x,y thỏa mãn $x^2+y^2=x^3+y^3=x^4+y^4$. Tính $x+y$

A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

1.47. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn: $5a^2+b^2+2c^2-4ab+4ac-2bc-4a+2c+5=0$. Tính $I=(a-2)^{100}+(b-4)^{200}+(c+2)^{300}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 1976

1.48. Cho $P=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2n+1)^2}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $P<\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}<P<\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}<P<1$ D. $P>1$

1.49. Cho $M=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $M\ge 5$ B. $4<M<5$ C. $M=4$ D. $M<4$

1.50. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn đẳng thức $297665+646\sqrt{3}=\left(a+b\sqrt{3}\right)^2$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

1.51. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ac=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$E=7a\sqrt{\frac{\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)}}+7b\sqrt{\frac{\left(a^2+1\right)\left(c^2+1\right)}{\left(b^2+1\right)}}+7c\sqrt{\frac{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}{\left(c^2+1\right)}}$$

A. 7 B. 14 C. 21 D. 1

1.52. Cho $a=\frac{x^2}{x^2-x+1},P=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$. Khi đó

A. $P=\frac{a^2}{a+1}$ B. $P=\frac{a^2}{2a-1}$ C. $\frac{a^2}{2a+1}$ D. $P=\frac{a}{2a+1}$

1.53. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$

A. 0 B. -1 C. 1 D. 2

1.54. Cho $x=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{\sqrt{2}}{8}$. Tính $S=4x^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}+7$

A. 6 B. 7 C. 8 D. $7+\sqrt{2}$

1.55. Cho $a\ge 0, a\ne 1, M=\frac{a+2}{a\sqrt{a}-1}+\frac{\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}+1}-\frac{1}{\sqrt{a}-1}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $M<0$ C. $0\le M<\frac{1}{3}$ C. $M=\frac{1}{3}$ D. $M>\frac{1}{3}$

1.56. Cho $a=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $E=a^3-3a+16$

A. 47 B. 48 C. 49 D. 50

1.57. Cho a,b là các số dương thỏa mãn $a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$. Tính giá trị của biểu thức

$P=a^2+b^2$.

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

1.58. Cho $M=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}$. Tính $\sqrt[3]{M^2}-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$

A. 0 B. -1 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

1.59. Tính giá trị của biểu thức $Q=\frac{a^5+a^4\sqrt[3]{6}+a^3\sqrt[3]{36}}{\left|a^3-3\right|-3}$

A. $8\sqrt[3]{36}$ B. $6\sqrt[3]{36}$ C. $8\sqrt[3]{16}$ D. $3\sqrt[3]{36}$

1.60. Cho a,b,c,x,y,z thỏa mãn điều kiện $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Đặt

$T=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$, khi đó T bằng:

A. $2\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)$ B. $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)$ C. $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)$ D. $2\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}\right)$

1.61. $x_0=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^2}-a}$ là nghiệm của phương trình nào dưới đây

A. $x^3+3bx-3a=0$ B. $x^3+3bx-a=0$
C. $x^3+3bx-2a=0$ D. $x^3-3bx+2a=0$

1.62. Cho $a=\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}, b=\frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$. Tính $a+b$

A. 0 B. 1 C. $2\sqrt[3]{4}$ D. $2\sqrt[3]{2}$

1.63. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $b<0<a$ và $a+b=1$. Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{b-a}{ab}:\left[\frac{b^2}{(a-b)^2}-\frac{2a^2b}{\left(a^2-b^2\right)^2}+\frac{a^2}{b^2-a^2}\right]$$

A. $\frac{a-b}{ab}$ B. $\frac{(a-b)^3}{ab}$ C. $\frac{1}{ab}$ D. $\frac{(a-b)^2}{ab}$

1.64. Có bao nhiêu số hữu tỉ a để biểu thức $F=\frac{3\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}+1}$ là số nguyên

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

1.65. Cho $a=1+\sqrt{2}, b=1-\sqrt{2}$. Khi đó a^7+b^7 bằng

A. 476 B. 478 C. 472 D. 481

1.66. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính $M=\frac{7a^3+2b^3+abc}{2ab^2+3a^2c}$

A. 2 B. 1 C. 10 D. 5

1.67. Cho a,b,c là các số thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2$$

A. 71 B. 64 C. 81 D. 100

1.68. Cho $a>0$ và $a^2+\frac{1}{a^2}=7$. Tính $a^5+\frac{1}{a^5}$. Tính giá trị của biểu thức

A. 123 B. 122 C. 125 D. 132

1.69. Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(a+c-2b)^2$. Tính giá trị của biểu thức

$$E=\frac{2a+3b+5c}{3a+b+c}$$

A. 2 B. 1 C. 3 D. 5

1.70. Cho các số thực $ab^2c=5$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q=\frac{5b^2}{ab^2+5b^2+c}+\frac{a}{ac+a+5}+\frac{c}{b^2c+c+1}$$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 2 D. 1

HƯỚNG DẪN GIẢI

1.1. $P=0 \Leftrightarrow x\in\{-4;3;4;5\}$. Đáp án D

1.2. $x-5\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12\}$. Đáp án D

1.3. $P=2020$. Đáp án C

1.4. Đáp án A

1.5. $M=(a-1)(a^2+2a+3)>0 \Leftrightarrow a>1$. Đáp án B

1.6. Đáp án C

1.7. Đáp án B

1.8. Biểu thức có nghĩa khi $7-m<0 \Leftrightarrow m>7$. Đáp án C

1.9. $x_0=\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}=6$. Đáp án D

1.10. $\sqrt{37-20\sqrt{3}}=5-2\sqrt{3} \Rightarrow a=5, b=-2$. Đáp án B

1.11. Biểu thức nhận GTNN khi $x^2-5x+5=-1$. Đáp án B.

1.12. Các phép biến đổi (II), (III) là sai. Đáp ánB

1.13. $M^2=4 \Rightarrow M=2$. Đáp án A

1.14. $P=|a+5|+|5-a|\ge|a+5+5-a|=10$ $\min P=10$ khi $-5\le a\le 5$. Đáp án C

1.15. Đáp án B

1.16. Đáp án D

1.17. Đáp án C

1.18. $M>\sqrt{81}+\sqrt{25}=14, N<\sqrt{81}+\sqrt{25}<14$. Đáp án B

1.19. Đáp án A

1.20. $P=\dfrac{36\sqrt{83}}{2\sqrt{83}}=18$. Đáp án C

1.21. Đáp án D

1.22. Đáp án A

1.23. $a^3=\dfrac{1}{6-\sqrt{35}}+6+\sqrt{35}+3a=a^3-3a=12 \Rightarrow P=20$. Đáp án C

1.24. $x_0=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=4$. Đáp án C

1.25. Áp dụng công thức $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$. Ta được

$P=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)<\dfrac{1}{4}$. Đáp án A.

1.26. $M=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\left(\sqrt{5}+1\right)$. Đáp án B

1.27. Đáp án D

1.28. Đáp án C

1.29. Đáp án B

1.30. Đáp án C

1.31. $M = \left|\sqrt{a-3}-1\right| - \left|\sqrt{a-3}-\right| = \begin{cases} -1 \text{ nếu } 3 \le a \le 4 \\ 2\sqrt{a-3} \text{ nếu } 4 < a < 7 \\ 1 \text{ nếu } a \ge 7 \end{cases}$. Max $M = 1$ khi $a \ge 7$

1.32. $Q = \left|\sqrt{x-1}-2\right| + \left|\sqrt{x-1}-3\right| = 1$ khi $5 \le x \le 10$

1.33. $P = \dfrac{1}{x-1}$ với $x>0, x \ne 1$. Đáp án A

1.34. Đáp án D

1.35. Đáp án B

1.36. Đáp án C

1.37. Đáp án B

1.38. Đáp án C

1.39. Đáp án B

1.40. Đáp án A

1.41. Đáp án D

1.42. Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, ta được $P = \dfrac{8-x^3}{x+2} : \left(2 + \dfrac{x^2}{x+2}\right) + \left(x + \dfrac{2x}{x-1}\right) . \dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$. Đáp án A

1.43. Đáp án B

1.44. Ta có

$$(a+b+c)(ax+by+cz) = 0 \Rightarrow M + ab(x+y) + ac(x+z) + bc(y+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow M - abz - acy - bcx = 0 \Leftrightarrow M - abc\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{c}{z}\right) = 0$$

Đáp án A

1.45. $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 2\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right)$. Đáp án D

1.46. Ta có $\begin{cases} x^2(1-x) = y^2(y-1) \\ x^3(1-x) = y^3(y-1) \end{cases}$. Từ đó lập luận $x = y = 1$. Đáp án A

1.47. Từ giả thiết ta có $(2a-b+c)^2 + (a-2)^2 + (c+1)^2 = 0$. Đáp án B

1.48. Với $k \in N, k \ge 2$. Ta có $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k+1}\right)$. Áp dụng cho $k = 3, 5, ..., 2n+1$.

Ta được $P < \dfrac{1}{4}$. Đáp án A

1.49. Đặt $N = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$. Khi đó $M < N$ và $M + N = 8 \Rightarrow M < 4$

Đáp án D

1.50. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a^2+3b^2=297665(1) \\ 2ab=646(2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $ab=323$ suy ra a và b là số lẻ. Mâu thuẫn với (1). Đáp án A

1.51. $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$.

Tương tự $b^2+1=(a+b)(b+c), c^2+1=(a+c)(b+c)$

$E=7a(b+c)+7b(a+c)+7c(a+b)=14$. Đáp án B.

1.52. Ta có $x^4+x^2+1=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

Nếu $x\neq 0$. Thì $P=\dfrac{x}{x^2-x+1}.\dfrac{x}{x^2+x+1}=a\dfrac{1}{\dfrac{x^2+x+1}{x}}=a.\dfrac{1}{\dfrac{x^2-x+1}{x}+2}=\dfrac{a^2}{2a+1}$

Nếu $x=0$ thì $a=0$, công thức trên vẫn đúng. Đáp án C

1.53. Ta có

1.54. $a+b+c=(a+b+c)\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\right)=\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{c^2}{a+b}+a+b+c\Rightarrow P=0$

Đáp án B

1.55. Ta có $x+\dfrac{\sqrt{2}}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}}\Rightarrow\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}\right)$. Đáp án B

1.56. $M=\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1};\dfrac{1}{3}-M=\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{3\left(a+\sqrt{a}+1\right)}>0$. Đáp án B

1.57. Từ giả thiết ta có $a^3-3a=34\Rightarrow a^3-3a+16=50$. Đáp án D

1.58. $0<a,b\leq 1\Rightarrow\left(a+\sqrt{1-a^2}\right)^2=\left(b+\sqrt{1-b^2}\right)^2\Rightarrow a^2(1-a^2)=b^2(1-b^2)$

$\Rightarrow\left(a^2-b^2\right)\left[1-\left(a^2+b^2\right)\right]=0$. Đáp án C

1.59. Đáp án A

1.60. $\mathrm{Q}=\begin{cases} -\left(\mathrm{a}^2+\mathrm{a}\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}\right)\text{khi } 0\neq \mathrm{a}\ \sqrt[3]{3} \\ \dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}-\sqrt[3]{6}}\text{khi }\sqrt[3]{3}\leq 3\neq\sqrt[3]{6} \end{cases}$. Đáp án A

1.61. Đặt $ax^3=t^3\Rightarrow a=\dfrac{t^3}{x^3}\Rightarrow T=\sqrt[3]{\dfrac{t^3}{x}+\dfrac{t^3}{y}+\dfrac{t^3}{z}}\Rightarrow t=\dfrac{t}{x}+\dfrac{t}{y}+\dfrac{t}{z}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$. Đáp án B

1.62. Đáp án C

1.63. $a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}, b=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$. Đáp án C

1.64. Đáp án D

1.65. $F=3+\dfrac{5}{\sqrt{a}+1}\in Z$ khi $\dfrac{5}{\sqrt{a}+1}=n\left(n\in N^*\right)\Rightarrow\sqrt{a}=\dfrac{5-n}{n}\Rightarrow n\in\{1;2;3;4;5\}$. Đáp án C

1.66. $a+b=2, ab=-1\Rightarrow a^2+b^2=6, a^3+b^3=14, a^4+b^4=34$

$\Rightarrow a^7+b^7=\left(a^3+b^3\right)\left(a^4+b^4\right)-a^3b^3\left(a+b\right)=478$. Đáp án B

1.67. Theo bất đẳng thức cô – si: $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$. Theo giả thiết dấu bằng sảy ra khi $a=b=c$. Đáp án A

1.68. Đặt $x=a+b+c\Rightarrow 2a+2b-c=2x-3c$

$P=\left(2x-3c\right)^2+\left(2x-3a\right)^2+\left(2x-3b\right)^2=12x^2-12x\left(a+b+c\right)+9\left(a^2+b^2+c^2\right)=81.$

Đáp án C

1.69. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{1}{a^2}+2=9\Rightarrow a+\dfrac{1}{a}=3\Rightarrow a^3+\dfrac{1}{a^3}=18;a^4+\dfrac{1}{a^4}=18$

$M=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a^4+\dfrac{1}{a^4}\right)-\left(a^3+\dfrac{1}{a^3}\right)=123$. Đáp án A

1.70. Nhân tử và mẫu của phân thức thứ hai với b^2, của phân thức thứ 3 với $ab^2,ab^2c=5$

Đáp án D.

1.71. Đặt $x=a-b,y=b-c,z=c-a$ thì $x+y+z=0$.

Từ giả thiết $x^2+y^2+z^2=\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\Rightarrow x=y=z=0$. Đáp án A

CHƯƠNG II: PHƯƠNG TRÌNH

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong chương này ta chú ý đến các bài toán sau: Phương trình không chứa căn thức, phương trình vô tỷ, phương trình nghiệm nguyên và phương trình chứa tham số.

a) Phương trình không chứa căn thức

Ta có nhiều cách phân loại, chẳng hạn phân loại của dạng biểu thức trong phương trình hay phân loại theo cách giải. Dưới đây ta nhắc lại một số dạng phương trình thường gặp, cách giải các loại đó được thể hiện qua các ví dụ.

1. Phương trình bậc nhất $ax+b=0\ \left(a\neq 0\right)$
2. Phương trình bậc hai
3. Phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0\left(a\neq 0\right)$

   Đặc biệt $\left(x-x_0\right)\left(a'x^2+b'x+c\right)=0$
4. Phương trình bậc bốn :

   Loại 1: Dạng trùng phương $ax^4+bx^2+c=0\left(a\neq 0\right)$

   Loại 2: $A.\left(ax^2+bx+c\right)^2+B.\left(ax^2+bx+c\right)+C=0$

   Loại 3: $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right)=e$ với $a+d=b+c$

   Loại 4: $\left(x+a\right)^4+\left(x+b\right)^4=c$

   Loại 5: $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right)=ex^2$ với $ad=bc$
5. Phương trình bậc cao

   Loại 1: $f(x)=0\Leftrightarrow\left(x-x_0\right)g\left(x\right)=0$

   Loại 2: $a\left[f(x)\right]^2+bf(x)g(x)+c\left[g(x)\right]^2=0$

   Loại 3: $\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=a$ với $bf(x)g(x)=f(x)\pm g(x)$
6. Phương trình dạng phân thức

   Loại 1: $\dfrac{px}{ax^2+bx+c}+\dfrac{qx}{ax^2+b'x+c}=m$

   Loại 2: $p\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}\right)^2+q\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}\right)+k=0$
7. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

   $\left|A\right|=\left|B\right|,\left|A\right|=B,\left|A\right|+\left|B\right|=C$.

Với hầu hết các phương trình có dạng như trên ta dùng phương pháp biến đổi đưa về dạng phương trình tích, phương pháp đặt ẩn phụ hoặc phương pháp đánh gia hai vế.

b. Phương trình vô tỉ

Một số phương trình vô tỉ thường gặp:

Loại 1: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\end{array}\right.\\ f(x)=g(x)\end{cases}$

Loại 2: $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)=\left[g(x)\right]^2\end{cases}$

Loại 3: $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\left[g(x)\right]^3$

Loại 4: $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Loại 5: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$

Loại 6: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)$

Đối với phương trình vô tỉ ta thường giải bằng cách biến đổi tương đương, đặt ẩn phụ hoặc phương pháp đánh giá.

c.Phương trình nghiệm nguyên

Phương trình nghiệm nguyên là một đề tài lí thú của toán học, được rất nhiều người quan tâm từ các em học sinh nhỏ tuổi đến các chuyên gia toán học. Có các bài toán lớn về phương trình nghiệm nguyên như định lí lớn Fermat: Phương trình $x^n+y^n=z^n$ không có nghiệm nguyên với mọi số nguyên $n\ge 3$, tồn tại từ thế kỉ XVII đến năm 1994 mới được nhà khoa học người Anh Andrew Wiles chứng minh hoàn chỉnh.

Không có một phương pháp chung để giải phương trình nghiệm nguyên. Tuy nhiên cũng có những phương pháp thích hợp đê giải từng lớp các phương trình nghiệm nguyên. Đó là phương pháp phân tích thành tích, phương pháp đánh giá hạn chế miền nghiệm, phương pháp sử dụng tính chất chia hết của các số và các phương pháp khác.

d. Phương trình chứa tham số

Đối với phương trình chưa tham số ta thường gặp các dạng toán: Tìm điều kiện của tham số phương trình có nghiệm, vô nghiệm, vô số nghiệm, phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước , hai phương trình có nghiệm chung….

A. Phương pháp giải thông qua các ví dụ:

Dạng 1: phương trình không chứa căn thức

a) Các bài toán đơn giản:

Ví dụ 1. Số nghiệm của phương trình $x^4+321x^2-975=0$ là :

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = x^2$ ta được $t^2 + 321t - 975 = 0(1)$ do 1 và -975 trái dấu nên $t_1 < 0$ (loại), $t_2 > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. Đáp án B

Ví dụ 2. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-2)...(x-11)(x-12) = 0$ bằng

A. 75 B. 76 C. 77 D. 78

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho có tập nghiệm là $\{1;2;...;12\}$. Nên tổng các nghiệm của phương trình là 78. Đáp án D

Ví dụ 3. Phương trình nào dưới đây có tổng các nghiệm là lớn nhất:

A. $x^2 - 6x - (m^2 + 9) = 0$ B. $x^2 - 3x - 41 = 0$

C. $x^2 - 5x + 4 = 0$ D. $x^2 - x - (m^2 + 37) = 0$

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy các phương trình đã cho đều có hai nghiệm phân biệt. Tổng các nghiệm của phương trình A, B, C, D lần lượt là $6;3;5;1$. Đáp án A.

Ví dụ 4. Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $-2x^2 - 4x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $E = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.

A. $\frac{5}{2}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

Hướng dẫn giải:

Theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -2;\ x_1.x_2 = -\frac{1}{2}$.

$E = x_1x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = x_1x_2\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right] = -\frac{5}{2}$. Đáp án C

Ví dụ 5. Trong các phép biến đổi dưới đây phép biến đổi nào là đúng:

A. $\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3} = -2 \Leftrightarrow x - 5 = -2$ B. $|4x - 9| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 9 = 5 \\ 4x - 9 = -5 \end{array}\right.$

C. $\sqrt{(x-3)^2} = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 4$ D. $(x+7)\left(x^2 - 8x + 7\right) = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 1$

Hướng dẫn giải:

Phép biến đổi A sai vì thiếu điều kiện $x \neq 3$

Phép biến đổi C sai vì thiếu trường hợp $x - 3 = -4$

Phép biến đổi D sai vì đã chia hai vế của phương trình cho $x + 7$.

Đáp án đúng là B.

b) Các bài toán trung bình:

Ví dụ 6. Phương trình nào dưới đây có tổng các nghiệm đạt giá trị lớn nhất:

A. $x^2-7x-131=0$ B. $3x^2-15x-916=0$

C. $x^2-(k^2+9)x-47=0$ D. $(x+3)(x-2)(x^2-16)=0$

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy tổng các nghiệm của phương trình ở A, B, C, D lần lượt là $7;5;k^2+9;-1$. Đáp án C.

Ví dụ 7. Phương trình nào dưới đây có các nghiệm là $x_1=\sqrt{4+2\sqrt{3}};x_2=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

A. $x^2-2\sqrt{3}x-2=0$ B. $x^2+2\sqrt{3}x+2=0$

C. $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ D. $x^2+2\sqrt{3}x-2=0$

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết ta có $x_1+x_2=2\sqrt{3};x_1.x_2=2$ nên $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ Đáp án C.

Ví dụ 8. Phương trình $\left(x^4+x^2+3\right)^2+3\left(x^4+x^2+3\right)-10=0$. Có mấy nghiệm ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Hướng dẫn giải:

Đặt $t=x^4+x^2+3$ với $(t\geq 3)$ ta được $t^2+3t-10=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-5\end{array}\right.$. Không thỏa mãn điều kiện.

Đáp án A.

Ví dụ 9. Tích các nghiệm của phương trình sau có chữ số hàng đơn vị là số nào?

$\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)...\left(x^2-99\right)=0$.

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy 2 và 5 là các nghiệm của phương trình đã cho. Do đó tích các nghiệm của phương trình là bằng 0. Đáp án C

Ví dụ 10. Cho phương trình $|x-5|+|x+1|=4\,(1)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. (1) vô nghiệm B. (1) có đúng 1 nghiệm

C. (1) có đúng hai nghiệm D. (1) vô số nghiệm

Hướng dẫn giải:

Ta có : $|x-5|+|x+1|=|5-x|+|x+1|\geq|5-x+x+1|=6$. Do đó (1) vô nghiệm . Đáp án A

Ví dụ 11. Tích các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$ bằng

A. -3 B. 6 C. 1 D. 0

Hướng dẫn giải:

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24.$

Đặt $t^2=x^2+5x+5$ ta được $(t-1)(t+1)=24\Rightarrow t=\pm5\Rightarrow x=0; x=-5$. Đáp án D.

c) Các bài toán phức tạp.

Ví dụ 12. Phương trình $x^4+x+3=0$ có mấy nghiệm?

A. 1 B. 2 C. 0 D. 4

Hướng dẫn giải:

$x=-(x^4+3)\leq-3$. Phương trình đã cho: $x(x^3+1)+3=0$.

Do $x\leq-3\Rightarrow x^3+1\leq-26\Rightarrow x(x^3+1)+3>0$. Đáp án C

Ví dụ 13. Phương trình $4x^3-3x+\dfrac{1}{4x}=0$. Có mấy nghiệm dương?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Phương trình tương đương với $(2x-1)^2+\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)-1=0$

Do $(2x-1)^2\geq0;\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)-1\geq2\sqrt{x.\dfrac{1}{4x}}-1=0$. Phương trình đã cho có một nghiệm dương $x=\dfrac{1}{2}$. Đáp án A.

Ví dụ 14. Phương trình $|x-9|^{20}+|x-10|^{37}=1$ có mấy nghiệm?

A. 1 B. 2 C. 3 D. vô số nghiệm

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy $x=9$ hoặc $x=10$ là nghiệm.

Nếu $x<9$ hoặc $x>10$ thì $|x-9|^{20}+|x-10|^{37}>1$

Nếu $9 < x < 10$ thì $\begin{array}{l} |x-9|^{20} < |x-9| = x-9 \\ |x-10|^{37} < |x-10| = 10-x \end{array}$

Do đó $|x-9|^{20} + |x-10|^{37} < 1$. Đáp án B.

Ví dụ 15. Phương trình $-11x^3 - x^2 + x = \dfrac{1}{3}$ có nghiệm là

A. $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{33}}$ B. $\dfrac{-1}{1-\sqrt[3]{34}}$ C. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{34}}$ D. $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{34}}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 34x^3 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 34x^3 \Leftrightarrow x - 1 = x\sqrt[3]{34} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{34}}$. Đáp án D.

Ví dụ 16. Phương trình $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 90\,(1)$ có mấy nghiệm?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - 90 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^2}{x^2-1} = 10 \\ \dfrac{2x^2}{x^2-1} = -9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{11}} \end{array}\right.$$

Đáp án A.

Dạng 2: Phương trình vô tỷ

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 17. Phương trình $(x^2 - 11x + 28)\sqrt{x-5} = 0$ có mấy nghiệm?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Nếu $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Nếu $x^2 - 11x + 28 \Rightarrow x = 4; x = 7$. Kết hợp với điều kiện đáp án C.

Ví dụ 18. Tìm tổng các nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x\left(x^2-25\right)}=\sqrt{19x\left(25-x^2\right)}$$

A. 1 B. 11 C. -3 D. 0

Hướng dẫn giải:

Phương trình tương đương với $x\left(x^2-25\right)=0 \Leftrightarrow x=0; x=\pm 5$. Đáp án D

Ví dụ 19. Phương trình $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{\sqrt{x-5}}=3\sqrt{x+5}-8$. Có mấy nghiệm?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x>5$, khi đó $\sqrt{x+5}=3\sqrt{x+5}-8 \Leftrightarrow x=11$. Đáp án D

Ví dụ 20. Nghiệm lớn nhất của phương trình $\sqrt{x^2-14x+49}=20$ là:

A. 26 B. 27 C. 28 D. 32

Hướng dẫn giải:

$|x-7|=20 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-7=20 \Rightarrow x=27 \\ x-7=-20 \Rightarrow x=-13 \end{array}\right.$. Đáp án B

Ví dụ 21. Phương trình $\sqrt{6x-x^2-5}=x-5$ có mấy nghiệm?

A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Hướng dẫn giải:

Phương trình tương đương với $\begin{cases} x-5\ge 0 \\ 6x-x^2-5=(x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$. Đáp án D.

Ví dụ 22. Phương trình sau có mấy nghiệm? $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2$ (1)

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Điều kiện $x\ge 1$

$(1) \Leftrightarrow 2x+2+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x-3=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x=1$

Cách 2: hàm số $y=f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$; $f(1)=0$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=1$. Đáp án B.

Ví dụ 23. Tìm tích các nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x(x+1)}$$

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x\ge 0$. Đặt $a=\sqrt{x};b=\sqrt{x+1}$. Ta được $a+b=1+ab\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0\Leftrightarrow a=1$ hoặc $b=1\Rightarrow x=0$ hoặc $x=1$. Đáp án C.

Ví dụ 24. $x_0=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là nghiệm của phương trình nào dưới đây ?

A. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=1$

B. $\sqrt{x^2-2x+7}+3=0$

C. $x-2\sqrt{x}+9=0$

D. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=0$

Hướng dẫn giải:

$x_0{}^3=\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}x_0\Leftrightarrow x_0{}^3+3x_0-4=0\Leftrightarrow x_0=1$. Đáp án A.

Ví dụ 25. Số nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{x+36}-\sqrt[3]{(x-1)}=1$ là:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

Lập phương hai vế ta được $x+36-(x-1)-3\sqrt[3]{(x+36)(x-1)}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+36)(x-1)}=12\Leftrightarrow x^2+35x-176=0\Leftrightarrow x=-63,x=28$. Đáp án C.

Ví dụ 26. Phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2$. Có mấy nghiệm nguyên?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải:

Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\,(t\ge 0)\Rightarrow \sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$

Ta có $t+\dfrac{t^2-4}{2}\Leftrightarrow t=-4$ (loại), $t=2\Rightarrow x=\pm 2$. Đáp án C.

Ví dụ 27. Số nghiệm nguyên của phương trình $x+2=\sqrt{x-2}+2\sqrt{x+1}$ là:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

Phương trình tương đương với

$$2x+4-2\sqrt{x-2}-4\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow \left(x-2-2\sqrt{x-2}+1\right)+\left(x+1-4\sqrt{x+1}+4\right)=0$$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}-1=0\\ \sqrt{x+1}-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3$. Đáp án D.

b. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 28. Số nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{x+21}+\sqrt{x+10}=7$ là:

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

Đặt $a=\sqrt[3]{x+21};b=\sqrt[3]{x+10}$

thì $x=a^3-21=b^2-10$. Ta được $\begin{cases}a+b=7\\ a^2+b^2=11\end{cases}\Rightarrow a=3;b=4\Rightarrow x=6$

Chú ý: Ta có $y=f(x)=\sqrt[3]{x+21}+\sqrt{x+10}$ đồng biến $\left[-10;+\infty\right)$ và $f(6)=0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=6$. Đáp án D.

Ví dụ 29. Phương trình sau có mấy nghiệm nguyên?

$$\sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2-4x+5}=-x^2-4x$$

A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

Vế trái $\sqrt{\left(x-2\right)^2+9}+\sqrt{\left(x-2\right)^2+1}\geq 4$

Vế phải $-\left(x+2\right)^2+4\leq 4$

Vế trái đạt GTNN là 4 khi $x=2$, vế phải đạt GTLN là 4 khi $x=-2$ Do đó phương trình vô nghiệm. Đáp án A.

Ví dụ 30. Biết rằng x,y,z là các số thực thỏa mãn đẳng thức:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-4}=\frac{1}{2}(x+y+z)-2$$

Tính $P=3x+2y+z$?

A. 16	B. 17	C. 18	D. 20

Hướng dẫn giải:

Đặt $a=\sqrt{x-2};b=\sqrt{y-1};c=\sqrt{z-4}\Rightarrow x=a^2+2;y=b^2+1;z=c^2+4$. Phương trình trở thành : $a+b+c=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+7\right)-2\Leftrightarrow\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2=0$

$\Rightarrow a = b = c = 1 \Rightarrow x = 3, y = 2, z = 5$. Đáp án C.

Ví dụ 31. Tìm tích các nghiệm của phương trình : $x^4 + \sqrt{x^2 + 3} = 3$

A. 0 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. -1

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = x^2$ ta có $f(t) = t^2 + \sqrt{t+3}$ là hàm số đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$. Mặt khác $f(1) = 3$ nên $t = 1$ là một nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 3$. Do đó phương trình có nghiệm $x = \pm 1$. Đáp án D

Ví dụ 32. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{x} = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{2x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. $-1 < x_0 < 1$ B. $1 \le x_0 < 2$ C. $2 < x_0 < 3$ D. $x_0 \ge 3$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x \ge \dfrac{1}{2}$, đặt $a = \sqrt{x}; b = \sqrt{2x-1}; c = \sqrt{2x+1}$. Ta được

$bc + a = ab + c \Leftrightarrow (b-1)(a-c) = 0$. Nếu $b - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow x = 1$

Nếu $a - c = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}$ (vô nghiệm). Đáp án B.

Dạng 3: Phương trình nghiệm nguyên

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a sao cho biểu thức $P = \dfrac{10a+16}{2a-1}$ nhận giá trị nguyên?

A. 2 B. 4 C. 8 D. 12

Hướng dẫn giải:

$P = 5 + \dfrac{21}{2a-1} \in Z \Leftrightarrow 21$ chia hết cho $2a - 1 \Leftrightarrow 2a - 1 \in \left\{\pm1; \pm3; \pm7; \pm21\right\}$. Đáp án C

Ví dụ 34. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = 2x - 3y$ bằng:

A. 9 B. 8 C. 7 D. 10

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết ta có $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3; y = -1 \Rightarrow P = 9$. Đáp án A

Ví dụ 35. Số nghiệm nguyên của phương trình $xy - x - y = 2$ là:

A. 2 B. 4 C. 5 D. 1

Hướng dẫn giải:

Phương trình tương đương với $(x-1)(y-1)=3$. Do đó có các nghiệm nguyên là

$(x;y)\in\{(0;-2);(2;4);(-2;0);(4;2)\}$. Đáp án B

Ví dụ 36. Phương trình $x^2+y^2=x+y+217$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1 B. 2 C. 0 D. Vô số

Hướng dẫn giải:

Phương trình đã cho tương đương với $x(x-1)+y(y-1)=217$. Khi $x,y\in Z$ vế trái chia hết cho 2, vế phải không chia hết cho 2 nên phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Đáp án C.

b) Các bài tóa trung bình

Ví dụ 37. Có bao nhiêu cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn đẳng thức: $x^2+4x+1=y^4$

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

Hướng dẫn giải:

$x^2+4x+1=y^4 \Leftrightarrow (x+2)^2-y^2=3 \Leftrightarrow (x+2-y^2)(x+y^2+2)=3$

Mặt khác $x+2-y^2<x+y^2+2$ nên ta có $\begin{cases}x+2-y^2=-3\\x+y^2+2=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x+2-y^2=1\\x+y^2+2=3\end{cases}$

$(x;y)\in\{(-4;1);(-4;-1);(0;1);(0;-1)\}$. Đáp án B

Ví dụ 38. Phương trình $x^2+y^2+z^2=165$ có bao nhiêu nghiệm nguyên là số nguyên lẻ

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải:

Giả sử a là số nguyên lẻ thì $a=2k+1 \Rightarrow a^2=4k(k+1)+1$ chia 8 dư 1do x,y,z là các số nguyên lẻ nên $x^2+y^2+z^2$chia 8 dư 3. Mặt khác 165 chia 8 dư 5. Đáp án A

Ví dụ 39. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $5x^2-4xy+y^2=169$ là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Phương trình tương đương với $(2x-y)^2+x^2=0^2+13^2=5^2+12^2$

Ta có $\left|2x-y\right|=0; x=13 \Rightarrow y=26$

$\left|2x-y\right|=5, x=12 \Rightarrow y=19$ hoặc $y=29$

$\left|2x-y\right|=12, x=5 \Rightarrow y=22$

$\left|2x-y\right|=13, x=0$ (loại). Đáp án D

Ví dụ 40. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên $5x^2+y^2=17+2xy$ (1)

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

(1) $\Leftrightarrow 4x^2+\left(x-y\right)^2=17 \Rightarrow 0 \le 4x^2 \le 17 \Rightarrow x^2 \in \{0;1;4\}$. Phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y) \in \{(2;1);(2;3);(-2;-3);(-2;-1)\}$. Đáp án D.

Ví dụ 41. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên $y^2=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

$y^2=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)$. Đặt $t=\left(x^2+5x+5\right)$

Ta được $y^2=(t-1)(t+1) \Leftrightarrow (t-y)(t+y)=1 \Rightarrow y=0; t=1$ hoặc $y=0; t=-1$

$\Rightarrow (x;y) \in \{(-1;0);(-2;0);(-3;0);(-4;0)\}$. Đáp án D

c) Các bài toán phức tạp

Ví dụ 42. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2=\left(y^2+1\right)^2$

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Đặt $y^2=t$ ta được $t^2+t+1=x^2 \Leftrightarrow (2t+1)^2-4x^2=-3 \Leftrightarrow (2t+2x+1)(2t-2x+1)=-3$

$\Rightarrow t=0; x=\pm 1$. Đáp án B

Ví dụ 43. Phương trình sau có mấy nghiệm nguyên dương? $x(x+1)=y(y+2)$

A.1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải:

Ta có $x^2+x+1=(y+1)^2$, do $x^2<x^2+x+1=(y+1)^2<(x+1)^2$. Vô lý vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương. Đáp án D

Ví dụ 44. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức $2x^6-2x^3y+y^2=64$

A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

Hướng dẫn giải:

$y^2-2x^3y+2x^6-64=0$ là phương trình bậc hai ẩn y. $\Delta'=x^6-64\ge 0\Rightarrow x\in\{0;\pm1;\pm2\}$

Phương trình có các nghiệm nguyên là: $(x;y)\in\{(0;8);(0;-8);(2;8);(-2;-8)\}$.Đáp án C.

Ví dụ 45. Giả sử $x;y;z$ là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}=3$. Tính giá trị của biểu thức : $T=x^2+2y^2+3z^2$.

A. 6 B. 4 C. 10 D. 18

Hướng dẫn giải:

Ta có $\frac{xy}{z};\frac{zx}{y};\frac{yz}{x}$ cùng dấu và có tổng bằng $3\Rightarrow \frac{xy}{z};\frac{zx}{y};\frac{yz}{x}$ cùng dương. Áp dụng bất đẳng thức Cô – si : $3=\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\ge 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\le 1$

$\Rightarrow (x;y;z)\in\{(1;1;1),(1;-1;-1),(-1;1;-1),(-1;-1;1)\}$. Đáp án A.

Ví dụ 46. Giả sử x,y là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức

$x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0\,(1)$. Tìm GTNN của $x.y$

A. -27 B. -18 C. -21 D. 12

Hướng dẫn giải:

$(1)\Leftrightarrow f(x)=x^2+2(y-1)x-3y^2-10y+a=a-4$

$\Delta'=4y^2+8y+4-3-a=4(y+1)^2+(-3-a)\Rightarrow a=-3$. Do đó $f(x)$ có nghiệm

$x=-3y-1;x=y+3\Rightarrow (1)\Leftrightarrow (x-y-3)(x+3y+1)=-7\Rightarrow (x;y)\in\{(1;-3);(-3;1);(3;1);(7;-3)\}$.

Đáp án C.

Dạng 4: Phương trình chưa tham số

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 47. Biết rằng $x=1$ là một nghiệm của phương trình $x^2-5x+m-7=0$. Nghiệm còn lại của phương trình là:

A. 5 B. 4 C. -3 D. 3

Hướng dẫn giải:

Theo đinh lí Viet ta có: $1+x_2=5 \Rightarrow x_2=4$. Đáp án B

Chú ý: Ta có thể thay $x=1$ vào phương trình tìm m sau đó giải phương trình bậc hai tìm nghiệm còn lại.

Ví dụ 48. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình $x^2-2mx-5m+6=0$ vô nghiệm

A. 5 B. 4 C. 7 D. 6

Hướng dẫn giải:

$\Delta'=m^2+5m-6=(m-1)(m+6)<0 \Leftrightarrow -6<m<1$. Đáp án D.

Ví dụ 49. Gọi $x_1;x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2-(m^2-2m+17)x-(m^4+5)=0$. Giá trị nhỏ nhất x_1+x_2 bằng:

A. 17 B. 16 C. 15 D. 14

Hướng dẫn giải:

Do 1 và $-(m^4+5)$ trái dấu nên phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1;x_2$

$x_1+x_2=(m-1)^2+16 \geq 16$. Đáp án B.

Ví dụ 50. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$(x-2)(x^2-7x+41)=0$ (1)

$x^2-mx+m^2-5m+8=0$ (2)

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy (1) có nghiệm duy nhất $x=2$, thay vào (2) ta được $m^2-7m+12=0 \Rightarrow m \in \{3;4\}$. Đáp án C.

Ví dụ 51. Gọi $x_1;x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2-23x-(m^2+14)=0$. Tìm GTLN của $P=x_1+x_2+x_1x_2$

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

Hướng dẫn giải:

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1;x_2$. $P=x_1+x_2+x_1x_2=23-m^2-14=9-m^2 \leq 9$

$\max P=9$. Khi $m=0$. Đáp án A.

Ví dụ 52. Phương trình nào dưới đây có nghiệm là 4 và $m-1$.

A. $x^2+(m+3)x+4(m-1)=0$ B. $x^2-(m+3)x+4(m-1)=0$

C. $x^2-(m+3)x+4(m+1)=0$ D. $x^2+(m-3)x+4m=0$

Hướng dẫn giải:

$x_1+x_2=m+3$; $x_1.x_2=4(m-1)$ nên $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình

$x^2-(m+3)x+4(m-1)=0$. Đáp án B

b) Các bài toán trung bình

Ví dụ 53. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$$x^2+2x+a+1=0 \quad (1)$$
$$x^2+(a-1)x+2=0 \ (2)$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Giả sử x_0 là nghiệm chung của (1) và (2)

$$\begin{cases} {x_0}^2+2x_0+a+1=0 \quad (1) \\ {x_0}^2+(a-1)x_0+2=0 \ (2) \end{cases} \Rightarrow (a-3)(1-x_0)=0$$

Nếu $a-3=0 \Leftrightarrow a=3$ không thỏa mãn (1)

Nếu $1-x_0=0 \Rightarrow a=-2$. Đáp án D.

Ví dụ 54. Gọi $x_1;x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2+(5-2a)x+4a-14=0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ không phụ thuộc vào a

A. $x_1+x_2-x_1x_2=4$ B. $2(x_1+x_2)+x_1x_2=-4$

C. $2(x_1+x_2)-x_1x_2=4$ D. $3(x_1+x_2)-x_1x_2=5$

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy phương trình đã cho có nghiệm với mọi a. Theo định lí Viet ta có:

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2)=4a-10 \\ x_1.x_2=4a-14 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1+x_2)-x_1.x_2=4$$. Đáp án C.

Ví dụ 55. Cho phương trình $x^2-(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ (1) với (a,b,c) là độ dài ba cạnh của tam giác. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. (1) vô nghiệm
B. (1) Có nghiệm kép
C. (1) có hai nghiệm trái dấu
D. (1) có hai nghiệm đều dương

Hướng dẫn giải:

Ta có $\Delta = a^2+b^2+c^2-2\left(ab+bc+ca\right)$. Do $a<b+c \Rightarrow a^2<ab+ac$.

Tương tự $b^2<ab+bc, c^2<ac+bc$. Từ đó suy ra $\Delta<0$. Đáp án A

Ví dụ 56. Cho các phương trình $x^2-ax+b=0(1); x^2-2bx+a=0(2)$. Với a,b là các số thỏa mãn điều kiện $a+b\ge 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A.(1) luôn có nghiệm
B. (2) luôn có nghiệm
C.(1) và (2) đều vô nghiệm
D. Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm

Hướng dẫn giải:

$\Delta_1'+\Delta_2'=a^2+b^2-a-b=\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(a+b-2\right)\ge 0$. Do đó $\Delta_1'\ge 0$ hoặc $\Delta_2'\ge 0$. Đáp án D.

Ví dụ 57. Tìm giá trị của tham số k để phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt $x^2-\left(k-4\right)x+k-5=0$.

A. $k>5$
B. $\begin{cases} k>5 \\ k\ne 6 \end{cases}$
C. $k\le 5$
D. $k\ne 6$

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy phương trình có hai nghiệm $x_1=1; x_2=k-5$. Do đó ta có $\begin{cases} k-5>0 \\ k-5\ne 1 \end{cases}$. Đáp án B.

Ví dụ 58. Gọi $x_1;x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2-2(m+1)x+4m-m^2=0$. GTNN của $P=\left|x_1-x_2\right|$ là:

A. $2\sqrt{2}$
B. $\sqrt{3}$
C. $\sqrt{2}$
D. 2

Hướng dẫn giải:

$\Delta'=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ với mọi m nên phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

$P^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=\left(2m+2\right)^2-4(4m-m^2)\Rightarrow P\ge\sqrt{2}$. Đáp án C.

Ví dụ 59. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\left(m-2\right)\left(m^2+m\right)x=m\left(m^2-5m+6\right)$ có vô số nghiệm

A. 0
B. 2
C. 3
D. 4

Hướng dẫn giải:

Phương trình vô số nghiệm khi $\begin{cases}(m-2)(m^2+m)=0\\ m(m^2-5m+6)=0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=2\end{array}\right.$. Đáp án B.

c) Các dạng toán phức tạp

Ví dụ 60. Cho $m \neq 0$, gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2+mx-\dfrac{1}{2m^2}=0$

GTNN của $S=x_1^{\ 4}+x_2^{\ 4}$ là:

A. $2-\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2+\sqrt{2}$ D. $1+\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Do 1 và $-\dfrac{1}{2m}$ trái dấu nên phương trình có hai nghiệm trái dấu thỏa mãn

$x_1+x_2=-m; x_1.x_2=\dfrac{-1}{2m^2}$.

$S=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^{\ 2}x_2^{\ 2}=\left(m^2+\dfrac{1}{m^2}\right)^2-\dfrac{1}{2m^2}\geq 2+\sqrt{2}$. Dấu bằng sảy ra khi

$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Đáp án C.

Ví dụ 61. Cho các phương trình $3x^2+ax-5=0 (1)$ và $-5x^2+ax+3=0 (2)$. Gọi α và β lần lượt là các nghiệm lớn nhất của (1) và (2). GTNN $\alpha+\beta$ là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Do (1) và (2) đều có hai nghiệm trái dấu nên $\alpha>0;\beta>0$. Ta có $3\alpha^2+a\alpha-5=0 \Leftrightarrow \dfrac{-5}{\alpha^2}+\dfrac{a}{\alpha}+3=0 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha}$ là nghiệm của (2) $\Rightarrow \alpha+\beta=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$. Đáp án B

Ví dụ 62. Cho phương trình $a^2x^2+(a^2+b^2-c^2)x+b^2=0$ (1) với a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. (1) vô nghiệm	B. (1) có nghiệm kép
C. (1) có hai nghiệm trái dấu	D. (1) có hai nghiệm đều dương

Hướng dẫn giải:

$\Delta=(a^2+b^2-c^2)-4a^2b^2=\left[(a-b)^2-c^2\right](a+b+c)(a+b-c)<0$. Do đó phương trình vô nghiệm. Đáp án A

Ví dụ 63. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai phương trình sau có nghiệm chung: $2x^2-(3m-1)x+12=0$ (1); $4x^2-(9m-11)x+36=0 (2)$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Giả sử x_0 là một nghiệm chung của (1) và (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} 6{x_0}^2 - (9m-3)x_0 + 36 = 0 \\ 4{x_0}^2 - (9m-11)x_0 + 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2{x_0}^2 - 8x_0 = 0$$

$x_0 = 0$ không thỏa mãn $x_0 = 4$ thay vào (1) ta được $m = 4$. Khi đó tập nghiệm của (1) và (2) lần lượt là $\left\{\frac{3}{2}; 4\right\}, \left\{\frac{9}{4}; 4\right\}$. Đáp án A.

Ví dụ 64. Cho phương trình $\left(m^2+1\right)x^2 + 2\left(m^2+1\right)x - m = 0\,(1)$. Gọi $x_1; x_1$ là nghiệm của(1) GTLN của ${x_1}^2 + {x_2}^2$ bằng:

A. 4	B. 5	C. 6	D. 7

Hướng dẫn giải:

Ta có $\Delta' = \left(m^2+1\right)\left(m^2+m+1\right) > 0, \forall m; {x_1}^2 + {x_2}^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 4 + \frac{2m}{m^2+1}$.

Đặt $y = \frac{2m}{m^2+1} \Leftrightarrow ym^2 - 2m + y = 0$ phải có nghiệm với mọi m.

Nếu $y = 0 \Rightarrow m = 0$

Nếu $y \neq 0, \Delta' = 1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$. Do đó ${x_1}^2 + {x_2}^2$ đạt GTLN là 5 khi $m = 1$.

Đáp án B.

Ví dụ 65. Gọi m, M là các nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình

$x^4 + 2x^2 + 2\left(k+1\right)x + k^2 + 4k + 4 = 0$ với tham số k. Khi đó $m + M$ bằng:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải:

Giả sử x_0 là các nghiệm của phương trình ${x_0}^4 + 2{x_0}^2 + 2\left(k+1\right)x_0 + k^2 + 4k + 4 = 0$ phải có nghiệm đối với mọi k $\Leftrightarrow \Delta' = \left(x_0 - {x_0}^2\right)\left({x_0}^2 + x_0 + 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_0 \leq 1$.

$x_0 = 0$ khi $k = -2$; $x_0 = 1$ khi $k = -3$. Đáp án A.

BÀI TẬP

2.1 . Phương trình $\left(x^2-12x+20\right)\sqrt{x-6}=0$ có mấy nghiệm?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.2. Gọi $x_1; x_1$ là nghiệm của phương trình $x^2-(m+1)x-(m^2-12m+48)=0$. Tìm GTLN $x_1.x_2$

A. 12 B. -6 C. -12 D. -11

2.3. $x=3$ không phải là nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $x^2-6x+9=0$ B. $x^2-2x-3=0$
C. $x^2-mx+3m-9=0$ D. $x^2-3x+m^2-2m+3=0$

2.4. Biết rằng $x_1; x_1$ là nghiệm của phương trình $x^2-4321x-\left(m^6+3\right)=0$. Tính $S=2\left(x_1+x_2\right)$.

A. 4321 B. -8642 C. 8642 D. 8644

2.5. Gọi S và P lần lượt là tổng và tích các nghiệm của phương trình $x^2-(m^2+2)x-\dfrac{15}{m^2+2}=0$. Tính $S.P$

A. 15 B. -15 C. 14 D. -30

2.6. Phương trình $\sqrt{x^2+10x+25}=x-2$ có số ngiệm là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.7. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2+(m-19)x+m^4-16=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m\geq 2$ B. $m\leq -2$ C. $-2<m<2$ D. $0<m<3$

2.8. Tổng các nghiệm của phương trình $\left(x^4-1\right)\left(x^4-2\right)....\left(x^4-100\right)=0$ bằng:

A. 1 B. -1 C. 2 D. 0

2.9. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình sau vô nghiệm $\left(m^2+m-2\right)x=m^3-m^2+2m-2$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

2.10. Phương trình $\sqrt{3x+10}-\sqrt{x+2}=2$ có mấy nghiệm?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

2.11. Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$ bằng:

A. 0 B. -1 C. 1 D. 8

2.12. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên $xy+2x-y-3=0$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2.13. Biết rằng phương trình $(m-3)x^2-2(m+1)x-m-3=0$ có một nghiệm -1. Nghiệm còn lại của phương trình là:

A. 5 B. 3 C. -3 D. -5

2.14. Gọi k_0 là số nguyên nhỏ nhất để phương trình $(k^2-k)x^2+2kx+1=0$ có nghiệm.

A. $k_0\in(-3;0)$ B. $k_0\in(-2;1)$ C. $k_0\in(0;3)$ D. $k_0>3$

2.15. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=3$ là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

2.16. Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+23}+\sqrt{2x+5}=11$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2.17. Cho phương trình $x-13y=37$. Khẳng định nào dưới đây **Sai ?**

A. Phương trình có vô số nghiệm nguyên

B. Nếu $(x;y)$ là một nghiệm nguyên của phương trình thì x,y không cùng lẻ

C. $x=50, y=1$ là một nghiệm nguyên của phương trình

D. Phương trình chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên

2.18. Phương trình $x^3+y^3=x+y+45$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2.19. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $x^2-473x-m^2+4m-10=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2=-6$

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2.20. Cho các phương trình $x^2-2mx+1=0$ (1); $x^2-2\sqrt{3}x+2m=0$ (2). Khẳng định nào dưới đây luôn đúng với mọi giá trị bất kì của tham số m:

A. (1) có nghiệm

B. (2) có nghiệm

C. (1) và (2) đều vô nghiệm

D. Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

2.21. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Biết rằng phương trình :

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ có nghiệm kép. Khẳng định nào dưới đây đúng

A. ΔABC đều B. ΔABC vuông

C. ΔABC một góc tù
D. ΔABC có một góc nhỏ hơn 60^0

2.22. Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m - m^2 = 0$. Tìm GTNN của biểu thức $P = |x_1 - x_2|$.

A. 2
B. $\sqrt{2}$
C. $\sqrt{3}$
D. $2\sqrt{2}$

2.23. Biết rằng phương trình $x^2 - 2(k-1)x + k - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. GTNN của biểu thức $M = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$

A. $\frac{15}{8}$
B. 2
C. $\frac{15}{4}$
D. 1

2.24. Cho các phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (1); $x^2 + bx + a = 0$ (2) với a, b là các số thỏa mãn đẳng thức $2(a+b) - ab = 0$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. (1) luôn có nghiệm

B. (2) luôn có nghiệm

C. (1) và (2) đều vô nghiệm

D. Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm

2.25. Có bao nhiêu giá trị của tham số k để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$$(x-2)\left(x^2 - 2x + 7 + k^2\right) = 0\,(1); x^2 + 2x + k^2 - 8k + 7 = 0\,(2)$$

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

2.26. Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $\frac{1}{x_1^{\,2}}; \frac{1}{x_2^{\,2}}$.

A. $x^2 + 27x + 1 = 0$
B. $x^2 - 27x + 1 = 0$
C. $x^2 - 27x - 1 = 0$
D. $2x^2 - 27x - 2 = 0$

2.27. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 - x + y - 37 = 0$

A. 1
B. 2
C. 3
D. 0

2.28. Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + (5-2m)x - 12m - 6 = 0$ tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

A. $6(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 36 = 0$
B. $6x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 36 = 0$
C. $6(x_1 + x_2) - x_1x_2 + 30 = 0$
D. $5(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - 30 = 0$

2.29. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 42 = 0$

A. 1
B. 2
C. 3
D. 0

2.30. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2-(397m+23)x+m^2-13m+30=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $-10<m<-3$ B. $3<m<10$ C. $\left[\begin{array}{l} m<3 \\ m>10 \end{array}\right.$ D. $-10<m<3$

2.31. $x_0=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ không là nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x^2-7x+3\right)\left(x-2\right)=0$	B. $x^2-5x+6=0$
C. $x^2-8x+15=0$	D. $\left(x-2\right)\left(x^4-x\right)=0$

2.32. Phương trình sau đây có mấy nghiệm $\sqrt[3]{x+24}+3\sqrt{x+13}=15$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

2.34. Tìm tích các nghiệm của phương trình $\left(x-11\right)^4+\left(x-13\right)^4=16$

A. 110 B. 132 C. 143 D. 164

2.35. Phương trình $x^2+2y^2-2xy-1=0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.36. Phương trình $xy-y^2+x-y-1=0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.37. Gọi $\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm nguyên của phương trình $x^2+5y^2-4xy-4y+4=0$. Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. $x_0=y_0$ B. $x_0=2y_0$ C. $2x_0=y_0$ D. $x_0+y_0=7$

2.38. Phương trình nào dưới đây có nghiệm là 4 và $2a-1$.

A. $x^2-(2a+3)x+8a-4=0$ B. $x^2+(2a+3)x+8a-4=0$

C. $x^2+(2a-3)x+8a+4=0$ D. $x^2+(2a-3)x+4=0$

2.39. Phương trình $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$ có mấy nghiệm?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2.40. Phương trình $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2.41. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\left|x-13\right|^{20}+\left|x-14\right|^{32}=1$?

A. 25 B. 26 C. 27 D. 32

2.42. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $x^2-(m+5)x-m+6=0$ có các nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $2x_1+3x_2=13$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.43. Phương trình $\left(\dfrac{1}{x-5}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x-4}\right)^2=\dfrac{13}{36}$ có mấy nghiệm?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2.44. Tìm tích các nghiệm của phương trình $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$

A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

2.45. Phương trình $(x-5)(x+1)+5(x-5)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-5}}=-4$ có mấy nghiệm ?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.46. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $x^4-4x^2(2x-1)-12(x-1)^2=0$

A. 8 B. -4 C. $5+\sqrt{30}$ D. 3

2.47. Gọi $(x_0;y_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình $x^2+xy+y^2=x+y$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $x_0+y_0=2$ B. $x_0+y_0=3$ C. $x_0+y_0\le 3$ D. $x_0+y_0\ge 4$

2.48. x,y là các số thực thỏa mãn đẳng thức $2(x^2-4x+5)+y^2=2(x-1)y$. Tính $x.y$

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

2.49. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn đẳng thức

$3a^2+12b^2+6ab=28(a+b)$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.50. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để phương trình sau có hai nghiệm nguyên

$x^2-ax+a+2=0$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2.51. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a,b) thỏa mãn đẳng thức $a^2=1+\sqrt{9-4b+b^2}$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 8

2.52. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-(m+2)(x+2)+8=0$ có ba nghiệm phân biệt

A. $m<1$ B. $m>1$ C. $m>1; m\ne 10$ D. $-2<m<2$

2.53. Biết rằng tồn tại giá trị của tham số a để phương trình $(x+2)(x^2-2x-a+5)=0$. Có các nghiệm $x_1;x_2;x_3$. Tính giá trị của biểu thức $P=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3+12$

A. 8 B. 10 C. 11 D. 12

2.54. Cho $a>0$. Biết rằng phương trình $ax^2+(b-4)x+4-a-b=0$ có nghiệm lớn hơn 2. Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. $3a+b<4$	B. $3a+b=4$	C. $3a+b>4$	D. $a=2b$

2.55. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-16x+41}+\sqrt{3x^2-24x+64}=-x^2+8x-9$

Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $x_0\in(-2;2)$ B. $x_0\in(1;2)$ C. $x_0\in(2;3)$ D. $x_0>5$

2.56. Tìm tích các nghiệm của phương trình $\sqrt[4]{54-x}+\sqrt[4]{x+43}=5$

A. 1026 B. -1024 C. -1026 D. -1062

2.57. a,b là các số thực thay đổi sao cho phương trình $ax^2+5x+b=0$ có hai nghiệm dương $x_1;x_2$ và phương trình $bx^2+5x+a=0$ có hai nghiệm dương là $x_3;x_4$. GTNN của biểu thức $P=x_1+x_2+x_3+x_4$

A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

2.58. Phương trình $\sqrt{x-9}+\sqrt{13-x}=-x^2+18x-79$ có mấy nghiệm?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2.59. Phương trình $2x^4-2x^2y+y^2=16$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4 B. 3 C. 5 D. 6

2.60. $a;b;c$ là các số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Tính $P=abc$

A. 42 B. 36 C. 18 D. 15

2.61. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn đẳng thức

$a^2+b(b^2+b-3a)=0$

A. 4 B. 3 C. 5 D. 2

2.62. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương? $x^2+y^2-13(x-y)=0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2.63. Có bao nhiêu giá trị của tham số k để hai phương trình sau có cùng tập nghiệm

$x^2-(k^2-6k+5)x+k^2-6k+4=0\,(1);\ \frac{k-3}{k-1}x^2-3(k-1)x+4=0\,(2)$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

2.64. Phương trình $x^2+y^2+z^2=1309$ có bao nhiêu nghiệm nguyên sao cho x,y,z cùng lẻ

A. 6 B. 4 C. 2 D. 0

2.65. Phương trình $x^6+x+2=0$ có mấy nghiệm

A. 4 B. 2 C. 0 D. 6

2.66. Giá trị nào dưới đây là một nghiệm của phương trình $22x^3-6x^2+12x-8=0$

A. $\dfrac{2}{1+\sqrt[3]{21}}$ B. $\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{21}}$ C. $\dfrac{-2}{1+\sqrt[3]{21}}$ D. $\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{21}}$

2.67. Phương trình $x^4-4\sqrt{3}x-5=0$ có mấy nghiệm

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.68. Phương trình $\sqrt{x\left(x+1\right)}+\sqrt{x\left(x+2\right)}=\sqrt{x\left(x-3\right)}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4 B. 2 C. 0 D. 6

2.69. Phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ có mấy nghiệm vô tỷ?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2.70. Phương trình sau có mấy nghiệm $\sqrt{4y-x^2+2x-1}-\sqrt{x+1}=\sqrt{4y^2+x-1}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

HƯỚNG DẪN GIẢI

2.1. Đáp án B

2.2. $x_1x_2 = -(m-6)^2 - 12 \le -12$. Đáp án C

2.3. Đáp án D

2.4. Do 1 và $-(m^6+3)$ trái dấu nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu. Đáp án C.

2.5. Đáp án B

2.6. Đáp án D.

2.7. $m^4 - 16 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Đáp án C

2.8. Đáp án D

2.9. Đáp án A

2.10. Đáp án B

2.11. Đáp án A

2.12. Đáp án C

2.13. Đáp án D

2.14. Đáp án C

2.15. Đáp án A

2.16. Hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{x+23} + \sqrt{2x+5}$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{5}{2};+\infty\right)$; $f(2) = 11$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất. Đáp án C

2.17. Đáp án D

2.18. Phương trình tương đương với $(x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) = 45$. Vế trái chia hết cho 6. Vế phải không chia hết cho 6. Đáp án A.

2.19. Đáp án C

2.20. $\Delta_1' = m^2 - 1; \Delta_2' = 3 - 2m; \Delta_1' + \Delta_2' = m^2 - 2m + 2 > 0 \Rightarrow \Delta_1' > 0$ hoặc $\Delta_2' > 0$.

Đáp án D.

2.21. $3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$. Đáp án A.

2.22. $\Delta' = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0; P^2 = 2(2m-1)^2 + 2 \geq 2$. Đáp án B.

2.2.3. Đáp án C

2.24. $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b) = (a-b)^2 \geq 0$. Đáp án D.

2.25. $x = 2$ là nghiệm chung khi $k = 5; k = 5$. Đáp án C.

2.26. Đáp án B.

2.27. Phương trình tương đương với $x(x-1) + y(y+1) = 37$. Đáp án D

2.28. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 5 \\ x_1x_2 = -12m - 6 \end{cases} \Rightarrow 6(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 36 = 0$. Đáp án A

2.29. Cách 1: $(x-5)^2 + (y+4)^2 + 1 = 0$

Cách 2: Ta có thể viết phương trình đã cho là phương trình bậc hai ẩn x

$\Delta_x = -(y+4)^2 - 1 < 0$. Đáp án D.

2.30. Đáp án B

2.31. Đáp án C

2.32. $f(x) = \sqrt[3]{x+24} + 3\sqrt{x+13}$ là hàm số đồng biến trên $[-13; +\infty)$; $f(3) = 15$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất. Đáp án A.

2.33. Đáp án B

2.34. Đáp án C

2.35. $(x-y)^2 = 1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y \in \{0; \pm 1\}$. Đáp án C

2.36. Phương trình tương đương với $(y+1)(x-y) = 1$. Đáp án B

2.37. $(x-2y)^2 + (y-2)^2 = 0$. Đáp án B

2.38. Đáp án A

2.39. $(x-3)^2 + \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2 = 0$. Đáp án D

2.40. Đặt $a=\sqrt{2x+1};b=\sqrt{4x^2-2x+1}$ ta được $a+3b=3+ab\Leftrightarrow(a-3)(b-1)=0$.

Đáp án B.

2.41. Phương trình có các nghiệm $x=13;x=14$. Đáp án C.

2.42. $\Delta=m^2+14m+1\ge 0(1)$ Khi đó : $\begin{cases}x_1+x_2=m+5\\x_1.x_2=6-m\\2x_1+3x_2=13\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$. Đáp án B.

2.43. $\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-4}\right)^2+2\frac{1}{(x-5)(x-4)}-\frac{13}{16}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=7\end{array}\right.$. Đáp án C.

2.44. $(x-1)(x-5)(2x^2-9x+10)=0$. Đáp án D

2.45. Điều kiện $x\le -1;x>5$. $t=(x-5)\sqrt{\frac{x+1}{x-5}}$ ta được $t^2+5t+4=0$. Đáp án B

2.46. Đặt $a=x^2;b=2x-1$ ta được:
$a^2-4ab-12b^2=0\Leftrightarrow(a+2b)(a-6b)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2\pm\sqrt{6};6\pm\sqrt{30}\right\}$. Đáp án A.

2.47. $x^2+(y-1)x+y^2-y=0$ **;** $\Delta'=-3y^2+y+1\ge 0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le y\le 1$**.**

$(x;y)\in\left\{(0;0);(1;0);(0;1)\right\}$**.** Đáp án C.

2.48. $y^2-2(x-1)y+y^2-y=0;\Delta'=-(x-3)^2$. Đáp án B.

2.49. $3(a+b)^2-28(a+b)+9b^2=0;\Delta'=196-27b^2\ge 0\Rightarrow b^2\in\{0;1;4\}$. Đáp án C

2.50. Giả sử $x_1;x_2$ là các nghiệm nguyên

$\begin{cases}x_1+x_2=a\\x_1x_2=a+2\end{cases}\Rightarrow x_1x_2-x_1-x_2=2\Rightarrow(x_1-1)(x_2-1)=3\Rightarrow a\in\{-2;6\}$. Đáp án C

2.51. $a^2=1+\sqrt{13-(b+2)^2}\Rightarrow a^2\in\{1;4\}$. Đáp án B.

2.52. $(x+2)(x^2-2x-m+2)=0$ có ba nghiệm phân biệt khi $x^2-2x-m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2. Đáp án C.

2.53. Giả sử $x_3 = -2; x_1, x_2$ là các nghiệm của phương trình

$x^2 - 2x - a + 5 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2; x_1x_2 = 5 - a \Rightarrow (x_1 + x_2)^3 = -x_3{}^3$

$\Rightarrow x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow P = 12$

Đáp án D.

2.54. Phương trình có ghiệm $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{4-a-b}{a} > 2$ Đáp án A.

2.55. Đáp án C.

2.56. Đặt $a = \sqrt[4]{54-x}; b = \sqrt[4]{x+43}$ ta được $\begin{cases} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2;b=3 \\ a=3;b=2 \end{array}\right.$. Đáp án C.

2.57. Nếu x_1 là nghiệm của $ax^5 + 5x + b = 0$ thì $\dfrac{1}{x_1}$ là nghiệm của $bx^5 + 5x + a = 0$. Do đó

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) \ge 4$. Đáp án B

2.58. Chứng minh $x = 9$ là nghiệm duy nhất. Đáp án D

2.59. $y^2 - 2x^2y + 2x^4 - 16 = 0 \Rightarrow \Delta' = 16 - x^4 \ge 0 \Rightarrow x^2 \in \{0;1;4\}$. Đáp án A.

2.60. a,b,c là các số khác nhau thuộc $\{2;3;6\}$. Đáp án B

2.61. $a^2 - 3ab + b^3 + b^2 = 0; \Delta = b^2(5-4b) \ge 0 \Rightarrow y = 2$. Đáp án C.

2.62. $x^2 - 13x + y^2 + 13y = 0; \Delta = 169 - 4(y^2 + 13y) \ge 0 \Rightarrow y = 2$. Đáp án C.

2.63. (1) có nghiệm $x = 1; x = k^2 - 6k + 4$ $x = 1$ là nghiệm của (2) khi $k = 2$ hoặc $k = \dfrac{5}{3}$.
Chỉ có $k = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đáp án B.

2.64. Bình phương 1 số lẻ chia 8 dư 1 nên vế trái chia 8 dư 3. Đáp án D.

2.65. Đáp án C

2.66. Phương trình tương đương với $(x-2)^3 = -21x^3$. Đáp án A.

2.67. $(x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2 + 4\sqrt{3}x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)^2 - \left[\sqrt{2}(x + \sqrt{3})\right]^2 = 0$. Đáp án B

2.68. Điều kiện $x \le -2; x = 0; x \ge 3$. Xét các trường hợp trên $x \in \left\{0; -\dfrac{\sqrt{28}}{3}\right\}$. Đáp án C

2.69. Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}\Rightarrow t^3=2x-1$ ta được

$\begin{cases} t^3=2x-1 \\ x^3=2t-1 \end{cases}\Rightarrow (x-t)\left(x^2+xt+t^2+2\right)=0\Rightarrow x\in\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. Đáp án B.

2.70. $2\sqrt{(x+1)\left(4y^2+x-1\right)}+x^2+(2y-1)^2=0\Rightarrow x=0; y=\dfrac{1}{2}$. Đáp án A.

CHƯƠNG III. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hệ phương trình là một trong các vấn đề trọng tâm của chương trình đại số THCS. Các bài toán giải hệ phương trình cũng thường gặp trong các kì thi HSG THCS và thi vào lớp 10 THPT. Các bài toán về hệ phương trình rất phong phú và đa dạng. Tuy nhiên đối với các bài toán trắc nghiệm chúng tôi đưa ra các bài toán có lời giải ngắn gọn và không quá khó. Có nhiều cách phân loại hệ phương trình :

+) Phân loại theo số ẩn của hệ, theo hệ số của phương trình hay theo bậc của hệ phương trình .

+) Phân loại theo cấu trúc, đặc tính của phương trinh

+) Phân loại theo phương pháp giải hệ phương trình.

Một số dạng hệ phương trình thường gặp

1. Hệ bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

   Ta dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số để giải và biện luận hệ phương trình trên.
2. Hệ đối xứng loại I hai ẩn: là hệ khi ta thay đổi vai trò x và y thì mỗi phương trình không đổi. Để giải hệ này thông thường ta đặt $S=x+y, P=xy$ với $S^2 \ge 4P$.
3. Hệ đối xứng loại II hai ẩn: là hệ khi ta thay đổi vai trò của x, y thì hệ không đổi
4. Hệ phương trình đẳng cấp:là hệ mà các số hạng của phương trình có cùng bậc. Ta thường gặp các hệ đẳng cấp bậc hai hoặc bậc ba. Thông thường ta kiểm tra nếu $y \ne 0$, đặt $y=kx$
5. Hệ phương trình mà có một phương trình vô nghiệm hoặc hệ có vế phải bằng 0, vế trái phân tích thành một tích, khi đó ta xét từng nhân tử của tích bằng 0.
6. Hệ phương trình không mẫu mực, để giải hệ phương trình này, ta thường sử dungjtinhs chất đơn điệu của hàm số hoặc các bất đẳng thức để đánh giá hai vế.

   Một số dạng câu hỏi trắc nghiệm thường gặp là:
   1. Hệ phương trình có các nghiệm là:
   2. Hệ phương trình có bao nhiêu nghiệm
   3. Cho biết $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình. Tìm mối liên hệ giữa x và y hặc tính một giá trị của biểu thức đối với x và y
   4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn một tính chất nào đó.
   5. Trong các hệ phương trình đã cho, bao nhiêu hệ có nghiệm.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI THÔNG QUA VÍ DỤ

Dạng 1: Hệ phương trình bậc nhất

Trong phần này, ta xét hệ phương trình bậc nhất không chứa tham số.

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 1. Biết rằng $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 5x + y = 23 \\ x - 6y = 17 \end{cases}$

Tính $x_0 + y_0$

A. 3 B. 4 C. 2 D. 5

Hướng dẫn giải: Giải hệ phương trình trên ta được $x_0 = 5; y_0 = -2 \Rightarrow x_0 + y_0 = 3$. Đáp án A.

Ví dụ 2. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 7y = -23 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $x = 1; y = -3$ B. $x = -1; y = 3$

C. $x = -3$ D. $x = 3; y = -1$

Hướng dẫn giải: Giải hệ phương trình trên ta được $x = -1; y = 3$. Đáp án B

Chú ý: Ở ví dụ trên ngoài cách giải thông thường ta còn có thể thay các giá trị của $x; y$ ở các đáp án vào hệ phương trình. Tuy nhiên cách này chỉ tối ưu khi giải hệ gặp khó khăn.

Ví dụ 3. a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 3a + 3b = 2 \\ 11a + 6b = 4 \end{cases}$. Tính $P = 19ab$

A. 3 B. -2 C. 0 D. 4

Hướng dẫn giải: Giải hệ phương trình trên ta được $a = -1; b = \dfrac{2}{3} \Rightarrow P = 0$. Đáp án C

Ví dụ 4. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a : 2 = b : 5$ và $a + b = 21$. Tính $a - b$

A. -10 B. -8 C. 9 D. -9

Hướng dẫn giải: $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{a+b}{7} = 3 \Rightarrow a = 6; b = 15 \Rightarrow a - b = -9$. Đáp án D

Ví dụ 5. Cho biết x, y là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{11}{30} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{9}{10} \end{cases}$ khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. $x < y$ B. $x = y$ C. $x + y = 15$ D. $x > y$

Hướng dẫn giải: Giải hệ trên ta được $x = 6, y = 5$. Đáp án D.

Ví dụ 6. An mua 2 quyển vở và 1 chiếc bút hết 13000 đồng, Bình mua 3 quyển vở và 2 chiếc bút hết 21000 đồng. Giá tiền của 1 quyển vở là bao nhiêu đồng

A. 5000 B. 3000 C. 4000 D. 6000

Hướng dẫn giải: Gọi x, y là giá tiền của một quyển vở và một cái bút khi đó:

$\begin{cases} 2x + y = 13000 \\ 3x + 2y = 21000 \end{cases} \Rightarrow x = 5000, y = 3000$. Đáp án A.

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 7. a,b,c là các số thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Tính $M = \frac{7a + 9b + 16c}{10a + b - 3c}$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Hướng dẫn giải: Ta có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a = b = c \Rightarrow M = 4$. Đáp án B

Ví dụ 8. Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = z \\ y + z = x + 4 \\ z + x = y + 2 \end{cases}$

Tính $P = 3x_0 + 4y_0 + 5z_0$.

A. 22 B. 24 C. 26 D. 27

Hướng dẫn giải: Cộng từng vế $2(x + y + z) = x + y + z \Rightarrow x + y + z = 6 \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$.

Đáp án C.

Ví dụ 9. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases} |x| + 3|y| = 18 \\ 4|x| - |y| = 7 \end{cases}$

A. 4 B. 2 C. 0 D. 6

Hướng dẫn giải: Dễ thấy $|x| = 3, |y| = 5$. Đáp án A

Ví dụ 10. Hai tổ theo kế hoạch may 80 chiếc áo. Do cải tiến kĩ thuật nên tổ 1 đã vượt mức 10%, tổ II vượt mức 20% so với kế hoạch và hai tổ đã may được 91 chiếc áo. Tính số áo tổ I dự định may?

A. 52 B. 50 C. 40 D. 35

Hướng dẫn giải: Gọi $x; y$ là số áo mà tổ I, tổ II làm theo kế hoạch. Ta có

$\begin{cases} x + y = 80 \\ \frac{11}{10}x + \frac{12}{10}y = 91 \end{cases} \Rightarrow x = 50, y = 30$. Đáp án B.

c.Các bài toán phức tạp

Ví dụ 11. Cho các số a,b,c thỏa mãn điều kiện $\frac{5}{a-15}=\frac{10}{b-30}=\frac{7}{c-21}$ và $abc=350$.

Tính $2a+b+c$

A. 25 B. 26 C. 27 D. 32

Hướng dẫn giải: $\frac{a-15}{5}=\frac{b-30}{10}=\frac{c-21}{7}\Rightarrow\frac{a}{5}-3=\frac{b}{10}-3=\frac{c}{7}-3\Rightarrow\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{7}$

Từ đó dễ dàng tính được $a=5,b=10,c=7\Rightarrow 2a+b+c=27$. Đáp án C.

Ví dụ 12. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}\frac{a}{12}+\frac{b}{3}-\frac{c}{4}=1\\ \frac{a}{5}+\frac{b}{10}+\frac{c}{3}=1\end{cases}$

Tính giá trị biểu thức $M=a+b+c+4$

A. 9 B. 10 C. 12 D. 15

Hướng dẫn giải:

Đặt $A=a+b+c\Rightarrow c=A-a-b\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{12}+\frac{b}{3}-\frac{A-a-b}{4}=1\\ \frac{a}{5}+\frac{b}{10}-\frac{A-a-b}{3}=1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}12a+21b-9A=36\\ -8a-14b+20A=60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+7b-3A=12\\ -4a-7b+10A=30\end{cases}\Rightarrow 7A=42\Rightarrow A=6$. Đáp án B.

Ví dụ 13. Cho các số a,b,c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases}a+b+c=7\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{7}\end{cases}$

Tính $P=(a-7)(b-7)(c-7)$.

A. 0 B. 1 C. 7 D. -7

Hướng dẫn giải:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{7}\Rightarrow abc-7(ab+bc+ca)+7^3-7^3=0$

$abc-7(ab+bc+ca)+7^2a+7^2b+7^2c-7^3=0\Rightarrow(a-7)(b-7)(c-7)=0$. Đáp án A.

Dạng 2: Hệ phương trình bậc hai và bậc cao

Hệ phương trình bậc hai và bậc cao rất phong phú, đa dạng. Trong đó gồm các hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II, hệ phương trình đẳng cấp, hệ phương trình mà có một phương trình vô nghiệm, hệ phương trình không mẫu mực…

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 14. Hệ phương trình nào dưới đây có nghiệm

A. $\begin{cases} 2x^2+y^4+1=0 \\ x-7y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 6x-y=-17 \\ x+5y=23 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2-3x+12=0 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x^2+7y^4=-3 \\ 3x^2+y=2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải: Dễ thấy các hệ phương trình ở A, C, D vô nghiệm. Hệ phương trình B có nghiệm $x=-2; y=5$. Đáp án B.

Ví dụ 15. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm?

$$\begin{cases} y^4+|y|=0\,(1) \\ x^4y+x^3y+x^2-4x+4-y=0\,(2) \end{cases}$$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 2

Hướng dẫn giải: Từ (1) ta có $y=0$ thay vào (2) ta được $x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$. Đáp án B.

Ví dụ 16. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} 3x-5y=7\ (1) \\ x^2+2y^4+1=0\ (2) \end{cases}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 2

Hướng dẫn giải: Dễ thấy phương trình (2) vô nghiệm. Đáp án A

Ví dụ 17. $x=3, y=2$ là nghiệm của hệ nào dưới đây?

A. $\begin{cases} x^2-2xy+y^2+3=0 \\ x-3y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x^2+4y^2+2=0 \\ x^2+y^4=7 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

Hướng dẫn giải: Các hệ A, B vô nghiệm, hệ C không có nghiệm $x=3, y=2$. Đáp án D.

Ví dụ 18. Hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ có tập nghiệm là:

A. $x=2; y=1$ B. $x=1; y=2$ hoặc $x=2; y=1$

C. $x=1; y=2$ hoặc $x=y=1$ D. $x=y=2$

Hướng dẫn giải: Đây là hệ đối xứng loại. Đặt $x+y=a, x.y=b$ ta được hệ

$\begin{cases} a^2 - 2b = 5 \\ a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 2 \Rightarrow x = 2, y = 1$ hoặc $x = 1, y = 2$. Đáp án B.

Ví dụ 19. Biết rằng a, b thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^2 - b^2 = a - 3 \\ b^2 - a^2 = b + 2 \end{cases}$. Tính $E = 3a + 2b + 7$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

Hướng dẫn giải: Cộng từng vế ta được $a + b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 - a$ thay vào ta được

$a^2 - (1-a)^2 = a - 3 \Rightarrow a = -2, b = 3 \Rightarrow E = 7$. Đáp án C.

b) Các bài toán trung bình

Ví dụ 20. Biế rằng x, y, z là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y^2 - 4z + 4 = 0 \\ z^2 - 4z + 4 = 0 \end{cases}$.

Tính $M = 3x + 2y + z + 12$.

A. 25 B. 24 C. 28 D. -24

Hướng dẫn giải: Cộng từng vế ta được $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 2$

$\Rightarrow M = 24$. Đáp án B.

Ví dụ 21. x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^3 = 3y + 18 \\ y^3 = 3x + 18 \end{cases}$ khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $x < y < 3$ B. $x \geq y > 3$ C. $x + y = 8$ D. $x \leq y \leq 3$

Hướng dẫn giải: Đây là hệ đối xứng loại II, ta có thể dùng máy tính tìm nghiệm hoặc trừ từng vế rồi rút gọn ta được $(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x = y$. Thay vào phương trình đầu ta được $x = y = 3$.

Ví dụ 22. a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^2 + b^2 + 4a - 2b + 5 = 0 \, (1) \\ 2a^2 + b^2 - 9 = 0 \, (2) \end{cases}$

Tính $P = 5ab + a + b$.

A. -11 B. -12 C. -14 D. -10

Hướng dẫn giải: (1) $\Leftrightarrow (a+2)^2 + (b-1)^2 = 0 \Rightarrow a = -2, b = 1$ thỏa mãn (2) $\Rightarrow P = -11$. Đáp án A.

Ví dụ 23. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x(y+1) = 6 \\ xz = 12 \\ z(y+1) = 8 \end{cases}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải: Nhân từng vế ta được $\left[xz(y+1)^2\right]=756\Rightarrow xz(y+1)=\pm 24$

Nếu $xz(y+1)=24\Rightarrow x=3,y=1,z=4$.

Nếu $xz(y+1)=-24\Rightarrow x=y=-3,\ z=-4$. Đáp án C.

Ví dụ 24. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm?

$$\begin{cases}\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)...\left(x^2-2020\right)=0\ (1)\\ x^2+y^2=50\ (2)\end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Nếu $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow y=\pm 7$

Nếu $x^2-2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2},y=\pm\sqrt{48}$

….

Nếu $x^2-49=0\Rightarrow x=\pm 7,y=\pm 1$

Nếu $x^2-50=0\Rightarrow x=\pm 5\sqrt{2},y=0$

Nếu $x\in\{51;52;...;2002\}$ không thỏa mãn (2). Đáp án B.

c.Các bài toán phức tạp

Ví dụ 25. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm dương

$$\begin{cases}x+y=2z^2\ (1)\\ y+z=2x^2\ (2)\\ z+x=2y^2\ (3)\end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Do $x,y,z>0$ nếu $x>y\Rightarrow 2x^2>2y^2\Rightarrow y+z>z+x\Rightarrow y>x$ vô lý

Tương tự nếu $x<y$ vô lý nên $x=y$. Tương tự $y=z$, thay vào hệ đã cho ta được $x=y=z=1$. Đáp án A

Ví dụ 26. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x+1=y+z\\ xy+z^2-7z+10=0\end{cases}$

Tìm GTLN của $M=x^2+y^2$

A. 16 B. 17 C. 18 D. 22

Hướng dẫn giải:

Ta có $\begin{cases} x-y=z-1 \\ 2xy=-z^2+14z-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=z^2-2z+1 \\ 2xy=-2z^2+4z-20 \end{cases}$

Cộng từng vế $M=x^2+y^2=-(z-6)^2+17\le 17$. Max $M=17$ khi $z=6$. Đáp án B.

Ví dụ 27. a,b,c là các số thực thỏa mãn: $\begin{cases} a+b+c=9 \\ ab+bc+a=27 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức $P=3a+2b+c$

A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

HướnHướng dẫn giải:

g dẫn giải:

$(a+b+c)^2=81 \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)=81 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=27=ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Rightarrow a=b=c=3$. Đáp án D.

Ví dụ 28. a,b là các số dương thỏa mãn $\begin{cases} a+b=2 \\ a^4+b^4+\dfrac{5}{ab}=7 \end{cases}$. Tính giá trị $Q=2a^6+7b^9$

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

Hướng dẫn giải: Ta có $2^2=(1.a+1.b)^2\le 2(a^2+b^2) \Rightarrow 2\le a^2+b^2 \Rightarrow 4\le 2(a^4+b^4) \Rightarrow a^4+b^4\ge 2$

Mặt khác $\sqrt{ab}\le \dfrac{a+b}{2}=1 \Rightarrow ab\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{ab}\ge 5 \Rightarrow a^4+b^4+\dfrac{5}{ab}\ge 7$.

Dấu bằng sảy ra khi $a=b=1$. Đáp án A.

Ví dụ 29. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x^7+y^7=1 \ (1) \\ x^8+y^8=1 (2) \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Từ giả thiết ta có :

$x^8\le 1, y^8\le 1 \Rightarrow -1\le x,y\le 1 \Rightarrow x^7\le 1 \Rightarrow y^7\ge 0 \Rightarrow y\ge 0$, tương tự $x\ge 0$

Do đó $0\le x,y\le 1$. Ta có $x^7-x^8+y^7-y^8=0 \Rightarrow x^7(1-x)+y^7(1-y)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^7(1-x)=0 \\ y^7(1-y)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y)\in\{(1;0),(0;1)\}$. Đáp án C.

Ví dụ 30. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 3 = 0 \, (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4xy + 1 = 0 \, (2) \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải: $(1) \Leftrightarrow y^2 + 2(1-x)y + 2x^2 + 3 = 0$, ta có $\Delta' = -(x+1)^2 - 1 < 0$. Do đó (1) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm. Đáp án D

Ví dụ 31. Biết rằng $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{y}{x} = 12 \\ y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{x} = 8 \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $x = 2y$ B. $x = -2y$ C. $x + y = 3$ D. $y = 4x$

Hướng dẫn giải: Đặt $a = y + \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{y}{x}$, ta được $\begin{cases} a^2 - b = 12 \\ a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = -5, b = 13$ hoặc $a = b = 4$

Hệ có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}, y = 2$. Đáp án D

Ví dụ 33. Hệ phương trình $\begin{cases} \left(x-5\right)^2 + \left(y+1\right)^2 = 0 \; (1) \\ \sqrt{2x+y+7} + \sqrt{y+10} = 7 \; (2) \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải: Từ (1) ta có $x - 5 = y + 1 = 0 \Rightarrow x = 5, y = -1$ các giá trị này thỏa mãn (2)

Đáp án B.

Ví dụ 34. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13} + \sqrt{y+2} = 0 \; (1) \\ x^2 + y^2 + 3xy + 7 = 0 \; (2) \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải: Từ (1) $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{y+2} = 0 \Rightarrow x = 3, y = -2$ các giá trị này không thỏa mãn (2). Đáp án D

Ví dụ 35. Hệ phương trình nào dưới đây có nghiệm $x = -3, y = 1$

A. $\begin{cases} \sqrt{x+12} + 2\sqrt{y+8} = 9 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{y+3} = 3 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases}$

C. $\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=0\\ 4x+y=13\end{cases}$ D. $\begin{cases}\sqrt{x-5}+\sqrt{y}=4\\ x+y=7\end{cases}$

Hướng dẫn giải: Thay các giá trị $x=-3, y=1$ vào các hệ đã cho. Đáp án B.

Ví dụ 36. Hệ phương trình nào dưới đây vô nghiệm

A. $\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=0\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{y+11}=5\end{cases}$	B. $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}=0\\ x^2+y^2=13\end{cases}$
C. $\begin{cases}\sqrt{x-2}+2\sqrt{y-3}=0\\ (x+2)^2+2\sqrt{y-3}=0\end{cases}$	D. $\begin{cases}2x+3y=5\\ 4x+16y=20\end{cases}$

Hướng dẫn giải: Đáp án C.

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 37. Gọi (x_0, y_0) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2-13y-14=0 \ (1)\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=5\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)(2)\end{cases}$$

Tính $S=3x+7y$

A. 140 B. 142 C. 148 D. 132

Hướng dẫn giải: Điều kiện $x, y \geq 0$. Từ (2) ta chứng minh được $x=y$ thay vào phương trình (1) ta được $x=-1$ (loại), $x=14 \Rightarrow S=140$. Đáp án A.

Ví dụ 38. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2}\\ \sqrt{y}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2}\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải: Điều kiện $0 \leq x; y \leq 2$

Ta có $\sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{y}+\sqrt{2-x}$

Từ đó suy ra $x=y \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2} \Rightarrow x=y=0$ hoặc $x=y=2$. Đáp án B.

Ví dụ 39. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên?

$$\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=12\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=28\end{cases}$$

A. 2 B. 4 C. 6 D. 0

Hướng dẫn giải: Đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}\ (a, b \geq 0)$ ta được

$\begin{cases} ab(a+b)=12 \\ a^3+b^3=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \Rightarrow (x;y) \in \{(1;9),(9;1)\}$. Đáp án A.

Ví dụ 40. Tìm số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=13 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=5 \end{cases}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

Hướng dẫn giải: Đặt $\sqrt[4]{x}=a, \sqrt[4]{y}=b$ ta được $\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ a+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=3$ hoặc $a=3, b=2$

$\Rightarrow (x;y) \in \{(16;81),(81;16)\}$. Đáp án C

Ví dụ 41. Gọi $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-4}=3 \\ x+y-\sqrt{(x-1)(y-4)}=8 \end{cases}$

Tính $S=5(x_0+y_0)$

A. 40 B. 45 C. 60 D. 50

Hướng dẫn giải: Đặt $a=\sqrt{x-1}, b=\sqrt{y-4}\ (a,b \geq 0)$ ta được

$\begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2-ab=3 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=2$ hoặc $a=2, b=1$

$\Rightarrow (x_0,y_0) \in \{(2;8),(5;5)\} \Rightarrow S=50$. Đáp án D.

Ví dụ 42. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases} x+\sqrt[4]{y-3}=3(1) \\ y+\sqrt[4]{x-3}=3(2) \end{cases}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải: Điều kiện $x, y \geq 3$

Nếu $x>3$ không thỏa mãn (1), Nếu $y>3$ không thỏa mãn (2). Vậy $x=y=3$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Đáp án D.

c.Các bài toán phức tạp

Ví dụ 43. Gọi $(x_0;y_0)$ là nghiệm dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x(y+3)}+\sqrt{y(x+3)}=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. $x_0 < 1 < y_0$ B. $1 \le x_0 \le y_0$ C. $x_0 < y_0 < 1$ D. $1 < y_0 < x_0$

Hướng dẫn giải: Ta có

$$\left(\sqrt{x(y+3)}+\sqrt{y(x+3)}\right)^2 \le (x+y)(x+y+6)=16 \Rightarrow \sqrt{x(x+3)}+\sqrt{y(y+3)} \le 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$. Đáp án B

Ví dụ 44. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases} x+y=\sqrt{5z-1} \\ y+z=\sqrt{5x-1} \\ x+z=\sqrt{5y-1} \end{cases}$

A. 6 B. 4 C. 2 D. 0

Hướng dẫn giải: Điều kiện $x, y, z \ge \frac{1}{5}$. Trước hết ta chứng minh $x=y=z$, thay vào ta được

$2x=\sqrt{5x-1} \Rightarrow x=1; x=\frac{1}{4}$. Đáp án C.

Ví dụ 45. a,b,c là các số thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \sqrt{a-3}+\sqrt{b+22}=5 \\ \sqrt{b-3}+\sqrt{c+22}=5 \\ \sqrt{c-3}+\sqrt{a+22}=5 \end{cases}$$

Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $3 \le a \le b \le c$ B. $3 < a < b < c$ C. $a=b=c<3$ D. $b<3<a<c$

Hướng dẫn giải: Điều kiện $a,b,c \ge 3$. Nếu một trong ba số a,b,c lớn hơn 3 chẳng hạn $a>3$ thì $\sqrt{c-3}+\sqrt{a+22}>5$ (vô lý). Hệ có nghiệm duy nhất $a=b=c=3$. Đáp án A.

Ví dụ 46. a,b là các số thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \sqrt{7-a}+\sqrt{a-5}=b^2-6b+11 (1) \\ 3a^2+b^2=117 (2) \end{cases}$$

Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $b=2a$ B. $a=2b$ C. $a=b$ D. $a+b=12$

Hướng dẫn giải: (1) Ta có $\left(\sqrt{7-a}+\sqrt{a-5}\right)^2 \le 2(7-a+a-5)=4 \Rightarrow \sqrt{7-a}+\sqrt{a-5} \le 2$

Mặt khác $b^2-6b+11=(b-3)^2+2 \ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi $a=6, b=3$.Đáp án B

Ví dụ 47. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} |y|+\sqrt{x^2+9}=a \\ \sqrt{y^2+1}+|x|=\sqrt{x^2+1}+3-a \end{cases}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(-x_0;-y_0)$ cũng là nghiệm. Do đó $x_0=y_0=0$, Thay vào ta được $a=3$. Thay $a=3$ vào hệ ta được

$\begin{cases} |y|+\sqrt{x^2+9}=3 \\ \sqrt{y^2+1}+|x|=\sqrt{x^2+1} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $x_0=y_0=0$. Đáp án D.

Dạng 4. Hệ phương trình chứa tham số

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 48. Tìm giá trị của tham số m để hai phương trình sau tương đương:

$(I)\begin{cases} x-y=7 \\ 4x+3y=0 \end{cases}$ $(II)\begin{cases} 2x-2y=m \\ 4x+3y=0 \end{cases}$

A. 14 B. -14 C. 7 D. -7

Hướng dẫn giải:

$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-2y=14 \\ 4x+3y=0 \end{cases}, (I)\Leftrightarrow(II)$ khi $14=-m\Leftrightarrow m=-14$. Đáp án B.

Chú ý: ngoài cách giải trên ta còn có thể tìm $(x;y)$ ở hệ (I) sau đó thay vào hệ (II) tìm ra m

Ví dụ 49. Tìm giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có một nghiệm là $x=2;y=3$: $\begin{cases} ax+y=3 \\ 4x+ay=-1 \end{cases}$

A. 4 B. -3 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải: Thay $x=2;y=3$ vào hệ trên ta được $a=3$. Đáp án D.

Ví dụ 50. Tìm tất cả giá trị của tham số k để hệ phương trình $\begin{cases} kx-2y=1 \\ 3x+y=3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

A. $k\neq-6$ B. $k=-6$

C. $k\neq 2$ D. Khôn tồn tại k

Hướng dẫn giải: Hệ có nghiệm duy nhất khi $\frac{k}{3}\neq\frac{-2}{1}\Leftrightarrow k\neq-6$. Đáp án A.

Ví dụ 51. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} x+my=3 \\ mx+4y=-1 \end{cases}$$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải: Hệ vô nghiệm khi $\frac{1}{m}=\frac{m}{4}\neq\frac{3}{-1}\Leftrightarrow m\neq\pm2$. Đáp án B.

Ví dụ 52. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hệ phương trình sau vô số nghiệm

$$\begin{cases} x-3y=2 & (1) \\ m^2x-3y=2 & (2) \end{cases}$$

A. ±1 B. 2 C. -2 D. 3

Hướng dẫn giải: Trừ từng vế ta được $\left(1-m^2\right)x=0\,(3)$.

Hệ có nghiệm duy nhất khi (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 1-m^2=0\Leftrightarrow m=\pm1$. Đáp án A.

Ví dụ 53. Trên mặt phẳng tọa độ $\mathrm{Ox}y$ cho $M(x;y)$ với $x;y$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x+y=3-m \\ x-y=3m-3 \end{cases}$$

Tìm giá trị của m để điểm $M\in d: y=x$

A. -1 B. 0 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải: Từ điều kiện đã cho ta có $x=m, y=3-2m$. $M\in d\Leftrightarrow 3-2m=m\Leftrightarrow m=1$.

Đáp án D

Ví dụ 54. Có bao nhiêu giá trị của k để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} (x-3)\left(y+k^2-16\right)=0 & (1) \\ (x-k)(y-7)=0 & (2) \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải: $(1)\Leftrightarrow x=3, y=16-k^2$, $(2)\Leftrightarrow x=k, y=7$ Hệ có nghiệm khi:

$$\begin{cases} k=3 \\ 7=16-k^2 \end{cases}\Rightarrow k=3$$

Đáp án A.

b) Các bài toán trung bình

Ví dụ 55. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm khi m là số thực bất kì

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 4xy=m^2-4m+14 \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải: Ta có $4xy=(m-2)^2+10\ge 10\Rightarrow (x+y)^2=9<10\le 4xy\Rightarrow (x-y)^2<0$. Hệ phương trình vô nghiệm với m là số thực bất kì. Đáp án D.

Ví dụ 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình sau vô nghiệm $\begin{cases} x+y=m+2 \\ x^2+y^2=2m^2+4m \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải: Hệ có nghiệm khi $(x+y)^2\ge 4xy \Leftrightarrow m^2+4m+4\ge -2m^2+8 \Leftrightarrow 3m^2+4m-4\ge 0$

$\Leftrightarrow m\le -2$ hoặc $m\ge \dfrac{2}{3}$. Vậy khi $-2\le m\le \dfrac{2}{3}$ thì hệ vô nghiệm. Đáp án B.

Ví dụ 57. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (2a-b)x+(a+b)y=3a \\ (a+3b)x-(a-b)y=4b \end{cases}$

Khẳng định nào dưới đây là đúng.

A. Không tồn tại a và b để hệ có nghiệm

B. Tồn tại duy nhất cặp $(a;b)$ để hệ có nghiệm

C. Tồn tại đúng hai cặp $(a;b)$ để hệ có nghiệm

D. Với a,b là hai số thực bất kì hệ đều có nghiệm.

Hướng dẫn giải: Dễ thấy $x=y=1$ là nghiệm của hệ với a,b là các số thực bất kì. Đáp án D.

Ví dụ 58. Có bao nhiêu giá trị của tham số k để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+10=0 & (1) \\ x^2+2y^2+xy+k^2-16k+7=0 & (2) \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: $(1)\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=0\Rightarrow x=-3, y=1.$

Thay vào (2) ta được $k^2-16k+15=0\Rightarrow k=1, k=15$. Đáp án B.

Ví dụ 59. Cho a,b thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a-b=m+1 \\ ab+m^2+4m-1=0 \end{cases}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. 12 B. 13 C. 15 D. 9

Hướng dẫn giải: $\begin{cases} a^2+b^2-2ab=m^2+2m+1 \\ 2ab=-2m^2-8m+2 \end{cases}$

$P=-m^2-6m+3=-(m+3)^2+12\le 12$. Đáp án A.

Ví dụ 60. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=-1 \\ x+y=-m \end{cases}$

Có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x=y^2$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Ta có $(m-1)x=m-1$. Hệ có nghiệm duy nhất nếu $m\ne 1$, khi đó $x=1, y=-m-1$. Để $x=y^2$ thì $1=(-m-1)^2 \Leftrightarrow m=0; m=-2$. Đáp án B.

c) Các bài toán phức tạp

Ví dụ 61. Có bao nhiêu giá trị của tham sô k để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x+y+xy=8 & (1) \\ x^2+y^2=-k^2+6k-1 & (2) \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Ta có

$$(x-2)^2\ge 0 \Rightarrow x^2\ge 4x-4$$
$$(y-2)^2\ge 0 \Rightarrow y^2\ge 4y-4$$
$$2(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow 2x^2+2y^2\ge 4xy$$

Cộng từng vế ta được $3(x^2+y^2)\ge 4(x+y+xy)-8=24 \Leftrightarrow x^2+y^2\ge 8$

Từ (2) ta có $(x^2+y^2)=-(k-3)^2+8\le 8$. Do đó $x^2+y^2=8$ khi $k=3$. Đáp án A.

Ví dụ 62. Tìm các giá trị của tham số k để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-5}=4 \\ x+y=k+3 \end{cases}$$

A. $k\ge 9$ B. $k\le 17$ C. $9\le k\le 17$ D. $-17<k<9$

Hướng dẫn giải: Đặt $a=\sqrt{x+1}, b=\sqrt{y-5}$ với $a,b\ge 0$ và $a+b=4$. Từ giả thiết ta tính được $ab=\dfrac{17-k}{2}$, do đó a,b là các nghiệm không âm của phương trình $2t^2-8t+17-k=0 \Rightarrow 9\le k\le 17$. Đáp án C.

Ví dụ 63. Giả sử tồn tại a,b,c,x,y,z thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $S = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

A. -1 B. 0 C. 5 D. 4

Hướng dẫn giải:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2(bx + cy) + b^2(cx + ay) + c^2(ax + by)$$
$$= a^2bx + a^2cy + b^2cx + ab^2y + ac^2x + bc^2y$$
$$= ab(ax + by) + bc(bx + cy) + ac(cx + ay) = 3abc$$

Đáp án B.

Ví dụ 64. Giả sử a và b thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} 3a + \sqrt{12 - 3a^2} = -b^2 + 4b - 10 & (1) \\ a^2 + 2b^2 = 13 & (2) \end{cases}$$

Tính $S = 5a + 3b$

A. -3 B. -5 C. -4 D. 1

Hướng dẫn giải: Điều kiện $-2 \le a \le 2$.

Đặt $M = 3a + \sqrt{12 - 3a^2} \ge 0 \Rightarrow M - 3a = \sqrt{12 - 3a^2} \ge 0 \Rightarrow M \ge 3a \ge -6$

$-b^2 + 4b - 10 = -(b - 2)^2 - 6 \le -6$. Từ (1) suy ra VT=VP=-6 khi $a = -2,\ b = 2 \Rightarrow S = -4$.

Đáp án C.

Ví dụ 65. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x + y = k - 1 \\ x^2 + y^2 = 5 + 2k - k^2 \end{cases}$. Tìm GTLN của $E = xy + 8(x + y) - 25$.

A. -7 B. -8 C. -6 D. -9

Hướng dẫn giải: Đặt $a = x + y, b = xy$. Ta được $\begin{cases} a = k - 1 \\ a^2 - 2b = 5 + 2k - k^2 \end{cases}$. Hệ có nghiệm khi

$a^2 \ge 4b \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 \ge 4k^2 - 8k - 8 \Leftrightarrow -1 \le k \le 3$.

$E = (k^2 - 2k - 2) + 8(k - 1) - 25 = (k + 3)^2 - 44$. Vậy max $E = -8$ khi $k = 3$. Đáp án B.

Ví dụ 66. Có bao nhiêu giá trị tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 2(m^2+2m)x + 13(m^2+2m) = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + (m+2)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: $\Delta_1' = -12(m^2+2m)^2 \geq 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -2$

Nếu $m = 0$ thì (2) trở thành $x^2 - 2x + 4 = 0$ (vô nghiệm)

Nếu $m = -2$ thì (2) trở thành $x^2 - 2x = 0$ hệ có nghiệm $x = 0$. Đáp án A.

BÀI TẬP

3.1. Cho a,b là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} 2a+b=-1 \\ 3a-4b=-40 \end{cases}$. Tính $P=ab$

A. -21 B. -28 C. 28 D. -32

3.2. Cho (x,y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-5y=-16 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $y=3x$ B. $x=3y$ C. $y=-3x$ D. $x=-3y$

3.3.Hệ phương trình nào dưới đây có hai nghiệm

A. $\begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ x-y=3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x^2+y^4=-1 \\ x+y=2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y^2-6y+9=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} (x-1)(y+2)=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

3.4.Hệ phương trình $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$ có nghiệm

A. $x=1, y=-4$ B. $x=1, y=4$ C. $x=-1, y=-1$ D. $x=y=1$

3.5. Biết rằng $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 5x+2y=-20 \\ x-y=-11 \end{cases}$. Tính $S=x^2+y^2$

A. 61 B. 64 C. 50 D. 74

3.6. Tìm giá trị của tham số k để $x=-3, y=4$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (k+1)x+2y=-13 \\ 2x-ky=-30 \end{cases}$$

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

3.7. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases} y^6+5|y|=0 \\ x^4y+x^2+3y^2+5xy-8x+15=0 \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.8. Có bao nhiêu giá trị của tham số $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+(k^2-6k+4)y=7 \end{cases}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3.9. Tìm giá trị của tham số k để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} 2x-7y=-3 \\ 2x+ky=-2 \end{cases}$$

A. $k=-7$ B. $k=7$ C. $-7<k<7$ D. $k>7$

3.10. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases}(x-1)(y+3)=0\\ x^2+y^2=200\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.11. Tìm giá trị tham số m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases}3x-y=5\\ (m^2-7m+6)x-2y=10\end{cases}$$

A. $m\in\{0;7\}$ B. $m\in\{0;-7\}$ C. $m=1$ D. không tồn tại m

3.12. Tìm giá trị của tham số k để hai phương trình sau có cùng tập nghiệm:

$$(I)\begin{cases}2x-3y=9\\ x+y=2\end{cases} \text{ và } (II)\begin{cases}3x+4y=5\\ (k+2)x-y=25\end{cases}$$

A. 4 B. 5 C. 6 D. -6

3.13. Hệ phương trình sau có mây nghiệm: $\begin{cases}x+|y|=1\\ x|y|=-2\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.14. Tìm các giá trị của a,b để $x=1, y=4$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+(a-3)y=-2\\ (b-2)x+3y=13\end{cases}$$

A. $a=2,b=3$ B. $a=-2,b=3$ C. $a=2,b=-3$ D. $a=3,b=-2$

3.15. Chị hòa mua 1 kg thịt lợn va 2kg thịt bò hết 320000 đồng. Chị Bình mua 3 kg thịt lợn và 7 kg thịt bò hết 1080000 đồng. Giá tiền của 1 kg thịt lợn là:

A. 85000 đồng B. 82000 đồng C. 78000 đồng D. .80000 đồng

3.16. Giả sử (x,y) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+4x-2y+5=0\\ x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$

Tính $M=2x+y$

A. -3 B. -2 C. 3 D. 1

3.17. a,b là các số thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}a^2+b^2-4a+6b+13=0\\ 2a^2+b^2=17\end{cases}$ khẳng định nào dưới đây là đúng :

A. $3a-2b=0$ B. $a=3b$ C. $3a+2b=0$ D. $b=3a$

3.18. Có 19 xe bao gồm xe máy hai bánh và mô tô ba bánh, tổng số bánh xe là 45. Hỏi có bao nhiêu xe máy?

A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

3.19. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $\frac{a}{3}=\frac{b}{8}=\frac{c}{5}$ và $2a+3b-c=50$. Tính $S=2a+3b-c$

A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

3.20. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{y+1}=0\\ x^5+y^5+3xy^4+xy=2\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.21. Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+xy=11\\ x^2+y^2=13\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.22. Tìm tất cả giá trị của tham số k để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}8x-k^2y=12\\ 2x-y=1-k\end{cases}$$

A. $k\neq -2$ B. $k\neq 2$ C. $k\neq \pm 3$ D. $k\neq \pm 3$

3.23. a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}a^2+2b=-1\\ b^2-4c=-7\\ c^2-2a=2\end{cases}$ khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b<a<c$ B. $a<b<c$ C. $c<a<b$ D. $b<c<a$

3.24. Tìm GTLN của tham số k để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}x+y=8\\ xy=k-1\end{cases}$

A. 18 B. 15 C. 19 D. 17

3.25. Hệ phương trình sau có mấy nghệm $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^5+y^6=3\end{cases}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

3.26. Tìm điều kiện của tham số k để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}x+y=5-k\\ x^2+y^2=9-k^2\end{cases}$$

A. $-1\le k\le \frac{7}{3}$ B. $\frac{-7}{3}\le k\le 1$ C. $1\le k\le \frac{7}{3}$ D. $k\ge \frac{-7}{3}$

3.27. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)...(x-50)=0\\ x^2+y^2=64\end{cases}$$

A.15 B. 100 C. 14 D. 16

3.28. Trên mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(x,y)$ với x,y thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases}x+y=3k-1\\ 3x-y=k+1\end{cases}$$

Tìm giá trị của k để điểm M thuộc đường thẳng $y=3x-7$

A. 7 B. 5 C. –6 D. 6

3.29. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $\frac{a}{7}=\frac{b}{5};\frac{b}{3}=\frac{c}{4};a+2b+3c=111$

Tính $3a+2b+c$.

A.112 B. 113 C. 115 D. 110

3.30. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases}x^3+6x^2y=7\\ 8y^3+12xy^2=20\end{cases}$

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

3.31. Gọi (x,y) là các số thực thỏa mãn: $\begin{cases}\sqrt{x+4}+\sqrt{y-5}=9\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{y+4}=9\end{cases}$. Tính $M=2x+3y$

A. 100 B. 102 C. 104 D. 105

3.32. Gọi (x,y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=2\\ x+y-\sqrt{x(y-1)}=2\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $x<y$ B. $y<x$ C. $x=y$ D. $x+y=5$

3.33. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases}x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y}=3\\ x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}=3\end{cases}$

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

3.34. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x^2+2y+1=0\\ y^2-2z+1=0\\ z^2-2x+1=0\end{cases}$

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

3.35. Cho các số a,b,c thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=27 \\ ab+bc+ca=27 \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức:

$M=\left|3a-4b+5c\right|$

A. 12 B. 11 C. 15 D. 18

3.36. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} 3x^3=2y+20 \\ 3y^3=2x+20 \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.37. Có bao nhiêu cặp số (a,b) để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2a \\ \left(a^2+b^2\right)x-\left(a^2-b^2\right)y=2b^2 \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. vô số

3.38. Biết rằng (x,y,z) là nghiệm của hệ $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2}+\sqrt{y-6}=2 \\ \sqrt[3]{y+2}+\sqrt{z-6}=2 \\ \sqrt[3]{z+2}+\sqrt{x-6}=2 \end{cases}$

Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A. $x<y<z$ B. $x<z\le y$ C. $x=y=z$ D. $x+y=z$

3.39. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x^2-y^2=4x-2y-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.40. a,b là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a^2-3ab+2b^2=0 \quad (1) \\ 2a^2-3ab+5=0 \quad (2) \end{cases}$. Tính $P=a^2+b^2$

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

3.42. Với a là số thực bất kì, hệ phương trình sau có mấy nghiệm:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 4xy=a^2-2a+15 \end{cases}$$

3.43. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^4+y^4=1 \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.44. Giả sử $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases} x^4 - 5y^2 + 4 = 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}\right)\left(x^2 - xy + y^2 + 1\right) \end{cases}$. Tính $P = x^2 + y^2 + z^2$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3.45. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 6 \\ x^2 + y^2 + yz = 12 \\ xz + yz + z^2 = 18 \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.46. a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} \left(a^2 + 1\right)b = 2a^2 \\ \left(b^2 + 1\right)c = 2b^2 \\ \left(c^2 + 1\right)a = 2c^2 \end{cases}$. Tính $S = a + 2b + 3c^3$

A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

3.47. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2 \\ (z-1)^2 + (x-1)^2 = 2 \end{cases}$

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

3.48. a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức

$S = 3x^3 + 4y^4 + 5z^5$.

A. 10 B. 12 C. 15 D. 20

3.49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 6 - a \end{cases}$$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

3.50. x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức

$S = 3x^3 + 4y^4 + 5z^5$.

A. 10 B. 12 C. 15 D. 20

3.51. Có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) dương thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a^2b^2\left(a^2+b^2\right)=3 \end{cases}$$

A. 3 B. 2 C. 4 D. 0

3.52. Giả sử (x,y) thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^3+xy^2=2 \\ y^3+x^2y=2 \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức $P=25x-3y$

A. 20 B. 21 C. 22 D. 28

3.53. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x+y=x^4+y^4 \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3.54. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases} 2x=\dfrac{x^2+1}{y} \\ 2y=\dfrac{y^2+1}{x^2} \end{cases}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3.55. Cho a,b là các số thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} \dfrac{a^4+1}{\left(a^2+1\right)^2}=b^2-2b+2 \\ a^3+b^3=1 \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức

$P=5a^3b^5$.

A. -1 B. 0 C. 1 D. 5

3.56. Có bao nhiêu bộ số (a,b,c) thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} (a+b)(a+c)=12 \\ (b+c)(b+a)=15 \\ (a+c)(b+c)=20 \end{cases}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3.57. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm:

$$\begin{cases} x^2+y^3=6 & (1) \\ x^2+y^2+xy-3x-y+2=9 & (2) \end{cases}$$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3.58. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} (y+1)^2(y-1)=x+1 \\ (x-3)^2(x+1)=z-1 \\ (z+2)^2(z-1)=1-y \end{cases}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3.59. Có bao nhiêu giá trị k để hệ phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$\begin{cases} (x-k+5)(x-k+2)=0 & (1) \\ x^4-5x^2+4=0 & (2) \end{cases}$$

A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

3.60. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm: $\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+y^3=3\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$

A.1 B.2 C. 3 D. 4

3.61. x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1\ (1) \\ x^3+y^3=3x+y\ (2) \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^2+b^6$.

A. 0 B. 1 C. 8 D. 16

3.62. x, y là các số thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} y+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}=4 \\ \left(y+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4 \end{cases}$ khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $x>y$ B. $x<y$ C. $x=y$ D. $2x+y=4$

3.63. a,b là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a^2+(b-1)^2=1 \\ a^3+(b-1)^3=1 \end{cases}$. Tính $S=12(a+b)$.

A.12 B. 18 C. 24 D. 36

3.64. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm (x, y) thỏa mãn: $xy<0$

$$\begin{cases} x+xy+y=m+3 \\ x^2y+xy^2=m+2 \end{cases}$$

A. $m>2$ B. $m<-2$ C. $m\geq -2$ D. $-1<m<2$

3.65. Có bao nhiêu giá trị của tham số k để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2+xy=(k+2)(y-1) \\ y^2+xy=(k+2)(x-1) \end{cases}$$

A.1 B.2 C. 3 D. 4

HƯỚNG DẪN GIẢI

3.1. Đáp án B

3.2. Đáp án C

3.3. Đáp án D

3.4. Đáp án A

3.5. Đáp án A

3.6. Đáp án C

3.7. Đáp án B

3.8. Đáp án C

3.9. Đáp án A

3.10. Đáp án D

3.11. Đáp án A

3.12. Đáp án C

3.13. Đáp án B

3.14. Đáp án A

3.15. Đáp án D

3.16. Đáp án A

3.17. Đáp án C

3.18. Đáp án C

3.19. Đáp án B

3.20. Đáp án A

3.21. Đặt $S = x + y, P = xy\,(S^2 \geq 4P) \Rightarrow S = 5, P = 6$. Đáp án B

3.22. $\begin{cases} 8x - k^2 y = 12 \\ 8x - 4y = 4 - 4k \end{cases} \Rightarrow \left(4 - k^2\right) y = 8 + 4k \;\; (1)$. Có nghiệm duy nhất khi $4 - k^2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \pm 2$

Đáp án D.

3.23. Ta có $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-2)^2 = 0$. Đáp án A

3.24. Đáp án D

3.25. Ta có $-1 \le x; y \le 1 \Rightarrow x^5 + y^6 \le 2$. Đáp án A

3.26. Hệ có nghiệm khi $\left(x+y\right)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow k^2 - 10k + 25 \ge 4k^2 - 20k + 32 \Leftrightarrow 1 \le k \le \frac{7}{3}$. Đáp án C

3.27. Đáp án A

3.28. $M(k; 2k-1), k = 6$. Đáp án D.

3.29. Đáp án B

3.30. Cộng từng vê ta được $\left(x+2y\right)^3 = 27 \Rightarrow x + 2y = 3$. Thay vào ta có $\left(y-1\right)^2\left(4y^2 - 5y - 5\right) = 0$. Đáp án C

3.31. $\sqrt{x+4} + \sqrt{y-5} = \sqrt{y+4} + \sqrt{x-5}$. Từ đó ta chứng minh được $x = y$. Thay vào ta được $x = y = 21$. Đáp án D.

3.32. $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y-1} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a^2 + b^2 - ab = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow x = 1, y = 2$. Đáp án A

3.33. Đặt $a = x + \frac{1}{y}, b = \frac{x}{y} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, b = 1 \Rightarrow x = y = 1 \\ a = -3, b = 6 \end{array}\right.$. Đáp án C

3.34. Đáp án B

3.35. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 = 0$. Đáp án A.

3.36. Đáp án A

3.37. Đáp án D

3.38. Đáp án C

3.39. Đáp án C

3.40. $\left(1\right) \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a-2b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = \sqrt{5} \\ a = b = -\sqrt{5} \end{array}\right.$. Đáp án B.

3.41. Đáp án D

3.42. Đáp án A.

3.43. Đáp án D.

3.44. Chứng minh $x = y = 1$ hoặc $x = y = 2$. Đáp án C

3.45. Cộng từng vế ta được $(x+y+z)^2 = 36 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(1;2;3),(-1;-2;-3)\}$. Đáp án D

3.46. Nhân từng vế rồi rút gọn ta được $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = 8abc$. Dấu bằng xảy ra khi

$a = b = c = 1$. Đáp án C

3.47. $(x-1)^2 = (y-1)^2 = (z-1)^2 = 1$**.** Đáp án D

3.48. Trừ từng vế ta được $(a-b)(a^2-ab+b^2) = 0 \Rightarrow a = b = 2$. Đáp án C

3.49. Hệ phương trình có nghiệm khi $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$. Đáp án A.

3.50. Áp dụng bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, ta có

$x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^2yz+xy^2z+xyz^2 = xyz(x+y+z) = 3xyz \Rightarrow x = y = z = 1$**.**

Đáp án B.

3.51. Hãy chứng minh $ab < 1 \Rightarrow a^2b^2 \leq ab$. Do đó:

$3 = a^2b^2(a^2+b^2) \leq ab\left[(a+b)^2 - 2ab\right] = 2ab(2-ab) \leq 2\left(\frac{ab+2-ab}{2}\right) = 2$. Đáp án D

3.52. Trừ từng vế ta được $(a-b)(a^2+b^2) = 0 \Rightarrow a = b = 1$. Đáp án C

3.53. Nhân từng vế ta được $(x^3+y^3)(x+y) = x^4+y^4 \Leftrightarrow xy(x^2+y^2) = 0$. Đáp án B.

3.54. Từ giả thiết ta có $x, y > 0$ và $\begin{cases} 2x^2y = y^2+1 \\ 2xy^2 = x^2+1 \end{cases}$. Trừ từng vế ta được

$(x-y)(2xy+x+y) = 0 \Rightarrow x = y = 1$. Đáp án D.

3.55. Ta có $\frac{a^4+1}{(a^2+1)^2} = 1 - \frac{2a^2}{(a^2+1)^2} \leq 1$, $b^2-2b+2 = (b-1)^2+1 \geq 1$. Từ đó $a = 0, b = 1$. Đáp án B.

3.56. $(a,b,c) \in \{(1;2;3),(-1;-2;-3)\}$. Đáp án C

3.57. $(1) \Leftrightarrow x^2+(y-3)x+y^2-y+2 = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{3}$

$(2) \Leftrightarrow y^2+(x-1)y+x^2-3x+2 = 0; \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$. Khi đó $x^3+y^3 < 6$. Đáp án A

3.58. Đáp án D

3.59. Đáp án A

3.60. Đáp án B

3.61. Thay (1) vào (2) ta được $2x\left[\left(x+y\right)^2+y^2\right]=0 \Rightarrow x=0, y^2=1$. Đáp án B

3.62. Đáp án C

3.63. Đặt $c=b-1$ ta được $\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ a^3+c^3=1 \end{cases} \Rightarrow a^2\left(1-a\right)+c^2\left(1-c\right)=0$. Dễ thấy $-1\le a;c\le 1 \Rightarrow a=1, c=0$ hoặc $\Rightarrow a=0, c=1 \Rightarrow a=b=1$ hoặc $a=0, b=2$. Đáp án C

3.64. Đặt $a=x+y, b=xy$, ta được $\begin{cases} a+b=m+3 \\ ab=m+2 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=m+2 \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $t^2-t+m+2=0 \Rightarrow m+2<0 \Rightarrow m<-2$ hoặc $a=m+2, b=1$(loại). Đáp án B.

3.65. Nếu $\left(x, y\right)$ là nghiệm thì $\left(y, x\right)$ cũng là nghiệm của hệ, do đó,
$x=y \Rightarrow 2x^2-(k+2)x+k+2=0$ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow k=-2, k=6$. Đáp án B

CHƯƠNG IV. HÀM SỐ

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hàm số $y = f\left(x\right)$ từ tập hợp số X đến tập số thực $\mathbb{R}$ là một quy tắc tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ một và chỉ một giá trị $y \in \mathbb{R}$. X được gọi là tập xác định, $f\left(x\right) = \left\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in X, f\left(x\right) = y\right\}$ gọi là tập giá trị của hàm số.
- Hàm số $y = f\left(x\right)$ được gọi là đồng biến trên tập xác định nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ thì $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$. $y = f\left(x\right)$ được gọi là nghịch biến trên tập xác định nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ thì $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.
- Hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$, không đổi khi $a = 0$.
- Hàm số $y = ax^2 + b\left(a \neq 0\right)$

Nếu $a > 0$ đồng biến trên $\left(0; +\infty\right)$, nghịch biến trên $\left(-\infty; 0\right)$.

Nếu $a < 0$ đồng biến trên $\left(-\infty; 0\right)$, nghịch biến trên $\left(0; +\infty\right)$.

- Cho các đường thẳng $d : y = ax + b, d' : y = a'x + b'$

d vuông góc với $d' \Leftrightarrow a.a' = -1$

d song song $d' \Leftrightarrow a = a', b = b'$

- Cho các điểm $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$, tọa độ trung điểm của đoạn AB là $I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$, độ dài đoạn $AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$.
- Cho tam giác ABC với $A\left(x_1; y_1\right); B\left(x_2; y_2\right); C\left(x_3; y_3\right)$. Tọa độ trọng tâm của $\triangle ABC$ là $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.
- Cho các hàm số $y = f\left(x\right), y = g\left(x\right)$ có đồ thì tương ứng là $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$, $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$ cắt nhau $\Leftrightarrow$ phương trình $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ có nghiệm, các nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$.

Một số bài toán trọng âm

- Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số
- Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.

- Đồ thị hàm số $y = ax + b$ và $y = ax^2\left(a \neq 0\right)$
- Lập phương trình đường thẳng hay parabol thỏa mãn điều kiện cho trước.
- Xét sự tương giao của đồ thị hàm số.
- Tìm các điểm đặc biệt: Điểm mà đồ thị không đi qua, điểm mà đồ thị luôn đi qua với bất kì giá trị nào của tham số.
- Dựa vào đồ thị, tìm số nghiệm của phương trình.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC VÍ DỤ

Dạng 1: Tập xác định, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 53$ là

A. 49 B. 48 C. 50 D. 47

Hướng dẫn giải: $y = \left(x-2\right)^2 + 49 \geq 49, \min y = 49$ khi $x = 2.$

Đáp án A.

Ví dụ 2: Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{x^2 - 2x + 7}$ là:

A. $x < -2$ B. $x > 2$ C. $-2 < x < 2$ D. $-2 \leq x \leq 2$

Hướng dẫn giải: Hàm số được xác định khi $\begin{cases} x^2 - 2x + 7 \geq 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 2$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 17$ khi $x \geq 2$ là:

A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

Hướng dẫn giải: $y = \left(x-1\right)^2 + 16,$ khi $x \geq 2$ thì $x - 1 \geq 1.$ Do đó, $\min y = 17$ khi $x = 2$

Đáp án D.

Ví dụ 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 4x - 27$ là:

A. -22 B. -23 C. -24 D. -21

Hướng dẫn giải: $y = -\left(x^2 - 4x + 4\right) - 23 = -\left(x-2\right)^2 - 23 \leq -23 \Rightarrow \max y = -23$ khi $x = 2$.

Đáp án B.

Ví dụ 5: Hàm số nào dưới đây xác định với mọi giá trị của *x*?

A. $y=\dfrac{5}{x^2-6x+5}$ B. $y=\sqrt{2x-1}$ C. $y=\sqrt{x^2-6x+2}$ D. $y=x+\dfrac{1}{x}$

Hướng dẫn giải: Ta có $y=\sqrt{x^2-6x+21}=\sqrt{(x-3)^2+12}$

Đáp án C.

b) Các bài toán trung bình

Ví dụ 6: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{x^4\left(x^2-3x-4\right)}$

A. $x\le -1$ hoặc $x\ge 4$ B. $x=0$ hoặc $x\ge 4$

C. $x\ge 4$ D. $-1\le x\le 4$

Hướng dẫn giải: Hàm số được xác định khi

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}\ge 0 \\ x^4\left(x^2-3x-4\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\le -1 \\ x\ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\ge 4 \end{array}\right.$$

Đáp án B.

Chú ý: Học sinh thường bỏ sót giá trị $x=0$.

Ví dụ 7: Cho $x>1$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x-1}$

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Hướng dẫn giải: $y=x-1+\dfrac{4}{x-1}+1\ge 2\sqrt{(x-1)\dfrac{4}{x-1}}+1=5$

$\Rightarrow \min y=5$ khi $x=3$. Đáp án B.

Ví dụ 8: Tìm giá trị nhỉ nhất của hàm số $y=\begin{cases} x^2, x\le -3 \\ x+12, x>-3 \end{cases}$

A. 0 B. 4 C. 9 D. 12

Hướng dẫn giải: Với $x\le -3$ thì $y\ge 9$

Với $x>-3$ thì $y>9$

Do đó $\min y=9$ khi $x=-3$. Đáp án C.

Ví dụ 9: *P* là điểm di động trên đường thẳng $y = x - 4.$ Độ dài đoạn thẳng *OP* đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải: Đường thẳng $d: y = x - 4$ cắt trục *Ox, Oy* lần lượt tại $A(4;0), B(0;-4).$

Tam giác *AOB* vuông cân tại *O* và $AB = 4\sqrt{2}, \min OP = 2\sqrt{2}$ khi *P* là trung điểm của *AB.*

Đáp án B.

Ví dụ 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{(x+6)^2} + \sqrt{(x-7)^2}$

A. 11 B. 12 C. 13 D. 15

Hướng dẫn giải: Ta có $y = |x+6| + |7-x| \geq |x+6+7-x| = 13 \Rightarrow \min y = 13$ khi $-6 \leq x \leq 7.$

Đáp án C.

c) **Các bài toán phức tạp**

Ví dụ 11: Khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến đường thẳng $d: y = (2k-1)x - 4k + 3$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải: d đi qua điểm cố định $M(x_0; y_0)$

$\Leftrightarrow y_0 = (2k-1)x_0 - 4k + 3 \forall k \Leftrightarrow (2x_0 - 4)k + 3 - x_0 - y_0 = 0 \forall k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ 3 - x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(2;1)$

Hạ $OH \perp d,$ khi đó $OH \leq OM, OH$ đạt giá trị lớn nhất bằng $OM = \sqrt{5}.$

Đáp án B.

Ví dụ 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3x^4 + 3}{(x^2+1)^2}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 2 C. $\dfrac{3}{2}$ D. 2

Hướng dẫn giải: Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 3$

Nếu $x \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{3(x^4 + 2x^2 + 1) - 6x^2}{(x^2+1)^2} = 3 - \dfrac{6}{x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2}$

Ta có $x^2+\frac{1}{x^2}+2\ge 2\sqrt{x^2.\frac{1}{x^2}}+2=4\Rightarrow \min y=\frac{3}{2}$ khi $x=\pm 1$. Đáp án C.

Ví dụ 13: Gọi *m, M* tương ứng là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\frac{4x}{x^2+1}$. Tính $m.M$

A. 4 B. -4 C. 2 D. -2

Hướng dẫn giải: Ta có $y=\frac{4x}{x^2+1}\Leftrightarrow yx^2-4x+y=0$ là phương trình ẩn *x*, phương trình này phải có nghiệm.

Nếu $y=0\Rightarrow x=0$

Nếu $y\ne 0,\Delta'=4-y^2\ge 0\Rightarrow -2\le y\le 2$. Khi đó $m=-2,M=2$. Đáp án B.

Ví dụ 14: Gọi *P* là giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x+\sqrt{4-2x^2}$. Khẳng định nào đúng?

A. $P\in(0;2)$ B. $P\in(2;3)$ C. $P\in(3;4)$ D. $P\in(4;10)$

Hướng dẫn giải: $y^2=\left(\sqrt{2}.\sqrt{2x}+1.\sqrt{4-2x^2}\right)^2\le 3\left(2x^2+4-2x^2\right)=12\Rightarrow y\le 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \max y=2\sqrt{3}$ khi $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Đáp án C.

Ví dụ 15: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2-\frac{8x}{x^2+1}+25$ là:

A. 25 B. 30 C. 32 D. 36

Hướng dẫn giải: Đặt $t=\frac{2x}{x^2+1}$ ta được $-1\le x\le 1$. Khi đó $y=t^2-4t+25=(t-2)^2+21$. Do $-1\le x\le 1$ nên $-3\le t-2\le -1\Rightarrow \max y=30$ khi $t=-1$. Đáp án B.

Dạng 2: Điểm thuộc đồ thị và sự biến thiên của hàm số

a. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 16: Tìm giá trị của tham số *m* để điểm $I(3;-24)$ thuộc đường thẳng $y=2x+m-25$

A. -7 B. -6 C. -5 D. 5

Hướng dẫn giải: Đường thẳng đi qua *I* khi $-24=6+m-25\Leftrightarrow m=-5$.

Đáp án C.

Ví dụ 17: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $y = 5x^2$

B. $y = -3x + m - 9$

C. $y = (3m-2)x + 3$

D. $y = (m^2 - 2m + 15)x - 7$

Hướng dẫn giải: Do $m^2 - 2m + 15 = (m-1)^2 + 14 > 0 \forall m$ nên đường thẳng $y = (m^2 - 2m + 15)x - 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Đáp án D.

Ví dụ 18: Điểm nào có tọa độ dưới đây không thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 13$

A. $(-2;21)$ B. $(5;63)$ C. $(-1;15)$ D. $(-3;31)$

Hướng dẫn giải: Khi $x = 5 \Rightarrow y = 63$. Đáp án B.

Ví dụ 19: Biết rằng $E(2;-1)$ thuộc $(P): y = ax^2$. Tìm giá trị k để $F(-2;k-5)$ cũng thuộc *(P)*

A. 2 B. 3 C. 4 D. $\frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải: $E \in (P) \Leftrightarrow -1 = 4a \Rightarrow a = \frac{-1}{4}, F \in (P) \Leftrightarrow k - 5 = -\frac{1}{4}(-2)^2 \Rightarrow k = 4$

Đáp án C.

Ví dụ 20: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = (m^6 - 7m^2 + 4)x + m^2 - 12m + 18$ đi qua điểm $E = (0;-2)$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: d đi qua $E \Leftrightarrow -2 = m^2 - 12m + 18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 10 \end{array}\right.$

Đáp án B.

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 21: Cho hàm số $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không đổi trên $\mathbb{R}$

D. Các khẳng định A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải: Ta có $1 < \sqrt{3}$ mà $D(1) > D(\sqrt{3})$. Hàm số không biến

$\sqrt{3} < 2$ mà $D(\sqrt{3}) < D(2)$. Hàm số không nghịch biến

$D(1) \neq D(\sqrt{3})$. Hàm số thay đổi

Đáp án D.

Ví dụ 22: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số sau nghịch biến trên $\mathbb{R}$: $y = (m^2 - 7m - 8)x + m^3 - 4$

A. 8 B. 9 C. 10 D. 7

Hướng dẫn giải: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $m^2 - 7m - 8 < 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-8) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 8$

Đáp án A.

Ví dụ 23: Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Trong các khẳng định sau có mấy khẳng định đúng?

I. $y = f(x) - g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

II. $y = f(x) + g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

III. $y = 7f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

IV. $y = -(k^2+1)f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Các khẳng địng II, III, IV là đúng. Đáp án C.

Ví dụ 24: Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Ví dụ $[4,7] = 4; [17] = 17; [-9,3] = -10$

Cho hàm số $f(x) = [x]$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không đổi trên $\mathbb{R}$

D. Nếu $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$

Hướng dẫn giải: Các khẳng định A, B, C là sai. Chẳng hạn $3 < 3,5$ tuy nhiên $f(x) = f(3,5)$.

Đáp án D.

Ví dụ 25: Tìm các giá trị của b để điểm $M(0;b)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = (x-3)(x^2 - 31x + m^2 - 8m + 25)$ với bất kì giá trị nào của m

A. $b > -27$ B. $-26 \leq b \leq 26$ C. $b \leq -27$ D. $b \leq 27$

Hướng dẫn giải: Điểm $M(0;b)$ thuộc đồ thị khi $b=-3\left(m^2-8m+25\right)=-3\left[(m-4)^2+9\right]\le -27.$ Do đó với $b>-27$ thì $M(0;b)$ không thuộc đồ thị hàm số.

c. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 26: Hàm số $y=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ có giá trị không đổi trên đoạn nào?

A. $[1;5]$ B. $[5;10]$ C. $[10;12]$ D. $[5;13]$

Hướng dẫn giải: $y=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|$

$$=\begin{cases}-2\sqrt{x-1}+5;1\le x<5\\ 1;5\le x\le 10\\ 2\sqrt{x-1}-5;x>10\end{cases}$$

Đáp án B.

Ví dụ 27: Cho hàm số $y=x^3+x^2+x+5m-9.$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số đồng biến trên $(-2;0)$, nghịch biến trên $(0;2)$

D. Hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$, đồng biến trên $(0;2)$

Hướng dẫn giải: Với x_1,x_2 bất kì sao cho $x_1<x_2$

$$y_2-y_1=\left(x_2^3-x_1^3\right)+\left(x_2^2-x_1^2\right)+\left(x_2-x_1\right)=\left(x_2-x_1\right)\left(x_2^2+x_1x_2+x_1^2+x_1+x_2+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_2-x_1\right)\left[\left(x_1+x_2+1\right)^2+x_1^2+x_2^2+1\right]>0\Rightarrow y_1<y_2$$

Đáp án B.

Ví dụ 28: Có bao nhiêu giá trị của b để điểm $M(b;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y=x^4+2x+5$

A. 4 B. 2 C. 1 D. 0

Hướng dẫn giải: Giả sử M thuộc đồ thị hàm số, ta có

$$1=b^4+2b+5\Rightarrow 2b=-\left(b^4+4\right)\le -4\Rightarrow b\le -2\Rightarrow b^3+2\le -6$$

$$\Rightarrow b^4+2b+5=b\left(b^3+2\right)+5\le 17 \text{ (Vô lí)}$$

Vậy không có giá trị nào của *b* để *M* thuộc đồ thị hàm số. Đáp án D.

Ví dụ 29: Cho các đường thẳng $d_1: y=-x+1, d_2: y=x-1, d_3: y=-ax+a^3-a^2-\frac{1}{3}$. Tìm giá trị của tham số *a* để đường thẳng d_3 đi qua giao điểm của d_1 và d_2.

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+1}$ B. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$ C. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}$ D. $\frac{1}{-\sqrt[3]{4}-1}$

Hướng dẫn giải: $M(1;0)$ là giao điểm của d_1 và d_2. *M* thuộc d_3 khi $-a+a^3-a^2-\frac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow 4a^3=(a+1)^3 \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$. Đáp án B.

Ví dụ 30: Có bao nhiêu giá trị của *a* để $M(a;6)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{4}{x}\right)+15$

A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

Hướng dẫn giải: Với $x=a$ thì $y=\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+4\left(a+\frac{4}{a}\right)+15$

Đặt $t=a+\frac{4}{a} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -4 \\ t\ge 4\end{array}\right. \Rightarrow t^2=a^2+\frac{16}{a^2}+8 \Rightarrow a^2+\frac{16}{a^2}=t^2-8$

$\Rightarrow y=t^2+4t+7=(t+2)^2+3\ge 7$ với $\left[\begin{array}{l} t\ge 4 \\ t\le -4\end{array}\right.$

Đáp án A.

Dạng 3: Phương trình đường thẳng, phương trình parabol và sự tương giao của đồ thị

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 31: Cho các đường thẳng $d:(m-8)x+1, d': y=\frac{1}{3}x-5m+32$. Tìm giá trị của *m* để *d* vuông góc với d'

A. 4 B. 5 C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

Hướng dẫn giải: *d* vuông góc với d' khi $(m-8)\frac{1}{3}=-1 \Leftrightarrow m=5$. Đáp án B.

Ví dụ 32: Viết phương trình đường thẳng đi qua $I(2;-8)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ là -16

A. $y=4x+16$ B. $y=2x-16$

C. $y=4x-16$ D. $y=x-16$

Hướng dẫn giải: Đường thẳng có dạng $y=ax-16$ đi qua $I\left(2;-8\right)$ khi $-8=2a-16 \Leftrightarrow a=4$ $\Rightarrow d: y=4x-16$. Đáp án C.

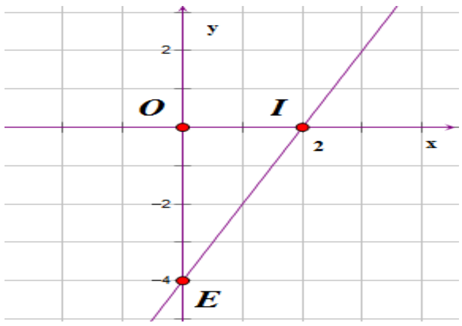
Ví dụ 33: Cho đường thẳng $d: y=\left(m^3+15m\right)x-96, d': y=8m^2x+32m-1$. Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để *d* song song với d'

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: *d* song song với $d' \Leftrightarrow \begin{cases} m^3+15m=8m^2 \\ -96 \neq 32m-1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{0;3;5\}$

Đáp án C.

Ví dụ 34: Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình bên



A. $y=x^2-3x-4$

B. $y=-2x+4$

C. $y=2x-4$

D. $y=-2x-4$

Hướng dẫn giải: Đường thẳng có dạng $y=ax+b$. Do $I\left(2;0\right)$ thuộc đường thẳng nên $a=2 \Rightarrow y=2x-4$

Hoặc ta có thể giải bằng phương pháp loại trừ: Đồ thị ở A là parabol, B và C là các hàm số nghịch biến

Đáp án C.

Ví dụ 35: Đường thẳng $d: y=x+8$ cắt các trục *Ox*, *Oy* tại *M* và *N*. Diện tích tam giác *MON* bằng?

A. 64 B. 16 C. 34 D. 32

Hướng dẫn giải: *d* cắt trục *Ox, Oy* tại $M\left(8;0\right), N\left(0;8\right)$ do đó diện tích tam giác *MON* bằng:

$\frac{1}{2}.8.8=32$

(đơn vị diện tích). Đáp án D.

Ví dụ 36: Đường thẳng *d* có dạng $y=ax+b$ đi qua $I\left(4;-6\right)$ và vuông góc với đường thẳng $d':y=x+421.$ Tính $P=5ab.$

A. 10 B. 18 C. 15 D. -10

Hướng dẫn giải: Do *d* vuông góc với d' nên *d* có dạng $y=-x+b.$ Do $I\in d$ nên $b=-2\Rightarrow d:y=-x-2\Rightarrow P=5.\left(-1\right).\left(-2\right)=10$

Đáp án A.

b) Các bài toán trung bình

Ví dụ 37: Cho $\triangle ABC$ có $A\left(3;2\right),B\left(-7;5\right),C\left(1;-7\right).$ Đường trung tuyến *AM* của $\triangle ABC$ có phương trình là:

A. $y=2x+\frac{1}{2}$ B. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

C. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ D. $y=2x-\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải: $M\left(-3;-1\right)$ là trung điểm của *BC*. Phương trình *AM* có dạng

$$y=ax+b\Rightarrow\begin{cases}2=3a+b\\-1=-3a+b\end{cases}\Rightarrow a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Đáp án B.

Ví dụ 38: Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để hai đường thẳng $y=13x+m^2+16m+9$ và $y=7x+8m^2+m+9$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

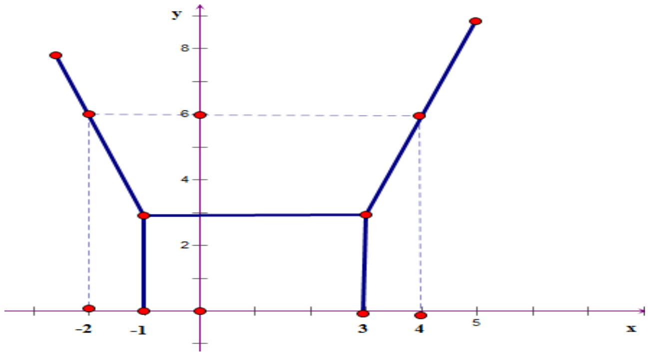
Hướng dẫn giải: Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục tung khi

$m^3+16m+9=8m^2+m+9$

$\Leftrightarrow m^3-8m^2+15m=0\Leftrightarrow m\in\left\{0;3;5\right\}$

Đáp án C.

Ví dụ 39: Hàm số nào dưới đây có đồ thị ở hình bên?



A. $y=-|x-3|+|x+1|$

B. $y=|x-3|+|x+1|$

C. $y=|x-3|-|x+1|$

D. $y=|x+3|+|x-1|$

Hướng dẫn giải: Bằng phương pháp điểm đặc biệt ta có: Với $x=0, y=4,$ ta loại các khẳng định A và C. Với $x=3, y=4$ ta loại khẳng định D.

Đáp án B.

Ví dụ 40: Cho đường thẳng $d: y=3x+9$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua trục Ox có phương trình là

A. $y=-3x-9$ B. $3x-9$ C. $9x+3$ D. $y=-3x+9$

Hướng dẫn giải: d đi qua điểm $M(-3;0), N(0;9)$, do đó d' đi qua các điểm $M(-3;0), P(0;-9)$.

Phương trình $d': y=-3x-9$.

Đáp án A.

Ví dụ 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=27x^2-42x+m^2-17m-18$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ trái dấu

A. 16 B. 17 C. 18 D. 20

Hướng dẫn giải: Phương trình $27x^2-43x+m^2-17m-18=0$ có hai nghiệm trái dấu khi $27(m^2-17m-18)<0 \Leftrightarrow (m+1)(m-18)<0 \Leftrightarrow -1<m<18$

Đáp án C.

Ví dụ 42: Cho $\triangle ABC$ có $A(-5;-1), B(3;2), C(-1;4)$. Đường cao AH của $\triangle ABC$ có phương trình là:

A. $y=-2x+9$ B. $y=2x-19$

C. $y=2x-9$ D. $y=2x+9$

Hướng dẫn giải: Phương trình cạnh *BC* là $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$. Đường cao *AH* qua *A* và vuông góc với *BC* nên *AH* có phương trình là $y=2x+9$

Đáp án D.

Ví dụ 43: Tìm các giá trị của tham số *m* để đường cong có phương trình $y=(x-1)\left(x^2+2mx+2m^2-8m+15\right)$ cắt trục *Ox* tại 3 điểm phân biệt

A. $-5<m<-3$ B. $3<m<5$

C. $m<3$ D. $m>5$

Hướng dẫn giải: Ta cần có phương trình $(x-1)\left(x^2+2mx+2m^2-8m+15\right)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-8m+15=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m+15<0 \\ m^2-3m+8\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m<5$$

Đáp án B.

c) Các bài toán phức tạp

Ví dụ 44: Cho parabol $(P): y=x^2+(1-2m)x+m^2-1$. Đường thẳng $d: y=x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. *d* không cắt (P)

B. *d* tiếp xúc với (P)

C. *d* cắt (P) tại hai điểm *M, N* có độ dài đoạn *MN* thay đổi khi *m* thay đổi

D. *d* cắt (P) tại hai điểm *M, N* có độ dài đoạn *MN* không đổi khi *m* thay đổi

Hướng dẫn giải: Phương trình $x^2+(1-2m)x+m^2-1=x \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=m-1, x_2=m+1 \Rightarrow d$ cắt (P) tại $M(m-1;m-1), N(m+1;m+1)$. Đô dài $MN=2\sqrt{2}$.

Đáp án D.

Ví dụ 45: Đường thẳng $d: y=5$ cắt đồ thị hàm số $y=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+6$ tại bao nhiêu điểm có hoành độ dương?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Hướng dẫn giải: $y=(2x-1)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2+6\ge 6\forall x>0$ nên đường thẳng d không cắt đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ dương.

Đáp án A.

Ví dụ 46: Đồ thị hàm số $y=x^8-x^5+x^2-x+1$ cắt trục *Ox* tại mấy điểm?

A. 4 B. 2 C. 1 D. 0

Hướng dẫn giải: $y=\left(x^4-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{2}>0.$ Đồ thị hàm số không cắt trục *Ox*.

Đáp án D.

Ví dụ 47: Gọi *M, N* là các giao điểm của $d: y=ax+1$ với parabol $(P): y=x^2$. Độ dài đoạn *MN* đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 2 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải: Xét phương trình $x^2=ax+1\Leftrightarrow x^2-ax-1=0(1),\Delta=a^2+4>0$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2.M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1+x_2=a,x_1x_2=-1,$

$$MN^2=(x_2-x_1)^2+(ax_1-ax_2)^2=(a^2+1)(x_2-x_1)^2=(a^2+1)\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]$$

$$=(a^2+1)(a^2+4)\ge 4$$

$\min MN=2$ khi $a=0$

Đáp án A.

Ví dụ 48: Đường thẳng $d: y=16$ cắt đồ thị hàm số $y=(x+23)^4+(x+25)^4$ tại các điểm $E(a;16),F(b;16)$. Tính $P=3(a+b)$

A. 144 B. -144 C. -147 D. -151

Hướng dẫn giải: Xét phương trình $(x+23)^4+(x+25)^4=16$. Đặt $t=x+24,$ ta được

$$(t-1)^4+(t+1)^4=16\Leftrightarrow(t^2-2t+1)^2+(t^2+2t+1)^2=16\Rightarrow t^2=1\Rightarrow t=\pm1$$

$$\Rightarrow x\in\{-23;-25\}\Rightarrow P=3.(-23).(-25)=-144$$

Đáp án B.

Dạng 4: Các bài toán về hàm số

a) Các bài toán đơn giản

Ví dụ 49: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{1-x}$. Tính $f\left(\frac{1}{1-a}\right)$

A. $\frac{a+1}{a}$ B. $\frac{a}{a-1}$ C. $\frac{a-1}{a}$ D. $\frac{a-2}{a}$

Hướng dẫn giải: $f\left(\frac{1}{1-a}\right)=\frac{1}{a-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{1-a-1}=\frac{a-1}{a}$

Đáp án C.

Ví dụ 50: Biết rằng điểm $O\left(0;0\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng *MN*. Nếu $M\left(7;2\right)$ thì tọa độ điểm *N* là:

A. $\left(7;-2\right)$ B. $\left(2;-7\right)$ C. $\left(-7;-2\right)$ D. $\left(-2;7\right)$

Hướng dẫn giải: Nếu $M\left(x_1;y_1\right),N\left(x_2;y_2\right)$ thì trung điểm của *MN* có tọa độ là $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Do đó $N\left(7;-2\right)$

Đáp án A.

Ví dụ 51: Cho $P\left(3;7\right)$, điểm *Q* đối xứng với *P* qua trục *Oy* thì tọa độ của *Q* là:

A. $\left(7;3\right)$ B. $\left(-3;-7\right)$ C. $\left(-3;7\right)$ D. $\left(3;-7\right)$

Hướng dẫn giải: Nếu $P\left(a;b\right)$, *Q* đối xứng với *P* qua trục *Oy* thì tọa độ của *Q* là $\left(-a;b\right)$

Đáp án C.

Ví dụ 52: Đường thẳng nào dưới đây tạo với trục *Ox* góc $60°$

A. $y=x+\sqrt{3}$ B. $y=\sqrt{2}x-\sqrt{3}$

C. $y=\sqrt{3}x-17$ D. $y=3x-9m+2$

Hướng dẫn giải: Đường thẳng $y=ax+b$ tạo với trục *Ox* góc α thỏa mãn $a=\tan\alpha$. Đáp án C.

Ví dụ 53: Đường thẳng *d* đi qua các điểm $P\left(-3;-16\right),Q\left(1;-4\right)$ có hệ số góc là:

A. 3 B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. -3

Hướng dẫn giải: *d* có dạng $y=ax+b$, khi đó

$\begin{cases} -3a+b=-16 \\ a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-7 \end{cases} \Rightarrow y=3x-7$

Đáp án A.

Ví dụ 54: Đường thẳng $d: y=-2x+4$ cắt trục *Ox, Oy* lần lượt tại *P, Q*. Diện tích tam giác *OPQ* là:

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

Hướng dẫn giải: Dễ thấy $P(2;0), Q(0;4),$ diện tích $\triangle OPQ$ bằng 4. Đáp án A.

b) Các bài toán trung bình

Ví dụ 55: Cho $A(-1;1), B(15;1), C$ là điểm thay đổi trên đường thẳng $y=-2,$ diện tích $\triangle ABC$ là:

A. 48 B. 36 C. 24 D. 18

Hướng dẫn giải: $AB=16,$ độ dài đường cao *CH* bằng 3. Diện tích $\triangle ABC$ bằng 24

Đáp án C.

Ví dụ 56: Đường thẳng $d: y=(2k+3)x-6k-21$ luôn đi qua điểm cố định $M(x_0; y_0)$. Tính $S=x_0^2+y_0^2$

A. 151 B. 153 C. 164 D. 170

Hướng dẫn giải: *d* đi qua $M(x_0; y_0)$ với mọi *k*

$\Leftrightarrow y_0=(2k+3)x_0-6k-21 \forall k \Leftrightarrow (2x_0-6)k+3x_0-y_0-21=0 \forall k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0-6=0 \\ 3x_0-y_0=21 \end{cases} \Rightarrow M(3;-12)$

Đáp án B.

Ví dụ 57: Đường thẳng $d: y=ax+1$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại *M, N*. Khẳng định nào đúng?

A. $\triangle OMN$ đều B. $\triangle OMN$ có một góc tù

C. $\triangle OMN$ có ba góc nhọn D. $\triangle OMN$ vuông tại *O*

Hướng dẫn giải: Phương trình $x^2=ax+1 \Leftrightarrow x^2-ax-1=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó *d* luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $M(x_1; x_1^2), N(x_2; x_2^2)$ và $x_1x_2=-1.$ Đường thẳng *OM, ON* lần lượt có phương trình $y=x_1x$ và $y=x_2x.$ Do $x_1x_2=-1$ nên $OM \perp ON$. Đáp án D.

Ví dụ 58: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f(a+1)=a^2+5a-25$

A. $f(x)=x^2+3x-29$ B. $f(x)=x^2-3x-29$

C. $f(x)=x^2+3x-28$ D. $f(x)=x^2-3x+29$

Hướng dẫn giải: $f(a+1)=(a^2+2a+1)+(3a+3)-29=(a+1)^2+3(a+1)-29$

$\Rightarrow f(x)=x^2+3x-29.$ Đáp án A.

Ví dụ 59: Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^3-5x^2+8x-2}{x-1}$ có tọa độ nguyên?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải: $y=2x^2-3x+5+\dfrac{3}{x-1}$

Để $x,y\in\mathbb{Z}$ thì $x-1$ là ước của $3, x\in\{-2;0;2;4\}$

Đáp án A.

Ví dụ 60: Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ với $A(-3;2),B(6;4),C(9;-12)$. Độ dài đoạn OG bằng

A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $2+\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải: $G(4;-2)$ do đó độ dài đoạn OG bằng $2\sqrt{5}$. Đáp án C.

c) Các bài toán phức tạp

Ví dụ 61: Cho điểm $P(1;1),Q(4;2),M$ là điểm di động trên trục Ox, $MP+MQ$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2+\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải: Lấy $E(1;-1)$ đối xứng với P qua Ox. Phương trình đường EQ là $y=x-2$. EQ cắt Ox tại $M(2;0)$. Khi đó M là điểm cần tìm và $MP+MQ=3\sqrt{2}$. Đáp án D.

Ví dụ 62: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Xét dãy các hàm số $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f\left[f_1(x)\right]$, $f_3(x)=f\left[f_2(x)\right],...$ Tính $f_{2022}(x)$

A. $\dfrac{1}{1-x}$ B. $\dfrac{x-1}{x}$ C. x D. $\dfrac{x+1}{x}$

Hướng dẫn giải: $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f\left[f_1(x)\right]=f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{x-1}{x}$

$f_3(x) = f\left[f_2(x)\right] = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x,\ f_4(x) = f_1(x) = \frac{1}{1-x}$

Do đó ta có $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, n = 3k+1 \\ \frac{x-1}{x}, n = 3k+2 \\ x, n = 3k \end{cases}$

Đáp án C.

Ví dụ 63: Tìm hàm số $f(x)$ biết $f\left(a - \frac{4}{a}\right) - 3 = a^2 + \frac{16}{a^2} + 5a - \frac{20}{a} - 11$

A. $f(x) = x^2 - 5x + 3$ B. $f(x) = x^2 + 5x - 3$

C. $f(x) = x^2 - 6x + 3$ D. $f(x) = x^2 - 5x - 3$

Hướng dẫn giải: $f\left(a - \frac{4}{a}\right) = \left(a^2 - 8 + \frac{16}{a^2}\right) + 5\left(a - \frac{4}{a}\right) - 3 = \left(a - \frac{4}{a}\right)^2 + 5\left(a - \frac{4}{a}\right) - 3$

Do đó $f(x) = x^2 + 5x - 3$

Đáp án B.

Ví dụ 64: Cho các điểm $M(-1;-1), N(2;-4)$ thuộc $(P): y = -x^2, I(x_0; y_0)$ là điểm thuộc cung *MN* sao cho $\triangle MIN$ có diện tích lớn nhất. Tính $S = 4x_0 + 12y_0$

A. -2 B. -1 C. 1 D. 3

Hướng dẫn giải: Phương trình đường thẳng *MN* là $y = -x - 2,$ đường thẳng $d \parallel MN$ có dạng $y = -x + b,$ do *d* tiếp xúc với (P) nên phương trình $-x^2 = -x + b$ có nghiệm kép $\Rightarrow b = \frac{1}{4}.$

Khi đó $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ là tiếp điểm của *d* và (P)

Đáp án B.

Ví dụ 65: Cho hàm số $y = -x^2 + 2(2m-1)x - 2m^2 + 8m + 1.$ Với mỗi giá trị của *m*, hàm số có giá trị lớn nhất. Khi *m* thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất trong các giá trị lớn nhất của hàm số

A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

Hướng dẫn giải: $y = -\left[x - (2m-1)\right]^2 + 2m^2 + 4m + 17$

Với mỗi *m*, giá trị lớn nhất của hàm số là $2m^2+4m+17$. Mặt khác $2m^2+4m+17=2\left(m+1\right)^2+15\geq 15$

Đáp án D.

BÀI TẬP

4.1. Cho $\triangle ABC$ với $A(-3;4), B(2;1), C(7;-20)$. Tọa độ trọng tâm $\triangle ABC$ là:

A. $(2;-5)$ B. $(5;-2)$ C. $(-2;5)$ D. $(2;5)$

4.2. Cho các điểm $E(7;-21), F(-1;9), G(0;5), H(2;3)$. Trong các điểm trên, có mấy điểm thuộc đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 5$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4.3. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. $y = 7x^2$ B. $y = 4x + 3 - m$

C. $y = \sqrt{2x+1}$ D. $y = -(m^2 - 3m + 7)x + 15$

4.4. Điểm *N* đối xứng với $M(-3;5)$ qua $O(0;0)$. Tọa độ của *N* là:

A. $(-3;-5)$ B. $(5;-3)$ C. $(3;5)$ D. $(3;-5)$

4.5. Lập phương trình đường thẳng *d* đi qua $M(-2;-15)$ và song song với $d': y = 3x + 123$

A. $y = 3x + 9$ B. $y = 3x - 9$ C. $-3x + 9$ D. $y = 3x + 1$

4.6. Tìm giá trị của tham số *m* để ba đường thẳng $d_1 : y = 2x - 3, d_2 : y = x - 1,$ $d_3 : y = (m-7)x + 23$ đồng quy

A. -4 B. 4 C. -5 D. -6

4.7. Đường thẳng nào dưới đây cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt

A. $y = 2x - 9$ B. $8x - 16$ C. $y = 3x - 35$ D. $y = 8x - 15$

4.8. Tìm giá trị của tham số *k* để đường thẳng $d : y = 4x - 1$ cắt $(P): y = (2k+1)x^2$ tại điểm có hoành độ bằng 1

A. -1 B. 1 C. 2 D. -3

4.9. Đường thẳng *d* song song với đường thẳng $d': y = -7x - 143$ và cắt trục *Oy* tại điểm có tung độ bằng 23 có phương trình là

A. $y = -7x + 23$ B. $y = -7x - 23$ C. $y = 7x - 23$ D. $y = \frac{1}{7}x + 23$

4.10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 8x + 41$ là

A. 23 B. 24 C. 25 D. 26

4.11. Đường thẳng *d* đối xứng với $d': y = 2x + 6$ qua trục *Oy* có phương trình là

A. $y = -2x - 6$ B. $y = -2x + 6$ C. $y = 6x + 2$ D. $y = 2x - 6$

4.12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 30$ với $1 \le x \le 200$ bằng

A. 29 B. 30 C. 31 D. 32

4.13. Cho các đường thẳng $d_1 : y = -x + 1, d_2 : y = x - 1, d_3 : y = \left(k^4 - 5k^2 + 1\right)x + 3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số *k* để ba đường thẳng đó đồng quy

A. 1 B. 2 C. 4 D. 3

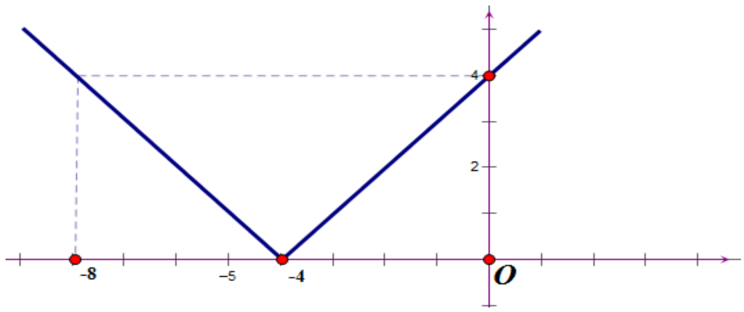
4.14. Đường thẳng *d* đi qua điểm $M(-5;3)$ và vuông góc với đường thẳng $y = -x$ có phương trình là

A. $y = x + 8$ B. $y = x - 8$ C. $y = 2x + 8$ D. $y = -x + 8$

4.15. Hàm số $y = \left(m^2 - 9m - 10\right)x + 5$ nghịch biến khi

A. $-3 < m < 10$ B. $-1 < m < 10$ C. $m > 10$ D. $m \le 5$

4.16. Hàm số nào dưới đây có đồ thị ở hình bên?



A. $y = |x - 4|$ B. $y = -|x - 4|$ C. $y = x + 4$ D. $y = |x + 4|$

4.17. Gọi *M, N* là các giao điểm của các đường thẳng $y = -8$ và $(P): y = -2x^2$. Diện tích $\triangle OMN$ bằng

A. 32 B. 16 C. 12 D. 8

4.18. Cho hàm số $y = \begin{cases} -5, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 2, x > 0 \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây SAI?

A. Tập giá trị của hàm số là $\{-5; 0; 2\}$ B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

C. Nếu $x_1 < x_2$ thì $y(x_1) \le y(x_2)$ D. Nếu $y \le 2 \forall x \in \mathbb{R}$

4.19. Cho $M(-1;-1), N(3;1)$, đường trung trực của *MN* là

A. $y=-2x+2$ B. $y=2x+2$ C. $y=\frac{1}{2}x+2$ D. $y=-2x-2$

4.20. Đường thẳng *d* đi qua điểm $M\left(2;7\right)$ và tạo với trục *Ox* một góc $45°$, *d* cắt trục *Ox, Oy* lần lượt tại *P* và *Q*. Tính diện tích $\triangle OPQ$

A. 10 B. 15 C. 25 D. $\frac{25}{2}$

4.21. Tìm tổng các giá trị của tham số *m* để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-mx+2$ bằng 1

A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

4.22. Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{3x^2+x+4}{x+1}$

A. 12 B. 4 C. 6 D. 8

4.23. Biết rằng đường thẳng $d:y=\left(7-m\right)x-3m+17$ luôn đi qua điểm cố định *E*. Độ dài đoạn *OE* bằng?

A. $3\sqrt{2}$ B. 4 C. 5 D. $5\sqrt{2}$

4.24. Với $x>3$. giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{4}{x-3}$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

4.25. Biết rằng hai đường thẳng $y=mx+n-2, y=\left(5-m\right)x+4-n$ trùng nhau. Tính $S=6m+n$

A. 18 B. 19 C. 20 D. 17

4.26. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{\left(x-10\right)^2}+\sqrt{\left(x-15\right)^2}$ là:

A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

4.27. *M* là điểm di động trên $\left(P\right):y=2x^2$. Tập hợp trung điểm *I* của đoạn *OM* là parabol có phương trình

A. $y=x^2$ B. $y=3x^2$ C. $y=4x^2$ D. $y=\sqrt{5}x^2$

4.28. Đường thẳng $d:y=-x+2$ cắt parabol $y=x^2$ tại *M, N*. Hạ *MH, NK* vuông góc với trục *Ox*. Diện tích tứ giác *MNKH* bằng

A. $\frac{15}{2}$ B. $\frac{13}{2}$ C. 9 D. 7

4.29. Biết *a* là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2$ với $-5 \le x \le -1$. *b* là giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 3$ với $1 \le x \le 5$. Tính $a + 2b$

A. 9 B. 8 C. 4 D. 5

4.30. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nếu $f(0) = 5; f(-1) = 3$ thì $a + c = ?$

A. $2 - b$ B. 5 C. 3 D. $b + 2$

4.31. Cho đường thẳng $d: y = 13x + k^2 - 8k + 35$. Gọi $E(-1;b)$ là các điểm là đường thẳng *d* không thể đi qua. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b < 6$ B. $b \ge 6$ C. $-6 < x < 12$ D. $b > 0$

4.32. Gọi *Q* là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ với $x \ge 3$. Khẳng định nào đúng?

A. $Q \in [0;3]$ B. $Q \in [3;4]$ C. $Q \in [4;5]$ D. $Q > 5$

4.33. Gọi *m, M* lần lượt là giá trị nhỏ nhất nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 1}$. Tính $m + M$

A. 6 B. 7 C. 8 D. 12

4.34. Cho hàm số $y = \dfrac{-2x^2 + x + 3}{x - 1}, x \in (1;+\infty)$. Khẳng định nào đúng với mọi $x \in (1;+\infty)$

A. Hàm số nghịch biến B. Hàm số đồng biến

C. Hàm số không đổi D. Các phương án A, B, C đều sai

4.35. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 4x + 6)(x^2 - 4x + 8) + 105$

A. 110 B. 113 C. 111 D. 112

4.36. Cho hàm số $y = x^2 + (2k - 1)x + 3k - 5$. Với mỗi giá trị của *k*, gọi y_0 là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi *k* thay đổi tìm giá trị lớn nhất của y_0

A. -2 B. $\dfrac{-3}{2}$ C. -1 D. $\dfrac{-5}{4}$

4.37. Cho điểm $E(-1;1), I(0;2); (P): y = x^2$. $F(a;b)$ là điểm thuộc (P): $\triangle EIF$ vuông cân tại *I*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $a < b$ B. $b < a$ C. $a = b$ D. $2a + 3b = 6$

4.38. Cho hàm số $f(x)$ biết $f(x - 1) = x^2 - 6x + 30$. Tính $f(x + 3)$

A. $f\left(x+3\right)=x^2+2x+22$ B. $f\left(x+3\right)=x^2-2x+24$

C. $f\left(x+3\right)=x^2+22$ D. $f\left(x+3\right)=x^2-4x+22$

4.39. Kí hiệu $\left[x\right]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng *x*, ví dụ $\left[0;8\right]=0;\left[-4,7\right]=-5;\left[-7\right]=-7$ Cho hàm số $f\left(x\right)=x-\left[x\right]$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không đổi trên $\mathbb{R}$ D. $\forall x\in\mathbb{R},0\le f\left(x\right)<1$

4.40. Biết rằng đường thẳng $d:y=\left(2m-1\right)x-4m+3$ luôn đi qua *E* cố định với bất kì giá trị nào của *m*. Đường thẳng d' qua *E* và vuông góc với *OE* có phương trình là:

A. $y=2x-5$ B. $y=-2x+5$ C. $y=5x-2$ D. $y=-2x-5$

4.41. Cho hàm số $y=\left(m-1\right)x+5-m.$ Tìm giá trị của tham số *m* để $f\left(x\right)\ge 0\forall x\in\left[-1;2\right]$

A. $-4\le m\le 2$ B. $m<-3$ hoặc $m>3$

C. $-3\le m\le 3$ D. $-5\le m\le 5$

4.42. Cho đường thẳng $d:y=\left(1-k\right)x+6k+2$ với *k* là tham số thay đổi. Khoảng cách từ gốc tọa độ *O* đến đường thẳng *d* đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 13 B. 12 C. 11 D. 10

4.43. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4+4}{\left(x^2+1\right)^2}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\dfrac{1}{2}\le y\le 1$ B. $y>1$ C. $0<y\le\dfrac{3}{4}$ D. $y\ge\dfrac{2}{3}$

4.44. Gọi *M* là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2x-5}+\sqrt{10-3x}$. Khẳng định nào đúng?

A. $M\in\left(1;2\right)$ B. $M\in\left(2;3\right)$ C. $M\in\left(3;4\right)$ D. $M\in\left(4;5\right)$

4.45. *M* là điểm di động trên $\left(P\right):y=-x^2$, khoảng cách từ $I\left(0;-2\right)$ đến *M* đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

4.46. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=15x^3-6x^2+12x-8$ với trục Ox là:

A. $\frac{1}{2+\sqrt[3]{14}}$ B. $\frac{2}{1-\sqrt[3]{14}}$ C. $\frac{2}{1+\sqrt[3]{14}}$ D. $\frac{2}{2-\sqrt[3]{14}}$

4.47. Cho các đường thẳng $d: y=\left(2a^2+1\right)x+2a-1, d': y=a^2x+a-2$ cắt nhau tại $M\left(a;b\right)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $a+b=5$ B. $a+b=3$ C. $a+b=-2$ D. $a+b=-3$

4.48. Cho hàm số $y=x^3+x^2+7x-13+m.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-3;3\right)$

D. Tồn tại $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1<x_2$ sao cho $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$

4.49. Đường thẳng $d: y=2x+3$ cắt $\left(P\right): y=x^2$ tại các điểm M và N. Diện tích $\triangle OMN$ bằng:

A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

4.50. Tìm các giá trị k để đường thẳng $d: y=kx-k+1$ cắt $\left(P\right): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_1\right)$ sao cho $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|=4$

A. $k=-2$ hoặc $k=4$ B. $k=-4$ hoặc $k=2$

C. $k=6$ D. $k=4$ hoặc $k=6$

4.51. Gọi $E\left(x_1;y_1\right), F\left(x_2;y_2\right)$ là các giao điểm của đường thẳng $d: y=kx+1$ với $\left(P\right): y=x^2$. Giá trị lớn nhất biểu thức $Q=\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)$ là:

A. -2 B. -1 C. 0 D. 3

4.52. Gọi *m, M* lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{20}{2+\sqrt{2x-x^2+8}}$ Khi đó $m+M$ bằng

A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

4.53. Biết rằng $A\left(-2;4\right), B\left(x_0;y_0\right)$ là các điểm thuộc $\left(P\right): y=x^2$ thỏa mãn $\triangle OAB$ vuông tại A. Khi đó x_0+y_0 bằng

A. $\frac{35}{4}$ B. $\frac{31}{4}$ C. 8 D. 9

4.54. Biết rằng đường thẳng $d: y=(m+2)x-1$ cắt $(P): y=-x^2$ tại hai điểm phân biệt *A, B*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\triangle OAB$ đều
B. $\triangle OAB$ vuông tại O
C. $\triangle OAB$ có một góc tù
D. $\triangle OAB$ cân tại A

4.55. Đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x-22}+\sqrt{x+13}-7$ cắt Ox tại mấy điểm:

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

4.56. Biết rằng đường thẳng $d: y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}$ tại các điểm *M, N*. Diện tích $\triangle OMN$ bằng

A. 3
B. $3\sqrt{2}$
C. 4
D. $4\sqrt{2}$

4.57. Hàm số $f(x)$ được xác định với $x\neq 0$ thỏa mãn

$$f(x)=1, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}f(x), f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2).$$ Tính $f\left(\frac{5}{7}\right)$

A. $-\frac{5}{7}$
B. $\frac{7}{5}$
C. 1
D. $\frac{5}{7}$

4.58. Gọi M là giao điểm của đường thẳng $d: y=11$ với đồ thị hàm số $y=x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}$. Độ dài đoạn *OM* bằng

A. $\sqrt{122}$
B. 11
C. $\sqrt{123}$
D. $5\sqrt{5}$

4.59. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số

$$y=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2-4.\frac{2x}{x^2+1}-5+m$$ có điểm chung với trục Ox

A. 7
B. 8
C. 9
D. 10

4.60. Gọi P là giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x^2+10x+16}{x^2+2x+2}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $P\in(0;3)$
B. $P\in(3;6)$
C. $P\in(6;10)$
D. $P>10$

HƯỚNG DẪN GIẢI

4.1. Đáp án A

4.2. Đáp án C

4.3. Do $-\left(m^2-3m+7\right)<0\forall m$ nên $y=-\left(m^2-3m+7\right)x+15$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Đáp án D

4.4. Đáp án D

4.5. Đáp án B

4.6. Đáp án A

4.7. Đáp án D

4.8. Đáp án B

4.9. Đáp án A

4.10. Đáp án C

4.11. Đáp án B

4.12. Đáp án C

4.13. Đáp án C

4.14. Đáp án A

4.15. Hàm số nghịch biến khi $m^2-9m-10<0\Leftrightarrow -1<m<10$. Đáp án B

4.16. Đáp án D

4.17. Đáp án B

4.18. Đáp án B

4.19. Đáp án A

4.20. $d: y=x+5$. Đáp án D

4.21. $y=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+2-\dfrac{m^2}{4}\geq 2-\dfrac{m^2}{4}$. Đáp án C

4.22. $y=3x-2+\dfrac{6}{x+1}\Rightarrow x+1$ là ước của 6. Đáp án D

4.23. $E\left(-3;-4\right)$. Đáp án C

4.24. $\min y=7$ khi $x=5$. Đáp án C

4.25. $m=\dfrac{5}{2}, n=3\Rightarrow S=18$. Đáp án A

4.26. $y=\left|x-10\right|+\left|15-x\right|\geq\left|x-10+15-x\right|=5$. Đáp án B

4.27. $M\left(a;2a^2\right),$ khi đó $I\left(\frac{a}{2};a^2\right)$. Đáp án C

4.28. Đáp án A

4.29. $a=1$ khi $x=-1, b=2$ khi $x=1$. Đáp án D

4.30. Đáp án D

4.31. Đáp án A

4.32. Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$. Đáp án B

4.33. Phương trình $(y-1)x^2-8x+y-7=0$ phải có nghiệm đối với $x \Rightarrow -1 \le y \le 9.$ Đáp án C

4.34. $y=-2x-1+\frac{2}{x-1}$ và chứng minh hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty).$ Đáp án A

4.35. Đặt $t=x^2-4x+7=(x-2)^2+3 \ge 3 \Rightarrow y=t^2+104.$ Đáp án B

4.36. $y=\left(x+\frac{2k-1}{2}\right)^2-\left(k^2-4k+\frac{21}{4}\right), y_0=-\left(k^2-4k+\frac{21}{4}\right) \le \frac{-5}{4}.$ Đáp án D

4.37. $F(1;1).$ Đáp án C

4.38. $f(x)=x^2-4x+25 \Rightarrow f(x+3)=x^2+2x+22.$ Đáp án A

4.39. Đáp án D

4.40. $E(2;1)$**.** Đáp án B

4.41. Đồ thị $y=f(x)$ là đường thẳng. Để $f(x) \ge 0$ với $-1 \le x \le 2$ thì $\begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f(2) \ge 0 \end{cases}$. Đáp án C

4.42. *d* luôn đi qua điểm $P(6;8).$ Đáp án D

4.43. Chứng minh $\frac{1}{2} \le y \le 1.$ Đáp án A

4.44. $\frac{5}{2} \le x \le \frac{10}{3}; 6\sqrt{y}=\sqrt{2}\sqrt{6x-15}+\sqrt{3}\sqrt{20-6x} \Rightarrow 6y^2 \le (2+3)(6x-16+20-6x)=25$

$\Rightarrow y \le \frac{5}{\sqrt{6}}$. Đáp án B

4.45. Đáp án A

4.46. Đáp án C

4.47. $M\left(\frac{-1-a}{a^2+a};\frac{-3a^2+a-2}{a^2+1}\right)\Rightarrow a+b=-3.$ Đáp án D

4.48. Đáp án A

4.49. Đáp án D

4.50. Đáp án A

4.51. d luôn cắt $(P)\,\forall k\in\mathbb{R}.$ Ta có $x_1+x_2=k, x_1x_2=-1\Rightarrow Q=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)=$

$x_1^2x_2^2+2x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)^2+1-k^2\le 0$

Đáp án C

4.52. $y=\frac{20}{2+\sqrt{-\left(x-1\right)^2+9}}\Rightarrow m=4; M=10.$ Đáp án B

4.53. $B\left(\frac{5}{2};\frac{25}{4}\right).$ Đáp án A

4.54. Đáp án B

4.55. Cắt tại $M\left(23;0\right).$ Đáp án B

4.56. $M\left(-2;2\right), N\left(2;2\right).$ Đáp án C

4.57. Đáp án D

4.58. $M\left(1;11\right).$ Đáp án D

4.59. Đặt $t=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow -1\le t\le 1\Rightarrow y=t^2-4t-5+m=\left(t-2\right)^2+m-9$

Với $-1\le t\le 1$ thì $1\le\left(t-2\right)^2\le 9\Rightarrow m-8\le y\le m\Rightarrow 0\le m\le 8$

Đáp án C

4.60. $P=9.$ Đáp án C

CHƯƠNG V: BẤT ĐẲNG THỨC GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức là một trong các bài toán khó trong chương trình toán THCS. Nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức không có lời giải chuẩn mực nào mà chúng có lời giải đặc biệt. Chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức cũng là bài toán thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi và thi vào trường chuyên THPT.

1. *Định nghĩa:*

Ta nói: $A \ge B$ nếu $A - B \ge 0,$ $A \le B$ nếu $A - B \le 0$

2. *Các tính chất cơ bản*

- Nếu $a \ge b, b \ge c$ thì $a \ge c$
- Nếu $a \ge b$ thì với mọi c ta có $a + c \ge b + c$
- Nếu $a \ge b$ thì $\begin{cases} ac \ge bc, c > 0 \\ ac \le bc, c < 0 \\ ac = bc = 0, c = 0 \end{cases}$
- Nếu $a \ge b > 0, c \ge d > 0$ thì $ac \ge bd$
- Nếu $a \ge b \ge 0$ thì $a^n \ge b^n$ với n là số tự nhiên
- $-|a| \le a \le |a|$ với mọi $a \in \mathbb{R}$
- Với $a > 0, |b| \le a \Leftrightarrow -a \le b \le a$
- Với $a > 0, |b| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b \le -a \\ b \ge a \end{array}\right.$
- $a + b \le |a + b| \le |a| + |b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$
- $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$

3. *Bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski*

- Bất đẳng thức Cô-si: Cho $a, b \ge 0,$ khi đó $a + b \ge 2\sqrt{ab}.$ Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

Tổng quát: Cho n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n;$ khi đó $a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

- Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski: Cho các số thực a, b, x, y khi đó ta có:

$\left(ax+by\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

Tổng quát: Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$ khi đó ta có

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

4. *Một số hệ quả thường dùng*

a. Cho a,b là các số không âm

Nếu $a+b=S$ không đổi thì ab đạt giá trị lớn nhất khi $a=b$

Nếu $ab=P$ không đổi thì $a+b$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=b$

b. Nếu $a,b>0$ thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(a+b\right)\ge 4$ hay $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

c. Nếu $a,b,c>0$ thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(a+b+c\right)\ge 9$ hay $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$

5. *Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

Cho biểu thức $A\left(x\right)$. Số *m* được gọi là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A\left(x\right)$ nếu $m\le A\left(x\right)$ và tồn tại x_0 sao cho $m=A\left(x_0\right)$

Số *M* được gọi là giá trị lớn nhất của biểu thức $A\left(x\right)$ nếu $M\ge A\left(x\right)$ và tồn tại x_0 sao cho $M=A\left(x_0\right)$

Chú ý: Nếu ta có $m\le A\left(x\right)\le M$ thì chưa thể kết luận giá trị nhỏ nhất của $A\left(x\right)$ là *m*, giá trị lớn nhất của $A\left(x\right)$ là *M*.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của đa thức nhiều biến cũng được định nghĩa tương tự đa thức một biến.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC VÍ DỤ

Dạng 1: Các bài toán về bất đẳng thức

a. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 1: Trong các khẳng định sau, có mấy khẳng định là đúng với a,b,c,d là số thực bất kì thỏa mãn $a > b, c > d$

I. $a + c > b + d$

II. $a - c > b - d$

III. $ac > bd$

IV. $a - d > b - c$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: I và IV tương đương với $(a-b)+(c-d)>0$ đúng, II là sai khi chọn $a=1, b=0, c=5, d=2,$ III sai khi chọn $=-1.b=-2, c=-3, d=-4.$ Đáp án B

Ví dụ 2: Cho $a \in (0;1)$, đặt $M = \sqrt{26} + \sqrt{16+a}, N = \sqrt{24} + \sqrt{16-a}.$ Khẳng định nào đúng?

A. $9 < M < N$ B. $9 < N < M$ C. $N < 9 < M$ D. $M < N < 9$

Hướng dẫn giải: $N = \sqrt{24} + \sqrt{16-a} < \sqrt{25} + \sqrt{16} = 9$, $M = \sqrt{26} + \sqrt{16+a} > \sqrt{25} + \sqrt{16} = 9$

Do đó $N < 9 < M$. Đáp án C.

Ví dụ 3: Cho $x \le -7, y \le -3$, có mấy khẳng định dưới đây là đúng:

I. $xy \le 21$ II. $x + y \le -10$ III. $x - y \le -4$ IV. $\frac{x}{y} \le \frac{7}{3}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Khẳng định II là đúng, khẳng định I, III, IV là sai

Đáp án A.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu số nguyên *n* thỏa mãn điều kiện sau $n^2 - 7n - 8 \le 0$

A. 9 B. 12 C. 11 D. 10

Hướng dẫn giải: $n^2 - 7n - 8 \le 0 \Leftrightarrow (n+1)(n-8) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le n \le 8.$ Đáp án D.

Ví dụ 5: Cho *x* là số thực bất kì, khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $x^3 \ge x^2$ B. $2x > x$ C. $x^2 - 6x + 17 > 0$ D. $x \ge -x$

Hướng dẫn giải: $x^2 - 6x + 17 = (x-3)^2 + 8 > 0 \forall x \in \mathbb{R}.$ Đáp án C.

Ví dụ 6: Cho $M = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{99.100}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $0 < M < 1$ B. $M = 1$ C. $1 < M < 2$ D. $M > 2$

Hướng dẫn giải: $M = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{99}{100}$

Đáp án A.

Ví dụ 7: Cho a,b là các số thực bất kì, có bao nhiêu khẳng định dưới đây là đúng

I. Nếu $2a > b$ thì $4a^2 > b^2$

II. Nếu $2a > b$ thì $8a^3 > b^3$

III. Nếu $3a > 2b$ thì $3a + b > 3b$

IV. Nếu $3a > b$ thì $3a^2 > ab$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Khẳng định I là sai vì ta bình phương hai vế của một bất đẳng thức. Khẳng định IV là sai vì ta nhân hai vế của bất đẳng thức với một số thực bất kì. Đáp án B.

Ví dụ 8: Cho $Q = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng với a,b,c là các số thực bất kì

A. $Q < 0$ B. $Q \geq 0$ C. $-1 < Q < 1$ D. $Q \geq 1$

Hướng dẫn giải: $Q = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0.$ Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Đáp án B.

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 9: Có bao nhiêu số nguyên *n* thỏa mãn điều kiện $(n-3)^2 - 10(n-3) - 11 \leq 0$

A. 13 B. 12 C. 11 D. 10

Hướng dẫn giải: Đặt $t = n - 3$ ta được $t^2 - 10t - 11 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 14$

Đáp án A.

Ví dụ 10: Cho các biểu thức:

$E = a^2 - 6a + 10$ $F = a^2 - 3a + 7$

$G = a^2 - 5a + 4$ $H = a^2 + \frac{1}{a^2+1} - 1$

Có mấy biểu thức không âm với mọi $a \in \mathbb{R}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải: $E = (a-3)^2 + 1 \geq 1$; $F = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \geq \frac{19}{4}$

$G=(a-1)(a-4)\ge 0 \Leftrightarrow a\le 1; a\ge 4$; $H=a^2+1+\dfrac{1}{a^2+1}-2\ge 2\sqrt{(a^2+1)\dfrac{1}{a^2+1}}-2=0$

Đáp án B.

Ví dụ 11: Cho $P=a^4+b^4, Q=a^3b+ab^3$. Khẳng định nào dưới đây là đúng khi a,b là các số thực bất kì

A. $P\ge Q$ B. $P<Q$ C. $2P=Q$ D. $P+Q=3$

Hướng dẫn giải: $P-Q=a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$

Đáp án A.

Ví dụ 12: Cho $M=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $0<M<1$ B. $1\le M\le 2$ C. $2<M<3$ D. $M>3$

Hướng dẫn giải:

$$M<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}<\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1$$

Đáp án A.

Ví dụ 13: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{n}{a+b}$ luôn đúng với a,b là các số dương bất kì

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Hướng dẫn giải: Bất đẳng thức tương đương với $a^2+(2-n)ab+b^2\ge 0(1)$. Dễ thấy (1) đúng với $n\in\{1;2;3;4\}$, với $n\ge 5$ thì (1) không đúng với a,b là các số dương bất kì chẳng hạn $a=b=1$.

Đáp án B.

Ví dụ 14: Có bao nhiêu số lẻ, nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $\dfrac{2}{1.3}+\dfrac{2}{3.5}+...+\dfrac{2}{n(n+2)}<\dfrac{2020}{2021}$

A. 2018 B. 1010 C. 1009 D. 1008

Hướng dẫn giải: Ta có $\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+...+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)<\dfrac{2020}{2021}\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{n+2}\Rightarrow n\le 2018$

Do n lẻ nên $n\in\{1;3;...;2017\}$. Đáp án C.

Ví dụ 15: Cho $M = a^2 - b, N = b^2 - a.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng với a,b là số thực bất kì thỏa mãn điều kiện $a + b \ge 2$

A. $M > 0, N < 0$ B. $M < 0, N > 0$

C. $M < 0, N < 0$ D. $M \ge 0$ hoặc $N \ge 0$

Hướng dẫn giải: $M + N = a^2 + b^2 - a - b = \left(a-1\right)^2 + \left(b-1\right)^2 + a + b - 2$

Do $\left(a-1\right)^2 + \left(b-1\right)^2 \ge 0, a + b - 2 \ge 0$ nên $M + N \ge 0.$ Đáp án D.

c. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 16: Cho x, y, z là các số thực thuộc khoảng $\left(1;2\right)$. $S = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y}$

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $S \le 1$ B. $1 < S < 2$ C. $S = 2$ D. $S > 2$

Hướng dẫn giải: Dễ thấy $S > \dfrac{x}{x+y+z} + \dfrac{y}{x+y+z} + \dfrac{z}{x+y+z} = 1$

Mặt khác $\dfrac{x}{y+z} = \dfrac{2x}{\left(y+z\right)+\left(y+z\right)} < \dfrac{2x}{x+y+z}$

Tương tự $\dfrac{y}{z+x} < \dfrac{2y}{x+y+z}, \dfrac{z}{x+y} < \dfrac{2z}{x+y+z}$

Cộng từng vế ta được $S \le \dfrac{2\left(x+y+z\right)}{x+y+z} = 2$

Vậy $1 < S < 2$. Đáp án B

Ví dụ 17: Cho $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $M < 4$ B. $4 < M < 5$ C. $M = 5$ D. $M > 5$

Hướng dẫn giải: Đặt $N = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$

Khi đó $M < N$

Và $M + N = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + ... + \dfrac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{81-80}$

$= \sqrt{81} - \sqrt{1} = 8$

Từ đó suy ra $M < 4$.

Đáp án A.

Ví dụ 18: Cho $S=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{2499}{2500}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $S<48$ B. $48<S<49$ C. $49\le S\le 50$ D. $S>50$

Hướng dẫn giải: $S=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(1-\frac{1}{50^2}\right)=49-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{50^2}\right)$

Dễ dàng chứng minh được $0<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{50^2}<1\Rightarrow 48<S<49.$ Đáp án B.

Ví dụ 19: Có bao nhiêu số tự nhiên *b* thỏa mãn đẳng thức: $a^2-9ab+b^3+b^2=0$

A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

Hướng dẫn giải: Phương trình có nghiệm đối với *a* khi $\Delta=77b^2-4b^3\Leftrightarrow b^2\left(77-4b\right)\ge 0$

$\Rightarrow 0\le b\le\frac{77}{4}\Rightarrow b\in\{0;1;2;...;19\}$

Đáp án D.

Ví dụ 20: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases}abc>0\\ab+bc+ca>0\\a+b+c>0\end{cases}$

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Cả ba số a,b,c đều âm

B. Tồn tại duy nhất một số âm trong các số a,b,c

C. Có duy nhất một số dương trong ba số a,b,c

D. Cả ba số a,b,c đề dương

Hướng dẫn giải: Giả sử $a<0\Rightarrow\begin{cases}a<0\\bc<0\\b+c>0\end{cases}\Rightarrow ab+bc+ca=a\left(b+c\right)+bc<0$ (vô lí)

Mặt khác $abc<0\Rightarrow a\ne 0.$ Vậy $a>0.$ Tương tự ta có $b>0,c>0.$

Đáp án D.

Ví dụ 21: Cho biểu thức $E=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{n^3}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $1<E<\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{4}<E<\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}<E<2$ D. $E>2$

Hướng dẫn giải: Với $k \ge 2,$ ta có: $\dfrac{1}{k^3} < \dfrac{1}{k^3 - k} = \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(k-1)k} - \dfrac{1}{k(k+1)}\right]$

Từ đó suy ra $1 < E < \dfrac{5}{4}.$ Đáp án A.

Ví dụ 22: Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $2 \le a_1 < a_2 < ... < a_n$ và biểu thức $T = \left(1 - \dfrac{1}{a_1^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{a_2^2}\right)...\left(1 - \dfrac{1}{a_n^2}\right)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $T < \dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{1}{4} < T < \dfrac{1}{2}$ C. $T = \dfrac{1}{2}$ D. $T > \dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải: Ta có $\dfrac{1}{a} \le \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{a_2} \le \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{a_n} \le \dfrac{1}{n+1}$. Do đó,

$$T \ge \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)} > \frac{1}{2}$$

Đáp án D.

Dạng 2: Các bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

a. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 23: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 - 6x + 19$ là:

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

Hướng dẫn giải: $M = (x-3)^2 + 10 \ge 10 \Rightarrow \min M = 10$ khi $x = 3$

Đáp án C.

Ví dụ 24: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E = \dfrac{60}{x^2 - 2x + 6}$

A. 10 B. 11 C. 15 D. 12

Hướng dẫn giải: $E = \dfrac{60}{(x-1)^2 + 5}$, do $(x-1)^2 + 5 \ge 5 \Rightarrow \max E = 12$ khi $x = 1$

Đáp án D.

Ví dụ 25: Với x là số nguyên, giá trị nhỏ nhất của biểu thuwscc $Q = \dfrac{54}{x-5}$ là

A. -52 B. -54 C. -56 D. -57

Hướng dẫn giải: Q đạt giá trị nhỉ nhất khi $x - 5 = -1 \Leftrightarrow x = 4.$ Đáp án A.

Ví dụ 26: Với a là số nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức $E = 2020 - |2a - 7|$ là

A. 2019 B. 2018 C. 2022 D. 2023

Hướng dẫn giải: Khi $a \in \mathbb{Z}$ thì $|2a - 7| \ge 1 \Rightarrow \max E = 2019$ khi $|2a - 7| = 1 \Leftrightarrow a = 3$ hoặc $a = 4$

Đáp án A.

Ví dụ 27: Cho $x > 0$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x + \frac{16}{x} + 5$ là:

A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

Hướng dẫn giải: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $Q \ge 2\sqrt{x.\frac{16}{x}} + 5 = 13 \Rightarrow \min Q = 13$ khi $x = 4$

Đáp án B.

Ví dụ 28: Cho a, b là các số dương thay đổi thỏa mãn $a + b = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $V = \frac{60}{ab}$ là:

A. 15 B. 16 C. 17 D. 12

Hướng dẫn giải: Ta có $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} = 2 \Rightarrow ab \le 4 \Rightarrow \min V = 15$ khi $a = b = 2$

Đáp án A.

Ví dụ 29: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $P = a^2 - 4a + 13$ với $3 \le a \le 5$. Tính $m + M$

A. 27 B. 28 C. 29 D. 32

Hướng dẫn giải: $P = (a-2)^2 + 9$, do $3 \le a \le 5 \Rightarrow 1 \le a - 2 \le 3 \Rightarrow m = 10, M = 18 \Rightarrow m + M = 28$

Đáp án B.

Ví dụ 30: Cho $E \ge 5, F \ge 6, G \le 7, H \le 8$, ta chỉ có thể tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức nào dưới đây

A. $E + F - G - H$ B. $-E - F + G + H$

C. $E + F + G + H$ D. $E - F + G - H$

Hướng dẫn giải: Từ giả thiết ta có $-E \le -5, -F \le -6, G \le 7, H \le 8 \Rightarrow -E - F + G + H \le 4$

Dấu "=" xảy ra khi $E = 5, F = 6, G = 7, H = 8$. Đáp án B.

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của *x* để biểu thức $S=|x-6|+|x+1|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Hướng dẫn giải: $S=|x-6|+|x+1|\ge|6-x+x+1|=7\Rightarrow \min S=7$ khi

$\begin{cases}6-x\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}6-x\le 0\\ x+1\le 0\end{cases}\Rightarrow -1\le x\le 6$. Đáp án D.

Ví dụ 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{a^4+5a^2+1}{a^2}\left(a\ne 0\right)$

A. 7 B. 6 C. 8 D. 10

Hướng dẫn giải: $M=a^2+\dfrac{1}{a^2}+5\ge 2.\sqrt{a^2.\dfrac{1}{a^2}}+5=7\Rightarrow \min M=7$ khi $a=\pm 1$. Đáp án A.

Ví dụ 33: Cho $a\in\mathbb{Z}$, gọi *m*, *M* lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\dfrac{10a+2}{2a-1}$. Tính $m+M$

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

Hướng dẫn giải: $Q=5+\dfrac{7}{2a-1}$, từ đó suy ra $m=-2$ khi $2a-1=-1\Leftrightarrow a=0, M=12$ khi $2a-1=1\Leftrightarrow a=1$. Đáp án B.

Ví dụ 34: Gọi *M* là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\left(a-1\right)\left(a-3\right)\left(a-5\right)\left(a-7\right)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $M=-15$ B. $M=-14$ C. $M=-13$ D. $M=-16$

Hướng dẫn giải: $Q=\left(a^2-8a+7\right)\left(a^2-8a+15\right)$, đặt $t=a^2-8a+11$

$\Rightarrow Q=\left(t-4\right)\left(t+4\right)=t^2-16\ge -16$. Từ đó suy ra $M=-16$ khi $a^2-8a+11=0$

Đáp án D.

Ví dụ 35: Giá trị lớn nhất của biểu thức $E=\dfrac{2a^4+6}{a^4+2a^2+3}$ là:

A. 1 B. $\dfrac{3}{2}$ C. 2 D. $\dfrac{5}{2}$

Hướng dẫn giải: $E=\dfrac{2\left(a^4+2a^2+3\right)-4a^2}{a^4+2a^2+3}=2-\dfrac{4a^2}{a^4+2a^2+3}\le 2\Rightarrow \max E=2$ khi $a=0$

Đáp án C.

Ví dụ 36: Cho $a>3,$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4a+\dfrac{9}{a-3}+6$

A. 30 B. 28 C. 32 D. 34

Hướng dẫn giải: $P=4\left(a-3\right)+\dfrac{9}{a-3}+18\ge 2\sqrt{4\left(a-3\right)\dfrac{9}{a-3}}+18\Rightarrow \min P=30$ khi $a=\dfrac{9}{2}$

Đáp án A.

Ví dụ 37: Cho a,b là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a+b\le 2.$ Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a\left(b+3\right)}+\sqrt{b\left(a+3\right)}$ là:

A. 4 B. 3 C. $\dfrac{7}{2}$ D. 5

Hướng dẫn giải: Ta có $P^2=\left(\sqrt{a}\sqrt{b+3}+\sqrt{b}\sqrt{a+3}\right)^2\le\left(a+b\right)\left(a+b+6\right)\le 16\Rightarrow P\le 4$

$\max P=4$ khi $a=b=1.$ Đáp án A.

Ví dụ 38: Cho a,b,c là các số không âm thay đổi thỏa mãn $a+b+c=5.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E=a^2+b^2+c^2$

A. 25 B. 26 C. 27 D. 28

Hướng dẫn giải: $25=\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)\ge a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow \max E=25$ khi một trong ba số a,b,c bằng 5, hai số còn lại bằng 0. Đáp án A.

Ví dụ 39: Cho a,b là các số thay đổi thỏa mãn $\left(a+1\right)^2+\left(b-2\right)^2=8.$ Gọi $m,$ M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $a+b.$ Tính $M-m$

A. 6 B. 7 C. 8 D. 10

Hướng dẫn giải: Ta có $\left[1\left(a+1\right)+1\left(b-2\right)\right]^2\le 2\left[\left(a+1\right)^2+\left(b-2\right)^2\right]=16\Rightarrow -4\le a+b-1\le 4$

$\Rightarrow -3\le a+b\le 5\Rightarrow m=-3,M=5.$

Đáp án C.

Ví dụ 40: Cho $M=\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)-3\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+10.$ Giá trị n hỏ nhất của M là:

A. 4 B. 5 C. 8 D. 6

Hướng dẫn giải:

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Rightarrow |t|\ge 2\Rightarrow t^2=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2\Rightarrow M=t^2-3t+8=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\ge 6\Rightarrow \min M=6$

khi $t=2\Leftrightarrow a=b\ne 0.$

Đáp án D.

c. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 41: Các số thực x,y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+y=1.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E=x^4+y^4$ là:

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải: $1^2=(1.x+1.y)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow \frac{1}{2}\le x^2+y^2$

Từ đó ta có $\frac{1}{4}\le\left(1.x^2+1.y^2\right)^2\le 2\left(x^4+y^4\right)\Rightarrow E\ge\frac{1}{8}\Rightarrow \min E=\frac{1}{8}$ khi $x=y=\frac{1}{2}.$

Đáp án B.

Ví dụ 42: a,b,c là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

Hướng dẫn giải: Ta biết rằng nếu $x,y,z>0$ thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$

Do đó $M\ge\frac{9}{\left(a^2+2bc\right)+\left(b^2+2ac\right)+\left(c^2+2ab\right)}=\frac{9}{(a+b+c)^2}=9\Rightarrow \min M=9$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}.$

Đáp án D.

Ví dụ 43: Cho $x>0$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=4x^2-2x+\frac{1}{2x}+17$ là

A. 16 B. 17 C. 18 D. 20

Hướng dẫn giải: $Q=\left(4x^2-4x+1\right)+\left(2x+\frac{1}{2x}\right)+16=\left(2x-1\right)^2+\left(2x+\frac{1}{2x}\right)+16\ge 18$

$\Rightarrow \min Q=18$ khi $x=\frac{1}{2}$. Đáp án C.

Ví dụ 44: a,b,c,d,e là các số không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d+e=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=ab+bc+cd+de$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải: Đặt $M=a+c+e, N=b+d$. Khi đó $M,N\ge 0$ và $M+N=1$

$\Rightarrow \sqrt{MN}\le \frac{M+N}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow MN\le \frac{1}{4}$

$F\le \left(a+c+e\right)\left(b+d\right)\le \frac{1}{4}\Rightarrow \max F=\frac{1}{4}$ khi $a=b=\frac{1}{2}, c=d=e=0.$

Đáp án A.

Ví dụ 45: Cho a,b,c là các số dương thay đổi. Đặt $E=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, F=\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{E}{F}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge \frac{9}{a+2b}$, tương tự $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{b+2c}, \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge \frac{9}{c+2a}$

Cộng từng vế ta được $3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)\Rightarrow \frac{E}{F}\ge 3.$

Đáp án C.

Ví dụ 46: Cho a,b,c là các số dương thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+a+c}+\frac{1}{2c+a+b}$

A. 1 B. 4 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải: Với $x,y>0$ ta có $\frac{1}{x+y}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Do đó

$\frac{1}{2a+b+c}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+c}\right)\le 4\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$, tương tự ta có

$\dfrac{1}{2b+a+c} \le 4\left[\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)\right]$, $\dfrac{1}{2c+a+b} \le 4\left[\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right]$. Cộng từng vế ta được

$P \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \le 3$

Vậy $\max P = 3$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{4}$.

Đáp án D.

Ví dụ 47: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2-\dfrac{12x}{x^2+1}+20$

A. 29 B. 27 C. 22 D. 25

Hướng dẫn giải: Đặt $t=\dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow -1 \le t \le 1 \Rightarrow Q=t^2-6t+20=(t-3)^2+11 \le 27$

$\Rightarrow \max Q = 27$ khi $t=-1 \Leftrightarrow x=-1$.

Đáp án B.

Ví dụ 48: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=5a^2+10b^2-12ab-4a-12b+50$

A. 22 B. 23 C. 24 D. 25

Hướng dẫn giải: $S=(2a-3b+1)^2+(a-4)^2+(b-3)^2+24 \ge 24 \Rightarrow \min S = 24$ khi $a=4, b=3$.

Đáp án C.

Ví dụ 49: Cho $a,b \ge 0$ và $a^3+b^3=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Ta có $a^3+a^3+1 \ge 3\sqrt[3]{a^6}=3a^2, b^3+b^3+1 \ge 3\sqrt[3]{b^6}=3b^2$

$\Rightarrow 2(a^3+b^3+1) \ge 3(a^2+b^2) \Rightarrow P=a^2+b^2 \le 2 \Rightarrow \max P = 2$ khi $a=b=1$.

Đáp án B.

Ví dụ 50: a,b là các số nguyên thỏa mãn $a+b=43$. Giá trị lớn nhất của $P=ab+12$ là

A. 474 B. 478 C. 496 D. 480

Hướng dẫn giải: $ab=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} \le \dfrac{1849-1}{4}=462 \Rightarrow \max P = 474$ khi $a=21, b=22$ hoặc $a=22, b=21$.

Đáp án A.

BÀI TẬP

5.1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $-7 \le x \le 3, -5 \le y \le 2.$ Trong các khẳng định sau có mấy khẳng định SAI

I. $xy \le 6$ II. $x + y \ge -12$ III. $x^2 + y^2 \le 13$ IV. $x^3 + y^2 \ge -318$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5.2. Có bao nhiêu số nguyên dương *n* thỏa mãn điều kiện $3^n \le 2189$

A. 5 B. 7 C. 8 D. 9

5.3. Cho $a \in \mathbb{Z},$ giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{7a+33}{a+3}$ là

A. 19 B. 20 C. 21 D. 22

5.4. Gọi *M* là giá trị lớn nhất của biểu thức $-a^2 - b^2 - 2a + 6b + 30.$ Khẳng định nào là đúng?

A. $M \in (36;37)$ B. $M \in [37;39]$ C. $M \in [39;40]$ D. $M > 40$

5.5. Có mấy bất đẳng thức dưới đây là đúng với a, b là các số thực bất kì

I. $a^3 \ge a^2$ II. $a^2 + b^2 \ge 3ab$

III. $3a \ge a$ IV. $b^2 - b + 1 > 0$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5.6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 4y^2 - 6x + 4y + 27$

A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

5.7. Gọi *m, M* lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{5x-13}{x-4}$ với $x \in \mathbb{Z}.$ Khi đó $m.M$ bằng

A. -20 B. -21 C. -24 D. 30

5.8. Có bao nhiêu số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{(n-1)n} \le \dfrac{50}{51}$

A. 51 B. 52 C. 49 D. 55

5.9. Cho a, b, c, d là các số thực bất kì thỏa mãn $b, d > 0$ và $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}.$ Khẳng định nào là đúng?

A. $ad = bc$ B. $ad > bc$ C. $ad < bc$ D. $ad > bc + 1$

5.10. Cho $a > 1,$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = a + \dfrac{1}{a-1} + 16$

A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

5.11. Cho $a \geq 3,$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a^2 - 2a + 49$

A. 51 B. 52 C. 50 D. 55

5.12. x, y là các số dương thay đổi thỏa mãn $x + y = 2.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{24}{xy}$ là

A. 22 B. 20 C. 32 D. 24

5.13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn điều kiện $x^6\left(x^2 - 31x + 30\right) \leq 0$

A. 29 B. 30 C. 31 D. 32

5.14. Biểu thức nào dưới đây có giá trị nhỏ nhất bằng 18

A. $x^2 - 4x + 22$ B. $x^2 - 2x + 20$

C. $-x^2 - 2x + 19$ D. $x^2 - 2x + 18$

5.15. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(x+3\right)^2 + \left(x-5\right)^2 + 13.$ Khẳng định nào là đúng

A. $M < 43$ B. $M < 45$ C. $45 \leq M < 50$ D. $M > 50$

5.16. Cho $x + y = 2.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x^3 + y^3 + 2xy + 10$

A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

5.17. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{a^2 - 2a + 36}{a^2 - 2a + 6}$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

5.18. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = x^4 - 4x^3 + 8x + 32$

A. 26 B. 28 C. 30 D. 31

5.19. Cho các số M, N, P, Q thỏa mãn $M \geq 4, N \geq 5, 0 < P \leq 6, 0 < Q \leq 12.$ Ta chỉ có thể tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức nào dưới đây

A. $\dfrac{M}{N}$ B. $\dfrac{P}{Q}$ C. $N.Q$ D. $\dfrac{Q}{M}$

5.20. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = \left|a^2 - a + 1\right| + \left|a^2 - a - 2\right|$ bằng

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5.21. Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a+b=1$. Giá trị nhỏ nhất của a^8+b^8 là

A. $\frac{1}{64}$ B. $\frac{1}{32}$ C. $\frac{1}{128}$ D. $\frac{1}{132}$

5.22. Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $x+y$

A. -3 B. 3 C. 0 D. -2

5.23. Cho a,b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $a^2=3\left(ab+b-b^2\right)$. Giá trị lớn nhất của b là

A. 0 B. 2 C. 4 D. 5

5.24. Gọi E,F lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{5n+7}{n-1}$ với $n\in\mathbb{Z}$, khi đó $E.F$ bằng

A. 119 B. -119 C. -121 D. -118

5.25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=a^2-6a-4\left|a-3\right|+34$

A. 22 B. 23 C. 20 D. 21

5.26. a,b,c là các số dương thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E=\frac{a+b-c}{c}+\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5.27. Cho $0<x<1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{1-x}+\frac{9}{x}+10$ là

A. 23 B. 24 C. 25 D. 27

5.28. Cho $M=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2020^2}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $0<M<1$ B. $M=1$ C. $1<M<2$ D. $M\geq 2$

5.29. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)$

A. -16 B. -14 C. -18 D. -20

5.30. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{x^4+8x^2+4}{x^2}$ là

A. 10 B. 11 C. 12 D. 15

5.31. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}+10$

A. 11 B. 12 C. 13 D. 15

5.32. Cho $a\neq 0,$ giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=3\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)-8\left(a+\dfrac{1}{a}+10\right)$ là

A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

5.33. a,b,c,d,e là các số thực bất kì, giá trị nhỏ nhất của $H=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)$ là:

A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

5.34. a,b,c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=6.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$

A. 10 B. 12 C. 15 D. 18

5.35. Cho $a,b>0$ và $a+b\leq 1.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{2}{ab}$ là:

A. 10 B. 6 C. 8 D. 9

5.36. Cho $-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=2a+\sqrt{4-2a^2}$ là:

A. $-\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $-3\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2}$

5.37. a,b là các số không âm thỏa mãn $a^2+b^2\leq 2.$ Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=a\sqrt{3b(a+2b)}+b\sqrt{3a(b+2a)}$ là:

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

5.38. Cho a,b,c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$

A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

5.39. $a,b,$c là các số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\leq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E=\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+bc}+\dfrac{1}{1+ac}$ là:

A. $\dfrac{3}{2}$ B. 1 C. $\dfrac{5}{2}$ D. 3

5.40. Cho $x+y=2,$ giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)$ là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5.41. Cho biểu thức $M=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $M<\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}\le M<\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}<M<1$ D. $M\ge 1$

5.42. Cho $P=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{2021}{2^{2020}}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $P<3$ B. $P=3$ C. $3<P<4$ D> $P\ge 4$

5.43. a,b là các số tự nhiên thỏa mãn $a+b=37$. Giá trị lớn nhất của ab là:

A. 348 B. 342 C. 380 D. 324

5.44. a,b là các số thực thay đổi thỏa mãn $ab+a+b=15.$ Giá trị nhỏ nhất của $S=a^2+b^2$ là

A. 15 B. 16 C. 18 D. 21

5.45. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi. $M=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a},N=a^2+b^2+c^2.$ Giá trị nhỏ nhất của $\frac{M}{N}$ là:

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

5.46. a,b là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a+b\ge 6.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a+2b+\frac{6}{a}+\frac{8}{b}$ là:

A. 18 B. 19 C. 20 D. 22

5.47. Cho phương trình $x^4+2x^2+2ax+\left(a+1\right)^2=0.$ Gọi x_1,x_2 lần lượt là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất mà phương trình có thể đạt được khi *a* thay đổi. Tính x_1+x_2

A. 1 B. 5 C. -1 D. 3

5.48. Tìm giá trị của tham số m để nghiệm của phương trình $x^4+2x^2-2mx+\left(1-m\right)^2=0$ đạt giá trị lớn nhất

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5.49. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-x^2}$

A. 2 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

5.50. Cho $a,b,c > 0$ và $a+b+c=6.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

A. 1 B. 3 C. 6 D. 8

5.51. a,b là các số không âm thỏa mãn $a+b \le 2,$ gọi m, M là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $E = \sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(a+1)}.$ Tính $m+M$

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $3\sqrt{2}$

5.52. a,b,c là các số dương, xét biểu thức $M = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$ Khẳng định nào đúng?

A. $M < 1$ B. $M = 1$ C. $1 < M < 2$ D. $M \ge 2$

5.53. a,b là các số dương thỏa mãn $a+b=1.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$E = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)$ là:

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

5.54. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $E = \frac{3a^2 - 2a + 3}{a^2 + 1}.$ Tính $M - m$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5.55. Trong các khẳng định sau, có mấy khẳng định đúng?

I. $a^2 + b^2 \ge 2ab \forall a,b \in \mathbb{R}$

II. $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

III. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{5}{a+b} \forall a,b > 0$

IV. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \forall a,b > 0$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5.56. Cho biểu thức $Q=\dfrac{2a+6}{a}$ với $1<a<3$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Q có gá trị lớn nhất

B. Q có giá trị nhỏ nhất

C. Q không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

D. $Q>5\forall a\in(1;3)$

5.57. Cho $m\ge -1,$ tìm nghiệm lớn nhất mà phương trình sau có thể đạt được $x^2+mx+m-5=0$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5.58. a,b là các số thực thỏa mãn điều kiện $(a-2)^2+(b+3)^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a+2b$ là:

A. -10 B. -9 C. -11 D. -12

5.59. Cho n là số nguyên dương, $T=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$. Khẳng định nào đúng?

A. $T<2$ B. $T=2$ C. $2<T<3$ D. $T\ge 3$

5.60. Cho các số a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<2$. Đặt $M=a(2-b),N=b(2-c),P=c(2-a)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. M,N,P đều lớn hơn 1

B. Tồn tại ít nhất một trong ba số M,N,P nhỏ hơn hoặc bằng 1

C. $MNP>1$

D. $M+N+P\ge 6$

5.61. a,b là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2\le 18$. Giá trị nhỏ nhất của $P=ab+2(a+b)$ bằng:

A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

5.62. a,b,c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c=5\\a^2+b^2+c^2=9\end{cases}$. Giá trị lớn nhất của a bằng:

A. 2 B. $\dfrac{5}{2}$ C. $\dfrac{5}{3}$ D. $\dfrac{7}{3}$

5.63. Gọi P,Q lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $E=\dfrac{x^4+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

Khi đó $2P+Q$ bằng

A. 1 B. 2 C. $\dfrac{5}{2}$ D. 3

5.64. a,b,c là các số không âm đôi một khác nhau thỏa mãn $(a+c)(b+c)=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(a+c)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}$ bằng

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

5.65. a,b là các số dương thỏa mãn $a+b=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2$ bằng:

A. $\dfrac{25}{2}$ B. 12 C. $\dfrac{27}{2}$ D. 13

5.66. a,b,c là các số dương thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$ bằng

A. 2 B. 3 C. 4 D. $\dfrac{7}{2}$

5.67. Gọi a,b,c,p lần lượt là độ dài ba cạnh và nửa chu vi của một tam giác. Đặt $M=\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c},N=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $M=N$ B. $M\le N$ C. $M\ge 3N$ D. $M\ge 2N$

5.68. a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^2+b^2+c^2$. Khi đó:

A. $M<2$ B. $2<M<3$ C. $3\le M<4$ D. $M\ge 4$

5.69. a,b,c là các số dương thỏa mãn $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=2\\ ab+bc+ca=1\end{cases}$. Giá trị lớn nhất của a bằng

A. 1 B. $\dfrac{3}{2}$ C. $\dfrac{2}{5}$ D. $\dfrac{4}{3}$

5.70. x, y, z là các số dương thay đổi thỏa mãn $x+y+z+xy+yz+zx=6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{x^3}{x}$ là:

A. 2 B. 3 C. $\frac{7}{2}$ D. 4

5.71. a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=8$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}$ là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

5.72. a,b,c là các số dương, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

5.1. Đáp án C

5.2. $3^7 = 2187 < 2189.$ Đáp án B

5.3. Đáp án A

5.4. $M = 40$ khi $a = -1, b = 3.$ Đáp án C

5.5. Đáp án A

5.6. Đáp án C

5.7. $m = -2$ khi $x = 3, M = 12$ khi $x = 5.$ Đáp án C

5.8. Đáp án A

5.9. Đáp án B

5.10. Đáp án C

5.11. $Q = \left(a-1\right)^2 + 48 \Rightarrow \min Q = 52$ khi $a = 3$. Đáp án B

5.12. Đáp án D

5.13. $x = 0$ hoặc $x^2 - 31x + 30 \le 0.$ Đáp án C

5.14. Đáp án A

5.15. $M = 45$ khi $x = 1.$ Đáp án C

5.16. Đáp án B

5.17. $\max Q = 7$ khi $a = 1.$ Đáp án C

5.18. $E = \left(x^2 - 2x\right)^2 - 4\left(x^2 - 2x\right) + 32.$ Đáp án B

5.19. Ta chỉ có thể tìm được $\max \dfrac{Q}{M} = \dfrac{12}{4}.$ Đáp án D

5.20. $K = \left|a^2 - a + 1\right| + \left|-a^2 + a + 2\right| \ge \left|a^2 - a + 1 - a^2 + a + 2\right| = 3.$

Dấu "=" xảy ra khi $\left(a^2 - a + 1\right)\left(-a^2 + a + 2\right) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le a \le 2.$ Đáp án B

5.21. Đáp án C

5.22. $\min\left(x + y\right) = -3$ khi $x = 0, y = -3.$ Đáp án A

5.23. Phương trình $a^2 - 3ba - 3b + 3b^2 = 0$ có nghiệm đối với $a \Rightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le b \le 4.$ Đáp án C

5.24. $E = -7, F = 17.$ Đáp án B

5.25. $M = \left(a-3\right)^2 - 4\left|a-3\right| + 25 \Rightarrow \min M = 21$ khi $\left|a-3\right| = 2.$ Đáp án D

5.26. $E=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-3\ge 3.$ Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c>0.$ Đáp án B.

5.27. $P=\frac{x}{1-x}+\frac{9(1-x)}{x}+19\ge 2\sqrt{\frac{x}{1-x}.\frac{9(1-x)}{x}}+19\Rightarrow P\ge 25.$ Đáp án C

5.28. $M<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2019.2020}=1-\frac{1}{2020}<1.$ Đáp án A

5.29. $Q=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=(t-4)(t+4)=t^2-16\left(t=x^2+8x+11\right).$ Đáp án A

5.30. $Q=x^2+\frac{4}{x^2}+8\ge 2\sqrt{x^2.\frac{4}{x^2}}+8=12.$ Đáp án C

5.31. $M=|x-2|+|5-x|+10\ge|x-2+5-x|+10=13\Rightarrow \min M=13$ khi $2\le x\le 5.$ Đáp án C

5.32. Đặt $t=a+\frac{1}{a}\Rightarrow|t|\ge 2\Rightarrow Q=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

Nếu $t\le -2\Rightarrow Q>0$

Nếu $t\ge 2\Rightarrow Q\ge 0$

$\min Q=0$ khi $t=2\Leftrightarrow a=1.$ Đáp án A

5.33. $H=\frac{1}{4}\left[(a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2\right]\ge 0$

$\Rightarrow \min H=0$ khi $a=2b=2c=2d=2e.$ Đáp án C

5.34. $\min S=12$ khii $a=b=c=2.$ Đáp án B

5.35. $M=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{3}{2ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{3}{2ab}\ge 10\quad\Rightarrow \min M=10$ khi $a=b=\frac{1}{2}.$ Đáp án A

5.36. $Q-2a=\sqrt{4-2a^2}\ge 0\Rightarrow Q\ge 2a\ge -2\sqrt{2}.$ Đáp án D

5.37. $a\sqrt{3b(a+2b)}\le a\left(\frac{3b+a+2b}{2}\right)=\frac{a^2+5ab}{2},b\sqrt{3a(b+2a)}\le b\left(\frac{3a+b+2a}{2}\right)=\frac{b^2+5ab}{2}$

Do đó $S\le\frac{a^2+b^2+10ab}{2}\le 3(a^2+b^2)\le 6.$ Đáp án B

5.38. $\min Q=8$ khi $a=b=c>0.$ Đáp án C

5.39. $E=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9}{3+ab+bc+ca}\ge\frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}\quad\Rightarrow \min E+\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1.$

Đáp án A

5.40. $4=(1.y+x.1)^2\le(x^2+1)(y^2+1)=F, \min F=4$ khi $x=y=1.$ Đáp án D

5.41. $M=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+...+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$. Đáp án A

5.42. Đáp án C

5.43. $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}\le\frac{1369-1}{4}=342$. Dấu "=" xảy ra khi $a=18, b=19.$ Đáp án B

Chú ý: Bài này không thể áp dụng bất đẳng thức Cô-si vì $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{37}{2}.$ Dấu bằng không xảy ra

5.44. Ta có $(a-3)^2+(b-3)^2+3(a-b)^2\ge0\Leftrightarrow 4S\ge6(a+b-ab)-18=72\Rightarrow S\ge18.$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=3.$ Đáp án C

5.45. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $\left(\frac{a^2}{b}+ab\right)+\left(\frac{b^2}{c}+bc\right)+\left(\frac{c^2}{a}+ac\right)\ge2(a^2+b^2+c^2)$

Hay $M+(ab+bc+ca)\ge2N(1)$. Mặt khác ta có $N=a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca(2)$

Từ $(1)(2)$ suy ra $M\ge N>0\Rightarrow\frac{M}{N}\ge1.$ Đáp án B

5.46. $2P=3(a+b)+\left(3a+\frac{12}{a}\right)+\left(b+\frac{16}{b}\right)\ge18+12+8\Rightarrow \min P=19$ khi $a=2, b=4.$ Đáp án B

5.47. $a^2+2(x+1)a+(x^2+1)^2=0$ có nghiệm khi $\Delta'=(x-x^2)(x^2+x+2)\ge0\Rightarrow0\le x\le1$

$\Rightarrow x_0=0$ với $a=-1, x_1=1$ với $a=-2$. Đáp án A

5.48. Nghiệm của phương trình đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $m=2.$ Đáp án B

5.49. $\frac{1}{2}\le x\le\sqrt{2}.$ Ta có $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1(2x-1)}\le\frac{1+2x-1}{2}=x$,

$\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)^2\le2(x^2+2-x^2)=4$

$\Rightarrow x+\sqrt{2-x^2}\le2\Rightarrow \max M=2$ khi $x=1.$ Đáp án A

5.50. $\min S=3$ khi $a=b=c=2.$ Đáp án B

5.51. $m=0$ với $a=b=0$

$\sqrt{2}E=\sqrt{2a\left(b+1\right)}+\sqrt{2b\left(a+1\right)}\le \frac{2a+b+1}{2}+\frac{2b+a+1}{2}\le 4\Rightarrow E\le 2\sqrt{2}$

Hoặc $E^2=\left(\sqrt{a}.\sqrt{b+1}+\sqrt{b}.\sqrt{a+1}\right)^2\le \left(a+b\right)\left(a+b+2\right)\le 8\Rightarrow E\le 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1.$ Đáp án B

5.52. Ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{a\left(b+c\right)}}\ge \frac{2a}{a+b+c}$

Tương tự $\sqrt{\frac{b}{a+c}}\ge \frac{2b}{a+b+c},\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge \frac{2c}{a+b+c}$. Đáp án D

5.53. $E=1+\frac{1}{a^2b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=1+\frac{1}{a^2b^2}-\frac{\left(a+b\right)^2-2ab}{a^2b^2}=1+\frac{2}{ab}\ge 9.$ Đáp án C

5.54. $m=2$ khi $a=1,M=4$ khi $a=-1.$ Đáp án A

5.55. Các khẳng định I, II, IV là đúng. Khẳng định III là sai khi chọn $a=b=1.$ Đáp án C

5.56. $Q=2+\frac{6}{a}$ nghịch biến trên $\left(1;3\right)$ Đáp án C

5.57. $\Delta =m^2-4m+20>0\forall m$. Nghiệm lớn của phương trình là $x_0=\frac{-m+\sqrt{m^2-4m+20}}{2}$

x_0 đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $m=01.$ Đáp án B

5.58. $\min Q=-9$ khi $a=1,\mathrm{b}=-5.$ Đáp án B

5.59. Ta có $\frac{1}{\left(k+1\right)\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k}}{\left(k+1\right)\sqrt{k}}=\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

Áp dụng cho $k=1,2,...,n$. Đáp án A

5.60. $\sqrt{a\left(2-a\right)}\le \frac{a+2-a}{2}=1\Rightarrow 0\le a\left(2-a\right)\le 1$

Tương tự $0\le b\left(2-b\right)\le 1,0\le c\left(2-c\right)\le 1\Rightarrow 0\le MNP\le 1$. Đáp án B

6.61. $ab\le \frac{a^2+b^2}{2}\le 9,\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)\le 36\Rightarrow 2\left(a+b\right)\le 12$ $\Rightarrow \max P=21$ khi $a=b=3.$

Đáp án D

5.62. $b+c=5-a\Rightarrow \left(b+c\right)^2=\left(5-a\right)^2$.

Ta có $2\left(b^2+c^2\right)\ge\left(b+c\right)^2\Leftrightarrow 2\left(9-a^2\right)\ge\left(5-a\right)^2\Leftrightarrow 1\le a\le\frac{7}{3}.$

Đáp án D

5.63. $E=1-\frac{2x^2}{x^4+2x^2+1}\le 1,$ do đó $Q=1$ khi $x=0.$ Mặt khác $\frac{2x^2}{x^4+2x^2+1}=\frac{2}{x^2+\frac{1}{x^2}+2}\le\frac{1}{2},$

do đó $P=\frac{1}{2}$ khi $x=\pm 1.$ Đáp án C

5.64. Đặt $x=a+c,y=b+c$ thì $x,y>0,x\ne y,xy=1$

$$P=\frac{1}{\left(x-y\right)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\left(x-y\right)^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{1}{\left(x-y\right)^2}+\left(x-y\right)^2+2\ge 4$$

$\Rightarrow\min P=4$ khi $\left(x-y\right)^2=1.$ Đáp án B

5.65. $Q=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4=\left(a^2+b^2\right)\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)+4\Rightarrow\min Q=\frac{25}{2}$

khi $a=b=\frac{1}{2}.$

5.66. Đáp án A

5.67. Dễ dàng chứng minh $S\ge\frac{a+b+c}{2}.$

Mặt khác $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=6\Rightarrow\min S=3$

khi $a=b=c=2.$ Đáp án B

5.67. Dễ dàng chứng minh $M\ge 2N.$ Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Đáp án D

5.68. Ta có $\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2+\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2\left(ab+bc+ca+a+b+c\right)-3\Rightarrow M=3$ khi $a=b=c=1.$

Đáp án C

5.69. $\left(a+b+c\right)^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ca\right)=4\Rightarrow a+b+c=2\Rightarrow b+c=2-a$

Mặt khác $bc=1-a\left(b+c\right)=1-a\left(2-a\right)=\left(a-1\right)^2$

Do $\left(b+c\right)^2\ge 4bc\Leftrightarrow\left(2-a\right)^2\ge 4\left(a-1\right)^2\Leftrightarrow 0<a\le\frac{4}{3}$

Đáp án D

5.70. Hãy chứng minh $S \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 3.$ Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1.$

Đáp án B

5.71. Hãy chứng minh $Q \geq \dfrac{a+b+c}{2} = 4.$ Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{8}{3}.$

Đáp án C

5.72. $2(M+3) = \left[\left(\dfrac{a}{b+c}+1\right)+\left(\dfrac{b}{c+a}+1\right)+\left(\dfrac{c}{a+c}+1\right)\right].2$

$= \left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right) \geq 9$

Đáp án D

CHƯƠNG VI. TAM GIÁC VÀ TỨ GIÁC

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong chương này, chúng ta đề cập đến các bài toán về tam giác và tứ giác: mối liên hệ các cạnh trong tam giác, các đường thẳng đồng quy trong tam giác, hệ thức lượng trong tam giác, tam giác đồng dạng, các tính chất của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi và hình vuông.

Một số tính chất cơ bản:

- Trong tam giác độ dài mỗi cạnh nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh kia và lớn hơn hiệu của chúng
- Trong tam giác ba đường trung tuyến đồng quy, ba đường cao đồng quy, ba đường phaan giác trong đồng quy và ba đường trung trục của ba cạnh đồng quy.
- Cho $\triangle ABC, \widehat{BAC}=90^\circ$ và đường cao AH, khi đó

$$AB^2+AC^2=BC^2; AH^2=BH.CH; AB^2=BH.BC; \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

- Cho $\triangle ABC,$ trung tuyên $AM,$ khi đó $AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{1}{2}BC^2$
- Cho $\triangle ABC$ nhọn, khi đó $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$
- Một tứ giác là hình bình hành nếu có các cặp cạnh đối song song hoặc một cặp cạnh song song và bằng nhau hoặc các cặp cạnh đối bằng nhau hoặc các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
- Cho hình bình hàng $ABCD, \widehat{BAC}$ nhọn, khi đó: $S=ABCD.\sin A$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC VÍ DỤ

Dạng 1: Các bài toán về tam giác

a. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 1: Cho $\triangle MNP$ cân tại $N, \widehat{NMP}=44^\circ$, H là trung điểm MP. Góc MNH bằng

A. 47° B. 46° C. 48° D. 52°

HD giải: $\widehat{MNP}=180^\circ-88^\circ=92^\circ \Rightarrow \widehat{MNH}=46^\circ$. Đáp án B.

Ví dụ 2: Ba số nào dưới đây không là độ dài ba cạnh một tam giác

A. $12;16;20$ B. $13;14;28$

C. $14;17;19$ D. $20;21;22$

HD giải: Do $13+14<28$ nên $13;14;28$ không là độ dài ba cạnh một tam giác. Đáp án B.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC, \widehat{BAC} = 90°, AB = 36cm, AC = 48cm.$ Độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC bằng

A. $60cm$ B. $32cm$ C. $30cm$ D. $36cm$

HD giải: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3600 \Rightarrow BC = 60cm.$ Do $AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM = 30cm.$

Đáp án C.

Ví dụ 4: Cho $\triangle MNP,$ trong các khẳng định sau có mấy khẳng định đúng?

I. Ba đường trung tuyến đồng quy

II. Ba đường cao đồng quy

III. Ba đường phân giác trong đồng quy

IV. Ba đường trung trực của ba cạnh đồng quy

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

HD giải: Cả 4 khẳng định đều đúng. Đáp án A.

Ví dụ 5: Cho $\triangle ABC, BC < AB < AC.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ B. $\widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$

C. $\widehat{B} < \widehat{C} < \widehat{A}$ D. $\widehat{A} < \widehat{C} < \widehat{B}$

HD giải: Do $BC < AB < AC \Rightarrow \widehat{A} < \widehat{C} < \widehat{B}.$ Đáp án D.

Ví dụ 6: Cho $\triangle MNP$ có ba cạnh MN, NP, MP tỉ lệ với $9,12,15.$ Khi đó MNP là:

A. tam giác cân B. tam giác đều

C. tam giác vuông D. tam giác có một góc tù

HD giải: $\frac{MN}{9} = \frac{NP}{12} = \frac{MP}{15} = k \Rightarrow MN^2 = 81k^2, NP^2 = 144k^2, MP^2 = 225k^2$

$\Rightarrow MN^2 + NP^2 = MP^2$

Do đó tam giác *MNP* vuông tại *N*. Đáp án C.

Ví dụ 7: Cho tam giác *PEF* vuông tại *P*, đường cao *PK*. Có mấy khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. $PK^2 = KE.KF$

II. $PE^2 = EK.EF$

III. $\frac{1}{PK^2} > \frac{1}{EK^2} + \frac{1}{FK^2}$

IV. $PK.EF = PE.PF$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

HD giải: Các khẳng định I, II, IV đúng, khẳng định III là sai. Đáp án C

Ví dụ 8: Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A} = 90°$, kẻ đường cao *AH*. Tỉ số $\frac{AH}{BC}$ bằng bao nhiêu nếu $AC = 6cm, AB = 8cm$

A. $\frac{12}{25}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{12}{23}$ D. $\frac{3}{4}$

HD giải: $BC = 10cm$, do $AB.AC = AH.BC \Rightarrow AH = 4{,}8cm$. Đáp án A.

Ví dụ 9: Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^2 27° + \sin^2 41° + \sin^2 63° + \sin^2 49°$

A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

HD giải: $P = \left(\sin^2 27° + \sin^2 63°\right) + \left(\sin^2 41° + \sin^2 49°\right) = \left(\sin^2 27° + \cos^2 27°\right) + \left(\sin^2 41° + \cos^2 41°\right)$

$= 2$. Đáp án C.

Ví dụ 10: Khẳng định nào dưới đây là SAI?

A. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ B. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

C. $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ D. $1 + \cot^2\alpha = \sin^2\alpha$

HD giải: Ta có các khẳng định A, B, C là đúng. $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \neq \sin^2\alpha$. Đáp án D

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 11: Cho tam giác *ABC* và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng, diện tích tam giác *ABC* bằng 36 lần diện tích tam giác $A'B'C'$, *AM* và $A'M'$ lần lượt là các đường trung tuyến của tam giác *ABC* và $A'B'C'$.

Tỉ số $\frac{A'M'}{AM}$ bằng:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{36}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{18}$

HD giải: Tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên $\left(\frac{A'M'}{AM}\right)^2 = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{A'M'}{AM} = \frac{1}{6}$.

Đáp án A.

Ví dụ 12: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, biết $\frac{AB}{3}=\frac{AC}{4}, BC=50cm.$ Tính độ dài đường cao *AH*.

A. $22cm$ B. $23cm$ C. $24cm$ D. $26cm$

HD giải: Ta có $AB^2=BH.BC, AC^2=CH.BC.$ Do đó $\frac{BH}{CH}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{9}{16}\Rightarrow BH=18cm, CH=32cm$

$\Rightarrow AH=\sqrt{18.32}=24cm.$ Đáp án C.

Ví dụ 13: Tam giác *ABC* nhọn có các đường cao *AM, BN, CP* cắt nhau tại *H.* Tính $\frac{HM}{AM}+\frac{HN}{BN}+\frac{HP}{CP}$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

HD giải: $\frac{HM}{AM}=\frac{\frac{1}{2}HM.BC}{\frac{1}{2}AM.BC}=\frac{S_{\Delta BHC}}{S_{\Delta ABC}}(1)$

Tương tự ta có $\frac{HN}{BN}=\frac{S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta ABC}}(2), \frac{HP}{CP}=\frac{S_{\Delta AHB}}{S_{\Delta ABC}}(3).$ Cộng từng vế của $(1),(2),(3)$ ta được

$\frac{HM}{AM}+\frac{HN}{BN}+\frac{HP}{CP}=1.$ Đáp án B.

Ví dụ 14: Tam giác *ABC* nhọn có các đường cao *AM, BN, CP*. Tỉ số $\frac{AM.BN.CP}{AB.BC.CA}$ bằng

A. $\sin A.\sin B.\sin C$ B. $\cos A.\cos B.\cos C$

C. $\sin A+\sin B+\sin C$ D. $\sin A.\cos B.\sin C$

HD giải: Tam giác *ABM* ta có $\frac{AM}{AB}=\sin B$

Tam giác *BCN* ta có $\frac{BN}{BC}=\sin C$

Tam giác *ACP* ta có $\frac{CP}{AC}=\sin A$

Nhân từng vế ta được đáp án A.

Ví dụ 15: Biểu thức $M=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ sau khi biến đổi bằng

A. $1+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ B. $1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

C. $1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ D. $1+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

HD giải: $M=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$

$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. Đáp án C

Ví dụ 16: Tam giác *ABC* nhọn có diện tích *S*. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $S=AB.AC.\sin A$ B. $S=AB.AC.\cos A$

C. $S=\frac{1}{2}AB.AC.\cos A$ D. $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

HD giải: Kẻ đường cao *CH,* do tam giác *ABC* nhọn nên *H* thuộc đoạn *AB*

$S=\frac{1}{2}AB.CH=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

Đáp án D.

Ví dụ 17: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH.* Biết $BH<CH$ và $AH=12cm, BC=25cm.$ Độ dài đoạn *CH* bằng

A. 9cm B. 12cm C. 16cm D. 18cm

HD giải: Đặt $BH=x, CH=y\left(x<y\right)$ ta có $\begin{cases}x+y=25\\ xy=12^2\end{cases}$ từ đó suy ra $x=9, y=16$

Đáp án C.

Ví dụ 18: Cho tam giác *ABC* đều cạnh *a*, từ điểm *O* trong tam giác hạ *OH, OK, OE* lần lượt vuông góc với các cạnh *AB, BC, CA.* Khi đó $OH+OK+OE$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3a}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

HD giải: $S_{\vartriangle AOB}+S_{\vartriangle BOC}+S_{\vartriangle COA}=S_{\vartriangle ABC}\Leftrightarrow\frac{1}{2}OH.AB+\frac{1}{2}OK.BC+\frac{1}{2}OE.CA=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}a\left(OH+OK+OE\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow OH+OK+OE=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Đáp án A.

Ví dụ 19: Cho tam giác *ABC* có *B, C* là các điểm cố định, $BC=2a, A$ là điểm di động sao cho $\widehat{BAC}=90°.$ Kẻ đường cao *AH, D* và *E* là hình chiếu vuông góc của *H* lên *AB, AC.* Diện tích tứ giác *ADHE* đạt giá trị lớn nhất bằng

A. a^2 B. $\frac{a^2}{2}$ C. $\frac{3a^2}{4}$ D. $\frac{2a^2}{3}$

HD giải: $ADHE$ là hình chữ nhật, $AD.AB = AH^2, AE.AC = AH^2$

$$S_{ADHE} = AD.AE = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{AH.BC} = \frac{AH^3}{2a} \le \frac{a^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi tam giác *ABC* vuông cân. Đáp án B.

Ví dụ 20: Tính giá trị của biểu thức $Q = \sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

HD giải:

$$Q = \sqrt{\sin^4\alpha + 4\left(1 - \sin^2\alpha\right)} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\left(1 - \cos^2\alpha\right)} = \sqrt{\left(\sin^2\alpha - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\cos^2\alpha - 2\right)^2}$$

$$= \left(2 - \sin^2\alpha\right) + \left(2 - \cos^2\alpha\right) = 4 - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 3.$$

Đáp án C.

c. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 21: Cho tam giác *ABC*, đường thẳng *d* cắt các cạnh *AC, BC* và *AB* kéo dài lần lượt tại các điểm *E, F, I*. Tỉ số $\frac{EA}{EC}.\frac{FC}{FB}.\frac{IB}{IA}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 1

HD giải: Từ *A* kẻ các đường thẳng song song với *BC*, cắt *d* ở *K*

$\triangle EAK \sim \triangle ECF \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{AK}{FC}, \triangle IAK \sim \triangle IBF \Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{FB}{AK}$. Nhân từng vế ta được

$\frac{EA}{EC}.\frac{IB}{IA} = \frac{FB}{FC} \Rightarrow \frac{EA}{EC}.\frac{FC}{FB}.\frac{IB}{IA} = 1$. Đáp án D.

Ví dụ 22: Gọi *H* là trung điểm cạnh *BC* của tam giác *ABC* $\left(AB = AC\right)$, hạ $HE \perp AC, I$ là trung điểm của *HE*. *O* là giao điểm của *AI* với *BE*. Góc *AOE* bằng

A. $80°$ B. $85°$ C. $90°$ D. $100°$

HD giải: Gọi *F* là trung điểm của *CE*. Khi đó *IF* là đường trung bình của tam giác *HCE*

$\Rightarrow IF \parallel CH \Rightarrow IF \perp AH \Rightarrow I$ là trực tâm tam giác $AHF \Rightarrow AI \perp HF\left(1\right)$

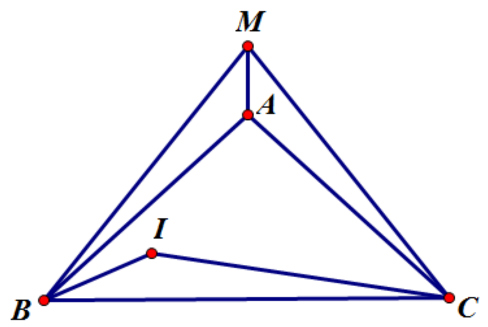
Mặt khác, *HF* là đường trung bình của tam giác $BCE \Rightarrow HF \parallel BE\left(2\right)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $AI \perp BE$ tại O. Đáp án C.

Ví dụ 23: Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A}=80°, I$ là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{IBC}=30°$, $\widehat{ICB}=10°$. Tỉ số $\frac{CA}{CI}$ bằng

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

HD giải:



Vẽ tam giác đều BCM (hình vẽ), ta có $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=50°, \widehat{MCA}=10° \Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM$

$\widehat{AMB}=\widehat{AMC}=30° \Rightarrow \triangle IBC = \triangle AMC\,(g.c.g) \Rightarrow CI = AC \Rightarrow \frac{CA}{CI}=1.$ Đáp án A.

Ví dụ 24: Biết rằng *M, N, P* là các điểm lần lượt chuyển động trên các cạnh *AB, BC, CA* của tam giác đều ABC sao cho $AM = BN = CP$. Biết diện tích tam giác ABC bằng $172a^2$, diện tích tam giác MNP đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $42a^2$ B. $43a^2$ C. $40a^2$ D. $45a^2$

HD giải: Dễ thấy các tam giác *AMP, BNM, CPN* bằng nhau. Diện tích tam giác *AMP* lớn nhất khi *M* là trung điểm của *AB*. Do đó diện tích *MNP* đạt giá trị nhỏ nhất bằng $43a^2$ khi *M, N, P* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, BC, AC*. Đáp án B.

Ví dụ 25: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 1, gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh *BC, CA, AB* và A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm các cạnh $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, \ldots$ và $A_{100}, B_{100}, C_{100}$ là trung điểm các cạnh $B_{99}C_{99}, C_{99}A_{99}, A_{99}B_{99}$. Gọi $c_0, c_1, \ldots, c_{100}$ lần lượt là chu vi các tam giác $ABC, A_1B_1C_1, \ldots, A_{100}B_{100}C_{100}$. Đặt $S = c_0 + c_1 + \ldots + c_{100}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $S < 2$ B. $S = 2$ C. $2 < S < 3$ D. $S \ge 3$

HD giải: Dễ thấy $c_1 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2^2}, \ldots, c_{100} = \frac{1}{2^{100}}$

Suy ra $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}, 2S=2+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{99}}$

Do đó $S=2S-S=2-\frac{1}{2^{100}}<2.$ Đáp án A.

Ví dụ 26: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có $AB=6a, AC=8a.$ E, F, I là các điểm di động trên các cạnh *AB, BC, CA*. Giá trị nhỏ nhất của $S=EA^2+EB^2+FB^2+FC^2+IC^2+IA^2$ là

A. $106a^2$ B. $102a^2$ C. $100a^2$ D. $96a^2$

HD giải: Ta có $BC=10a$ và $36a^2=\left(EA+EB\right)^2\le 2\left(EA^2+EB^2\right)$

Tương tự $100a^2=\left(FB+FC\right)^2\le 2\left(FB^2+FC^2\right), 64a^2=\left(IC+IA\right)^2\le 2\left(IC^2+IA^2\right)$

Cộng từng vế ta được $100a^2\le S.$ Dấu "=" xảy ra khi *E, F, I* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, BC, CA*. Đáp án C.

Ví dụ 27: Cho tam giác *ABC* có trung tuyến *AM*. Đẳng thức nào dưới đây là đúng

A. $AB^2+AC^2=2AM^2-\frac{BC^2}{2}$ B. $AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$

C. $AB^2+AC^2=AM^2+2BC^2$ D. $AB^2+AC^2=AM^2+\frac{BC^2}{2}$

HD giải: Hạ $AH\perp BC,$ giả sử *H* thuộc đoạn *BM*. Khi đó:

$$AB^2+AC^2=2AH^2+BH^2+CH^2=2\left(AM^2-MH^2\right)+BH^2+CH^2$$
$$=2AM^2+\left(BH^2-MH^2\right)+\left(CH^2-MH^2\right)$$
$$=2AM^2+\left(BH+MH\right)\left(BH-MH\right)+\left(CH+MH\right)\left(CH-MH\right)$$
$$=2AM^2+BM\left(BH-MH\right)+CM\left(CH+MH\right)=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$$

Đáp án B.

Ví dụ 28: Cho tam giác *ABC* đều cạnh *a*, *E* và *F* là các điểm bất kì thuộc cạnh *AB, AC* sao cho $AE=CF.$ Khoảng cách từ trung điểm *I* của *EF* đến cạnh *BC* bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{2a}{3}$

HD giải: Kẻ *EM* song song với *AC*, khi đó tâm giác *BME* đều suy ra *AEMF* là hình bình hành, suy ra *I* là trung điểm của *AM*. Do khoảng cách từ *A* đến *BC* bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên khoảng cách từ *I* đến *BC* bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Đáp án C.

Ví dụ 29: Cho điểm *O* trong tam giác *ABC*, qua *O* kẻ đường song song với *AB* cắt AC và *BC* *ở* D, *E*, đường song song với *AC* cắt *AB* và *BC* ở *F, K*, đường song song với *BC* cắt *AB, AC* ở *M, N*. Tính $S = \frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA}$

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

HD giải: Ta có $\frac{AF}{AB} = \frac{CK}{BC}, \frac{CN}{CA} = \frac{KO}{CA} = \frac{KE}{BC} \Rightarrow S = \frac{CK}{BC} + \frac{KE}{BC} + \frac{BE}{BC} = 1.$ Đáp án B.

Ví dụ 30: Cho tam giác *ABC* có $AB = 12a, AC = 16a, BC = 19a. M$ là điểm di động trên tia phân giác ngoài của góc *A*. Chu vi tam giác *MBC* đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $48a$ B. $46a$ C. $45a$ D. $47a$

HD giải: Từ *C* kẻ đường vuông góc với tia phân giác ngoài *Ax* của góc *A*, cắt tia *BA* tại *K*. Khi đó tam giác *CAK* cân tại *A* nên $AC = AK$. Ta có $MB + MC = MB + MK \geq AK = AB + AC = 28a.$ Chu vi tam giác *MBC* đạt giá trị nhỏ nhất bằng $47a$ khi *M* trùng *A*. Đáp án D.

Dạng 2: Các bài toán về tứ giác và đa giác

a. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 31: Tổng các góc ngoài của bát giác lồi bằng

A. $360°$ B. $420°$ C. $480°$ D. $540°$

HD giải: Đa giác lồi *n* cạnh có tổng các góc ngoài bằng $360°$. Đáp án A.

Ví dụ 32: Cho tứ giác *ABCD* có số đo các góc *A, B, C, D* tỉ lệ với 1;2;3;4. Số đo góc *B* là

A. $36°$ B. $70°$ C. $72°$ D. $76°$

HD giải: Ta có $\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4} = \frac{360°}{10} = 36° \Rightarrow \widehat{B} = 72°.$ Đáp án C.

Ví dụ 33: Hình thoi *ABCD* có chu vi bằng $128cm, \widehat{A}$ tù, hạ $AH \perp CD$ và $AH = 16cm.$ $\widehat{ABC} = ?$

A. $45°$ B. $60°$ C. $32°$ D. $30°$

HD giải: Tam giác *ADH* có $AD = 2AH = 32cm \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADH} = 30°.$ Đáp án D.

Ví dụ 34: Cho *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, BC, CD, DA* của tứ giác *ABCD*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. *MNPQ* là hình bình hành

B. *MNPQ* là hình thoi

C. $MP = NQ$

D. *MNPQ* là hình vuông

HD giải: Dễ dành chứng minh *MNPQ* là hình bình hành. Đáp án A.

Ví dụ 35: Một hình thoi có độ dài các đường chéo bằng 14*cm* và 48*cm* thì chu vi hình thoi bằng

A. 96*cm* B. 124*cm* C. 100*cm* D. 116*cm*

HD giải: Giả sử *O* là giao điểm hai đường chéo của hình thoi *ABCD* và $AC = 48cm, BD = 14cm.$ Khi đó $OA = 24cm, OB = 7cm \Rightarrow AB = 25cm,$ nên chu vi hình thoi bằng 100*cm*. Đáp án C.

Ví dụ 36: Một tứ giác có nhiều nhất mấy góc nhọn

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

HD giải: Bốn góc của tứ giác không thể cùng nhọn. Một tứ giác có thể có 3 góc nhọn. Đáp án C.

Ví dụ 37: Cho hình thang $ABCD\left(AB \parallel CD\right), AB = 12cm, CD = 220cm, AD = 16cm, M$ là giao điểm của *AD* và *BC*. Độ dài *MD* bằng

A. 32*cm* B. 36*cm* C. 40*cm* D. 42*cm*

HD giải: Ta có $\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA+16} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow MA = 24cm \Leftrightarrow MD = 40cm.$ Đáp án C.

Ví dụ 38: Đường thẳng *d* không cắt các cạnh của hình bình hành *ABCD*. Gọi A', B', C', D' là hình chiếu vuông góc của A, B, C, D lên đường thẳng *d*. Tỉ số $\frac{AA'+CC'}{BB'+DD'}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

HD giải: Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*, hạ $OO' \perp d$ là đường trung bình của các hình thang $ACC'A', BDD'B' \Rightarrow AA'+CC' = 2OO'$ và $BB'+DD' = 2OO'$. Đáp án B.

Ví dụ 39: Gọi *E* là trung điểm cạnh *NP* của hình bình hành *MNPQ*. *ME* cắt *NQ* tại *F*. Tỉ số $\dfrac{NF}{NQ} = ?$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{2}{5}$ D. $\dfrac{1}{3}$

HD giải: Gọi *O* là giao điểm của *MP* và *NQ*, dễ thấy *F* là trọng tâm tam giác *MNP*. Suy ra $\dfrac{NF}{NO} = \dfrac{2}{3}$, do đó $\dfrac{NF}{NQ} = \dfrac{1}{3}$ hoặc chứng minh $\triangle FNE \sim \triangle FQM \Rightarrow \dfrac{FN}{FQ} = \dfrac{NE}{MQ} = \dfrac{1}{2}$.

Đáp án D.

Ví dụ 40: *K* là điểm thuộc cạnh *BC* của tam giác *ABC*. Gọi *E, M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm các đoạn *ACC, AB, BE, CK, EK*. Tứ giác *MNPQ* là

A. Hình thang vuông B. Hình thang cân

C. Hình bình hành D. Hình thoi

HD giải: MN, PQ tương ứng là các đường trung bình của tam giác *ABE, BCE*. Do đó $MN \parallel AE, MN = \dfrac{1}{2}AE$ và $PQ \parallel CE, PQ = \dfrac{1}{2}CE \Rightarrow MN \parallel PQ, MN = PQ.$ Vậy tứ giác *MNPQ* là hình bình hành. Đáp án C.

b. Các bài toán trung bình

Ví dụ 41: Bát giác lồi có bao nhiêu đường chéo

A. 20 B. 24 C. 18 D. 26

HD giải: Đa giác lồi *n* cạnh có tổng số đường chéo và cạnh là $\dfrac{n(n-1)}{2}$, do đó số đường chéo là $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n^2-3n}{2}$. Thay $n = 8$ ta được 20 đường chéo. Đáp án A.

Ví dụ 42: Cho hình vuông *ABCD* và góc vuông $\widehat{xAy}$ sao cho *Ax* cắt cạnh *BC* và đường thẳng *CD* lần lượt tại *M* và *N*, *Ay* cắt đường thẳng *CD* tại *K*. Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $\dfrac{1}{AB^2} < \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2}$ B. $\dfrac{1}{AB^2} > \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2}$

C. $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2}$ D. $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AN} + \dfrac{1}{AM}$

HD giải: $\triangle ABM = \triangle ADK \Rightarrow AM = AK$

Xét tam giác *AKN* có $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AK^2}\Rightarrow\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AM^2}$. Đáp án C.

Ví dụ 43: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* và đường cao *AH. M, N* là các điểm đối xứng với *H* qua *AB, AC.* Tứ giác *BCNM* là

A. Hình thang cân

B. Hình thang vuông

C. Hình bình hành

D. Hình chữ nhật

HD giải: Ta có $\triangle AMB=\triangle AHB, \triangle ANC=\triangle AHC.$ Từ đó suy ra *A* là trung điểm *MN* và $\widehat{BMA}=\widehat{BHA}=90°, \widehat{CNA}=\widehat{CHA}=90°.$ Do đó *BCNM* là hình thang vuông. Đáp án B.

Ví dụ 44: Cho hình thang *ABCD* có *M, N* là trung điểm các cạnh đáy *AB, CD, O* là giao điểm của hai đường chéo và *I* là giao điểm các cạnh bên *AD* và *BC.* Khẳng định nào dưới đây là đúng cho 4 điểm *O, M, N, I*

A. Không có ba điểm nào thẳng hàng

B. Chỉ có 3 điểm *M, O, N* thẳng hàng

C. Chi có 3 điểm *M, I, N* thẳng hàng

D. Bốn điểm *M, N, I, O* thẳng hàng

HD giải: Giả sử *MO* cắt *CD* ở N', ta có $\frac{AM}{CN'}=\frac{BM}{DN'}\Rightarrow CN'=DN'\Rightarrow N'$ trùng *N* hay *A, O, N* thẳng hàng. Tương tự ta có *I, M, N* thẳng hàng nên 4 điểm *M, N, I, O* thẳng hàng. Đáp án D.

Ví dụ 45: Cho hình thoi *ABCD* có $\widehat{A}=60°, AB=16cm.$ Góc $\widehat{xBy}=60°$ sao cho *Bx, By* lần lượt cắt các cạnh *AD, CD* tại *M, N.* Khi đó $DM+DN=?$

A. $16cm$

B. $15cm$

C. $18cm$

D. $20cm$

HD giải: Dễ thấy tam giác *ABD* đều nên $AB=BD\Rightarrow\triangle ABM=\triangle DBN\,(g.c.g)\Rightarrow AM=DN$ $\Rightarrow DM+DN=DM+AM=AD=16cm$. Đáp án A.

Ví dụ 46: Cho hình bình hành *ABCD* có diện tích bằng $64a^2$. Tia phân giác của các góc *A* và *C* cắt đường chéo *BD* tại *M, N.* Diện tích đa giác *ABCNM* bằng

HD giải: Dễ dàng chứng minh $\triangle ABM=\triangle CDN\,(g.c.g), \triangle BCN=\triangle DAM\,(g.c.g),$ suy ra $S_{ABCNM}=S_{ADCNM}=32a^2.$ Đáp án B.

Ví dụ 47: Cho hình vuông *ABCD* có $AB=12cm. M, N, P, Q$ là các điểm di động trên các cạnh *AB, BC, CD, DA* của hình vuông. Chu vi tứ giác *MNPQ* đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $24cm$ B. $36cm$ C. $24\sqrt{3}cm$ D. $24\sqrt{2}cm$

HD giải: Gọi *I, J, K* tương ứng là trung điểm các đoạn *QN, MN, PQ*. Dễ thấy $MN = 2BJ, MQ = 2IJ,\ NP = 2IK, PQ = 2KD.$ Do đó chu vi $MNPQ = 2\left(BJ + JI + IK + KD\right) \ge 2BD = 24\sqrt{2}.$ Dấu "=" xảy ra khi *I, J, K* thuộc đoạn BD. Đáp án D.

Ví dụ 48: Cho tam giác *ABC* caan tại *A* và đường cao *CH, I* là điểm thuộc cạnh *BC, M* và *N* là hình chiếu vuông góc của *I* lên *AB, AC*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $IM + IN = CH$ B. $IM + IN > CH$

C. $IM + IN < CH$ D. $IM + IN = 2CH$

HD giải: Ta có $S_{ABI} + S_{ACI} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.IM + \frac{1}{2}AC.IN = \frac{1}{2}CH.AB \Leftrightarrow IM + IN = CH.$ Đáp án A.

Ví dụ 49: Nếu hình chữ nhật có chu vi $120cm$ thì diện tích hình chữ nhật đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $920cm^2$ B. $960cm^2$ C. $900cm^2$ D. $890cm^2$

HD giải: Gọi *a, b* là các kích thước của hình chữ nhật, khi đó $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} = 30 \Rightarrow ab \le 900.$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 30cm.$ Đáp án C.

Ví dụ 50: Cho ngũ giác *ABCDE*, gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AE, AB, BC, CD. H* và *K* là trung điểm *MP, NQ*. Khi đó

A. $KH = \frac{DE}{2}$ B. $KH = \frac{DE}{3}$ C. $KH = \frac{DE}{4}$ D. $KH = \frac{2DE}{5}$

HD giải: Gọi *F* là trung điểm của $CE \Rightarrow MNPF$ là hình bình hành $\Rightarrow H$ là trung điểm của *NF*

Do đó *KH* là đường trung bình của tam giác *NQF, FQ* là đường trung bình của tam giác *CDE*

$\Rightarrow KH = \frac{1}{2}FQ = \frac{1}{4}DE.$ Đáp án C.

c. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 51: Gọi *O* là giao điểm các đường chéo *AC, BD* của tứ giác *ABCD.* Các tam giác *ABO, BCO, CDO, ADO* có diện tích lần lượt là *m, n, p ,q*. Biết $mp = 31$ thì *mnpq* bằng

A. 961 B. 996 C. 900 D. 976

HD giải: Hạ *BH, DK* vuông góc với *AC*, khi đó $\frac{m}{n}=\frac{S_{ABO}}{S_{BCO}}=\frac{BH.AO}{BH.CO}=\frac{AO}{CO}(1)$

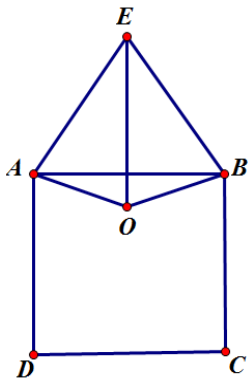
Tương tự $\frac{q}{p}=\frac{AO}{CO}(2)$. Từ $(1)(2)$ ta có $\frac{m}{n}=\frac{q}{p}\Rightarrow mp=nq$. Vậy $mnpq=961$.

Đáp án A.

Ví dụ 52: Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*. *O* là điểm nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{ABO}=\widehat{BAO}=15°$. Khoảng cách từ *O* đến cạnh *CD* là

A. $\frac{2a}{3}$ B. $\frac{3a}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD giải:



Tam giác *AOB* cân nên $OA=OB\Rightarrow\triangle AOD=\triangle BOC(c.g.c)\Rightarrow OD=OC$

Dựng điểm *E* ở ngoài hình vuông sao cho tam giác *ABE* đều $\Rightarrow\triangle AOE=\triangle BOE\Rightarrow\widehat{BEO}=30°$

$\triangle OBE=\triangle OBC(c.g.c)\Rightarrow\widehat{BCO}=\widehat{BEO}=30°\Rightarrow\widehat{DCO}=60°\Rightarrow\triangle CDO$ đều

Suy ra khoảng cách từ *O* đến cạng *CD* bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Đáp án D.

Ví dụ 53: Cho tam giác *ABC* có *G* là trọng tâm, đường thẳng *d* không cắt các cạnh của tam giác *ABC*. Gọi A',B',C',G' là hình chiếu vuông góc của *A, B, C, G* lên đường thẳng *d*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $AA'+BB'+CC'=3GG'$ B. $AA'+BB'+CC'=4GG'$

C. $AA'+BB'+CC'=\frac{5}{2}GG'$ D. $AA'+BB'+CC'=\frac{7}{2}GG'$

HD giải: Gọi *M, I* lần lượt là trung điểm của *BC, AG,* hạ $MM',II'\perp d$. Do MM' là đường trung bình của hình thang $BCC'B'\Rightarrow BB'+CC'=2MM'$. Tương tự ta có $2(MM'+II')=4GG', AA'+GG'=2II'$

$\Rightarrow AA' + BB' + CC' = 3GG'$. Đáp án A.

Ví dụ 54: Cho hình bình hành *ABCD* có $\widehat{A} = 62°, AD = 2AB.M$ là trung điểm của *AD*, hạ $CH \perp AB$.

Tính $\widehat{AHM}$?

A. $30°$ B. $31°$ C. $36°$ D. $29°$

HD giải: Gọi *N* là trung điểm của *BC*, *MN* cắt *CH* ở *I*. Dễ thấy tam giác *CMH* cân và *CDMN* là hình thoi. Ta có $\widehat{AHM} = \widehat{HMI} = \widehat{IMC} = \widehat{CMD}.$ Mặt khác $\widehat{BAD} = \widehat{IMD} = 2\widehat{AHM} \Rightarrow \widehat{AHM} = 31°.$ Đáp án B.

Ví dụ 55: Cho *MNPQ* là các điểm di động trên các cạnh *AB, BC, CD, DA* của hình vuông cạnh *a*. Giá trị lớn nhất của $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$ là:

A. $3a^2$ B. $4a^2$ C. $6a^2$ D. $\sqrt{5}a^2$

HD giải: Ta có $AM^2 + BM^2 \le \left(AM + BM\right)^2 = AB^2 = a^2.$ Tương tự suy ra $BN^2 + CN^2 \le a^2$, $CP^2 + DP^2 \le a^2$, $AQ^2 + DQ^2 \le a^2.$ Cộng từng vế ta được $S \le 4a^2.$ Dấu "=" xảy ra khi *M* trùng *A*, *N* trùng *B, P* trùng *C, Q* trùng *D*. Đáp án B.

Ví dụ 56: Cho tam giác đều, hình chữ, hình vuông, hình tròn có cùng chu vi thì hình nào có diện tích lớn nhất

A. Tam giác đều B. Hình chữ nhật

C. Hình vuông D. Hình tròn

HD giải: Dễ dàng chứng minh được diện tích tam giác đều, diện tích hình chữ nhật nhỏ hơn hoặc bằng diện tích hình vuông. Diện tích hình vuông nhỏ hơn diện tích hình tròn. Đáp án D.

BÀI TẬP

6.1. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, $AB = 18cm, AC = 24cm,$ trung tuyến *AM* có độ dài là

A. $14cm$ B. $16cm$ C. $15cm$ D. $18cm$

6.2. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, có bao nhiêu giá trị của *m* thỏa mãn $m^2 - 6m = \dfrac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6.3. Cho tam giác *ABC*, *I* là giao điểm của các đường phân giác trong của $\widehat{B}, \widehat{C}$. Biết $\widehat{BAC} = 62°,$ tính $\widehat{BIC}$ =?

A. $121°$ B. $120°$ C. $124°$ D. $118°$

6.4. Cho tam giác *MNP* có $\widehat{M} = 90°, MN = 24cm, MP = 30cm, G$ là trọng tâm tam giác *MNP* thì diện tích tam giác *NGP* bằng

A. $122cm^2$ B. $121cm^2$ C. $118cm^2$ D. $120cm^2$

6.5. Ba số nào dưới đây không là độ dài ba cạnh một tam giác

A. $19,21,27$ B. $21,25,29$

C. $15,17,33$ D. $60,80,100$

6.6. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, kẻ đường cao *AH*. Gọi *E*, *F* lần lượt là các điểm đối xứng với *H* qua các cạnh *AB*, *AC*. Tỉ số $\dfrac{AE}{AF}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$ B. 1 C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{3}{4}$

6.7. Tổng các góc trong của một bát giác lồi bằng

A. $1080°$ B. $1260°$ C. $1082°$ D. $1220°$

6.8. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, kẻ đường cao *AH*. Khẳng định nào dưới đấy là đúng

A. $\dfrac{AH}{BC} > \dfrac{3}{5}$ B. $\dfrac{AH}{BC} = \dfrac{5}{3}$ C. $\dfrac{1}{2} < \dfrac{AH}{BC} < \dfrac{3}{5}$ D. $\dfrac{AH}{BC} \le \dfrac{1}{2}$

6.9. Biểu thức $M = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ sau khi biến đổi bằng

A. $1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ B. $1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha$

C. $1 + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$ D. $2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha$

6.10. Biểu thức $M = \tan^2\alpha\sin^2\alpha - \tan^2\alpha + \sin^2\alpha$ sau khi rút gọn bằng

A. 1 B. 0 C. -1 D. 2

6.11. Cho $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$ thì $\sin\alpha+\cos\alpha$ bằng

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

6.12. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao $AH=16cm, BH=8cm.$ Độ dài cạnh *BC* bằng

A. $40cm$ B. $36cm$ C. $42cm$ D. $38cm$

6.13. Cho *M*, *N*, *P*, *Q* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* của tứ giác *ABCD*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $MP=NQ$

B. *MP* vuông góc *MQ*

C. *MP* và *NQ* cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn

D. Các khẳng định trên là sai

6.14. Cho tam giác *ABC*, *P* là điểm thuộc cạnh *AB* sao cho $\frac{AP}{BP}=\frac{1}{2}.$ Qua *P* kẻ đường thẳng song song với *BC*, cắt *AC* ở *Q*, qua *Q* kẻ đường song song với *AB*, cắt *BC* ở *K*. Tỉ số $\frac{BC}{KC}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

6.15. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH*. Tính tỉ số $\frac{BH}{CH}$ biết $\frac{AB}{3}=\frac{AC}{4}$

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{4}{3}$

6.16. Một hình chữ nhật có diện tích $256cm^2$ thì chu vi hình chữ nhật đó đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $60cm$ B. $62cm$ C. $72cm$ D. $64cm$

6.17. *M* là điểm trên cạnh *BC* của hình vuông *ABCD*. Đường thẳng qua *A*, vuông góc với *AM* cắt *CD* tại *N*. Tỉ số $\frac{AM}{AN}$ bằng

A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{5}$

6.18. Cho điểm *O* trong hình bình hành *ABCD*. Tỉ số $\frac{S_{AOB}+S_{COD}}{S_{ABCD}}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

6.19. Cho tam giác *ABCD*, các cạnh *AB*, *BC*, *CA* tỉ lệ thuận với 9,12,15. Khẳng định nào là đúng

A. *ABC* là tam giác đều

B. *ABC* là tam giác vuông

C. *ABC* là tam giác tù

D. *ABC* là tam giác vuông cân

6.20. Tính giá trị của biểu thức $Q=\sin^2 1°+\sin^2 2°+...+\sin^2 89°$

A. 41 B. 42 C. 43 D. 45

6.21. Tính giá trị của biểu thức $Q=\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}.\sin\alpha$

A. 3 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

6.22. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, $BC=a^2+26, AC=6a+3$. Có bao nhiêu giá trị của *a* để $\widehat{B}=30°$

A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

6.23. Cho *M*, *N* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB*, *BC* của hình vuông *ABCD*. *I* là giao điểm của *DN* và *CM*. Tỉ số $\frac{AD}{AI}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{5}$

6.24. Cho tam giác *ABC* nhọn, dựng các tam giác vuông cân tại *A* là *ABD* và *ACE* ở ngoài tam giác *ABC*, gọi *M* là trung điểm *BC*. Tính tỉ số $\frac{AM}{DE}$

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

6.25. Cho đa giác đều 12 cạnh, có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có đúng một cạnh là cạnh của đa giác

A. 90 B. 102 C. 92 D. 96

6.26. Cho tam giác *ABC*, *O* là giao điểm của các tia phân giác của góc *B*, *C*. *M*, *N*, *P* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *O* lên các cạnh *AB*, *BC*, *CA*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $OM = ON = OP$ B. $OM < ON = OP$

C. $OM < ON < OP$ D. $OM = ON < OP$

6.27. Cho tứ giác *ABCD*, *M*, *N* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB*, *CD* sao cho $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $AC = BD$ B. $AC \perp BD$ C. $BC = AD$ D. $BC \parallel AD$

6.28. Cho điểm *O* nằm trong tam giác *ABC*, các tia *AO*, *BO*, *CO* cắt các cạnh *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *M*, *N*, *P*. Khi đó $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

6.29. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, hình vuông *MNPQ* nội tiếp sao cho $M \in AB, N \in AC, P \in BC.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng

A. $MN^2 = BQ.CP$ B. $MN^2 = \frac{2}{3}BQ.CP$

C. $MN^2 = \frac{3}{2}BQ.CP$ D. $MN^2 = 2BQ.CP$

6.30. Cho hình thang cân *ABCD*, $AB \parallel CD, AB = BC = 12cm, \widehat{BCD} = 60°.$ Diện tích hình thang *ABCD*

A. $108\sqrt{2}cm^2$ B. $106\sqrt{3}cm^2$ C. $108\sqrt{3}cm^2$ D. $124cm^2$

6.31. Cho tam giác *ABC* có $AB = 12cm, AC = 16cm, BC = 20cm, AH$ là đường cao. $(CH - BH)$ bằng

A. 5,2*cm* B. 5,4*cm* C. 5,6*cm* D. 5,8*cm*

6.32. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, kẻ đường cao *AH* và trung tuyến *AM*. Biết $AB = a$ và *AH* là phân giác của góc *BAM*. Độ dài đoạn *AH* bằng

A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

6.33. Cho hình thang *ABCD* có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{CBD} = 90°, AB = 3a, AD = 4a.$ Độ dài cạnh *BC* bằng

A. $\frac{20a}{3}$ B. $7a$ C. $6a$ D. $\frac{21a}{4}$

6.34. Cho $\tan\alpha = 2,$ tính giá trị biểu thức $Q = \frac{5\sin\alpha + 8\cos\alpha}{7\cos\alpha - 3\sin\alpha}$

A. 16 B. 17 C. 18 D. 20

6.35. Cho hình bình hành *ABCD, O* là giao điểm của *AC* và *BD*, $\widehat{AOB} = \alpha < 90°,$ gọi *S* là diện tích hình bình hành *ABCD*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $S = AC.BD.\sin\alpha$

B. $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$

C. $S = AC.BD.\cos\alpha$

D. $S = \frac{1}{2}AC.BD.\cos\alpha$

6.36. Cho tam giác *MNP* có $\widehat{M} = 60°,$ hai đường phân giác *NE, PF* cắt nhau tại *O*. Tỉ số $\frac{OE}{OF}$ bằng

A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

6.37. Cho tam giác $ABC, \widehat{A} = 90°$ và đường cao *AH*. Gọi *M, N* là hình chiếu vuông góc của *H* lên cạnh *AB, AC*. Để $S_{ABC} = 2S_{AMHN}$ thì góc *B* bằng

A. $60°$ B. $30°$ C. $40°$ D. $45°$

6.38. Cho tam giác $ABC, \widehat{A} = 90°, AB < AC, M$ là trung điểm *BC*, $\widehat{ACB} = \alpha, \widehat{AMB} = \beta.$ Tính $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin\beta$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

6.39. Cho tam giác *ABC* trọng tâm *G* và trung tuyến *AD*. Đường thẳng *d* đi qua *G* cắt các cạnh *AB, AC* lần lượt tại *M, N*. Tính $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN}$

A. 2 B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

6.40. Cho tam giác $ABC(AB < AC)$ và đường phân giác *AD*. Từ trung điểm *E* của *BC* kẻ đường song song với *AD*, cắt *AC* và *AB* tại *P, Q*. Tỉ số $\frac{BQ}{CP}$ bằng

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

6.41. Cho *O* là điểm trong tam giác *ABC*, các tia *AO*, *BO*, *CO* lần lượt cắt các cạnh *AC*, *CA*, *AB* ở *P*, *Q*, *K*. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{PB}{PC}.\frac{QC}{QA}.\frac{RA}{RB}$

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. 2

6.42. Hình vuông *ABCD*, *E* thuộc cạnh *AB*, tia phân giác của góc *ECD* cắt cạnh *AD* ở *F*. Tính $\frac{BE+DF}{CE}$

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

6.43. Cho tam giác $ABC,\widehat{A}=90°,B',C'$ là các điểm lần lượt thuộc các cạnh *AB*, *AC*, đặt $P=\frac{dtAB'C'}{dtABC}$, khi đó

A. $P=\frac{AB'.AC'}{AB.AC}$ B. $P=\frac{2}{3}.\frac{AB'.AC'}{AB.AC}$

C. $P=\frac{3}{2}.\frac{AB'.AC'}{AB.AC}$ D. $P=\frac{AB'+AC'}{AB+AC}$

6.44. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* $\left(\widehat{A}<90°\right)$, các đường cao *AH* và *BK*. Đẳng thức nào đúng?

A. $\sin A=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ B. $\sin A=\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$

C. $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ D. $\frac{1}{2}\sin A=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

6.45. Cho tam giác *ABC* cân tại *B*, *I* là trung điểm cạnh *AC*, đường cao $AH=h.M,N$ là các điểm lần lượt thuộc các cạnh *AB*, *AC* sao cho $IA^2=AM.CN$. Khoảng cách từ *I* đến đường thẳng *MN* bằng

A. h B. $\frac{h}{3}$ C. $\frac{2h}{3}$ D. $\frac{h}{2}$

6.46. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, *AH* là đường cao, *P*, *Q* lần lượt là trung điểm các đoạn *BH*, *AH*. Góc tạp bởi các đường thẳng *AP*, *CQ* bằng

A. 60° B. 75° C. 85° D. 90°

6.47. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, *M* thuộc cạnh *AB*, *N* thuộc tia đối tia *CA* sao cho $BM = CN.MN$ cắt *BC* tại *I*. Tỉ số $\frac{IM}{IN}$ bằng

A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{5}$

6.48. *I* là điểm thuộc tia phân giác của góc vuông *xOy* sao cho $OI = 2\sqrt{2}a.$ Đường thẳng *d* thay đổi qua *I* cắt cạnh *Ox*, *Oy* ở *A*, *B*. Diện tích tam giác *AOB* đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $6a^2$ B. $8a^2$ C. $8\sqrt{2}a^2$ D. $6\sqrt{2}a^2$

6.49. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* và $\widehat{A} = 20°.M$ là điểm thuộc cạnh *AB* sao cho $AM = BC.$ $\widehat{ACM} = ?$

A. $15°$ B. $12°$ C. $10°$ D. $9°$

6.50. Cho hình chữ nhật *EFKH* nội tiếp trong tạm giác $ABC\left(E \in AB, F \in AC, H, K \in BC\right).$ Biết diện tích tam giác ABC bằng $420cm^2$ thì diện tích *EFKH* đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu

A. $210cm^2$ B. $140cm^2$ C. $220cm^2$ D. $280cm^2$

6.51. Cho hình chữ nhật $ABCD, BC = 16, CD = 24,$ hạ $BH \perp AC.$ Gọi *M*, *N* là trung điểm của *AH*, *CD*. Tính $MB^2 + MK^2$

A. 360 B. 420 C. 400 D. 425

6.52. Cho *a* và *b* là hai đường thẳng song song, có 10 điểm thuộc *a*, 12 điểm thuộc *b*. Có bao nhiêu hình thang được tạo thành từ các điểm đã cho

A. 2972 B. 2970 C. 2896 D. 2992

6.53. *a* và *b* là hai đường thẳng song song có 10 điểm thuộc *a*, 8 điểm thuộc *b*. Có bao nhiêu tam giác được tạo thành có đỉnh là các điểm đã cho

A. 642 B. 636 C. 640 D. 648

6.54. Cho tam giác *MNP* cân tại *M*, *E* là điểm thuộc cạnh *MN*, *F* là điểm thuộc tia đối của tia *PM* sao cho $NE = PF.$ Các đường trung trục của *NP* và *EF* cắt nhau tại *K*. Tính $\widehat{KPF}$?

A. $82°$ B. $80°$ C. $95°$ D. $90°$

6.55. Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = a + \sqrt{2}.$ Tính $\tan^8\alpha + \cot^8\alpha$

A. 1156 B. 1154 C. 1172 D. 1148

HƯỚNG DẪN GIẢI

6.1. Đáp án C

6.2. Đáp án C

6.3. Đáp án A

6.4. Đáp án D

6.5. Đáp án C

6.6. Đáp án B

6.7. Đáp án A

6.8. Kẻ trung tuyến $AM \Rightarrow \frac{AH}{BC} \le \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$. Đáp án D

6.9. Đáp án A

6.10. Đáp án B

6.11. Đáp án D

6.12. Đáp án A

6.13. Đáp án C

6.14. Đáp án B

6.15. $AB^2 = BH.BC, AC^2 = CH.BC \Rightarrow \frac{9}{16} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$. Đáp án C

6.16. Đáp án D

6.17. Đáp án A

6.18. Đáp án B

6.19. Đáp án B

6.20. Đáp án D

6.21. Đáp án C

6.22. $\widehat{B} = 30° \Rightarrow BC = 2AC \Rightarrow a = 2; a = 10$. Đáp án A

6.23. Gọi *K* là trung điểm *CD*. Dễ chứng minh $\widehat{BCM} = \widehat{CDN} \Rightarrow CM \perp DN$. Do $AK \parallel CM$ nên $AK \perp DI$ tại trung điểm của *DI*. Vậy tam giác *DAI* cân tại *A*. Đáp án B

6.24. Gọi *K* là điểm đối xứng với *A* qua *M*. $\triangle ACK = \triangle EAD(c.g.c) \Rightarrow AK = DE$. Đáp án C

6.25. Nếu đa giác có *n* cạnh, ứng với mỗi cạnh của đa giác ta có $(n-4)$ tam giác thỏa mãn đề bài. Do đó số tam giác cần tìm là $n(n-4)$. Đáp án D

6.26. Đáp án A

6.27. Gọi I là trung điểm BD. Chứng minh I thuộc MN rồi suy ra $MN \parallel BC, MN \parallel AD.$ Đáp án D

6.28. Đáp án B

6.29. $\triangle BQM \sim \triangle NPC \Rightarrow \dfrac{BQ}{NP} = \dfrac{QM}{CP} \Rightarrow QM.NP = BQ.CP.$ Đáp án A

6.30. Đáp án C

6.31. Đáp án C

6.32. Chứng minh tam giác ABM đều. Đáp án B

6.33. Đáp án A

6.34. Chia cả tử và mẫu cho $\cos\alpha.$ Đáp án C

6.35. $dtABO = \dfrac{1}{2}AO.BO.\sin\alpha \Rightarrow S = 4dtABO = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha.$ Đáp án B

6.36. $\widehat{NOP} = 120°,$ vẽ OI là tia phân giác của $\widehat{NOP} \Rightarrow \triangle NOF = \triangle NOI\,(g.c.g), \triangle POI = \triangle POE\,(g.c.g).$ Vậy $OF = OI = OE.$ Đáp án A

6.37. Dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle ANM,$ gọi O, I là trung điểm MN, BC. Ta có $\dfrac{AO}{AI} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{1}{2}.$ Mặt khác $\dfrac{AO}{AH} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $AH = AI,$ vậy H trùng I. Do đó $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Đáp án D

6.38. Kẻ $AH \perp BC,$ do $AB < AC$ nên H nằm giữa B và M. Ta có $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2.\dfrac{AB.AC}{BC^2} = 1 + 2.\dfrac{AH.BC}{BC^2} = 1 + \dfrac{AH}{AM} = 1 + \sin\beta.$ Đáp án C

6.39. Từ B và C kẻ các đường song song với d, cắt AD tại E, F suy ra $DE = DF.$ Khi đó $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AE + AF}{AG} = \dfrac{2AD}{AG} = 3.$ Đáp án D

6.40. Đáp án A

6.41. Kẻ đường thẳng d qua A, d cắt BQ, CR ở E, F. Khi đó $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{AE}{AF}; \dfrac{QC}{AQ} = \dfrac{BC}{AE}; \dfrac{RA}{RB} = \dfrac{AF}{BC}.$

Đáp án C

6.42. Lấy G thuộc tia đối BA sao cho $BG = DF \Rightarrow \triangle DCF = \triangle BCG \Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{FCE} = \widehat{BCG}$

$\Rightarrow \widehat{BGC} = \widehat{GCE} \Rightarrow$ tam giác *CEG* cân tại *E*. Đáp án B

6.43. Đáp án A

6.44. Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \widehat{CBK}$

$\sin A = \dfrac{BK}{AB} = \dfrac{BK.BC}{BC.AB} = 2\dfrac{BK}{BC}.\dfrac{BC}{AB} = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}.$ Đáp án C

6.45. Dễ dàng chứng minh các tam giác *AIM*, *CNI*, *INM* đồng dạng. Suy ra *NI* là tia phân giác của góc *CNM*. Do đó khoảng cách từ *I* đến *MN* bằng khoảng cách từ *I* đến *CN*. Đáp án D

6.46. $\triangle ABH \sim CAH \Rightarrow \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{BP}{AQ} \Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle CAQ \Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{ACQ} \Rightarrow AP \perp CQ.$ Đáp án D

6.47. Từ *N* kẻ đường thẳng song song với *AB*, cắt *BC* tại *K*.

Khi đó $\triangle IBM = \triangle IKN\left(g.c.g\right) \Rightarrow IM = IN.$

Đáp án A

6.48. Đường vuông góc với *OI* tại *I* cắt *Ox*, *Oy* tại *A*, *B*. Kẻ đường thẳng bất kì qua *I* cắt *Ox*, *Oy* tại A', B'. Dễ chứng minh $dtAOB < dtA'OB'.$ Đáp án B

6.49. Đáp án C

6.50. Diện tích *EFKH* đạt giá trị lớn nhất khi *E*, *F* là trung điểm *AB*, *AC*. Đáp án A

6.51. Chứng minh $\widehat{BMK} = 90°.$ Đáp án C

6.52. Có 45 đoạn thẳng trên *a*, 66 đoạn thẳng trên *b* và đầu mút là các điểm đã cho. Mỗi đoạn thẳng trên *a* và một đoạn thẳng trên *b* ta có một hình thang. Đáp án B

6.53. Đáp án C

6.54. *EF* cắt *NP* tại *I* là trung điểm *EF*.

$\triangle KPM = \triangle KNM, \triangle KPF = \triangle KNF \Rightarrow \widehat{KPM} = \widehat{KNE} = \widehat{KPF}.$

Đáp án D

6.55. Đáp án B

CHƯƠNG VII. ĐƯỜNG TRÒN

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các bài toán về đường tròn là trọng tâm của hình học lớp 9, bao gồm các vấn đề về đường tròn và các tính chất của nó, vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn, các bài toán về tiếp tuyến, góc nội tiếp, góc có đỉnh ở trong hay ngoài đường tròn, tứ giác nội tiếp, độ dài đường tròn và cung tròn,...

Một số tính chất:

- Cho đường tròn $(O;R)$, M là điểm ở ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến MT và các cát tuyến MAB, MCD. Khi đó: $MA.MB = MC.MD = MT^2 = MO^2 - R^2$.

Nếu M ở trong đường tròn thì $MA.MB = MC.MD = MT^2 = R^2 - MO^2$.

- $\triangle ABC$ vuông tại A, r là bán kính đường tròn nội tiếp, khi đó $2r = AB + AC - BC$.
- Cho $\triangle ABC$, kí hiệu S là diện tích tam giác, p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác. Khi đó: $S = p.r$.

Các dạng toán thường gặp:

1. Các bài toán về tính toán: độ lớn của một góc; độ dài của đoạn thẳng, một cung tròn; diện tích của một hình cho trước.
2. Các bài toán định tính: tứ giác nội tiếp, vị trí tương đối của đường tròn, của đường thẳng và đường tròn.
3. Các bài toán về cực trị liên quan đến đường tròn.
4. Các bài toán về đường tròn có yếu tố cố định và yếu tố chuyển động.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC VÍ DỤ

1. Các bài toán đơn giản

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biết $\widehat{A} = 50°$, tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$.

A. $65°$ B. $125°$ C. $130°$ D. $135°$

Hướng dẫn giải: Do $\triangle ABC$ cân tại A, $\widehat{A} = 50° \Rightarrow \widehat{ABC} = 65° \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AC} = 130°$.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Tính độ dài cạnh AB theo R.

A. $R\sqrt{3}$ B. $R\sqrt{2}$ C. $\frac{3R}{2}$ D. $R\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải: Kẻ đường cao AH của $\triangle ABC$, khi đó $AH=\frac{3R}{2}$

Trong $\triangle ABC$ ta có $\cos 30°=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AB=R\sqrt{3}$

Đáp án A.

Ví dụ 3: Hai đường tròng tâm *O* và O' tiếp xúc ngoài tại *I*. Tìm số tiếp tuyến chung của $(O),(O')$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải: Đáp án C.

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn $(O),(O')$ có bán kính khác nhau. Trường hợp nào dưới đây có số tiếp tuyến chung của $(O),(O')$ là lớn nhất.

A. $(O),(O')$ tiếp xúc trong tại *I*

B. $(O),(O')$ tiếp xúc ngoài tại *E*

C. $(O),(O')$ cắt nhau tại 2 điểm

D. $(O),(O')$ ở ngoài nhau

Hướng dẫn giải: Khi $(O),(O')$ ở ngoài nhau thì số tiếp tuyến chung của chúng là 4. $(O),(O')$ tiếp xúc trong thì có 1 tiếp tuyến chung, tiếp xúc ngoài thì có 3 tiếp tuyến chung, cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thì có 2 tiếp tuyến chung.

Đáp án D.

Ví dụ 5: Cho đường tròn tâm *O* bán kính 3*cm*, dây *EF* có độ dài $3\sqrt{2}cm$. Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$.

A. $60°$ B. $90°$ C. $100°$ D. $120°$

Hướng dẫn giải: Dễ thấy $\triangle OEF$ vuông cân tại *O*, từ đó suy ra sđ $\overset{\frown}{EF}=90°$.

Đáp án B.

Ví dụ 6: Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến *MP*, *MQ* với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với *OP* tại *O* cắt *MQ* tại *F*; đường thẳng vuông góc với *OQ* tại *O* cắt *MP* tại *E*. Tứ giác *MEOF* là hình gì?

A. Hình thang vuông

B. Hình bình hành

C. Hình chữ nhật

D. Hình vuông

Hướng dẫn giải: Ta có $OF \parallel ME$ vì cùng vuông góc với *OP*. Tương tự $OE \parallel MF$ vì cùng vuông góc *OQ*. Từ đó suy ra *MEOF* là hình bình hành.

Ví dụ 7: Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn tâm *O* kẻ cát tuyến *MAB* và tiếp tuyến *MT* với đường tròn. Biết $MA = 4cm, MB = 9cm,$ tính độ dài đoạn *MT*.

A. $5cm$ B. $6cm$ C. $7cm$ D. $8cm$

Hướng dẫn giải: Có $MT^2 = MA.MB4 = 4.9 = 36 \Rightarrow MT = 6cm.$

Đáp án B.

Ví dụ 8: Từ điểm *I* ở ngoài đường tròn tâm *O* bán kính *R* kẻ tiếp tuyến *IA*, *IB* với đường tròn. Tính độ dài đoạn *OI* biết $\widehat{AOB} = 90°$

A. R B. $R\sqrt{3}$ C. $R\sqrt{5}$ D. $R\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải: Dễ thấy tứ giác *AOBI* là hình vuông cạnh bằng *R*, do đó $OI = R\sqrt{2}$.

Đáp án D.

Ví dụ 9: Cho *E* là điểm thuộc nửa đường tròn đường kính *AB*. Tiếp tuyến tại *E* cắt các tiếp tuyến tại *A* và *B* lần lượt tại *M* và *N*. Tính tỉ số $\dfrac{AM + BN}{MN}$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. 1 D. $\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải: Ta có

$$AM = ME, BN = NE \Rightarrow AM + BN = ME + NE = MN \Rightarrow \frac{AM + BN}{MN} = 1.$$

Đáp án C.

Ví dụ 10: Cho hai đường tròn $(O),(O')$ có bán kính lần lượt là

$R = 3cm, R' = 8cm; OO' = 2cm.$ Khi đó vị trí của $(O),(O')$ là

A. Ở ngoài nhau B. Tiếp xúc ngoài

C. Tiếp xúc trong D. Đựng nhau

Hướng dẫn giải: Do $OO' = 2cm, R' - R = 5cm \Rightarrow OO' < R' - R \Rightarrow (O')$ đựng (O)

Đáp án D.

Ví dụ 11: Đường tròn (O) bán kính bằng 10*cm*, dây *EF* có độ dài 12*cm* thì khoảng cách từ tâm *O* đến dây *EF* bằng

A. $6cm$ B. $7cm$ C. $8cm$ D. $9cm$

Hướng dẫn giải: Hạ $OH \perp EF \Rightarrow EH = 6cm.$ Áp dụng định lí Pytago trong tam giác *EOH* có $OH = 8cm$.

Đáp án C.

Ví dụ 12: Biết rằng các điểm *M, N* nằm trong, các điểm *P, Q* nằm ngoài đường tròn tâm *O*. Trong các đoạn thẳng *MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ* có mấy đoạn chắc chắn cắt đường tròn

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Hướng dẫn giải: Nếu một điểm nằm trong, một điểm nằm ngoài đường tròn thì đoạn thẳng đó chắc chắn cắt đường tròn. Hai điểm cùng nằm trong đường tròn thì đoạn thẳng đó không cắt đường tròn. Hai điểm cùng nằm ngoài đường tròn thì đoạn thẳng đó có thể cắt hoặc không cắt đường tròn. Do đó các đoạn *MP, NQ, MQ, NP* chắc chắn cắt đường tròn.

Đáp án B.

Ví dụ 13: Tứ giác *ABCD* nội tiếp trong đường tròn tâm *O*. Biết $\widehat{C} = \frac{2}{3}\widehat{A},$ tính số đo $\widehat{A}$

A. $110°$ B. $108°$ C. $72°$ D. $112°$

Hướng dẫn giải: Do *ABCD* nội tiếp nên $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$ mà $\widehat{C} = \frac{2}{3}\widehat{A} \Rightarrow \widehat{C} = 72°, \widehat{A} = 108°$

Đáp án B.

Ví dụ 14: Cho đườngg tròn $\left(O; 7\sqrt{2}cm\right).$ Từ điểm *M* ở ngoaafi đường tròn, kẻ tiếp tuyến *MT* với đường tròn. Biết $\widehat{OMT} = 45°,$ tính độ dài đoạn *OM*

A. $7\sqrt{2}cm$ B. $15cm$ C. $14cm$ D. $7cm$

Hướng dẫn giải: Tam giác *OTM* vuông cân tại *T*, do đó $OM = OT\sqrt{2} = 14cm.$

Đáp án C.

Ví dụ 15: Cho đường tròn $(O; R)$, dây cung có độ dài bằng bán kính thì khoảng cách từ tâm đến dây cung đó bằng

A. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ B. $R\sqrt{3}$ C. $\frac{R\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{R\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải: Giả sử dây cung $MN = R$ thì tam giác *OMN* đều, cạnh *R* nên khoảng cách từ tâm *O* đến dây *MN* bằng $\frac{R\sqrt{3}}{2}$

Đáp án A.

Ví dụ 16: Cho hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại *A, B*. Vẽ các đường kính *AC, AD* của $(O),(O')$. Tính số đo $\widehat{CBD}$.

A. $170°$ B. $175°$ C. $178°$ D. $180°$

Hướng dẫn giải: Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{ABD}=90°\Rightarrow\widehat{CBD}=180°.$

Đáp án D.

Ví dụ 17: Cho hai đường tròn $(O),(O')$ tiếp xúc ngoài tại *A*. Gọi *CD* là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(C\in(O),D\in(O'))$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Tam giác *ACD* đều B. Tam giác *ACD* cân tại *A*

C. Tam giác *ACD* vuông tại *A* D. Tam giác *ACD* nhọn

Hướng dẫn giải: Kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại *A,* cắt *CD* tại *I*. Khi đó $IA=IC,IA=ID.$ Do đó $\triangle ACD$ có trung tuyến $AI=\frac{1}{2}CD\Rightarrow\widehat{CAD}=90°.$

Đáp án C.

Ví dụ 18: Qua điểm *I* trong đường tròn (O) kẻ hai dây cung *AB* và *CD.* Biết $IA=7cm,IB=8cm,\ IC=\frac{1}{2}IB.$ Tính độ dài dây *CD.*

A. $10cm$ B. $12cm$ C. $14cm$ D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải: Ta có $IC.ID=IA.IB\Rightarrow 4.ID=7.8\Rightarrow ID=14cm\Rightarrow CD=18cm.$

Đáp án D.

Ví dụ 19: Cho tam giác *ABC* nhọn có các đường cao *BD, CE*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. *BDCE* là hình bình hành B. *BCDE* nội tiếp được trong đường tròn

C. *BCDE* là hình thang D. *BCDE* là hình thoi

Hướng dẫn giải: Do $\widehat{BEC}=\widehat{BDC}=90°\Rightarrow BCDE$ nội tiếp được trong đường tròn.

Đáp án B.

Ví dụ 20: Bán kính của hình tròn tăng lên gấp 3 lần thì diện tích hình tròn tăng lên bao nhiêu lần?

A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

Hướng dẫn giải: Diện tích hình tròn ban đầu là $\pi.R^2.$ Khi bán kính tăng lên 3 lần thì diện tích hình tròn mới là $\pi.(3R)^2=9\pi R^2.$

Đáp án C.

Ví dụ 21: Cho hai đường tròn $(C),(C')$. Tìm vị trí tương đối của $(C),(C')$ biết rằng $(C),(C')$ có duy nhất 1 tiếp tuyến chung.

A. Ở ngoài nhau B. Tiếp xúc ngoài C. Tiếp xúc trong D. Đựng nhau

Hướng dẫn giải: $(C),(C')$ tiếp xúc trong. Đáp án C.

Ví dụ 22: *M* là một điểm thuộc nửa đường tròn đường kính *AB*. Hạ $Mh \perp AB$. Đường tròn đường kính *MH* cắt *MA, MB* lần lượt tại *E* và *F*. Tính tỉ số $\frac{MH}{EF}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 1

Hướng dẫn giải: Dễ dàng chứng minh được *MEHF* là hình chữ nhật. Do đó $\frac{MH}{EF}=1$.

Đáp án D.

Ví dụ 23: Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn (C) kẻ tiếp tuyến *MT* và cát tuyến *MAB* với (C). Biết $MT=60cm, MA=90cm.$ Tính *MB*

A. $30cm$ B. $40cm$ C. $45cm$ D. $50cm$

Hướng dẫn giải: Theo hệ thức lượng trong đường tròn ta có $MT^2=MA.MB$ $\Leftrightarrow 3600=90.MB \Rightarrow MB=40cm$.

Đáp án B.

2. **Các bài toán trung bình**

Ví dụ 24: Tính diện tích hình tròn nội tiếp trong tam giác đêi *ABC* có cạnh bằng *a*

A. $\frac{\pi a^2}{8}$ B. $\frac{\pi a^2}{9}$ C. $\frac{\pi a^2}{12}$ D. $\frac{\pi a^2}{15}$

Hướng dẫn giải: Gọi *O* là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác *ABC* thì *O* cũng là trọng tâm, trực tâm của tam giác *ABC*. Gọi *H* là trung điểm cạnh *BC,* ta có $AH=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r=OH=\frac{1}{3}AH=\frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$ diện tích hình tròn nội tiếp tam giác *ABC* là $\pi r^2=\frac{\pi a^2}{12}$.

Đáp án C.

Ví dụ 25: Cho hai đường tròn tâm *O* và O' có bán kính lần lượt là 26*cm* và 30*cm*. (O) và (O') cắt nhau tại *M* và *N*. Tính độ dài đoạn OO' biết $MN = 48cm$

A. $25cm$ B. $26cm$ C. $27cm$ D. $28cm$

Hướng dẫn giải: Gọi *I* là giao điểm của *MN* và $OO' \Rightarrow IM = 24cm$

Xét tam giác *OMI* có $OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = 10cm,$ tương tự $O'I = \sqrt{O'M^2 - IM^2} = 18cm$

Vậy $OO' = 28cm.$ Đáp án D.

Ví dụ 26: Cho đường tròn tâm *O* bán kính *R*. Tìm tập hợp các điểm *I* sao cho từ *I* kẻ các tiếp tuyến *IM, IN* với đường tròn ta được tam giác *IMN* đều.

A. $I \in$ một đường thẳng cố định

B. $I \in$ đường tròn tâm *O* bán kính $R\sqrt{2}$

C. $I \in$ đường tròn tâm *O* bán kính $2R$

D. $I \in$ đường tròn tâm *O* bán kính $R\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải: Xét tam giác *OMI* có $OM = R, \widehat{OIM} = 30° \Rightarrow OI = 2R.$ Vậy $I \in$ đường tròn tâm *O* bán kính 2*R*.

Đáp án C.

Ví dụ 27: Cho đường tròn tâm *O* bán kính 10*cm*. *H* là điểm cố định và $OH = 8cm.$ Dây *MN* thay đổi đi qua *H* thì độ dài dây *MN* đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu

A. $12cm$ B. $11cm$ C. $15cm$ D. $14cm$

Hướng dẫn giải: Hạ $OK \perp MN,$ khi đó $OK \le OH \Rightarrow OK$ đạt giá trị lớn nhất bằng *OH* khi $MN \perp OH.$ Khi đó dây *MN* có độ dài bằng 12*cm*.

Đáp án A.

Ví dụ 28: Cho tam giác *ABC* nhọn, các đường cao *BM, CN* cắt nhau tại *H*. Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *AH* và *BC*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tứ giác *EMFN* là hình thang

B. Tứ giác *EMFN* là hình hình hành

C. Tứ giác *EMFN* là hình thoi

D. *EMFN* nội tiếp được trong đường tròn

Hướng dẫn giải: Tam giác *AEN* cân tại $E \Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{NAE}.$ Tương tự $\widehat{BNF} = \widehat{NBF}$

$\Rightarrow \widehat{ANE} + \widehat{BNF} = \widehat{NAE} + \widehat{NBF} = 90° \Rightarrow \widehat{ENF} = 90°.$ Chứng minh tương tự $\widehat{EMF} = 90°$

Vậy *EMFN* nội tiếp. Đáp án D.

Ví dụ 29: Cho hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại *A* và *B*. Đường thẳng *d* thay đổi qua *A*, cắt $(O),(O')$ lần lượt tại *P, Q* sao cho *A* nằm trong đoạn *PQ*. Độ dài đoạn *PQ* đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu biết $OO' = 13cm$

A. $24cm$ B. $26cm$ C. $28cm$ D. $30cm$

Hướng dẫn giải: Hạ *OM, ON* vuông góc với *PQ*. Khi đó *M, N* lần lượt là trung điểm của *AP, AQ* nên $PQ = 2MN.$ Ta có $MN \le OO' \Rightarrow PQ \le 2OO' = 26cm.$ Vậy *PQ* đạt giá trị lớn nhất bằng 26*cm* khi $d \perp AB.$ Đáp án B.

Ví dụ 30: Cho hai đường tròn tâm *E* và *F* cắt nhau tại các điểm *M* và *N*. Đường thẳng Δ thay đổi qua *M*, cắt $(E),(F)$ lần lượt tại *I* và *J* (*M* nằm trong đoạn *IJ*). Góc tạo bởi Δ và *MN* bằng bao nhiêu độ để chu vi tam giác *INJ* đạt giá trị lớn nhất.

A. $60°$ B. $75°$ C. $80°$ D. $90°$

Hướng dẫn giải: Trong đường tròn (E), sđ$\widehat{MIN} = \frac{1}{2}$sđ$\overparen{MN}$ không đổi, tương tự $\widehat{MJN}$ không đổi.

Khi Δ thay đổi thì các tam giác *INJ* luôn đồng dạng với nhau. Chu vi tam giác *INJ* đạt giá trị lớn nhất khi *IN* là đường kính của (E). Khi đó $\Delta \perp MN$.

Đáp án D.

Ví dụ 31: Cho nửa đường tròn tâm *O*, đường kính $AB = 24, C$ là điểm thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại *C* cắt các tiếp tuyến tại *A* và *B* lần lượt tại *E* và *F*. Tính $AE.BF$

A. 121 B. 144 C. 160 D. 169

Hướng dẫn giải: Dễ thấy *OC* là đường cao của tam giác vuông *EOF*. Do đó $AE.BF = CE.CF = OC^2 = 144$.

Đáp án B.

Ví dụ 32: *M* là điểm di động trên nửa đường tròn tâm *O* đường kính $AB = 2R.$ Tiếp tuyến tại *M* cắt các tiếp tuyến tại *A* và *B* lần lượt tại *P* và *Q*. Tìm giá trị nhỏ nhất của $OP.OQ$

A. R^2 B. $R^2\sqrt{2}$ C. $2R^2$ D. $R^2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải: Tam giác *OPQ* vuông tại *O* và $OM \perp PQ.$ Ta có $OP.OQ = OM.PQ \ge R.2R = 2R^2$

Vậy GTNN của $OP.OQ$ là $2R^2$ khi *M* là điểm chính giữa cung *AB*.

Đáp án C.

Ví dụ 33: Cho *M* là điểm thuộc nửa đường tròn tâm *O* đường kính $AB = 2R,$ tiếp tuyến tại *M* cắt các tiếp tuyến tại *A* và *B* tương ứng tại *E* và *F*. Gọi *P* là giao điểm của *OE* và *AM; Q* là giao điểm của *OF* và *BM*. Tính độ dài đoạn *PQ*.

A. $\frac{2}{3}R$ B. $\frac{2}{5}R$ C. R D. $\frac{4}{3}R$

Hướng dẫn giải: Dễ dàng chứng minh *PMQO* là hình chữ nhật $\Rightarrow PQ = OM = R$.

Đáp án C.

Ví dụ 34: Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn với $\widehat{B} = 50°, H$ là hình chiếu vuông góc của *A* lên cạnh *BC*, *K* đối xứng với *H* qua *AB*. Tính số đo $\widehat{BKH}$

A. $50°$ B. $40°$ C. $45°$ D. $55°$

Hướng dẫn giải: $\triangle AKB = \triangle AHB(c.c.c) \Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{AHB} = 90° \Rightarrow AHBK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{BAH} = 90° - 50° = 40°$. Đáp án B.

Ví dụ 35: Cho đường tròn tâm *C* dây *AB*. *M, N* là các điểm nằm trong đoạn *AB*, *I* là điểm chính giữa cung *AB*, tia *IM*, *IN* cắt đường tròn (C) lần lượt tại *C* và *D*. Tính tổng số đo $\widehat{MND} + \widehat{MCD}$

A. $170°$ B. $180°$ C. $185°$ D. $190°$

Hướng dẫn giải: $\widehat{MND} + \widehat{MCD} = \frac{1}{2}($sđ $\overset{\frown}{IB} +$ sđ $\overset{\frown}{AD} +$ sđ $\overset{\frown}{IB} +$ sđ $\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}($sđ $\overset{\frown}{IB} +$ sđ $\overset{\frown}{BD} +$ sđ $\overset{\frown}{AD} +$ sđ $\overset{\frown}{AI})180°$. (Chú ý: khi đó *MNDC* nội tiếp)

Đáp án B.

Ví dụ 36: Cho tam giác *ABC* cân tại *A* nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ tia *Ax* cắt đoạn *BC* và (O) lần lượt tại *D, E*. Tính $AD.AE$ biết $AB = a$

A. $2a^2$ B. $\frac{3}{2}a^2$ C. $\frac{3}{4}a^2$ D. a^2

Hướng dẫn giải: Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có $\widehat{BAD}$ chung, $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD.AE = AB^2 = a^2$

Đáp án D.

Ví dụ 37: Từ điểm *M* thuộc nửa đường tròn đường kính *AB* hạ *MP* vuông góc với tiếp tuyến của nửa đường tròn tại *A*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MA^2 = AB.MP$ B. $MA^2 < AB.MP$

C. $MA^2 = 2AB.MP$ D. $MA^2 = \frac{3}{2}AB.MP$

Hướng dẫn giải: Dễ thấy $\triangle PAM \sim \triangle MBA \Rightarrow \dfrac{MA}{AB} = \dfrac{MP}{MA} \Rightarrow MA^2 = AB.MP$

Đáp án A.

Ví dụ 38: Cho đường tròn tâm *O* đường kính 20*cm*. *A* là điểm cố định thuộc đường tròn, *B* di động trên đường tròn, *M* là trung điểm của *AB*. Khi đó *M* thuộc một đường tròn tâm *C* cố định có bán kính là

A. $10cm$ B. $5cm$ C. $8cm$ D. $6cm$

Hướng dẫn giải: Ta có $OM \perp AB$ nên *M* thuộc đường tròn tâm *C* cố định có đường kính $AO = 10cm,$ nên bán kính của (C) là 5*cm*.

Đáp án B.

Ví dụ 39: Cho đường tròn (C) đường kính *AB*, từ *C* là trung điểm của *AO*, kẻ dây vuông góc với *AB*, dây này cắt đường tròn tại *M*, *N*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. *AMON* là tứ giác nội tiếp B. *AMON* là hình chữ nhật

C. *AMON* là hình thoi D. *AMON* là hình vuông

Hướng dẫn giải: Do $AB \perp MN \Rightarrow CM = CN,$ ta lại có $CA = CO \Rightarrow AMON$ là hình thoi.

Đáp án C.

Ví dụ 40: Hai đường tròn $(O),(O')$ tiếp xúc ngoài tại *A*. Đường thẳng OO' cắt $(O),(O')$ lần lượt tại *B* và *C* (khác *A*). *DE* là tiếp tuyến chung ngoài của $(O),(O')$ $(D \in (O), E \in (O'))BD$ cắt *CE* tại *M*. Tính $\widehat{BMC}$

A. $80°$ B. $85°$ C. $90°$ D. $100°$

Hướng dẫn giải: *OD* và $O'E$ cùng vuông góc với *DE* nên $OD \parallel O'E$

$$\widehat{MBC} + \widehat{MCB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AOD} + \widehat{AO'E}\right) = 90° \Rightarrow \widehat{BMC} = 90°.$$

Đáp án C.

Ví dụ 41: Cho tam giác *ABC* $(AB = AC)$ nội tiếp trong đường tròn (C).*M* là điểm thuộc cung nhỏ *AC*, tia *Bx* vuông góc với *AM* cắt tia *CM* tại *D*. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $MB = MD$ B. $MB > MD$ C. $MB < MD$ D. $MB = BD$

Hướng dẫn giải: Do *ABCM* nội tiếp nên $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$, mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{AMB}$

Do đó $\widehat{AMD} = \widehat{AMB} \Rightarrow \triangle BMD$ cân tại $M \Rightarrow MB = MD$

Đáp án A.

Ví dụ 42: Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn tâm *O* kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* với (O). Đường thẳng qua *O* vuông góc với *OA* cắt *MB* ở *I*. Tính tỉ số $\frac{IO}{IM}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải: Do *OI* và *AM* cùng vuông góc với *OA* nên $OI \parallel AM \Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{OMA} = \widehat{OMI}$

$\Rightarrow \triangle OIM$ cân tại *I* $\frac{IO}{IM} = 1$. Đáp án C.

Ví dụ 43: Cho đường tròn tâm *O* bán kính bằng 6*cm*. Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn kẻ tiếp tuyến *MA, MB* với (O). Từ điểm *I* thuộc cung *AB* nhỏ kẻ tiếp tuyến với (O). Tiếp tuyến này cắt các đoạn *MA, MB* lần lượt tại *E* và *F*. Tính chu vi tam giác *MEF* biết $OM = 10cm$.

A. $16cm$ B. $15cm$ C. $14cm$ D. $13cm$

Hướng dẫn giải: $AM = BN = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Chu vi $\triangle MEF = ME + EI + MF + FI$ $= (ME + EA) + (MF + FB) = MA + MB = 16cm.$

Đáp án A.

Ví dụ 44: Cho các đường tròn $(O),(O')$ có bán kính lần lượt bằng 12*cm* và 15*cm*. $(O),(O')$ cắt nhau tại *A, B*. Đoạn thẳng OO' cắt $(O),(O')$ lần lượt tại *P, Q*. Tính độ dài đoạn *PQ* biết $OO' = 23cm.$

A. $2cm$ B. $3cm$ C. $4cm$ D. $5cm$

Hướng dẫn giải: $OO' = OP + OQ - PQ \Rightarrow PQ = OP + OQ - OO' = 12 + 15 - 23 = 4(cm)$

Đáp án C.

Ví dụ 45: Cho tam giác *MNP* nội tiếp đường tròn (O). Hạ *OH, OK, OE* lần lượt vuông góc với các cạnh *NP, MP, MN*. Biết $OH < OM < OE,$ khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\widehat{M} > 60°$ B. $\widehat{P} \geq 60°$ C. $\widehat{M} < 60°$ D. $\widehat{M} = 60°$

Hướng dẫn giải: Do $OH < OK < OE \Rightarrow NP > MP > MN \Rightarrow \widehat{M} > \widehat{N} > \widehat{P}$.

Từ đó suy ra $\widehat{P} < 60°$ và $\widehat{M} > 60°$

Đáp án A.

Ví dụ 46: Cho tam giác *ABC* nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). *H* là trực tâm tam giác, *AH* cắt *BC* và (O) lần lượt tại *I* và *K*. Tính tỉ số $\frac{IH}{IK}$

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{3}$

Hướng dẫn giải: Ta có $\widehat{ICK} = \widehat{BAI} = \widehat{ICH} \Rightarrow \triangle ICH = \triangle ICK \Rightarrow IH = IK \Rightarrow \frac{IH}{IK} = 1$

Đáp án B.

Ví dụ 47: Cho tam giác *MNP* vuông tại *M*. Gọi *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *MNP*. Tính tỉ số $\frac{MN + MP - NP}{r}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

Hướng dẫn giải: Đường tròn tâm *I* tiếp xúc với các cạnh *MN*, *MP*, *NP* tại *E*, *F*, *K* thì *MEIF* là hình vuông cạnh bằng *r*. Ta có

$$MN + MP = (ME + EN) + (MF + FP) = (r + NK) + (r + PK) = 2r + NP \Rightarrow \frac{MN + MP - NP}{r} = 2.$$

Đáp án D.

Ví dụ 48: Cho đường tròn tâm *O*, hai đường kính *AB*, *CD* vuông góc với nhau. *E* là điểm thuộc cung *BC*, vẽ dây $CF \parallel BE$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\triangle EOF$ đều B. $\triangle EOF$ vuông cân

C. $\triangle EOF$ cân tại *E* D. $\triangle EOF$ có 1 góc tù

Hướng dẫn giải: Do $CF \parallel BE \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BF} \Rightarrow \widehat{BOF} = \widehat{COE} \Rightarrow \widehat{EOF} = 90^\circ$. Vậy $\triangle EOF$ vuông cân tại *O*

Đáp án B.

Ví dụ 49: Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;R);(O;2R)$. Đường thẳng *d* tiếp xúc với $(O;R)$ và cắt $(O;2R)$ tại *P* và *Q*. Tính độ dài đoạn *PQ*

A. $2R\sqrt{3}$ B. $R\sqrt{3}$ C. $3R\sqrt{3}$ D. $\frac{3R}{2}$

Hướng dẫn giải: Gọi *I* là tiếp điểm của *d* và $(O;R)$. Xét tam giác *OIP* có $IP = \sqrt{OP^2 - OI^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow PQ = 2R\sqrt{3}$. Đáp án A.

Ví dụ 50: Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ tiếp tuyến *MA, MB* với đường tròn. Gọi *H* là trực tâm tam giác *ABM*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. *AOBH* nội tiếp được trong đường tròn B. *AOBH* là hình thoi

C. *AOBH* là hình vuông D. *AOBH* là hình chữ nhật

Hướng dẫn giải: Dễ thấy $BH \parallel OA$ (cùng vuông góc *AM*), tương tự $AH \parallel OB$. Mặt khác $OA = OB$ nên *AOBH* là hình thoi. Đáp án B.

Chú ý: Nếu C đúng thì D đúng, nếu D đúng thì D đúng. Do đó ta có thể loại trù phương án C và D, chỉ cần quan tâm đến A và B.

Ví dụ 51: Cho hai đường tròn cùng tâm *O*, bán kính *R* và *r* $(R > r)$. Diện tích phần nằm giữa hai đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\pi\left(R^2 - r^2\right)$ B. $\pi\left(R^2 + r^2\right)$ C. $\pi^2(R - r)$ D. $\pi(R + r)$

Hướng dẫn giải: Diện tích phần nằm giữa hai đường tròn là $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

Đáp án A.

3. Các bài toán phức tạp

Ví dụ 52: Cho đường tròn tâm *I*, bán kính bằng $5\sqrt{2}cm$. Đường thẳng Δ thay đổi cắt (I) tại *M* và *N*. Diện tích tam giác *MIN* đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu

A. $20cm^2$ B. $20\sqrt{2}cm^2$ C. $25cm^2$ D. $50cm^2$

Hướng dẫn giải: Hạ $IH \perp \Delta,$ khi đó $HM = HN$ và $S_{\Delta MIN} = MH.IH = MH.\sqrt{50 - MH^2}$

$$= \sqrt{MH^2\left(50 - MH^2\right)} \le \frac{MH^2 + \left(50 - MH^2\right)}{2} = 25$$

Đáp án C.

Ví dụ 53: *P* là điểm chuyển động trên nửa đường tròn đường kính $MN = 2R$. Hạ $PK \perp MN$, gọi r_1, r_2, r_3 là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác *MPN, MPK, NPK*. Độ dài đoạn *PK* bằng bao nhiêu để $r_1 + r_2 + r_3$ đạt giá trị lớn nhất

A. $\frac{R}{3}$ B. $\frac{2R}{3}$ C. $\frac{R}{2}$ D. R

Hướng dẫn giải: Áp dụng ví dụ 47 ta có: $2r_1 = MP + PN - MN, 2r_2 = KM + KP - MP,$ $2r_3 = KP + KN - PN$. Cộng từng vế và rút gọn ta được $2(r_1 + r_2 + r_3) = 2KP \le 2R \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 \le R$

Dấu "=" xảy ra khi $PK = R.$ Đáp án D.

Ví dụ 54: Cho tam giác *ABC* cân tại *A* nội tiếp đường tròn tâm *O* bán kính *R*, $\widehat{A} < 90°, I$ là điểm di động trên cung nhỏ *AC*, tia *Bx* vuông góc với *AI*, cắt *CI* ở *K*. Tìm GTLN của độ dài *IK*.

A. R B. $\frac{2}{3}R$ C. $2R$ D. $R\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải: Do *ABCI* nội tiếp nên $\widehat{AIK} = \widehat{ABC}$. Mặt khác $\widehat{AIB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC},$ do đó $\widehat{AIK} = \widehat{AIB} \Rightarrow \triangle BIK$ cân tại $I \Rightarrow IK = IB \le 2R$. Vậy $\max IK = 2R$ khi *BI* là đường kính của (O).

Đáp án C.

Ví dụ 55: Cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn tâm *O*. Gọi *G* và *H* lần lượt là trọng tâm và trực tâm tam giác *ABC*. Tính tỉ số $\frac{OG}{OH}$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

Hướng dẫn giải: Kẻ đường kính *AK* của $(O) \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành. Gọi *M* là trung điểm của *BC* thì *M* là trung điểm *HK* suy ra *OM* là đường trung bình của $\triangle AKH \Rightarrow OM \parallel AH, OM = \frac{1}{2}AH$.

OH cắt *AM* tại $G' \Rightarrow \frac{G'M}{G'A} = \frac{1}{2} \Rightarrow G' \equiv G \Rightarrow \frac{OG}{GH} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OG}{OH} = \frac{1}{3}$

Đáp án B.

Ví dụ 56: Cho tam giác *ABC* không có góc tù, đường cao *AH*, trung tuyến *AM* thỏa mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}.$ Tính số đo góc *BAC*.

A. $60°$ B. $70°$ C. $80°$ D. $90°$

Hướng dẫn giải: Gọi *N* là trung điểm của *AB* thì $\widehat{AHN} = \widehat{NAH} = \widehat{MAC} = \widehat{AMN} \Rightarrow AMHN$ nội tiếp$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{AHM} = 90° \Rightarrow \widehat{BAC} = 90°$

Đáp án D.

Ví dụ 57: Từ điểm K ở ngoài đường tròn tâm O kẻ các tiếp tuyến KB, KD và cát tuyến KAC với (O). Tính tỉ số $\dfrac{AB.CD}{AD.BC}$

A. 1 B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{3}{4}$

Hướng dẫn giải: $\triangle KDA \sim \triangle KCD \Rightarrow \dfrac{KA}{KD} = \dfrac{AD}{CD}$. Tương tự $\dfrac{KA}{KB} = \dfrac{AB}{BC}$, mà

$KB = KD \Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow AB.CD = AD.BC \Rightarrow \dfrac{AB.CD}{AD.BC} = 1.$

Đáp án A.

Ví dụ 58: M là điểm di động trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R.$ Khi đó $3MA + 4MB$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu

A. $8R$ B. $9R$ C. $10R$ D. $12R$

Hướng dẫn giải: $(3MA + 4MB)^2 \le (3^2 + 4^2)(MA^2 + MB^2) = 25.4R^2 = 100R^2$

$\Rightarrow 3MA + 4MB \le 10R$

Đáp án C.

Ví dụ 59: C là điểm thuộc nửa đường tròn đường kính $AB = 25cm.$ Biết $CA + CB = 35cm,$ tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

A. $4cm$ B. $5cm$ C. $6cm$ D. $8cm$

Hướng dẫn giải: Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do tam giác ABC vuông tại C nên $2r = AC + BC - AB = 35 - 25 = 10 \Rightarrow r = 5cm.$

Đáp án B.

Ví dụ 60: Gọi I là điểm di động trên nửa đường tròn tâm O, đường kính $MN = 2R.$ Hạ $IH \perp MN,$ độ dài đoạn OH bằng bao nhiêu để diện tích tam giác OIH đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ B. $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ C. $\dfrac{R}{2}$ D. $\dfrac{R}{2\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải: Đặt $OH = x(0 < x < R) \Rightarrow IH = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$S_{OIH} = \frac{1}{2}OH.IH = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(R^2 - x^2)} \le \frac{x^2 + R^2 - x^2}{4} = \frac{R^2}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Đáp án A.

Ví dụ 61: *I* là điểm chuyển động trên đường tròn tâm *O* đường kính *MN*. Tỉ số $\dfrac{IM}{IN}$ bằng bao nhiêu để chu vi tam giác *MIN* đạt giá trị lớn nhất

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. 1 D. $\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải: Ta có $\left(1.IM + 1.IN\right)^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left(IM^2 + IN^2\right) = 2MN^2$.

Do đó $IM + IN$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2R\sqrt{2}$ khi $IM = IN \Leftrightarrow \dfrac{IM}{IN} = 1$.

Đáp án C.

Ví dụ 62: Tam giác *ABC* nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm *O*. Tiếp tuyến tại *B* và *C* cắt nhau ở *D*. Từ *D* kẻ đường song song với *AB*, cắt *AC* tại *I* và cắt (O) tại *E* và *F*. Tính tỉ số $\dfrac{IE}{IF}$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. 1 D. $\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải: Chứng minh tứ giác *CDOI* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OID} = \widehat{OCD} = 90°$. Đáp án C.

Ví dụ 63: Cho tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều, hình tròn có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn nhất

A. Tam giác đều B. Hình vuông

C. Lục giác đều D. Hình tròn

Hướng dẫn giải: Đáp án D.

Ví dụ 64: Cho tam giác *ABC* đều ngoại tiếp đường tròn tâm *O. E, F, I* lần lượt là các điểm trên cạnh *AB, AC, BC* sao cho $BE = BI, CI = CF$. Tỉ số $\dfrac{EA}{EB}$ bằng bao nhiêu để độ dài đoạn *EF* nhỏ nhất

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. 1 D. $\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải: Dễ dàng chứng minh $\triangle BOE = \triangle BOI, \triangle COI = \triangle COF$. Do đó $OE = OI = OF$ và $\widehat{BEO} + \widehat{CFO} = \widehat{BIO} + \widehat{CIO} = 180° \Rightarrow \widehat{AEO} + \widehat{AFO} = 180° \Rightarrow AEOF$ nội tiếp mà góc *A* không đổi nên góc *EOF* không đổi

Do đó khi *E, F* thay đổi thì các tam giác cân *EOF* được tạo thành luôn đồng dạng với nhau, nên *EF* nhỏ nhất khi *OE* nhỏ nhất $\Leftrightarrow OE \perp AB \Leftrightarrow \dfrac{EA}{EB} = 1.$

Đáp án C.

Ví dụ 65: Cho đường tròn $(O;R), B,C$ là hai điểm cố định sao cho $\widehat{BOC} = 120°, M$ là điểm di động trên cung nhỏ $BC(M \neq B, M \neq C).$ Giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$ là:

A. $\dfrac{1}{R}$ B. $\dfrac{2}{R}$ C. $\dfrac{3}{R}$ D. $\dfrac{2R}{3}$

Hướng dẫn giải: Gọi *A* là điểm chính giữa cung lớn *BC,* ta có tam giác *ABC* đều. Dễ dàng chứng minh $MB + MC = MA.$ Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{2}{\sqrt{MB.MC}} \geq \frac{4}{MB + MC} = \frac{4}{MA} \geq \frac{2}{R}$$

Đáp án B.

BÀI TẬP

7.1. Đường tròn tâm O bán kính R có bao nhiêu tâm đối xứng?

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

7.2. Đường tròn tâm O bán kính R có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

7.3. Hình nào dưới đây nội tiếp được trong một đường tròn?

A. Hình thang B. Hình bình hành C. Hình thoi D. Lúc giác đều

7.4. Cho hai đường tròn $(O;R),(O';R')$ biết $R=18cm, R'=24cm, OO'=30cm,$ khẳng định nào đúng?

A. $(O),(O')$ ở ngoài nhau

B. $(O),(O')$ tiếp xúc ngoài

C. $(O),(O')$ cắt nhau tại 2 điểm

D. $(O),(O')$ tiếp xúc trong

7.5. Cho hai đường tròn $(O;8),(O';R),OO'=20.$ Tìm điều kiện của R để $(O),(O')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

A. $10<R<30$

B. $12<R<28$

C. $R>22$

D. $0<R<15$

7.6. Từ điểm P ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến PM, PN với đường tròn. Biết $\widehat{MPN}=25°,$ khi đó tam giác MPN là

A. Tam giác vuông

B. Tam giác đều

C. Tam giác cân

D. Có 1 góc tù

7.7. M là điểm thuộc đường tròn đường kính $AB(M\neq A, M\neq B).$ Hạ MK vuông góc với AB, có mấy khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

$MK^2=AK.BK(1)$

$MB^2=BK.BA(2)$

$\frac{1}{MK^2}=\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MB^2}(3)$

$\frac{1}{MK}=\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}(4)$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7.8. Cho hai đường tròn $(O;R),(O';20)$ tiếp xúc trong. Khẳng định nào sau đây đúng, biết $OO'=3$

A. $R=17$

B. $R=23$

C. $17 < R < 23$ D. $R = 17$ hoặc $R = 23$

7.9. Tam giác *ABC* vuông tại *C* nội tiếp trong đường tròn (O), *D* là điểm chính giữa cung nhỏ *BC, OD* cắt *BC* tại *I,* tỉ số $\frac{OI}{AC}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7.10. Tam giác *MNP* có $\widehat{M} = 72°, \widehat{P} = 49°$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi *H, K, I* là hình chiếu vuông góc của điểm *O* lên các cạnh *MN, NP, PM,* khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $OK < OI < OH$ B. $OK < OH < OI$

C. $OH < OI < OK$ D. $OI < OK < OH$

7.11. Cho các điểm *M, P, Q* thuộc đường tròn (O). Biết rằng tiếp tuyến của (O) tại *M* song song với *PQ*. Tính tỉ số $\frac{MP}{MQ}$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7.12. Tam giác nhọn *ABC* nội tiếp trong $(O;R)$. Các tia phân giác trong và ngoài của góc *B* cắt (O) tại *P* và *Q*. Độ dài *PQ* bằng

A. $R\sqrt{2}$ B. $R\sqrt{3}$ C. $R\sqrt{5}$ D. $2R$

7.13. Một đường tròn có thể cắt các cạnh của hình bình hành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

7.14. *M* là điểm thuộc nửa đường tròn đường kính $AB = 2R(M \neq A, M \neq B)$.*d* là tiếp tuyến của nửa đường tròn tại *M, P* và *Q* là chân đường vuông góc hạ từ *A* và *B* xuống *d*. Tính $AP + BQ$

A. $2R$ B. $R\sqrt{3}$ C. $R\sqrt{2}$ D. $\frac{3R}{2}$

7.15. Lục giác đều *ABCDEF* nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Khoảng cách từ *O* đến cạnh của lục giác bằng

A. R B. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2R}{3}$ D. $\frac{R\sqrt{2}}{3}$

7.16. Tam giác đều *MNP* nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. *PO* cắt *MN* và (O) lần lượt tại *E* và *F* $(F \neq P)$. Tính tỉ số

A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{3}$

7.17. Cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn (O). *E* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*, *AE* cắt (O) tại *K*. Tính tỉ số $\frac{KC}{KE}$

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

7.18. Tứ giác *ABCD* nội tiếp trong đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$. Khi đó tứ giác *ABCD* là

A. Hình bình hành B. Hình thoi C. Hình chữ nhật D. Hình thang cân

7.19. Đường tròn tâm *O* đường kính bằng 30*cm*. Độ dài dây *AB* bằng 18*cm* thì khoảng cách từ *O* đến đường thẳng *AB* bằng

A. 12*cm* B. 11*cm* C. 9*cm* D. 13*cm*

7.20. Từ điểm *A* ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến *AB*, *AC* với đường tròn, đoạn *AO* cắt đường tròn tại *I*. Gọi *x*, *y*, *z* là khoảng cách từ *I* đến các cạnh *AB*, *BC*, *CA*. Khẳng định nào đúng

A. $x < y = z$ B. $y < x = z$ C. $z < x < y$ D. $x = y = z$

7.21. Cho đường tròn (O) bán kính bằng 50*cm*. Các dây cung *AB*, *CD* song song với nhau và điểm *O* nằm trong tứ giác *ABDC*. Nếu $AB = 80cm, CD = 96cm$ thì khoảng cách giữa hai dây *AB* và *CD* là

A. 40*cm* B. 42*cm* C. 44*cm* D. 46*cm*

7.22. Cho tam giác *MNP* có $MN = 16cm, MP = 12cm, NP = 20cm.$ Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *MNP*

A. 3*cm* B. 4*cm* C. 5*cm* D. 6*cm*

7.23. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, $BC = 40cm,$ bán kính đường tròn nội tiếp bằng 6*cm*. Tính chu vi tam giác *ABC*

A. 92*cm* B. 94*cm* C. 95*cm* D. 90*cm*

7.24. Cho điểm *I* nằm trong đường tròn (O) bán kính bằng 10*cm*, $OI = 6cm$. Dây *AB* đi qua *I* có độ dài nhỏ nhất bằng

A. $16cm$ B. $14cm$ C. $15cm$ D. $18cm$

7.25. Cho điểm *I* nằm trong đường tròn $(O;14);OI = 6$. Dây *AB* đi qua *I* thì tích $IA.IB$ bằng

A. 169 B. 172 C. 156 D. 160

7.26. *M* là điểm di động trên đường tròn $(O;36cm).PQ$ là đường kính cố định $(M \neq P, M \neq Q)$. Trọng tâm *G* của tam giác *MPQ* chạy trên đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $12cm$ B. $15cm$ C. $11cm$ D. $13cm$

7.27. Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* với đường tròn. Biết cung lớn *AB* gấp 5 lần cung nhỏ *AB*. Số đo góc *AMB* bằng

A. $110°$ B. $115°$ C. $120°$ D. $140°$

7.28. Cho đường tròn tâm *O* bán kính *R*. Khi bán kính đường tròn tăng gấp *k* lần thì diện tích hình tròn tăng bao nhiêu lần?

A. k B. $2k$ C. $\sqrt{k}$ D. k^2

7.29. *N* là điểm di động trên nửa đường tròn đường kính $AB = 24cm$. GTLN của $NA + NB$ là

A. $24\sqrt{3}cm$ B. $24\sqrt{2}cm$ C. $36cm$ D. $30cm$

7.30. Cho đường tròn tâm *O* đường kính $AB = 18cm$. Dây $MN = 9cm$ song song với *AB* (*M* thuộc cung *AN*). Tính khoảng cách từ *O* đến dây *AN*.

A. $4,5cm$ B. $4cm$ C. $5cm$ D. $3,5cm$

7.31. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, hạ đường cao *AH*. Đường tròn đường kính *AH* cắt các cạnh *AB, AC* lần lượt tại *E, F*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. *BCFE* là hình thang B. *BCFE* là hình bình hành

C. *BCFE* là hình thoi D. *BCFE* nội tiếp được trong đường trònn

7.32. Cho tam giác *ABC*, và đường cao *AH*. Đường tròn tâm *A* bán kính *HA* cắt *AB, AC* lần lượt tại *D, E*. Biết $\widehat{ACB} = 41°$, tính số đo góc *ADE*.

A. $49°$ B. $42°$ C. $41°$ D. $39°$

7.33. Cho đường tròn (O), dây *AB* không qua *O*. *C* và *D* là các điểm phaann biệt nằm giữa *A* và *B*, *E* là điểm chính giữa của cung nhỏ *AB*, *EC* và *ED* cắt (O) lần lượt tại *M*, *N*. Tứ giác *CDMN* là:

A. Tứ giác nội tiếp B. Hình bình hành C. Hình thang D. Hình thoi

7.34. Tam giác *ABC* vuông tại *A* nội tiếp trong đường tròn tâm *O*. *M*, *N* là các điểm chính giữa các cung nhỏ *AB*, *AC*. *MN* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *P*, *Q*. Tỉ số $\dfrac{AP}{AQ}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$ B. 1 C. $\dfrac{3}{2}$ D. $\sqrt{2}$

7.35. Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ các tiếp tuyến *MA*, *MB* với (O). Gọi *I* là tâm dduowffng tròn nội tiếp tam giác *AMB*, tính khoảng cách từ *I* đến đường thẳng *AB* biết $\widehat{AOB}=120^\circ$

A. $\dfrac{2R}{3}$ B. $\dfrac{2R}{5}$ C. $\dfrac{R}{2}$ D. $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

7.36. Cho đường tròn (O) có hai đường kính *AB*, *CD* vuông góc với nhau. Từ điểm *M* thuộc cung nhỏ *AC* kẻ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt *CD* tại *K*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\widehat{MKD}=\widehat{MAB}$ B. $\widehat{MKD}=\dfrac{3}{2}\widehat{MAB}$

C. $\widehat{MKD}=2\widehat{MAB}$ D. $\widehat{MKD}=\dfrac{4}{3}\widehat{MAB}$

7.37. Từ điểm *K* ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến *KA* với cát tuyến *KBC*. Tia phân giác của góc *BAC* cắt *BC* ở *E*. Biết $\widehat{AKB}=50^\circ,$ tính số đo góc *KEA*

A. 65° B. 67° C. 63° D. 70°

7.38. Cho đường tròn (O), hai đường kính *AB*, *CD* vuông góc với nhau. *M* là điểm thuộc cung *BD*, tiếp tuyến tại *M* cắt *AB* ở *E*, *CM* cắt *AB* ở *F*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\triangle MEF$ vuông B. $\triangle MEF$ cân C. $\triangle MEF$ đều D. $\widehat{FME}>90^\circ$

7.39. Tam giác *ABC* có ba góc nhọn nội tiếp trong $(O;R)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC=R.\sin A$ B. $BC=R.\cos A$ C. $BC=R\sin A\cos A$ D. $BC=2R\sin A$

7.40. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* nội tiếp trong đường tròn (O), tia phân giác của góc *B, C* cắt nhau tại *I* và cắt (O) lần lượt tại *D, E.* Biết $AE = 9cm$ thì chu vi tứ giác *ADIE* bằng

A. $27cm$ B. $36cm$ C. $32cm$ D. $38cm$

7.41. *M* là điểm thay đổi ở ngoài $(O;R)$, kẻ các tiếp tuyến *MA, MB* với (O), *H* là trực tâm tâm giác *MAB*. Diện tích tứ giác *AOBH* đạt giá trị lớn nhất bằng

A. R^2 B. $R^2\sqrt{2}$ C. $\frac{3R^2}{2}$ D. $\frac{3R^2}{4}$

7.42. *I* là điểm thuộc $(O;R)$, đường tròn tâm *I* bán kính *R* cắt $(O;R)$ tại *M* và *N*. Diện tích tứ giác *OMIN* bằng

A. R^2 B. $R^2\sqrt{2}$ C. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{R^2\sqrt{2}}{3}$

7.43. Cho *C, D* là các điểm thuộc nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB. M, N* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A, B* lên đường thẳng *CD*. Tính tỉ số $\frac{CM}{DN}$

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

7.44. *A* là điểm thuộc đường tròn tâm *O* đường kính *BA*, hạ *AH* vuông góc với *BC*, đường tròn đường kính *AH* cắt *AB, AC* lần lượt tại *M, N. I* là giao điểm của *AO, MN*. Số đo góc *AIM* là

A. $85°$ B. $90°$ C. $95°$ D. $100°$

7.45. *I* là điểm ở ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ tiếp tuyến *IP, IQ* với đường tròn. Biết $\widehat{PIQ} = 60°$, tính khoảng cách từ *O* đến đường thẳng *PQ*

A. $\frac{2R}{3}$ B. $\frac{R}{3}$ C. $\frac{R}{2}$ D. $\frac{2R}{5}$

7.46. *AB, CD* là các đường kính của đường tròn tâm *O. AC, AD* cắt tiếp tuyến tại *B* của đường tròn (O) lần lượt tại *P, Q*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. *CPQD* nội tiếp được trong đường tròn B. *CPQD* là hình thang

C. *CPQD* là hình thoi D. *CPQD* có các góc đối bằng nhau

7.47. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* nội tiếp trong đường tròn (O). *M* là điểm thuộc cung *AC*, tia *AM* cắt đường thẳng *BC* tại *D*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} < \widehat{ADC}$ B. $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} > \widehat{ADC}$

C. $\widehat{ABM} < \widehat{ACM} = \widehat{ADC}$ D. $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = \widehat{ADC}$

7.48. Cho tam giác *ABC* nhọn nội tiếp đường tròn tâm *O*, các đường cao *AM, BN* cắt (O) lần lượt tại *P, Q*. Tỉ số $\frac{CP}{CQ}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.49. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ và *O* là trung điểm *AB*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* kẻ các tia *Ax, By* vuông góc với *AB*. Đường thẳng *d* thay đổi cắt *Ax, By* lần lượt tại *P, Q* sao cho $AP.BQ = a^2$. Khoảng cách từ *O* đến đường thẳng *d* bằng

A. a B. $\frac{3a}{2}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $\frac{4a}{3}$

7.50. Cho *ABC* đều nội tiếp trong đường tròn tâm *O* bán kính bằng 18*cm*. *M* là điểm di động trên cung nhỏ *AC*. Giá trị lớn nhất của $MA + MC$ là:

A. $38cm$ B. $40cm$ C. $36cm$ D. $37cm$

7.51. Cho tam giác *ABC* đều nội tiếp trong $(O;R)$. *I* là điểm di động trên cung nhỏ *AB, P* và *Q* là hình chiếu vuông góc của *I* lên các tiếp tuyến tại *A, B*. Tìm giá trị lớn nhất của tích $IP.IQ$

A. $\frac{R^2}{4}$ B. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{R^2}{3}$ D. $\frac{2R^2}{3}$

7.52. Cho tam giác *ABC* đều nội tiếp trong đường tròn (O) bán kính bằng 32*cm*, *E* là điểm di động trên cung nhỏ *BC, AE* cắt *BC* tại *F*. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn *EF*.

A. $15cm$ B. $16cm$ C. $17cm$ D. $18cm$

7.53. Cho hình thoi *MNPQ* có $\widehat{NMQ} = 120°, E, F$ lần lượt thuộc các cạnh *PN, PQ* sao cho $\widehat{EMF} = 30°$. Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MEF*, số đo góc *MOP* bằng

A. $160°$ B. $170°$ C. $175°$ D. $180°$

7.54. Cho điểm *M* nằm trong góc *xOy, H, K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *M* lên cạnh *Ox, Oy*. Biết $\widehat{xOy} = 45°, OM = 26cm$ thì độ dài đoạn *HK* bằng

A. $13\sqrt{3}cm$ B. $18cm$ C. $13\sqrt{2}cm$ D. $15cm$

7.55. Cho tam giác *ABC* đều, *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp. *M, N* là các điểm lần lượt di động trên các cạnh *AB, AC* sao cho $AM = CN$. Tính tỉ số $\frac{AM}{AB}$ để đường tròn ngoại tiếp tam giác *OMN* có chu vi nhỏ nhất

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

7.56. Cho tam giác *ABC* đều cạnh *a, P, Q, K* là các điểm lần lượt chuyển động trên các cạnh *AB, BC, CA* sao cho $AP = BQ = CK$. Tính tỉ số $\frac{AP}{AB}$ sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *APK* là nhỏ nhất

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

7.57. *E, F* lần lượt là các điểm thuộc cạnh *PQ, PN* của hình vuông *MNPQ* sao cho $\widehat{EMF} = 45°.ME, MF$ cắt *NQ* tương ứng tại *J, I*. Khi đó tứ giác *EFIJ* là

A. Hình thang B. Hình bình hành C. Hình chữ nhật D. Tứ giác nội tiếp

7.58. Cho tam giác *MNP* vuông tại *M*, đường tròn đường kính *MN* cắt *NP* tại *K* $(K \neq N)$. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác *MNP, MNK, MPK*. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $r_1 = r_2 + r_3$ B. $r_1^2 = r_2^2 + r_3^2$ C. $r_1^3 = r_2^3 + r_3^3$ D. $r_1^2 > r_2^2 + r_3^2$

7.59. Cho tam giác *MNP* vuông tại *M*, $MN = a\sqrt{3}, MP = 2a.I$ là điểm chuyển động trên đường tròn đường kính *MN*. Từ trung điểm *E* của *PI* kẻ đường song song với *MI*, cắt *NI* tại *F*. Khi đó *F* chuyển động trên đường tròn cố định có bán kính bằng

A. a B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $a\sqrt{3}$

7.60. Cho tam giác *ABC* nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm *O*, bán kính $R = 13cm$. *D* là điểm thuộc cung nhỏ *BC*. Hạ *DM, DN* vuông góc với *AB, AC*. Độ dài của *AD* bằng bao nhiêu để *MN* đạt GTLN

A. $24cm$ B. $25cm$ C. $26cm$ D. $28cm$

7.61. Cho tam giác *ABC* đều cạnh bằng *a*, *M*, *N*, *P* là các điểm lần lượt di động trên các cạnh *AB*, *BC*, *CA* sao cho $AM = BN = CP$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *MNP* đạt GTNN bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ B. $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$ C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\dfrac{2a}{3}$

7.62. Cho tam giác *MNP* vuông tại *M* có *I* là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng *d* thay đổi qua *I* cắt các cạnh *MN*, *MP* tương ứng tại *E*, *F*. Để diện tích đạt giá trị nhỏ nhất thì $\dfrac{ME}{MF}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$ B. $\dfrac{3}{2}$ C. 1 D. $\dfrac{3}{4}$

7.63. Cho đường tròn tâm *O*, bán kính $R = 12cm$. Kẻ các đường kính *AB*, *CD*. *AC*, *AD* cắt tiếp tuyến đường tròn kẻ từ *B* tại *P*, *Q*. Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *CPQ*, khoảng cách từ *I* đến tiếp tuyến kẻ từ *B* bằng

A. $12cm$ B. $15cm$ C. $10cm$ D. $9cm$

7.64. Gọi *E* là điểm di động trên nửa đường tròn đường kính *MN*. *H* là điểm thuộc đoạn *MN*, đường thẳng *d* vuông góc với *MN* tại *H*, *EM* và *EN* cắt *d* lần lượt tại *P* và *Q*. Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MPQ*, khi đó *I* thuộc

A. Đường thẳng cố định $\parallel MN$ B. Đường thẳng cố định $\perp MN$

C. Đường tròn cố định bán kính $\dfrac{MN}{2}$ D. Đường tròn cố định bán kính $\dfrac{MN}{3}$

7.65. *M* là điểm di động trên nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính *AB*. Tiếp tuyến tại *M* cắt các tiếp tuyến tại *A* và *B* lần lượt tại *E* và *F*. Gọi *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác *EOF*, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{r}{R} < \dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{1}{3} < \dfrac{r}{R} < \dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{r}{R} \geq \dfrac{1}{2}$

7.66. Gọi *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*, *M* là trung điểm *BC*, *K* là điểm đối xứng với *I* qua *M*. Biết rằng tam giác *BIK* vuông cân tại *I*, tính số đo góc *BAC*

A. 80° B. 85° C. 90° D. 100°

HƯỚNG DẪN GIẢI

7.1. Đáp án A

7.2. Đáp án D

7.3. Đáp án D

7.4. Đáp án C

7.5. Đáp án B

7.6. Đáp án C

7.7. Đáp án C: Khẳng định (4) là sai

7.8. Đáp án D

7.9. Đáp án C

7.10. Đáp án A

7.11. Đáp án B

7.12. Đáp án D: $\widehat{PBQ} = 90° \Rightarrow PQ$ là đường kính của (O)

7.13. Đáp án C

7.14. Đáp án A

7.15. Đáp án B: Tam giác *OAB* đều cạnh *R*

7.16. Đáp án B

7.17. Đáp án C: Tam giác *EKC* cân tại *K*

7.18. Đáp án D

7.19 Đáp án A

7.20. Đáp án D: *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*

7.21. Đáp án C

7.22. Đáp án B: Tam giác *MNP* vuông tại *M* nên $2r = MN + MP - NP = 8cm$

7.23. Đáp án A

7.24. Đáp án A: Dây *AB* có độ dài nhỏ nhất khi $AB \perp OI$

7.25. Đáp án D: $IA.IB = R^2 - OI^2$

7.26. Đáp án A

7.27. Đáp án C

7.28. Đáp án D

7.29. Đáp án B: $(NA + NB)^2 \le 2\left(NA^2 + NB^2\right) = 2AB^2$

7.30. Đáp án A: *AOMN* là hình thoi

7.31. Đáp án D

7.32. Đáp án C: $\widehat{ADE} = \widehat{BAH} = \widehat{ACB} = 41°$

7.33. Đáp án A

7.34. Đáp án B: Tam giác *PAQ* vuông cân tại *A*

7.35. Đáp án C: *OM* cắt cung *AB* tại *I*, có *OAIB* là hình thoi nên $d\left(I, AB\right) = \dfrac{OI}{2} = \dfrac{R}{2}$

7.36. Đáp án C

7.37. Đáp án A: *AE* cắt $\left(O\right)$ tại *F*, có tam giác *AKE* cân tại *K*

7.38. Đáp án B: Tam giác *MEF* cân tại *E*

7.39. Đáp án D

7.40. Đáp án B: *ADIE* là hình thoi

7.41. Đáp án A: *AOBH* là hình thoi, $\max S_{AOBH} = R^2$ khi $\widehat{AOB} = 90°$

7.42. Đáp án C

7.43. Đáp án D: Hạ $OH \perp CD$ thì $HC = HD, HM = HN \Rightarrow CM = DN$

7.44. Đáp án B: $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}, \widehat{AMN} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABO} + \widehat{ACB} = 90° \Rightarrow \widehat{BAO} + \widehat{AMN} = 90°$

7.45. Đáp án C

7.46. Đáp án A

7.47. Đáp án D

7.48. Đáp án B: Gọi *H* là trực tâm tam giác *ABC* thì $CP = CH = CQ$

7.49. Đáp án A: Các tam giác *AOP*, *BQO*, *OQP* đồng dạng nên *PO* là phân giác góc *APQ*

7.50. Đáp án C: Lấy *N* thuộc đoan *BM* sao cho $MN = MA \Rightarrow \triangle AMN$ đều $\Rightarrow MA = NA$ $\Rightarrow \triangle ABN = \triangle ACM\left(c.g.c\right) \Rightarrow NB = MC \Rightarrow MA + MC = MB \le 36cm$

7.51. Đáp án A: Hạ *IH* vuông góc với *AB*. Có *AHIP* và *BHIQ* nội tiếp $\Rightarrow \triangle IPH \sim \triangle IHQ$ $\Rightarrow IP.IQ = IH^2 \le \dfrac{R^2}{4}$

7.52. Đáp án B: Kẻ đường kính *AK* cắt *BC* tại *H*. Có $AE \le AK \Leftrightarrow AF + EF \le AH + HK$.
Mà $AH \le AF \Rightarrow EF \le HK = 16cm$

7.53. Đáp án D: Tam giác *EOF* đều suy ta *OEPF* nội tiếp, mà $OE = OF \Rightarrow \widehat{EPO} = \widehat{FPO} \Rightarrow M, O, P$ thẳng hàng

7.54. Đáp án A: Gọi *I* là trung điểm *OM*, khi đó *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp *OHMK*. Có tam giác *IHK* vuông cân tại *I*

7.55. Đáp án A

7.56. Đáp án A: Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, khi đó *APOK* nội tiếp trong đường tròn bán kính $R \Rightarrow OA \le 2R.$ Do đó *R* đạt giá trị nhỏ nhất khi *OA* là đường kính

7.57. Đáp án D: $\widehat{IME} = \widehat{IQE} = 45°$ nên *MIEQ* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MIE} = \widehat{MQE} = 90° \Rightarrow \widehat{EIF} = 90°.$

Tương tự, $\widehat{EJF} = 90°$ nên nội tiếp

7.58. Đáp án B: Các tam giác vuông *MNP, KNM, KNP* đồng dạng nên $\frac{r_1}{NP} = \frac{r_2}{MN} = \frac{r_3}{MP}$

$$\Rightarrow \frac{r_1^2}{NP^2} = \frac{r_2^2}{MN^2} = \frac{r_3^2}{MP^2} = \frac{r_2^2 + r_3^2}{MN^2 + MP^2} = \frac{r_2^2 + r_3^2}{NP^2}$$

7.59. Đáp án A: *EF* cắt *MP* tại *K* cố định nên *F*i thuộc đường tròn đường kính *NK*.

7.60. Đáp án C: *AMDN* nội tiếp trong đường tròn đường kính *AD* nên tâm *I* là trung điểm *AD*. Các tam giác *MIN* tạo thành đồng dạng với nhau nên *MN* lớn nhất khi *AM* lớn nhất

7.61. Đáp án A

7.62. Đáp án C: Hạ $IH \perp MN, IK \perp MP$ thì $S_{MEF} = \frac{1}{2}\left(IH.ME + IK.MF\right) = \frac{1}{2}r\left(ME + MF\right).$

Mặt khác $\frac{1}{2}\left(ME + MF\right) \ge \sqrt{ME.MF} = \sqrt{2S}$. Do đó $S \ge 2r^2$, dấu "=" xảy ra khi $ME = MF$

7.63. Đáp án A

7.64. Đáp án B: Gọi *F* đối xứng với *N* qua *H* suy ra *FMPQ* nội tiếp nên *I* thuộc trung trực của *MF*

7.65. Đáp án C

7.66. Đáp áp C: *BICK* là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{BCI} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = 45° \Rightarrow \widehat{A} = 90°$

MỘT SỐ ĐỀ TOÁN DẠNG TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

ĐỀ SỐ 1

Câu 1.1. Cho $P = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 2}$, có bao nhiêu giá trị của *x* để $P = 0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 1.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 - 4x + 21$

A. 15 B. 16 C. 17 D. 19

Câu 1.3. Cho $a < 3$, giá trị của biểu thức $P = \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ là:

A. $3 - a$ B. $a - 3$ C. $a + 3$ D. $-a - 3$

Câu 1.4. Phương trình sau có mấy nghiệm $\dfrac{\left(x^2 - 12x + 20\right)\sqrt{x^2 + 12}}{(x-2)(x+1)} = 0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 1.5. Tìm giá trị tham số *m* để đường thẳng $d: y = 2x + m - 7$ đi qua điểm $M(2;-5)$

A. -4 B. -3 C. 0 D. -2

Câu 1.6. Có bao nhiêu giá trị tham số *m* để hai phương trình sau có nghiệm chung

$$(x-2)\left(x^2 - 2x + 31\right) = 0 (1)$$
$$x^2 - mx + m^2 - 5m + 8 = 0 (2)$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 1.7. Tìm các giá trị của *x* sao cho $\sqrt{(2x-5)^2} = 5 - 2x$

A. $x \le 5$ B. $x \ge \dfrac{5}{2}$ C. $x \ge -\dfrac{5}{2}$ D. $x \le \dfrac{5}{2}$

Câu 1.8. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2x - 5 = 0$. Tính $E = |x_1 - x_2|$

A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{6}$ D. 2

Câu 1.9. Biết rằng phương trình $x^2 - 2(m+1)x - 2m - 4 = 0$ có một nghiệm bằng -2. Tìm nghiệm còn lại của phương trình đó

A. -1 B. 0 C. 1 D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 1.10. Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{54\sqrt{83}}{\sqrt{87 + 4\sqrt{83}} + \sqrt{87 - 4\sqrt{83}}}$

A. 27 B. 9 C. 18 D. 21

Câu 1.11. Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{2}$

Câu 1.12. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-12x-\left(m^8+31\right)=0.$ Tính $S=x_1+x_2$

A. -12 B. 12 C. 6 D. 15

Câu 1.13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để hệ phương trình sau có vô số nghiệm?

$$\begin{cases} mx+3y=3 \\ 3x+my=3 \end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 1.14. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm? $\begin{cases} x^2+y^4+2=0 \\ x^2-3xy+y^5-9=0 \end{cases}$

A. 6 B. 4 C. 2 D. 0

Câu 1.15. Tìm các giá trị của *a, b* để hệ phương trình $\begin{cases} ax+3y=4 \\ x+by=-2 \end{cases}$ có nghiệm $x=-1; y=2$

A. $a=2; b=\frac{1}{2}$ B. $a=-2; b=\frac{1}{2}$

C. $a=2; b=-\frac{1}{2}$ D. $a=-2; b=-\frac{1}{2}$

Câu 1.16. Cho các đường thẳng $d: y=\left(m^3-12m^2+19m\right)x-5m+7; d': y=-mx+m^4-31.$ Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để *d* song song với d'

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 1.17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để hàm số sau nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$y=\left(m^2-4m-5\right)x+7m^6+5$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

Câu 1.18. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+4y^2-6x+4y+15$

A. 4 B. 5 C. 6 D. 3

Câu 1.19. Cho $P=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ với $n\in\mathbb{N},n\ge 2.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<P<1$ B. $P=1$ C. $1<P<2$ D. $P\ge 2$

Câu 1.20. Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $abc=1.$ Tính giá trị biểu thức

$$P=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{bc}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

Câu 1.21. Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Khi đó phương trình $x^2+(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$

A. Vô nghiệm

B. Có đúng một nghiệm

C. Có hai nghiệm trái dấu

D. Có hai nghiệm đều dương

Câu 1.22. Cho *a, b, c* là các số thực khác 0 thỏa mãn $a+b+c=0.$ Biểu thức $P=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ sau khi rút gọn bằng

A. $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$ B. $\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|$ C. $\left|\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right|$ D. $\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$

Câu 1.23. Có bao nhiêu cặp số nguyên *a, b* để biểu thức $93+62\sqrt{3}$ viết được dưới dạng $\left(a+b\sqrt{3}\right)^2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 1.24. Cho các số thực *a* và *b* thỏa mãn $a+b+ab=8.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=a^2+b^2$

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

Câu 1.25. Hình vuông có mấy trục đối xứng

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 1.26. Cho tứ giác *ABCD. M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, BC, CD, DA.* Tứ giác *MNPQ* là hình gì?

A. Hình vuông

B. Hình thoi

C. Hình chữ nhật

D. Hình bình hành

Câu 1.27. Cho điểm *I* nằm trong đường tròn tâm *O*, bán kính 5*cm*. Đường thẳng *d* thay đổi đi qua *I*, cắt đường tròn tại *M* và *N*. Độ dài đoạn thẳng *MN* đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu biết $OI = 3cm$

A. $7cm$ B. $8,5cm$ C. $8cm$ D. $9cm$

Câu 1.28. Từ điểm *M* ở ngoài đường tròn tâm *O*, kẻ các tiếp tuyến *MP, MQ* với đường tròn. Biết rằng tam giác *MPQ* đều và $PQ = 15\sqrt{3}cm$. Đường kính của đường tròn bằng bao nhiêu *cm*?

A. 30 B. $30\sqrt{3}$ C. 45 D. 25

Câu 1.29. Biểu thức $P = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ sau khi biến đổi bằng

A. $1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ B. $1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

C. $1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha$ D. $2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Câu 1.30. Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A} = 90°$, kẻ đường cao *AH*. Biết $\frac{AB}{1} = \frac{AC}{\sqrt{3}}, BH = 3cm.$ Tính độ dài *BC*

A. $10cm$ B. $11cm$ C. $12cm$ D. $15cm$

Câu 1.31. *M* là điểm di động trên nửa đường tròn tâm *O*, đường kính $AB = 2R$. Hạ *MH* vuông góc với *AB*. Diện tích tam giác *MOH* đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{R^2}{4}$ B. $\frac{R^2}{3}$ C. $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{R^2}{6}$

Câu 1.32. *C* là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính *AB*. *M* là điểm thuộc cung *BC*, hạ *CH* vuông góc với *AM*. Tính $\widehat{OHM}$

A. $125°$ B. $135°$ C. $145°$ D. $160°$

Câu 1.33. Cho tam giác *ABC* đều cạnh 2*a*. *M*, *N*, *P* là các điểm lần lượt di động trên các cạnh *AB*, *BC*, *CA*. Tính giá trị nhỏ nhất của $S = MA^2 + MB^2 + NB^2 + NC^2 + PC^2 + PA^2$

A. $4a^2$ B. $5a^2$ C. $6a^2$ D. $8a^2$

ĐỀ SỐ 2

Câu 2.1. Có bao nhiêu giá trị nguyên *x* để $P=\dfrac{5}{x-2}$ nhận giá trị nguyên

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 2.2. Biểu thức $P=\sqrt{x-3}+\sqrt{12-x}+\sqrt{x^2+1}$ có nghĩa khi

A. $x\ge 3$ B. $x\le 12$

C. $x\ge 3$ hoặc $x\le -12$ D. $3\le x\le 12$

Câu 2.3. Rút gọn biểu thức $M=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. 2

Câu 2.4. Phương trình $x^2-3x+m=0$ có một nghiệm là $x=1,$ nghiệm còn lại là

A. -3 B. -2 C. 2 D. $-m$

Câu 2.5. Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để đường thẳng $d:y=13x+m^2-8m+20$ đi qua điểm $M\left(0;5\right)$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 2.6. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d.$ Nếu $f\left(0\right)=3, f\left(2\right)=5$ thì $2a+b$ có giá trị là

A. 2 B. 0 C. $\dfrac{3-c}{4}$ D. $\dfrac{1-c}{2}$

Câu 2.7. Cho $x<11,$ rút gọn biểu thức $P=\sqrt{121-22x+x^2}+x-11$

A. $2\left(x-11\right)$ B. $2\left(11-x\right)$ C. 22 D. 0

Câu 2.8. Phương trình sau có mấy nghiệm? $x^4+321x^2-322=0$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 2.9. Tìm giá trị của tham số *m* để phương trình $x^2-2x+3m-1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+_2^2=10$

A. $-\dfrac{1}{3}$ B. $-\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{1}{3}$ D. $\dfrac{4}{3}$

Câu 2.10. Tìm giá trị của tham số *m* để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}x+my=11\\5x-3y=m+1\end{cases}$

A. $m \neq \frac{3}{5}$ B. $m \neq -\frac{5}{3}$ C. $m \neq -\frac{3}{5}$ D. $m \neq -\frac{4}{5}$

Câu 2.11. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x^2 = 3y \\ y^2 = 3x \end{cases}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 2.12. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x^2 + y^6 + 5 = 0 \\ x^2 y + xy^2 - 7x = 3 \end{cases}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 2.13. Cho hàm số $D(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ hữu tỷ} \\ 0 \text{ nếu } x \text{ vô tỷ} \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không đổi trên $\mathbb{R}$

D. Các khẳng định A, B, C đều sai

Câu 2.14. Phương trình của đường thẳng nào dưới đây đi qua các điểm $M(4;0), N(0;-3)$

A. $y = \frac{3}{4}x + 4$

B. $y = \frac{3}{4}x - 3$

C. $y = -\frac{3}{4} - 3$

D. $y = \frac{4}{3}x - 3$

Câu 2.15. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \begin{cases} x^2 + 7, x \leq 0 \\ 3x + 8, x > 0 \end{cases}$

A. 0 B. 7 C. 8 D. 6

Câu 2.16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

Câu 2.17. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{16}{x^2 - 6x + 17}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

Câu 2.18. Kí hiệu $x \therefore y$ là tổng các số tự nhiên nằm trong khoảng $(x;y)$. Ví dụ $5 \therefore 9 = 6 + 7 + 8$. Tính $(3 \therefore 2171) - (5 \therefore 2169)$

A. 4346 B. 4347 C. 4348 D. 4350

Câu 2.19. $x_0 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ là nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $x^2 - 4x = 0$ B. $x^2 - 6x + 5 = 0$

C. $x^2 - 2x = 0$ D. $x^2 + 3x = 0$

Câu 2.20. Gọi *P* là giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{2x}{x^2+1}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $1 \le P < 2$ B. $-1 \le P < 1$

C. $1 < P \le 15$ D. $P < 1$

Câu 2.21. Cho *a, b, c* là các số thực thỏa mãn điều kiện $4a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4ab + 2bc - 4ac - 2b + 2c + 2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = (a+1)^{30} + (b-2)^{100} + (c+1)^{30}$

A. 1 B. 2 C. 30 D. 64

Câu 2.22. Phương trình $x^3 + y^3 = x + y + 16$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 2.23. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)\left(x^4 + 1 + y^2\right) \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 2.24. Phương trình $x^4 + x + 2 = 0$ có mấy nghiệm

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 2.25. Tổng các góc trong của ngũ giác lồi bằng bao nhiêu độ?

A. $380°$ B. $420°$ C. $524°$ D. $540°$

Câu 2.26. *M* là điểm thuộc cạnh *CD* của hình bình hành *ABCD*. Tính tỉ số diện tích của tam giác *MAB* và hình bình hành *ABCD*

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 2.27. Tính $P = \sin^2 2° + \sin^2 4° + ... + \sin^2 88°$

A. 16 B. 18 C. 20 D. 22

Câu 2.28. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, gọi *S* là diện tích tam giác *ABC*, khi đó

A. $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$ B. $S = \frac{1}{2}AB.AC.\cos A$

C. $S = AB.AC.\sin A$ D. $S = \frac{1}{2}(AB + AC).\sin A$

Câu 2.29. Cho tam giác *ABC* nội tiếp trong đường tròn tâm *O*, hạ *OH*, *OK*, *OM* lần lượt vuông góc với các cạnh *CA, BC, AB*. Biết $OH < OK < OM$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$ B. $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$

C. $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ D. $\widehat{B} < \widehat{C} < \widehat{A}$

Câu 2.30. Từ điểm *M* nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ tiếp tuyến *MA, MB* với đường tròn, *C* là điểm đối xứng với *O* qua *B*. Biết $\widehat{AMO} = 31°$, tính $\widehat{AMC}$

A. $89°$ B. $90°$ C. $92°$ D. $93°$

Câu 2.31. Cho tam giác đều *ABC* cạnh *a*. *M, N, P* là các điểm lần lượt di động trên các cạnh *AB, BC, CA* sao cho $AM = BN = CP.$ Diện tích tam giác *MNP* đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{12}$ B. $\frac{\sqrt{3}a^2}{15}$ C. $\frac{\sqrt{2}a^2}{16}$ D. $\frac{\sqrt{3}a^2}{16}$

Câu 2.32. *M* là điểm di động trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R = 36cm,$ hạ *MH* vuông góc với *AB*, gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác *AMB, AMH, BMH*. Giá trị lớn nhất của $r_1 + r_2 + r_3$ là

A. $16cm$ B. $18cm$ C. $19cm$ D. $20cm$

Câu 2.33. Cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*. *I* là điểm nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{BAI} = 15°$. Tính $IC + ID$

A. $2a$ B. $\frac{3a}{2}$ C. $\frac{5a}{2}$ D. $\frac{7a}{3}$

ĐỀ SỐ 3

Câu 3.1. Phân tích đa thức $f(x)=x^2+2x-15$ thành nhân tử, ta được

A. $f(x)=(x+3)(x-5)$ B. $f(x)=(x-3)(x+5)$

C. $f(x)=(x-3)(x-5)$ D. $f(x)=(x+3)(x+5)$

Câu 3.2. Phương trình $\dfrac{x^2-7x+12}{(x-3)(x^2+9)}=0$ có mấy nghiệm?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 3.3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^4-2x^2+12$

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

Câu 3.4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{13}{x-7}$ khi *x* là số nguyên

A. -15 B. -13 C. -12 D. -11

Câu 3.5. Cho $M=\left|\sqrt{4-2\sqrt{3}}-1\right|$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $M=2-\sqrt{3}$ B. $M=\sqrt{3}-2$ C. $M=1-\sqrt{3}$ D. $M=2\sqrt{3}-1$

Câu 3.6. Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để đường thẳng $d: y=x+m^2-3m-30$ đi qua điểm $I(1;-1)$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 3.7. Tập các giá trị của *a* để biểu thức sau có nghĩa $P=\sqrt{a-\sqrt{a^2-4a+4}}$

A. $a\le 1$ B. $0<a<2$ C. $-1\le a\le 1$ D. $a\ge 1$

Câu 3.8. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên $\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x$

A. 1 B. 2 C. 4 D. Vô số

Câu 3.9. Cho $0<a<1, M=\sqrt{17}+\sqrt{a+1}, N=\sqrt{25}-\sqrt{a}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $N<5<M$ B. $N<M<5$ C. $5\le M\le N$ D. $5<N<M$

Câu 3.10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của *x* để biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3.11. Phương trình $(x^2-16)\sqrt{x-3}=0$ có mấy nghiệm?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3.12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình sau vô nghiệm

$$x^2 - 2mx - 6m + 7 = 0$$

A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

Câu 3.13. Có bao nhiêu giá trị của tham số *k* để hệ phương trình có nghiệm?

$$\begin{cases}(x-2)(x-5)=0(1)\\(x-k)(x-k+1)=0(2)\end{cases}$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3.14. Tìm giá trị của tham số *m* để hệ phương trình sau vô nghiệm $\begin{cases}(m-1)x+5y=4\\7x+5y=3\end{cases}$

A. $m=9$ B. $m=8$ C. $m=7$ D. $m=6$

Câu 3.15. Cho đường thẳng $d: y = 2x - 6.$ Đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng *d* qua trục *Ox* có phương trình là:

A. $y=-2x+6$ B. $y=2x+6$ C. $-2x-6$ D. $\frac{1}{2}x-6$

Câu 3.16. Gọi *M, N* là các giao điểm của parabol $y = x^2$ với đường thẳng $d: y = 4.$ Diện tích tam giác *OMN* bằng bao nhiêu đơn vị diện tích

A. 6 B. 8 C. 10 D. 16

Câu 3.17. Cho hàm số $y=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$ Khẳng định nào dưới đây là SAI?

A. Hàm số được xác định trên $\mathbb{R}$

B. Tập giá trị của hàm số $\{1;0;1\}$

C. Nếu $x_1 < x_2$ thì $y(x_1) \le y(x_2)$

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 3.18. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $2^{500} < 3^{300} < 5^{200}$

B. $2^{500} < 5^{200} < 3^{300}$

C. $5^{200} < 3^{300} < 2^{500}$

D. $5^{200} < 2^{500} < 3^{300}$

Câu 3.19. Phép đổi nào dưới đây là SAI?

A. $3x^2 + 5x - 2 > 3x^2 - 2x \Leftrightarrow 7x > 2$

B. $\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2} > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 > x^2 + 2$

C. $\dfrac{\left(x^2+7\right)\left(3x-9\right)}{x^2+7} \ge 2 \Leftrightarrow 3x-9 \ge 2$

D. $x^2\left(2x-7\right) \ge x^2\left(x+3\right) \Leftrightarrow 2x-7 \ge x+3$

Câu 3.20. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{x+22}+\sqrt{x-1}=5.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $5 < x_0 \le 6$ B. $-5 \le x_0 \le 4$ C. $5 \le x_0 < 6$ D. $x_0 \ge 6$

Câu 3.21. Cho a,b,c,d là các số không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=2.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+cd$

Câu 3.21. Cho a,b,c,d là các số không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=2.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+cd$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 1 C. $\dfrac{3}{2}$ D. 2

Câu 3.22. Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt[3]{3+\sqrt{\dfrac{368}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{\dfrac{368}{27}}}$

A. 1 B. $\dfrac{3}{2}$ C. 2 D. $\dfrac{5}{2}$

Câu 3.23. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm? $\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{y-1}=2\\ \sqrt{y+3}+\sqrt{z-1}=2\\ \sqrt{z+3}+\sqrt{x-1}=2\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3.24. Khi tham số m thay đổi, khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng $d_m: y=\left(m-1\right)x+3m+1$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 3.25. Khẳng định nào dưới đây SAI?

A. Hình thang có hai góc ở đáy bằng nhau là hình thang cân

B. Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân

C. Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình thang cân

D. Hình thang có hai cạnh đáy bằng là hình bình hành

Câu 3.26. Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}.$ Tính $\sin\alpha\cos\alpha$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{5}$

Câu 3.27. Tính giá trị của biểu thức $\frac{\tan^2\alpha - \sin^2\alpha}{\tan^2\alpha \sin^2\alpha}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. $\frac{3}{2}$

Câu 3.28. Cho đường tròn tâm *O* bán kính *R*. Khẳng định nào dưới đây là SAI

A. Hai dây bằng nhai thì cách đều tâm

B. Dây nào lớn hơn sẽ gần tâm hơn

C. Đường kính vuông góc với dây thì chia dây làm hai phần bằng nhau

D. Đường kính đi qua trung điểm của một dây thì vuông góc với dây

Câu 3.29. Cho đường tròn tâm *O* bán kính 5*cm*. *M* là điểm thay đổi ở ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến *MA*, *MB* với đường tròn sao cho $\widehat{AMB} = 90°$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

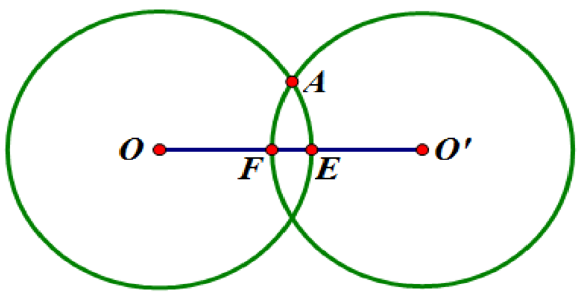
A. Điểm *M* thuộc một đường thẳng cố định

B. Điểm *M* thuộc đường tròn tâm *O* bán kính $5\sqrt{2}cm$

C. Điểm *M* thuộc đường tròn bán kính $10\sqrt{2}cm$

D. Điểm *M* thuộc đường tròn tâm *O*, bán kính 10*cm*

Câu 3.30. Hai đường tròn $(O),(O')$ có bán kính là 13 và 10 cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A* và *B*. Đoạn thẳng OO' cắt $(O),(O')$ lần lượt tại *E* và *F* (hình vẽ). Tính độ dài đoạn OO' biết $EF = 3$



A. 16 B. 18 C. 19 D. 20

Câu 3.31. Cho hình chữ nhật *ABCD*, kẻ *BH* vuông góc với *AC*. Gọi *K*, *M* lần lượt là trung điểm của *CD*, *AH*. Biết $BC = 8, CD = 10$. Tính $BM^2 + MK^2$

A. 100 B. 1121 C. 89 D. 95

Câu 3.32. Cho $\tan\alpha = \sqrt{2} + 1$. Tính $P = \tan^8\alpha + \cot^8\alpha$

A. 1152 B. 1154 C. 1156 D. 1296

Câu 3.33. Cho tam giác *ABC* đều cạnh *a*. *M, N, P* là các điểm lần lượt di động trên các cạnh *AB, BC, CA*. Tìm giá trị lớn nhất của $S = MA^2 + MB^2 + NB^2 + NC^2 + PA^2 + PC^2$

A. $2a^2$ B. $\frac{5}{2}a^2$ C. $3a^2$ D. $4a^2$

ĐỀ SỐ 4

Câu 4.1. Tìm giá trị của *x* để biểu thức sau có nghĩa $P = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

A. $x \ge 2$　　B. $x \ne 1$　　C. $\begin{cases} x \ge -2 \\ x \ne 1 \end{cases}$　　D. $-1 \le x < 2$

Câu 4.2. Khi *x* là số nguyên, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{3x-4}{x-3}$

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

Câu 4.3. Phép biến đổi nào dưới đây là SAI

A. $\sqrt{a^2-2a+1} = |a-1|$　　B. $\sqrt{(a-1)(a-2)} = \sqrt{a-1}.\sqrt{a-2}$

C. $\sqrt{a^4} = a^2$　　D. $\sqrt{a^2(b^2+1)} = |a|\sqrt{b^2+1}$

Câu 4.4. Đặt $M = \sqrt{26} + \sqrt{9+a}\,(0 \le a \le 1), N = \sqrt{63}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $8 < M < N$　　B. $M < 8 < N$

C. $N < M < 8$　　D. $N < 8 < M$

Câu 4.5. Hàm số $y = (m^2-8m-9)x+21$ nghịch biến khi?

A. $-1 < m < 9$　　B. $m < -1$ hoặc $m > 9$

C. $-9 < m < 1$　　D. $m = -1$ hoặc $m = 9$

Câu 4.6. Cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+4} = x-2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình vô nghiệm

B. Phương trình chỉ có hữu hạn nghiệm

C. Phương trình có vô số nghiệm

D. Mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của phương trình

Câu 4.7. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

A. $P = \sqrt{n}+1$　　B. $P = \sqrt{n}-1$　　C. $P = \sqrt{n-1}$　　D. $P = \sqrt{n}$

Câu 4.8. Phương trình nào dưới đây có nghiệm là 2 và $m+1$

A. $x^2-(m-3)x+2m-2=0$　　B. $x^2+(m+3)x-2m-2=0$

C. $x^2-(m+3)x+m+1=0$　　D. $x^2-(m+3)x+2m+2=0$

Câu 4.9. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-\left(m^2-2m+6\right)x-m^4-7=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=x_1+x_2$

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 4.10. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases}|x|+1=y\\3y-4=x\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

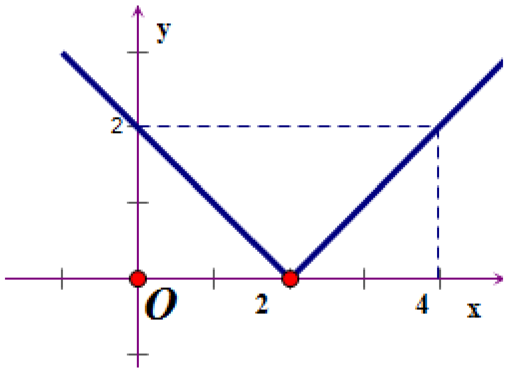
Câu 4.11. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên $\begin{cases}2x+3y=-2\\3x-2y=-3\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 4.12. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=\left(2m^3-7m^2+1\right)x+m^2-8m+10$ đi qua điểm $M\left(0;-5\right)$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4.13. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ



A. $y=|x+2|$ B. $y=|x-2|$ C. $y=-|x-2|$ D. $y=-|x+2|$

Câu 4.14. Cho các hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Trong các khẳng định dưới đây có mấy khẳng định đúng?

I. $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

II. $y=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

III. $y=2f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

IV. $y=f\left(x\right).g\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4.15. Đường thẳng *d* có phương trình $y=2x-1$. Đường thẳng d' đối xứng với *d* qua trục *Oy* có phương trình là

A. $y=-2x+1$ B. $y=-\frac{1}{2}x-1$ C. $y=-2x-1$ D. $y=-2x+1$

Câu 4.16. Cho a,b,c,d là các số thực bất kì. Phép biến đổi nào dưới đây là đúng?

A. Nếu $a>b,c>d$ thì $a+c>b+d$ B. Nếu $a>b,c>d$ thì $a-c>b-d$

C. Nếu $a>b,c>d$ thì $a.c>b.d$ D. Nếu $a>b$ thì $ac>bc$

Câu 4.17. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x^2-2x+17$ với $x\ge 3$.

A. 16 B. 18 C. 20 D. 21

Câu 4.18. Cho a,b là các số thực thay đổi thỏa mãn $a+b=2$. Giá trị nhỏ nhất của a^2+b^2 bằng

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4.19. Cho a,b là các số không âm thỏa mãn $a+b=12, ab$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 18 B. 30 C. 36 D. 60

Câu 4.20. a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$. Khẳng định nào đúng?

A. $0<P<1$ B. $1<P<2$ C. $P=2$ D. $P>2$

Câu 4.21. a và b là các số thực thỏa mãn $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Tính $S=a+b$

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Câu 4.22. Rút gọn biểu thức $M=\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

Câu 4.23. Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $\begin{cases} x+y+z=3(1) \\ xy+yz+xz=3(2) \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4.24. Phương trình $4x^2-2x+\frac{1}{2x}-1=0$ có mấy nghiệm dương?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4.25. Một ngũ giác lồi có bao nhiêu đường chéo

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 4.26. Nếu độ dài mỗi cạnh có một tam giác tăng lên gấp 4 lần thì diện tích tam giác tăng lên bao nhiêu lần?

A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

Câu 4.27. Rút gọn biểu thức $S=\sqrt{\sin^4\alpha+4\cos^4\alpha}+\sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^4\alpha}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 4.28. Cho tam giác *ABC* nhọn, kẻ các đường cao *AD*, *BE*, *CF*. Tính tỉ số

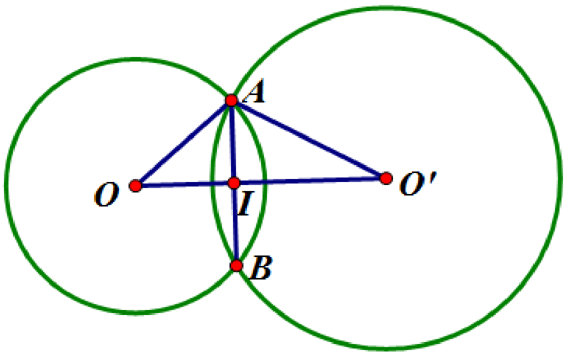
$$P=\frac{AB.AC.BC.\sin A.\sin B.\sin C}{AD.BE.CF}$$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 4.29. Cho nửa đường tròn tâm *O*, đường kính $AB=24, C$ là điểm thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại *C* cắt các tiếp tuyến tại *A* và *B* lần lượt ở *E* và *F*. Tính $AE.BF$

A. 136 B. 142 C. 145 D. 144

Câu 4.30. Hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại *A* và *B* (hình vẽ). Tính độ dài OO' biết $OA=13cm,\ O'A=15cm,\ AB=24cm$



A. $12cm$ B. $14cm$ C. $15cm$ D. $16cm$

Câu 4.31. Cho đường tròn tâm *O* bán kính *R*. Đường thẳng *d* thay đổi cắt $(O;R)$ tại *A* và *B*. Diện tích tam giác *AOB* đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{R^2}{3}$ B. $\frac{R^2}{2}$ C. $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{R^2}{4}$

Câu 4.32. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, các đường cao *AK*, *BM*, *CN* cắt nhau tại *H*. *E*, *F* lần lượt là trung điểm của *AH* và *BC*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Tứ giác *MENF* nội tiếp được trong đường tròn

B. Tứ giác *MENF* là hình bình hành

C. Tứ giác *MENF* là hình thoi

D. Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật

Câu 4.33. M là điểm dị động trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Tìm GTLN của $MA + MB$

A. $3R$ B. $R\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}R$ D. $2\sqrt{2}R$

ĐỀ SỐ 5

Câu 5.1. $x = 2$ không thuộc tập xác định của biểu thức nào dưới đây?

A. $\sqrt{4x-7}$ B. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$ C. $\dfrac{5x}{x^2+x-6}$ D. $\dfrac{x^2+1}{x+2}$

Câu 5.2. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $(a-1)\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}} = \sqrt{(a-1)(a+1)}$ B. $\sqrt{(a-1)^2} = a-1$

C. $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ D. $(x^2+1)\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}} = \sqrt{x^4-1}$

Câu 5.3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của *x* để $P = \dfrac{6x+7}{2x-1}$ nhận giá trị nguyên?

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 5.4. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2+y^2-2x+4y+10$ bằng bao nhiêu?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 5.5. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 2x^2$ B. $y-3x+7$

C. $y = (m+3)x+5$ D. $y = (m^2-2m+4)x-21$

Câu 5.6. Biểu thức nào sau đây được xác định với mọi giá trị của *x*

A. $\sqrt{x^2-5x+6}$ B. $\sqrt{x^2-4x+5}$

C. $\dfrac{1}{x^2-5x+4}$ D. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x^2+3)}{x-1}}$

Câu 5.7. Cho biểu thức $P = \dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{100^2}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $0 < P < 1$ B. $P = 1$ C. $1 < P < 2$ D. $P \geq 2$

Câu 5.8. Tìm tất cả các giá trị của *x* thỏa mãn $\sqrt{x^2-6x+9} = 3-x$

A. $x > 3$ B. $x \geq 3$ C. $x = 3$ D. $x \leq 3$

Câu 5.9. Với *n* là số nguyên dương, kí hiệu $n! = 1.2.3...n.$ Rút gọn biểu thức $\dfrac{(n!)^3}{[(n+1)!]^3}$

A. $\frac{1}{n+1}$

B. $\frac{1}{n^2+2n+1}$

C. $\frac{1}{n^3+3n^2+3n+1}$

D. $\frac{n}{n+1}$

Câu 5.10. Phân tích $P=x^5+x^4+1$ thành nhân tử ta được

A. $P=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3+x+1\right)$

B. $P=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3-x+1\right)$

C. $P=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)$

D. $P=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+x+1\right)$

Câu 5.11. Rút gọn biểu thức $M=\sqrt{17-\sqrt{33}}.\sqrt{17+\sqrt{33}}$

A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

Câu 5.12. Cho phương trình $x^2+3x-\left(m^4+217\right)=0\left(1\right)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\left(1\right)$ vô nghiệm

B. $\left(1\right)$ có hai nghiệm trái dấu

C. $\left(1\right)$ có hai nghiệm đều dương

D. $\left(1\right)$ có hai nghiệm đều âm

Câu 5.13. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-\left(m^2+7\right)x-\left(m^4+341\right)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=x_1+x_2$

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 5.14. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$. Khẳng định nào dưới đây là SAI?

A. Nếu $a+b+c=0$ thì $x=1$ là một nghiệm của phương trình

B. Nếu $4a+2b+c=0$ thì $x=2$ là một nghiệm của phương trình

C. Nếu $-a+b-c=0$ thì $x=-1$ là một nghiệm của phương trình

D. Nếu $4a-2b-c=0$ thì $x=-2$ là một nghiệm của phương trình

Câu 5.15. Cho các phương trình $x^2+ax+b=0\left(1\right); x^2+bx+a=0\left(2\right)$. Khẳng định nào sau đây là luôn đúng với mọi số thực *a,b* thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$

A. (1) và (2) đều vô nghiệm

B. Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm

C. (1) có nghiệm, (2) vô nghiệm

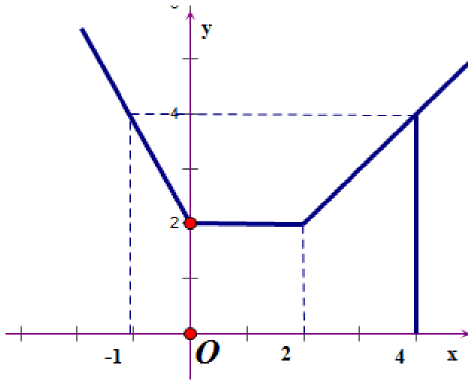
D. (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm

Câu 5.16. Tìm giá trị của tham số *m* để các hệ phương trình sau có cùng tập nghiệm

$$(I)\begin{cases}3x+2y=5\\x+y=1\end{cases} \text{ và } (II)\begin{cases}x-4y=11\\2x+my=0\end{cases}$$

A. $m=2$ B. $m=-2$ C. $m=-3$ D. $m=3$

Câu 5.17. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



A. $y=-|x|+|x+2|$

B. $y=|x|+|x-2|$

C. $y=|x|-|x-2|$

D. $y=|x|+|x+2|$

Câu 5.18. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng d,d' song song

$d: y=(7m-1)x+m-3; d': y=\left(m^2+9\right)x-m^4+1$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 5.19. Cho a,b,c,d là các số dương thay đổi. Đặt $x=2a+b-2\sqrt{cd}, y=2c+d-2\sqrt{ab}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $x<0; y<0$

B. $x>0; y>0$

C. x và y có ít nhất một số dương

D. $x<0<y$

Câu 5.20. Cho biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{439}+\sqrt{440}}$. Khẳng định nào đúng?

A. $P<9$ B. $P=10$ C. $P>10$ D. $0\le P\le 10$

Câu 5.21. m là tham số thay đổi, nghiệm lớn nhất phương trình sau có thể đạt được là bao nhiêu?

$$x^4+2x^2+2(m+1)x+m^2+4m+4=0$$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

Câu 5.22. Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm dương? $\begin{cases} x+y=z^2 \\ y+z=x^2 \\ x+z=y^2 \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 5.23. Cho đường thẳng $d: y=\left(3m+2\right)x+m^2-6m+15.$ Gọi $M\left(0;b\right)$ là các điểm trên trục *Oy* mà đường thẳng *d* không thể đi qua. Khi đó

A. $b<6$ B. $b\geq 6$ C. $-6<b<8$ D. $b\geq -6$

Câu 5.24. Cho *a* và *b* là các số tự nhiên thay đổi thỏa mãn $a+b=21.$ Tìm giá trị lớn nhất của $P=ab$

A. 108 B. 110 C. 121 D. 132

Câu 5.25. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 76*m*, chiều dài hơn chiều rộng 2*m* thì diện tích hình chữ nhật bằng bao nhiêu?

A. $357m^2$ B. $366m^2$ C. $360m^2$ D. $372m^2$

Câu 5.26. Từ trọng tâm G tam giác *ABC*, kẻ đường song song với *AB* cắt *BC* tại *D*. Tính tỉ số $\dfrac{BD}{BC}$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{2}{5}$ D. $\dfrac{1}{3}$

Câu 5.27. Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A}=90^\circ$, kẻ đường cao *AH*. Tính độ dài đoạn *CH* biết $AH=6cm, \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{8}$

A. $12cm$ B. $14cm$ C. $16cm$ D. $20cm$

Câu 5.28. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=3\sin\alpha+4\cos\alpha$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 5.29. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hình thang nội tiếp được trong đường tròn

B. Hình thang cân nội tiếp được trong đường tròn

C. Hình bình hành nội tiếp được trong đường tròn

D. Hình thoi nội tiếp được trong đường tròn

Câu 5.30. Cho *AB, AC* là hai dây của đường tròn tâm *O* sao cho $\widehat{BAC} = 60°.M, N$ lần lượt là các điểm chính giữa của các cung nhỏ *AB, AC*. Đường thẳng *MN* cắt *AB, AC* lần lượt tại *E* và *F*. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\triangle AEF$ đều

B. $\triangle AEF$ vuông cân

C. $\triangle AEF$ có một góc bằng $30°$

D. $\triangle AEF$ có một góc lớn hơn $60°$

Câu 5.31. Tam giác *ABC* đều ngoại tiếp đường tròn bán kính 1*cm.* Diện tích tam giác *ABC* bằng bao nhiêu cm^2?

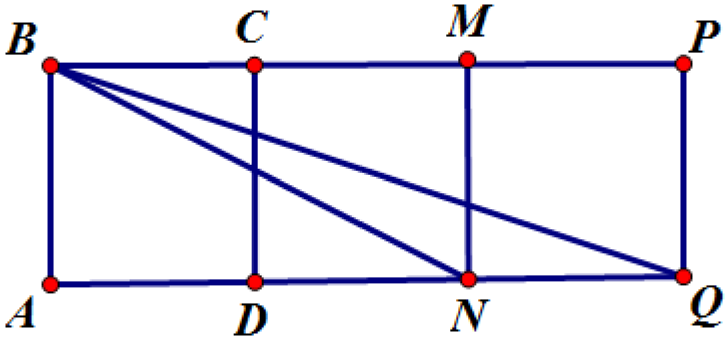
A. $2\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{2}$

C. 3

D. $3\sqrt{3}$

Câu 5.32. Cho ba hình vuông xếp cạnh nhau (hình vẽ). Tính $\widehat{ANB} + \widehat{AQB}$



A. $40°$

B. $45°$

C. $50°$

D. $60°$

Câu 5.33. Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn tâm *O*. *N,M,P* là các điểm di động trên các cạnh *AB,BC,CA* sao cho $BM = BN, CM = CP$. Gọi *R* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ONP*. Tỉ số $\frac{OA}{R}$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2}{3}$

B. 1

C. 2

D. $\frac{5}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ SỐ 1

Câu 1.1. $P=0$ khi $x^4-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Đáp án C

Câu 1.2. $M=\left(x^2-4x+4\right)+17=\left(x-2\right)^2+17\geq 17 \Rightarrow \min M=17$ khi $x=2$. Đáp án C

Câu 1.3. $P=\sqrt{\left(a-3\right)^2}=\left|a-3\right|$ do $a<3$ nên $P=3-a$. Đáp án A

Câu 1.4. Phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2-12x+20=0 \\ \left(x-2\right)\left(x+1\right)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x=10$. Đáp án B.

Câu 1.5. Đường thẳng d đi qua điểm M khi $-5=4+m-7 \Leftrightarrow m=-2$. Đáp án D

Câu 1.6. Phương trình (1) có nghiệm $x=2$, thay $x=2$ vào (2) ta được $m^2-7m+12=0 \Rightarrow m=3; m=4$

Đáp án B

Câu 1.7. Từ giả thiết ta có $\left|2x-5\right|=5-2x \Rightarrow 2x-5\leq 0 \Rightarrow x\leq \frac{5}{2}$. Đáp án D

Câu 1.8.

- *Cách 1:* $\Delta'=6$ nên phương trình có nghiệm $x=-1\pm\sqrt{6} \Rightarrow E=2\sqrt{6}$
- *Cách 2:* $E^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=4+20=24 \Rightarrow E=2\sqrt{6}$ với $x_1+x_2=-1, x_1x_2=-5$

Câu 1.9.

- *Cách 1:* Thay $x=-2$ vào phương trình đã cho ta được $m=-2$. Khi đó phương trình trở thành $x^2+2x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$ Đáp án B.
- *Cách 2:* Gọi a là nghiệm còn lại của phương trình đã cho. Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} a\left(-2\right)=-2m-4 \\ a-2=2\left(m+1\right) \end{cases}$ Giải hệ phương trình trên ta được $a=0, m=-2$

Câu 1.10. $M=\dfrac{54\sqrt{83}}{\sqrt{\left(\sqrt{83}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{83}-2\right)^2}}=\dfrac{54\sqrt{83}}{\sqrt{83}+2+\sqrt{83}-2}=\dfrac{54\sqrt{83}}{2\sqrt{83}}=27$. Đáp án A

Câu 1.11.

- *Cách 1:*

$\sqrt{2}P=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1=-2$

$\Rightarrow P=-\sqrt{2}$.

Đáp án D

- *Cách 2:* $P^2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=2$

Mặt khác, do $P<0\Rightarrow P=-\sqrt{2}$

Câu 1.12. Do 1 và $-\left(m^8+31\right)$ trái dấu nên phương trình có hai nghiệm trái dấu. $S=x_1+x_2=12$.

Đáp án B

Câu 1.13. $m=3$ thì hệ có vô số nghiệm. Đáp án A

Câu 1.14. Do $x^4+y^4+2=0$ là vô lí nên hệ đã cho vô nghiệm. Đáp án D

Câu 1.15. Thay $x=-1, y=2$ vào hệ phương trình ta được $\begin{cases}-a+6=4\\-1+2b=-2\end{cases}\Rightarrow a=2, b=-\dfrac{1}{2}$.

Đáp án C

Câu 1.16. Ta cần có $m^3-12m^2+19m=-m$ và $-5m+7\neq m^4-31\Rightarrow m\in\left\{0;2;10\right\}$. Đáp án C

Câu 1.17. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $m^2-4m-5<0\Leftrightarrow -1<m<5\Rightarrow m\in\left\{0;1;2;3;4\right\}$.

Đáp án D

Câu 1.18. $P=\left(x^2-6x+9\right)+\left(4y^2+4y+1\right)+5=\left(x-3\right)^2+\left(2y+1\right)^2+5\Rightarrow \min P=5$ khi $x=3, y=-\dfrac{1}{2}$. Đáp án B

Câu 1.19.

$$P<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{\left(n-1\right)n}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\Rightarrow o<P<1-\frac{1}{n}<1.$$

Đáp án A

Câu 1.20. $\begin{cases}\dfrac{a}{ab+a+1}=\dfrac{a}{ab+a+1}\\\dfrac{bc}{bc+b+1}=\dfrac{abc}{abc+ab+a}=\dfrac{1}{1+ab+a}\\\dfrac{1}{1+ac+c}=\dfrac{ab}{ab+ac.ab+abc}=\dfrac{ab}{ab+a+1}\end{cases}$ Cộng từng vế ta được $P=1$. Đáp án B

Câu 1.21. $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca)$. Ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$, tương tự $b^2 < ab + bc,\ c^2 < ac + bc$. Do đó $\Delta < 0$. Đáp án A

Câu 1.22. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{abc}(a+b+c)$

$= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \Rightarrow P = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$. Đáp án D

Câu 1.23. Giả sử $93 + 62\sqrt{3} = \left(a + b\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3b^2 = 93 \\ 2ab = 62 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai ta có $ab = 31 \Rightarrow a, b$ đều lẻ, khi đó $a^2 + 3b^2$ là số chẵn, trái với phương trình thứ nhất. Vậy không tồn tại các số nguyên *a,b* thỏa mãn đề bài. Đáp án A

Câu 1.24. $\begin{cases} (a-2)^2 \ge 0 \\ (b-2)^2 \ge 0 \\ 2(a-b)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 4 \ge 4a \\ b^2 + 4 \ge 4b \\ 2a^2 + 2b^2 \ge 4ab \end{cases} \Rightarrow 3P \ge 4(a + b + ab) - 8 = 24 \Rightarrow P = 8$ khi

$a = b = 2$

Đáp án C

Câu 1.25. Đáp án D

Câu 1.26. Dễ dàng chứng minh *MNPQ* là hình bình hành. Tứ giác *ABCD* không có thêm điều kiện nào khác thì *MNPQ* không thể là hình chữ nhật, hình thoi hoặc hình vuông. Đáp án D

Câu 1.27. Hạ $OH \perp d \Rightarrow OH \le OI, OH$ đạt giá trị lớn nhất bằng *OI* khi $d \perp OI$. Khi đó $IN = 4cm$ nên $MN = 8cm$. Đáp án C

Câu 1.28. Xét tam giác $OPM, OP = MP\tan 30^\circ = 15(cm)$. Do đó đường kính của đường tròn bằng 30*cm*. Đáp án A

Câu 1.29.

$P = \left(\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. Đáp án B

Câu 1.30. Ta có $AB^2 = BH.BC, AC^2 = CH.BC \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{BH}{CH} = \frac{3}{CH}$

$\Rightarrow CH = 9cm,\ BC = 12cm.$ Đáp án C

Câu 1.31. Đặt $OH = x(0 < x < R), MH = \sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có $S_{\triangle OMH}=\dfrac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2\left(R^2-x^2\right)}\le\dfrac{x^2+R^2-x^2}{4}=\dfrac{R^2}{4}$

Diện tích tam giác *MOH* đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{R^2}{4}$ khi *MOH* là tam giác vuông cân

Đáp án A

Câu 1.32. Dễ dàng chứng minh tam giác *CHM* vuông cân tại *H*, do đó $HM=HC$

Suy ra $\triangle OHM=\triangle OHC\left(c.c.c\right)$. Vậy $\widehat{OHM}=\widehat{OHC}=\dfrac{360^\circ-90^\circ}{2}=135^\circ.$ Đáp án B

Câu 1.33. Ta có $4a^2=AB^2=\left(MA+MB\right)^2\le2\left(MA^2+MB^2\right)$.

Tương tự, $4a^2\le2\left(NB^2+NC^2\right)$, $4a^2\le2\left(PA^2+PB^2\right)\Rightarrow S\ge6a^2\Rightarrow\min S=6a^2$ khi *M,N,P* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB,BC,CA*.

Đáp án C

ĐỀ SỐ 2

Câu 2.1. *P* nhận giá trị nguyên khi 5 chia hết cho $x-2 \Rightarrow (x-2) \in \{\pm1;\pm5\}$. Đáp án D

Câu 2.2. *P* được xác định khi $\begin{cases} x-3 \ge 0 \\ 12-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x \le 12$. Đáp án D

Câu 2.3. $M = \left|\sqrt{3}+1\right| + \left|1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}+1-1+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Đáp án B

Câu 2.4. Theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2=3,$ do $x_1=1 \Rightarrow x_2=2$. Đáp án C

Câu 2.5. *d* đi qua *M* khi $5=m^2-8m+20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=5 \end{array}\right.$. Đáp án B

Câu 2.6. Do $f(0)=3 \Rightarrow d=3; f(2)=8a+4b+2c+3=5 \Rightarrow 2a+b=\dfrac{1-c}{2}$. Đáp án D

Câu 2.7. $P=\sqrt{(x-11)^2}+x-11=|x-11|+x-11=11-x+x-11=0$. Đáp án D

Câu 2.8. Đặt $t=x^2$ ta được $t^2+321t-322=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-322(L) \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow x=\pm1$. Đáp án B

Câu 2.9 Nếu phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $x_1+x_2=2, x_1x_2=3m-1$.

Ta có $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10 \Leftrightarrow 4-2(3m-1)=10 \Leftrightarrow m=-\dfrac{2}{3}$. Đáp án B

Câu 2.10. $\begin{cases} 5x+5my=55 \\ 5x-3y=m+1 \end{cases} \Rightarrow (5m+3)y=54-m.$ Hệ có nghiệm khi $m \ne -\dfrac{3}{5}$. Đáp án C

Câu 2.11. Trừ từng vế ta được $x^2-y^2=3y-3x \Rightarrow (x-y)(x+y+3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=3 \end{array}\right.$.

Đáp án C

Câu 2.12. Dễ dàng thấy không tồn tại *x,y* thỏa mãn phương trình đầu tiên. Do đó hệ vô nghiệm.

Đáp án A

Câu 2.13. Các khẳng định A, B, C đều sai. Đáp án D

Câu 2.14. Do *d* đi qua $N(0;-3)$ nên *d* có dạng $y=ax-3$. Khi đó $0=a.4-3 \Rightarrow a=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow d: y=\dfrac{3}{4}x-3.$

Đáp án B

Câu 2.15. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;0\right]$, đồng biến trên $\left(0;+\infty\right) \Rightarrow \min y = 7$ tại $x = 0$.

Đáp án B

Câu 2.16. $P = |x-2| + |3-x| \geq |x-2+3-x| = 1 \Rightarrow \min P = 1$ khi $2 \leq P \leq 3$. Đáp án C

Câu 2.17. Ta có $x^2 - 6x + 17 = \left(x-3\right)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow \max P = 2$ khi $x = 3$. Đáp án B

Câu 2.18. $\left(3 \therefore 2171\right) - \left(5 \therefore 2169\right) = 4 + 5 + 2169 + 2179 = 4348$. Đáp án C

Câu 2.19. $x_0 = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$. Đáp án A

Câu 2.20. Đặt $y = \dfrac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ có nghiệm đối với x

- $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $y \neq 0 : \Delta' = 1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$

Vậy $\max y = P = 1$ khi $x = 1$. Đáp án A

Câu 2.21. Từ giả thiết ta có $\left(2a-b-c\right)^2 + \left(b-1\right)^{22} + \left(c+1\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a-b-c=0 \\ b-1=0 \\ c+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$

Do đó $P = 1 + 1 + 0 = 2$. Đáp án B

Câu 2.22. Phương trình tương đương với $\left(x-1\right)x\left(x+1\right) + \left(y-1\right)y\left(y+1\right) = 16$. Khi $x, y \in \mathbb{Z}$ vế trái chia hết cho 3, vế phải không chia hết cho 3 nên phương trình không có nghiệm nguyên. Đáp án A

Câu 2.23. Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$. Từ phương trình thứ hai ta chứng minh $x = y$. Thay vào phương trình thứ nhất ta được $x = y = 2$. Đáp án A.

Câu 2.24. $x = -\left(x^4+2\right) \leq -2$, khi đó $x^4 + x + 2 = x\left(x^3+1\right) + 2 \geq \left(-2\right)\left(-7\right) + 2 > 0$. Phương trình vô nghiệm. Đáp án A

Câu 2.25. Đa giác lồi *n* cạnh có tổng các góc trong là $\left(n-2\right)180°$. Đáp án D

Câu 2.26. Hạ *MH* vuông góc *AB*. Tam giác *MAB* và hình bình hành *ABCD* có cùng đường cao *MH* và cạnh đáy *AB*, tỉ số diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$. Đáp án C

Câu 2.27. $2P = \left(\sin^2 2° + \sin^2 88°\right) + \left(\sin^2 4° + \sin^2 86°\right) + ... + \left(\sin^2 88° + \sin^2 2°\right)$

$=\left(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ\right)+\left(\sin^2 4^\circ+\cos^2 4^\circ\right)+...+\left(\sin^2 88^\circ+\cos^2 88^\circ\right)=1+1+..+1=44$

Vậy $P=22.$ Đáp án D

Câu 2.28. Kẻ *BH* vuông góc *AC*. Ta có $S=\dfrac{1}{2}AC.BH=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A.$ Đáp án A

Câu 2.29. Do $OH<OK<OM\Rightarrow AC>BC>AB\Rightarrow \widehat{C}<\widehat{A}<\widehat{B}.$ Đáp án B

Câu 2.30. Dễ thấy $\widehat{AMO}=\widehat{OMB}=\widehat{BMC},$ do đó $\widehat{AMC}=3.\widehat{AMO}=93^\circ.$ Đáp án D

Câu 2.31. Đặt $AM=x\left(0<x<a\right).$ Các tam giác *AMP*, *BNM*, *CPN* bằng nhau và có diện tích bằng

$\dfrac{1}{2}x\left(a-x\right)\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x\left(a-x\right).$

Mặt khác, $\sqrt{x\left(a-x\right)}\le\dfrac{x+a-x}{2}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{4}x\left(a-x\right)\le\dfrac{\sqrt{3}}{16}a^2.$ Từ đó suy ra diện tích tam giác *MNP* đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{16}a^2$ khi *M,N,P* là trung điểm các cạnh *AB*, *BC*, *CA*. Đáp án D

Câu 2.32. Ta chứng minh được $2r_1=MA+MB-AB$. Tương tự ta có $2r_2=MH+AH-AM$ và $2r_3=MH+BH-MB\Rightarrow 2\left(r_1+r_2+r_3\right)=2MH\le 2R\Rightarrow\max\left(r_1+r_2+r_3\right)=R=18cm.$ Đáp án B

Câu 2.33. Tam giác *AIB* cân nên $IA=IB\Rightarrow\triangle AID=\triangle BIC\left(c.g.c\right)\Rightarrow ID=IC$

Dựng điểm *E* ở ngoài hình vuông sao cho tam giác *ABE* đều $\Rightarrow\triangle AIE=\triangle BIE\Rightarrow\widehat{BEI}=30^\circ$

$\triangle IBE=\triangle IBC\left(c.g.c\right)\Rightarrow\widehat{BCI}=\widehat{BEI}=30^\circ\Rightarrow\widehat{DCI}=60^\circ$ nên tam giác *CDI* đều

Suy ra $IC+ID=2a.$ Đáp án A

ĐỀ SỐ 3

Câu 3.1. $f\left(x\right)=x^2+5x-3x-15=x\left(x+5\right)-3\left(x+5\right)=\left(x-3\right)\left(x+5\right)$. Đáp án B

Câu 3.2. $\dfrac{\left(x-3\right)\left(x-4\right)}{\left(x-3\right)\left(x^2+9\right)}=0\Rightarrow x=3$ (loại) hoặc $x=4$. Đáp án B

Câu 3.3. $P=\left(x^2-1\right)^2+11\geq 11\Rightarrow \min P=11$ khi $x=\pm 1$. Đáp án C

Câu 3.4. Giá trị nhỏ nhất của $Q=-13$ khi $x-7=-1\Leftrightarrow x=6$. Đáp án B

Câu 3.5. $M=\left|\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-1\right|=\left|\sqrt{3}-1-1\right|=\left|\sqrt{3}-2\right|=2-\sqrt{3}$. Đáp án A

Câu 3.6. *d* đi qua $I\left(1;-1\right)$ khi $-1=1+m^2-3m-30\Leftrightarrow m^2-3m-28=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=7 \end{array}\right.$.

Đáp án C

Câu 3.7. $P=\sqrt{a-\sqrt{\left(a-2\right)^2}}=\sqrt{a-\left|a-2\right|}$. P có nghĩa khi

$a\geq\left|a-2\right|\Leftrightarrow\begin{cases} a\geq 0 \\ a^2\geq a^2-4a+4 \end{cases}\Leftrightarrow a\geq 1.$

Đáp án D

Câu 3.8. Phương trình tương đương với

$\sqrt{\left(2x-1\right)^2}=1-2x\Leftrightarrow\left|2x-1\right|=1-2x\Leftrightarrow 2x-1\leq 0\Leftrightarrow x\leq\dfrac{1}{2}$. Đáp án D

Câu 3.9. Ta có $M=\sqrt{17}+\sqrt{a+1}>4+1=5, N=\sqrt{25}-a<5\Rightarrow N<5<M$. Đáp án A

Câu 3.10. $P=1+\dfrac{5}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên khi $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow x=0 \\ \sqrt{x}+1=5\Leftrightarrow x=16 \end{array}\right.$ Đáp án B

Câu 3.11. Điều kiện $x\geq 3$. Khi đó $x-3=0$ hoặc $x^2-16=0\Rightarrow x\in\left\{3;4\right\}$. Đáp án B

Câu 3.12. $\Delta'=m^2+6m-7<0\Leftrightarrow\left(m-1\right)\left(m-7\right)<0\Leftrightarrow -7<m<1$. Đáp án D

Câu 3.13. (1) có nghiệm $x=2$ hoặc $x=5$; (2) có nghiệm $x=k$ hoặc $x=k-1$

Hệ có nghiệm khi $k=2$ hoặc $k=5$ hoặc $k-1=2\Leftrightarrow k=3$ hoặc $k-1=5\Leftrightarrow k=6$. Đáp án D

Câu 3.14. Trừ từng vế ta được $\left(m-8\right)x=1\left(1\right)$. Hệ vô nghiệm khi $\left(1\right)$ vô nghiệm $m=8$. Đáp án B

Câu 3.15. Đường thẳng d đi qqua $M(0;6), N(3;0)$. Do đó đường thẳng d' đi qua $M'(0;6), N'(3;0) \Rightarrow d': y=-2x+6$. Đáp án A

Câu 3.16. Dễ thấy tọa độ giao điểm của d và parabol là $M(-2;4), N(2;4)$. Diện tích tam giác *OMN* bằng 8 (đơn vị diện tích). Đáp án B

Câu 3.17. Khẳng định D là sai vì $3<5$ mà $y(3)=y(5)=1$. Đáp án D

Câu 3.18. $\begin{cases} 2^{500}=\left(2^5\right)^{100}=(32)^{100} \\ 3^{300}=\left(3^3\right)^{100}=(27)^{100} \\ 5^{200}=\left(5^2\right)^{100}=(25)^{100} \end{cases} \Rightarrow 5^{200}<3^{300}<2^{500}$. Đáp án C

Câu 3.19. Phép biến đổi ở D là sai vì đã chia sẻ hai vế của bất phương trình cho $x^2 \geq 0$ đã làm mất nghiệm $x=0$. Đáp án D

Câu 3.20. Đặt $f(x)=\sqrt[3]{x+22}+\sqrt{x-1}$, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ và $f(5)=5 \Rightarrow x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. Đáp án C

Chú ý: Ta có thể giải phương trình đã cho bằng cách đặt $a=\sqrt[3]{x+22}; b=\sqrt{x-1} \geq 0$,

Khi đó, $\begin{cases} a+b=5 \\ a^3-22=b^2+1 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=2 \Rightarrow x=5$

Câu 3.21. $P=ab+bc+cd \leq (a+c)(b+d)$. Mặt khác $\sqrt{(a+c)(b+d)} \leq \dfrac{(a+c)+(b+d)}{2}=1$

$\Rightarrow (a+c)(b+d) \leq 1 \Rightarrow \max P=1$ khi $a=b=1, c=d=0$. Đáp án B

Câu 3.22.

$$P^3=3+\sqrt{\frac{368}{27}}+3-\sqrt{\frac{368}{27}}+3\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{\frac{368}{27}}\right)\left(3-\sqrt{\frac{368}{27}}\right)}P \Leftrightarrow (P-1)\left(P^2+P+6\right)=0$$

$\Leftrightarrow P=1$. Đáp án A

Câu 3.23. Điều kiện $x, y, z \geq 1$. Khi đó, nếu tồn tại một trong ba số *x,y,z* lớn hơn 1 thì hệ vô nghiệm. $x=y=z=1$ là nghiệm của hệ phương trình. Đáp án A

Câu 3.24. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà d_m luôn đi qua. Ta có

$$y_0=(m-1)x_0+3m+1 \forall m \Leftrightarrow (x_0+3)m+1-x_0-y_0=0 \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+3=0 \\ 1-x_0-y_0=0 \end{cases} \Rightarrow M(-3;4)$$

Hạ $OH \perp d_m \Rightarrow OH \le OM = 5.$ Đáp án B

Câu 3.25. Đáp án C: Hình bình hành là hình thang có hai cạnh bên bằng nhau nhưng không là hình thang cân

Câu 3.26.

$$2=\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

Đáp án C

Câu 3.27. Ta có $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\left(1-\cos^2\alpha\right)$

$=\tan^2\alpha\sin^2\alpha\Rightarrow Q=1$

Đáp án A

Câu 3.28. Khẳng định D là sai. Vì *AB* và *CD* là hai đường kính không vuông góc với nhau, khi đó đường kính *AB* đi qua trung điểm của dây *CD* nhưng không vuông góc với *CD*

Câu 3.29. Ta có *OAMB* là hình vuông cạnh $OA=5cm\Rightarrow MO=5\sqrt{2}cm.M$ thuộc đường tròn tâm *O* bán kính $5\sqrt{2}cm$. Đáp án B

Câu 3.30. $OO'=OE+O'F-EF=13+10-3=20.$ Đáp án D

Câu 3.31.

Gọi *I* là trung điểm của *BH* suy ra *CIMK* là hình bình hành $\Rightarrow CI \parallel MK.$ Mặt khác, *I* là trực tâm của tam giác *BCM*. Từ đó suy ra

$BM\perp MK\Rightarrow BM^2+MK^2=BK^2=BC^2+CK^2=64+25=89.$ Đáp án C

Câu 3.32. Đặt $a=\tan\alpha\Rightarrow P=a^8+\dfrac{1}{a^8}=\left(a^4+\dfrac{1}{a^4}\right)^2-2=\left[\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^2-2\right]^2-2$

$$=\left\{\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right]^2-2\right\}^2-2=1154$$

Đáp án B

Câu 3.33.

$$\begin{cases}MA^2+MB^2\le\left(MA+MB\right)^2=a^2\\NB^2+NC^2\le\left(NB+NC\right)^2=a^2\\PA^2+PB^2\le\left(PA+PC\right)^2=a^2\end{cases}\Rightarrow\max S=3a^3 \text{ khi } M\equiv A,N\equiv B,P\equiv C.$$ Đáp án C

ĐỀ SỐ 4

Câu 4.1. Biểu thức có nghĩa khi $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne 1 \end{cases}$ Đáp án C

Câu 4.2. $M=3+\dfrac{5}{x-3}\Rightarrow \max M=8$ khi $x-3=1\Leftrightarrow x=4$. Đáp án C

Câu 4.3. Tập xác định của $\sqrt{(a-1)(a-2)}$ là $\left[\begin{array}{l} a\le 1 \\ a\ge 2 \end{array}\right.$

Tập xác định của $\sqrt{a-1}.\sqrt{a-2}$ là $a\ge 2$. Do đó khi biến đổi đã làm thay đổi tập xác định

Đáp án B

Câu 4.4. $M=\sqrt{26}+\sqrt{9+a}>5+3=8,\sqrt{63}<8$. Đáp án D

Câu 4.5. Hàm số nghịch biến khi $m^2-8m-9<0\Leftrightarrow (m+1)(m-9)<0\Leftrightarrow -1<m<9$. Đáp án A

Câu 4.6. Phương trình tương đương với $|x-2|=x-2$ có nghiệm $x\ge 2$. Đáp án C

Câu 4.7. $P=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+...+\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}=\sqrt{n}-1$. Đáp án B

Câu 4.8. Do $2+m+1=m+3;2(m+1)=2m+2\Rightarrow 2$ và $m+1$ là các nghiệm của phương trình $x^2-(m+3)x+2m+2=0$. Đáp án D

Câu 4.9. Do $1(-m^4-7)<0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu.

$S=x_1+x_2=m^2-2m+6=(m-1)^2+5\ge 5$. Đáp án B

Câu 4.10. Tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right);\left(\dfrac{-1}{4};\dfrac{5}{4}\right)\right\}$. Đáp án B

Câu 4.11. Hệ có nghiệm duy nhất $x=-1,y=0$. Đáp án A

Câu 4.12. *d* đi qua *M* khi $-5=m^2-8m+10\Leftrightarrow m^2-8m+15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=5 \end{array}\right.$ Đáp án B

Câu 4.13. Đồ thị hàm số ở *A* cắt trục *Ox* tại $(-2;0)$. Đồ thị hàm số ở *C, D* nằm ở phía dưới trục *Ox*. Đáp án B

Câu 4.14. Các khẳng định *I* và *III* là đúng, *II* và *IV* là sai. Đáp án B

Câu 4.15. d đi qua $M\left(0;-1\right), N\left(1;1\right)$, do đó d' đi qua $M\left(0;-1\right), N'\left(-1;1\right)$ nên có phương trình là $y=-2x-1$. Đáp án C

Câu 4.16. Các khẳng định B, C, D là sai. A là khẳng định đúng. Đáp án A

Câu 4.17. $y=\left(x-1\right)^2+16$. Do $x\geq 3 \Rightarrow x-1\geq 2 \Rightarrow \min y=20$ khi $x=3$. Đáp án C

Câu 4.18. $2^2\leq\left(1.a+1.b\right)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)\Rightarrow a^2+b^2\geq 2\Rightarrow \min\left(a^2+b^2\right)=2$ khi $a=b=1$. Đáp án B

Câu 4.19. $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}=6\Rightarrow ab\leq 36$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=6$. Đáp án C

Câu 4.20. $\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{b+c}$, tương tự $\dfrac{b}{a+b+c}<\dfrac{b}{c+a},\dfrac{c}{a+b+c}<\dfrac{c}{a+b}\Rightarrow 1<P$

$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{2a}{\left(b+c\right)+\left(b+c\right)}<\dfrac{2a}{a+b+c}$, tương tự $\dfrac{b}{c+a}<\dfrac{2b}{a+b+c},\dfrac{c}{a+b}<\dfrac{2c}{a+b+c}\Rightarrow P<2$

Đáp án B

Câu 4.21. Từ giả thiết ta có $\left(a-\sqrt{1+a^2}\right)\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=a-\sqrt{1+a^2}$

$\Leftrightarrow\left(a^2-1-a^2\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=a-\sqrt{1+a^2}$

$\Leftrightarrow -b-\sqrt{1+b^2}=a-\sqrt{1+a^2}$

Tương tự ta có $b-\sqrt{1+b^2}=-a-\sqrt{1+a^2}\Rightarrow -a-b=a+b\Leftrightarrow a+b=0$

Đáp án B

Câu 4.22. $M=\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$

$\sqrt{9-5}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)=2\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)=8$

Đáp án D

Câu 4.23. Từ $(1): x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)=9\Rightarrow x^2+y^2+z^2+6=9$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=3=xy+yz+zx\Rightarrow\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2=0\Rightarrow x=y=z=1.$

Đáp án A

Câu 4.24. Phương trình tương đương với $\left(2x-1\right)^2+\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)-2=0$

Ta có $\left(2x-1\right)^2 \geq 0.\left(2x+\frac{1}{2x}\right)-2 \geq 2\sqrt{2x.\frac{1}{2x}}-2=0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$

Đáp án A

Câu 4.25. Ngũ giác lồi có 5 đường chéo. Đáp án C

Tổng quát: Một đa giác lồi n cạnh có số đường chéo là $\frac{n\left(n-1\right)}{2}-n$

Câu 4.26. Diện tích tam giác tăng lên gấp 16 lần. Đáp án C

Tổng quát: Nếu độ dài các cạnh của tam giác tăng lên gáp k lần thì diện tích đa giác tăng lên k^2 *lần. Điều đó không còn đúng cho tứ giác, ngũ giác,...*

Câu 4.27. $S=\sqrt{\sin^4\alpha+4\left(1-\sin^2\alpha\right)}+\sqrt{\cos^4\alpha+4\left(1-\cos^2\alpha\right)}$

$=\sqrt{\left(\sin^2\alpha-2\right)^2}+\sqrt{\left(\cos^2\alpha-2\right)^2}=2-\sin^2\alpha+2-\cos^2\alpha=3$

Đáp án C

Câu 4.28. Ta có $BE=AB.\sin A, CF=BC.\sin B, AD=AC.\sin C \Rightarrow P=1$. Đáp án B

Câu 4.29.

Tam giác *EOF* vuông tại *O*, ta có $AE.BF=EC.FC=OC^2=144$. Đáp án D

Câu 4.30. Tam giác *OAI* có $OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=\sqrt{169-144}=5\left(cm\right)$.

$\triangle O'AI$ có $O'I=\sqrt{225-144}=9\left(cm\right)$. Do đó $OO'=14\left(cm\right)$

Đáp án B

Câu 4.31. Hạ $OH\perp d$. Đặt $AH=\left(0<a<R\right), OH=\sqrt{R^2-a^2}$.

Diện tích $\triangle AOB=AH.OH=a\sqrt{R^2-a^2}=\sqrt{a^2\left(R^2-a^2\right)}\leq\frac{a^2+R^2-a^2}{2}=\frac{R^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi tam giác *AOB* vuông cân. Đáp án B

Câu 4.32.

Dễ dàng chứng minh tam giác *AEN* cân nên $\widehat{ANE}=\widehat{NAE}$. Tương tự tam giác *BFN* cân nên $\widehat{BNF}=\widehat{NBF}$

Do đó $\widehat{ANE}+\widehat{BNF}=\widehat{NAE}+\widehat{NBF}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ENF}=90^\circ$. Tương tự $\widehat{EMF}=90^\circ \Rightarrow MENF$ là tứ giác nội tiếp. Đáp án A

Câu 4.33. $\left(1.MA+1.MB\right)^2\leq\left(1^2+1^2\right)\left(MA^2+MB^2\right)=2AB^2=8R^2\Rightarrow MA+MB\leq 2\sqrt{2}R$

Đáp án D

ĐỀ SỐ 5:

Câu 5.1. $x^2+x-6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2; x\neq 3$. Đáp án C

Câu 5.2. Ta có tính chất: Nếu $a,b>0$ thì $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$. Đáp án D

Câu 5.3. $P=\dfrac{(6x-3)+10}{2x-1}=3+\dfrac{10}{2x-1}$ là số nguyên khi $2x-1\in\{\pm 1;\pm 5\}$. Đáp án B

Câu 5.4. $x^2+y^2-2x+4y+10=(x-1)^2+(y+2)^2+5\geq 5$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1, y=-2$. Đáp án C

Câu 5.5. Do $m^2-2m+4=(m-1)^2+3>0\forall m \Rightarrow y=\left(m^2-2m+4\right)x-21$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đáp án D

Câu 5.6. Ta có $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$ với mọi giá trị của x

Chú ý rằng $x^2-5x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x\geq 3\end{array}\right.; x^2-5x+4\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 4\end{cases}$

$\dfrac{(x-1)\left(x^2+3\right)}{x-1}$ có nghĩa khi $x\neq 1$

Đáp án B

Câu 5.7.

$$P<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{99.100}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}\Rightarrow 0<P<1.$$

Đáp án A

Câu 5.8. $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=3-x$ khi $x-3\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 3$. Đáp án D

Câu 5.9. Ta có $(n+1)!=(n+1).n! \Rightarrow \dfrac{(n!)^3}{\left[(n+1)!\right]^3}=\dfrac{1}{n^3+3n^2+3n+1}$. Đáp án C

Câu 5.10. $P=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)$. Đáp án C

Câu 5.11. $M=\sqrt{17^2-33}=\sqrt{256}=16$. Đáp án A

Câu 5.12. Do 1 và $-\left(m^4+217\right)$ trái dấu nên (1) có hai nghiệm trái dấu. Đáp án B

Câu 5.13. Do 1 và $-\left(m^4+341\right)$ trái dấu nên phương trình có hai nghiệm trái dấu x_1,x_2. Khi đó, $S=x_1+x_2=m^2+7\geq 7.$ Đáp án D

Câu 5.14. Thay $x=-2$ vào phương trình ta được $4a-2b+c=0.$ Đáp án D

Câu 5.15. Từ giải thiết ta có $a,b\neq 0$ và $ab=2\left(a+b\right)$

$$\Delta_1=a^2-4b,\Delta_2=b^2-4a\Rightarrow \Delta_1+\Delta_2=a^2+b^2-4\left(a+b\right)=a^2+b^2-2ab=\left(a-b\right)^2\geq 0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_1\geq 0\\ \Delta_2\geq 0\end{array}\right.$$

Do đó ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm. Mặt khác, chọn $a=-1;b=\frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ nhưng $\Delta_1<0$ nên C không đúng. Tương tự D không đúng. Đáp án B

Câu 5.16. Hệ (I) có nghiệm $x=3;y=-2$ thay vào (II) ta được $m=3.$ Đáp án D

Câu 5.17. $y=\left|x\right|+\left|x-2\right|=\begin{cases}-2x+2,x<0\\ 2,0\leq x\leq 2\\ 2x-2,x>2\end{cases}$ có đồ thị như hình vẽ. Đáp án B

Câu 5.18. $m^2+9=7m-1\Leftrightarrow m^2-7m+10=0\Leftrightarrow m=2,m=5.$ Khi đó $m-3\neq 1-m^4$. Đáp án C

Câu 5.19.

$$x+y=\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)+\left(c+d-2\sqrt{cd}\right)+a+c=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)^2+a+c>0$$

Do đó $\left[\begin{array}{l}x>0\\ y>0\end{array}\right.$ Đáp án C

Câu 5.20. Đặt $Q=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{440}+\sqrt{441}}$. Khi đó $P>Q$ và

$$P+Q=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{339}+\sqrt{440}}+\frac{1}{\sqrt{440}+\sqrt{441}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+...+\frac{\sqrt{440}-\sqrt{339}}{440-339}+\frac{\sqrt{441}-\sqrt{440}}{441-440}=20$$

Từ đó suy ra $P>10.$ Đáp án C

Câu 5.21. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình, ta được $m^2+2\left(x_0+2\right)m+x_0^4+2x_0^2+2x_0+4=0$

$\Delta'=\left(x_0+2\right)^2-\left(x_0^4+2x_0^2+2x_0+4\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(x_0-x_0^2\right)\left(x_0^2+x_0+2\right)\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x_0\leq 1\Rightarrow \max x_0=1$ khi $m=-3$. Đáp án B

Câu 5.22. Nếu $x,y>0$ mà $x>y\Rightarrow x^2>y^2$ hay $y+z>x+z\Rightarrow y>x$ (vô lý)

Chứng minh tương tự ta được $x=y=z>0.$ Thay vào ta được $x=y=z=2.$ Đáp án A

Câu 5.23. Thay tọa độ của *M* vào *d* ta được $b=m^2-6m+15=\left(m-3\right)^2+6\geq 6.$ Vậy các điểm thuộc *Oy* mà *d* không thể đi qua là $b<6.$ Đáp án A

Câu 5.24. $ab=\dfrac{\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2}{4}=\dfrac{441-1}{4}=110\Rightarrow \max P=110$ khi hai số tự nhiên là 10 và 11.Đáp án B

Câu 5.25. Dễ dang tìm được chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là 20*m* và 18*m*. Diện tích hình chữ nhật bằng $360cm^2.$ Đáp án C

Câu 5.26. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Ta có $\dfrac{BD}{BM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{3}$. Đáp án D

Câu 5.27. $\triangle AHB\sim\triangle CHA\Rightarrow\dfrac{3}{8}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AH}{CH}\Rightarrow CH=16\left(cm\right).$ Đáp án C

Câu 5.28. $M^2=\left(3\sin\alpha+4\cos\alpha\right)^2\leq\left(3^2+4^2\right)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\Rightarrow M^2\leq 25.1=25\Rightarrow M\leq 5$

$\Rightarrow \max M=5$ khi $\dfrac{\sin\alpha}{3}=\dfrac{\cos\alpha}{4}$

Câu 5.29. Đáp án B vì hình thang cân có tổng hai góc đối đỉnh bằng 180°

Câu 5.30. Dễ dàng chứng minh được tam giác *AEF* đều. Đáp án A

Câu 5.31.

Xét $\triangle AOM, AM=OM.\cot 30^\circ=\sqrt{3}\Rightarrow AC=2\sqrt{3}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60^\circ=3\sqrt{3}\left(cm^2\right).$

Đáp án D

Câu 5.32. Lấy *K* sao cho *A* là trung điểm của *BK*. $\triangle BCK=\triangle PQC\Rightarrow CK=QC$ và $\widehat{BKC}=\widehat{PCD}$

$\Rightarrow\widehat{BCK}+\widehat{PCQ}=90^\circ\Rightarrow\triangle KCQ$ vuông cân $\Rightarrow\widehat{ANB}+\widehat{AQB}=\widehat{CQD}+\widehat{AQK}=45^\circ$

Đáp án B

Câu 5.33. Dễ dàng chứng minh $\triangle BON = \triangle BOM$ và $\triangle COM = \triangle COP \Rightarrow \widehat{BNO} + \widehat{CPO}$ $= \widehat{BMO} + \widehat{CMO} = 180° \Rightarrow \widehat{ANO} + \widehat{APO} = 180° \Rightarrow \lozenge ANOP$ nội tiếp trong đường tròn bán kính $R \Rightarrow OA \le 2R \Leftrightarrow \dfrac{OA}{R} \le 2$

Dấu "=" xảy ra khi *N,M,P* là chân các đường vuông góc hạ từ *O* xuống *AB, BC, AC*. Đáp án C