

CHỦ ĐỀ 2

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN VÀ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

DẠNG 1

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $Q(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MN} = (300; 100; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (x - 800; y - 300; z - 10)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow N$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên

$$\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ}$$

$$\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(x - 800) \\ 100 = 4(y - 300) \\ 2 = 4(z - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 875 \\ y = 325 \\ z = 10,5 \end{cases} \Rightarrow Q(875; 325; 10,5)$$

Suy ra

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(875; 325; 10,5)$

Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000; 600; 14)$ đến điểm N

trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N .



Lời giải

Gọi $N(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MQ} = (400; 200; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (1400 - x; 800 - y; 16 - z)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên

$$\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ}$$

$$\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 400 = 4(1400 - x) \\ 200 = 4(800 - y) \\ 2 = 4(16 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1300 \\ y = 750 \\ z = 15,5 \end{cases} \Rightarrow N(1300; 750; 15,5)$$

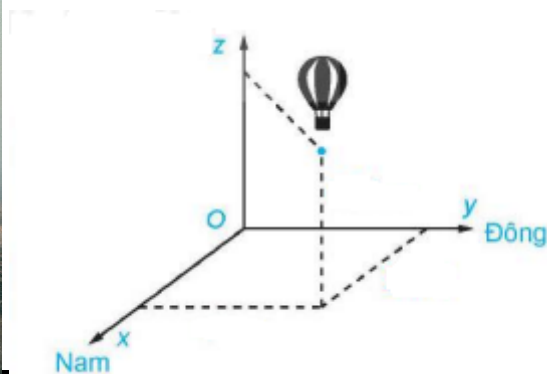
Suy ra

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300; 750; 15,5)$

Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu có tọa độ $(5; 10; 0,4)$.

$$\sqrt{5^2 + 10^2 + (0,4)^2} \approx 11,2 \text{ (km)}$$

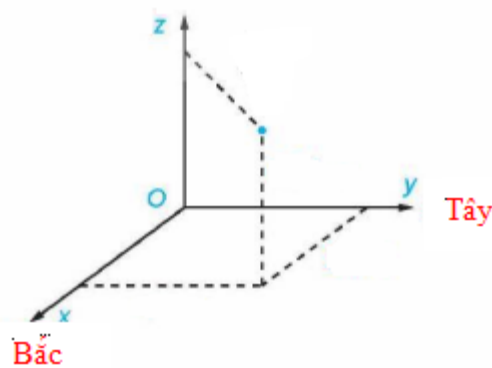
b) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát là:

Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc 50 (km) và về phía Tây 20 (km) , đồng thời cách mặt đất 1 (km) .

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc máy bay có tọa độ $(50; 20; 1)$.

b) Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{50^2 + 20^2 + 1^2} \approx 53,9 \text{ (km)}$

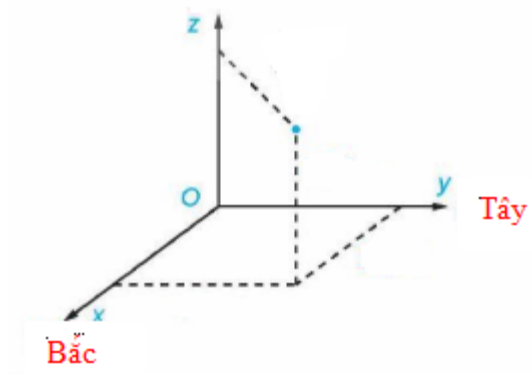
Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc 20 (km) và về phía Tây 10 (km) , đồng thời cách mặt đất

$0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20; 10; 0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30; -25; 1)$.

$$\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 61(km)$$

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là:

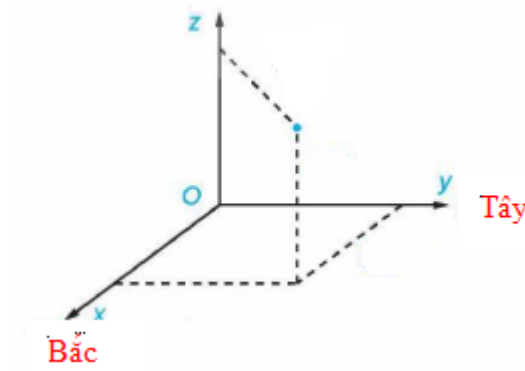
Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.



- a) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.
b) Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ $(-100; -80; 1)$.

Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ $(70; 60; 0,8)$.

- a) khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{(-100)^2 + (-80)^2 + 1^2} \approx 128(km)$$

- b) khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là:

$$\sqrt{(-100 - 70)^2 + (-80 - 60)^2 + (1 - 0,8)^2} \approx 220(km)$$

Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời

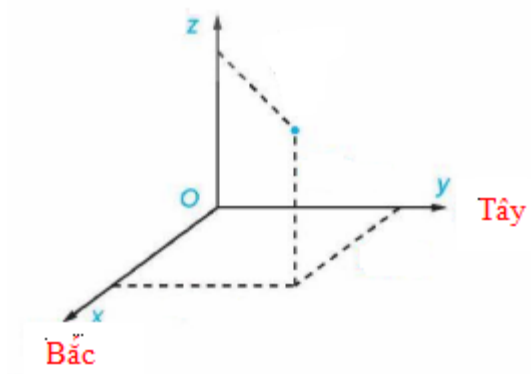
cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



- Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.
- Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60; -40; 2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80; 50; 4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ

$$\left(\frac{-60+80}{2}; \frac{-40+50}{2}; \frac{2+4}{2} \right) = (10; 5; 3)$$

a) khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$$\sqrt{(-60-80)^2 + (-40-50)^2 + (2-4)^2} \approx 166,4(km)$$

b) khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{10^2 + 5^2 + 3^2} \approx 11,6(km)$$

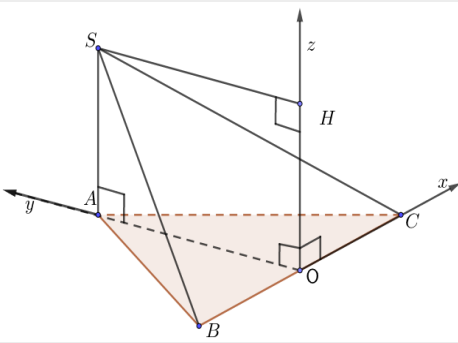
DẠNG 2

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. Gắn tọa độ đối với hình chóp

1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều

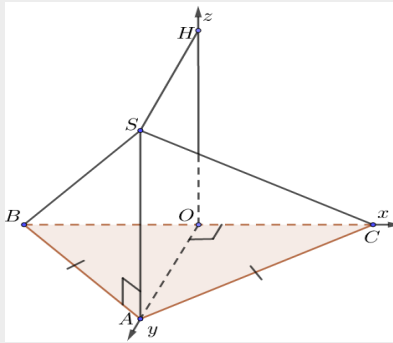


▪ Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right), \\ C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; OH\right)$$

Đáy là tam giác cân tại A

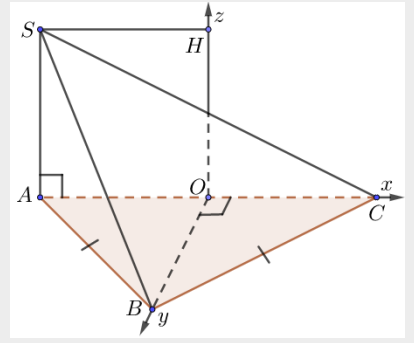


▪ Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A(0; OA; 0), B(-OB; 0; 0), \\ C(OC; 0; 0), S\left(0; OA; OH\right)$$

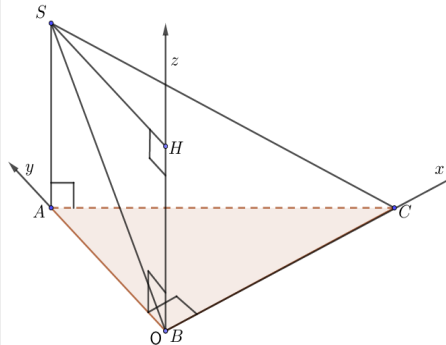
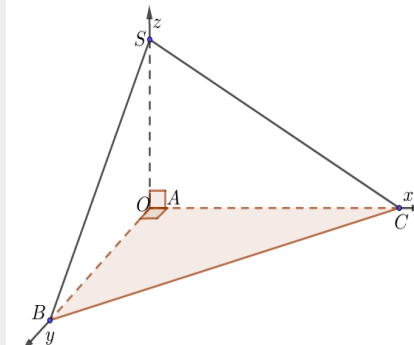
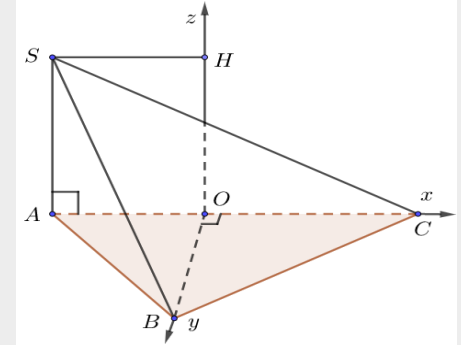
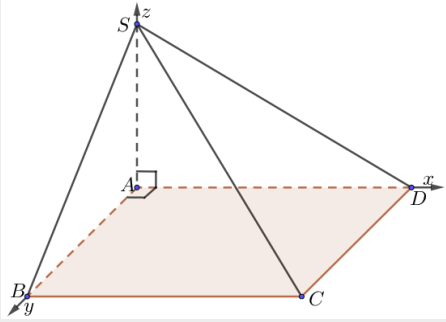
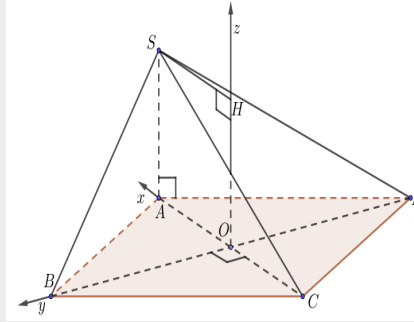
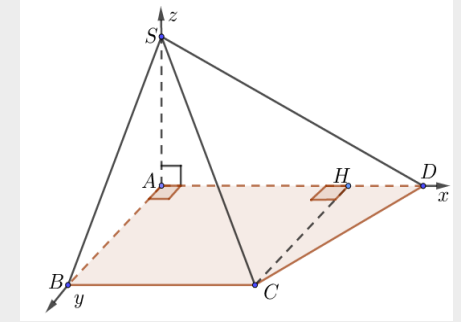
Đáy là tam giác cân tại B

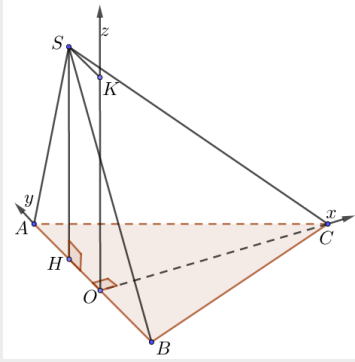


▪ Gọi O là trung điểm AC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

▪ Tọa độ các điểm:

$$O(0;0;0), A(-OA; 0; 0), B(0; OB; 0), \\ C(OC; 0; 0), S\left(-OA; 0; OH\right)$$

Đáy là tam giác vuông tại B  - Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$. - Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0; 0; 0)$, $A(0; AB; 0)$, $C(BC; 0; 0)$, $S\left(0; AB; \frac{BH}{\sin A}\right)$.	Đáy là tam giác vuông tại A  - Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$. - Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0; 0; 0)$, $B(0; OB; 0)$, $C(AC; 0; 0)$, $S(0; 0; SA)$.	Đáy là tam giác thường  - Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$. - Tọa độ các điểm: $O(0; 0; 0)$, $A(-OA; 0; 0)$, $B(0; OB; 0)$, $C(OC; 0; 0)$, $S\left(-OA; 0; \frac{OH}{\sin A}\right)$.
Đáy hình vuông, hình chữ nhật  - Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$. - Tọa độ $A \equiv O(0; 0; 0)$, $B(0; AB; 0)$, $C(AD; AB; 0)$, $D(AD; 0; 0)$, $S(0; 0; SA)$.	Đáy là hình thoi  - Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$. - Tọa độ $O(0; 0; 0)$, $A(OA; 0; 0)$, $B(0; OB; 0)$, $C(-OC; 0; 0)$, $D(0; -OD; 0)$, $S\left(OA; 0; \frac{OH}{\sin A}\right)$.	Đáy là hình thang vuông  - Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$. - Tọa độ $A \equiv O(0; 0; 0)$, $B(0; AB; 0)$, $C(AH; AB; 0)$, $D(AD; 0; 0)$, $S(0; 0; SA)$.
2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy		
Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường	Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)	Đáy là hình vuông-hình chữ nhật

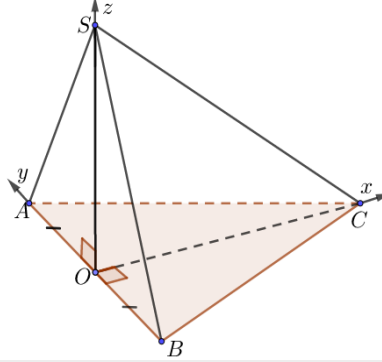


■ Vẽ đường cao CO trong $\triangle ABC$.
Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.

■ Ta có:

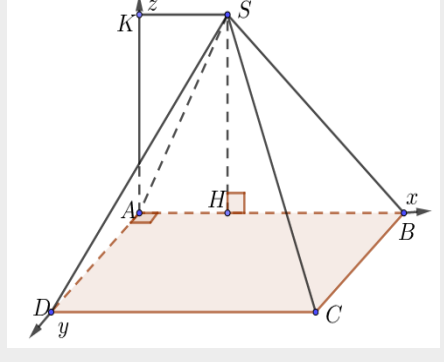
$$O(0;0;0), A(0;OA;0), B(0;-OB;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(0;OH;\frac{OK}{SH}\right)$$



■ Gọi O là trung điểm BC,
chọn hệ trục như hình, $a = 1$.

■ Ta có: $O(0;0;0), A(0;OA;0),$
 $B(0;-OB;0), C(OC;0;0), S(0;0;SO)$



■ Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.

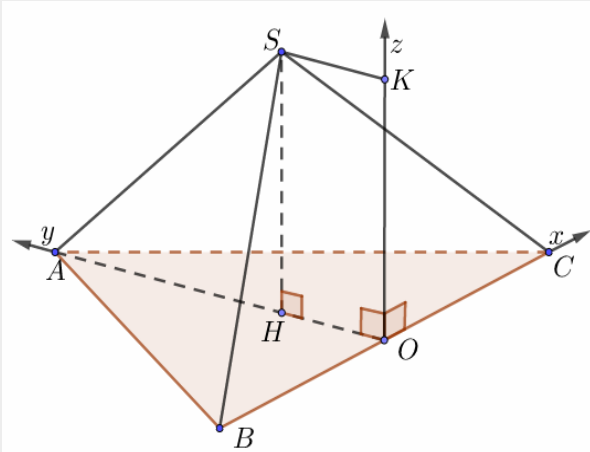
■ Ta có:

$$A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0),$$

$$D(0;AD;0), S\left(AH;0;\frac{AK}{SH}\right)$$

3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều



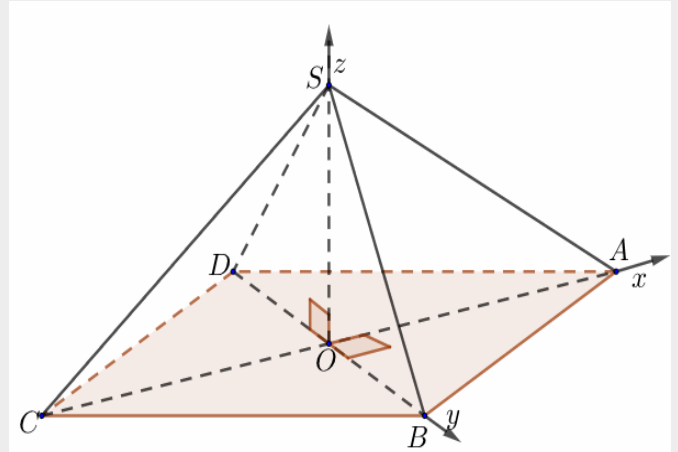
Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a = 1$.

Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0;\frac{AB\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(-\frac{BC}{2};0;0\right),$$

$$C\left(\frac{BC}{2};0;0\right), S\left(0;\frac{AB\sqrt{3}}{6};\frac{OK}{SH}\right)$$

Hình chóp tứ giác đều



Chọn hệ trục như hình với $a = 1$.

Tọa độ điểm:

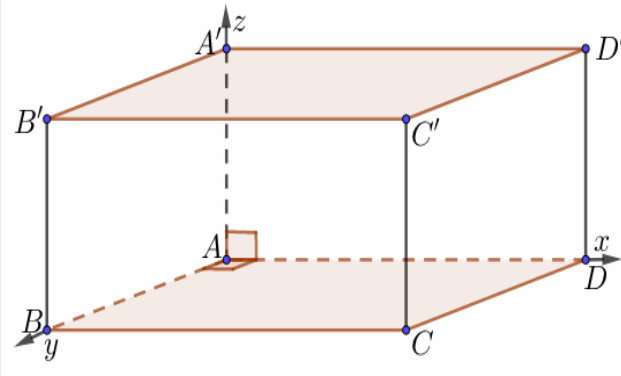
$$O(0;0;0), A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right),$$

$$C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right); S(0;0;SO)$$

II. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

1. Lăng trụ đứng

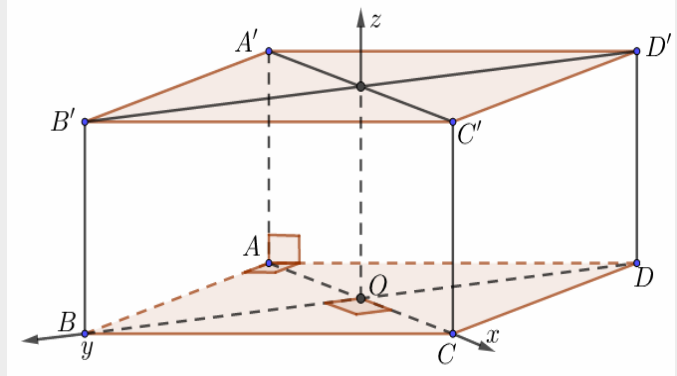
Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



Đựng hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm:

$$\begin{aligned} A &\equiv O(0;0;0), \\ B(0;AB;0), C(AD;AB;0), \\ D(AD;0;0), \\ A'(0;0;AA'), \\ B'(0;AB;AA'), C'(AD;AB;AA'), D'(AD;0;AA'). \end{aligned}$$

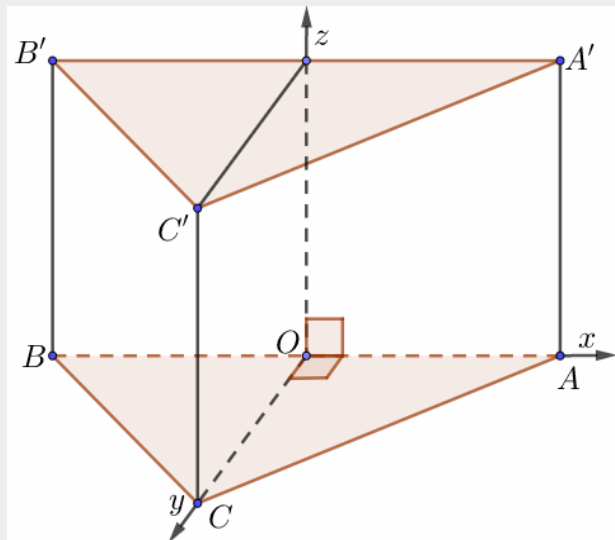
Lăng trụ đứng đáy là hình thoi



Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với

$$\begin{aligned} O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0;OB;0), C(OC;0;0), \\ D(0;-OD;0), A'(-OA;0;AA'), B'(0;OB;AA'), \\ C'(OC;0;CC'), D'(0;-OD;DD'). \end{aligned}$$

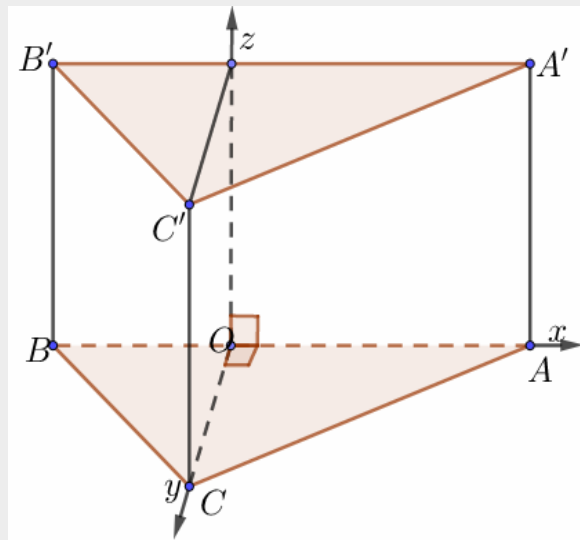
Lăng trụ tam giác đều



Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} O(0;0;0), A\left(\frac{AB}{2};0;0\right), B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right), C(0;OC;0), \\ A'(OA;0;AA'), B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC'). \end{aligned}$$

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$.

Tọa độ điểm là:

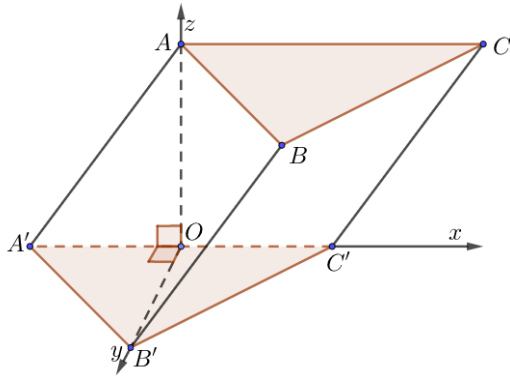
$$\begin{aligned} O(0;0;0), A(OA;0;0), B(-OB;0;0), C(0;OC;0), \\ A'(OA;0;AA'), B'(-OB;0;BB'), C'(0;OC;CC'). \end{aligned}$$

2. Lăng trụ xiên:

Lăng trụ xiên có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm

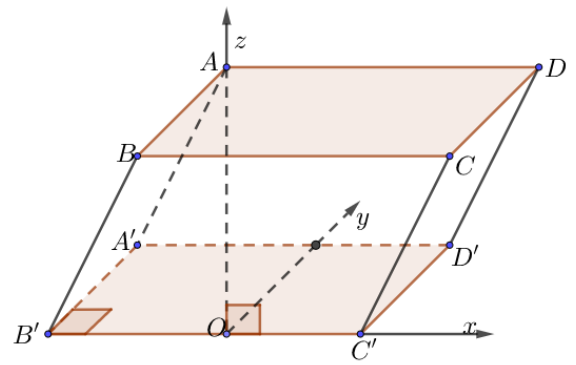
Lăng trụ xiên có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm

một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'}$.

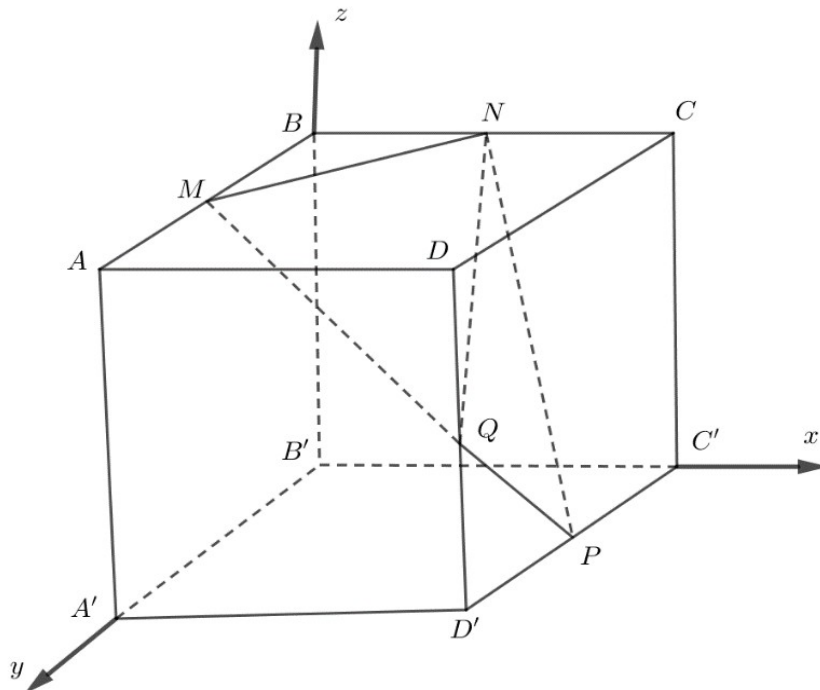
thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'} = \vec{DD'}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm M, N, P, Q .

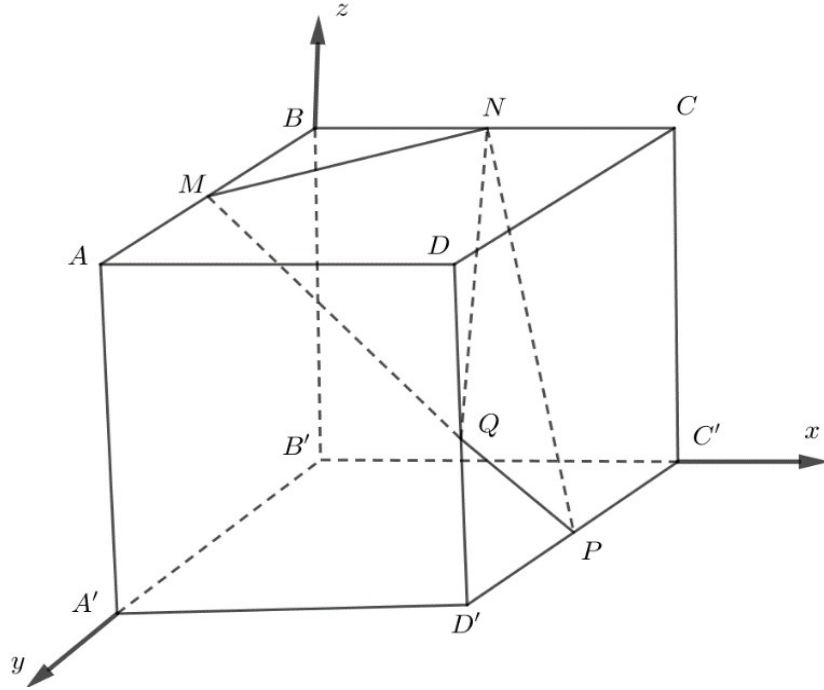


A. $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

- B. $M\left(0;\frac{1}{2};1\right), N\left(\frac{1}{2};0;1\right), P(1;1;0), Q\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.
- C. $M\left(0;\frac{1}{2};1\right), N\left(\frac{1}{2};0;1\right), P\left(1;\frac{1}{2};0\right), Q\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.
- D. $M\left(0;\frac{1}{2};1\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), P\left(1;\frac{1}{2};0\right), Q\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

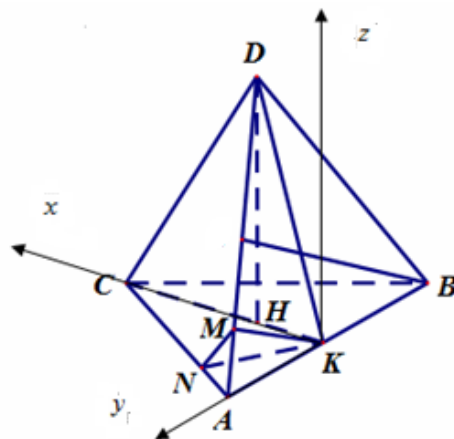
Chọn C



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc $O \equiv B'$.

Khi đó: $M\left(0;\frac{1}{2};1\right), N\left(\frac{1}{2};0;1\right), P\left(1;\frac{1}{2};0\right), Q\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm AB , gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, xác định tọa độ các điểm K, M, N theo a .



A. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$

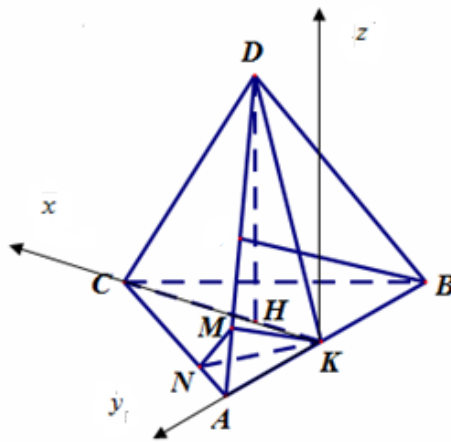
B. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$

C. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$

D. $K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$

Lời giải

Chọn D



ta có: $KC = \frac{\sqrt{3}}{2}a; DH = \frac{\sqrt{6}}{3}a; HK = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

$AN = \frac{1}{4}AC; AM = \frac{1}{4}AD$

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $K \equiv O(0;0;0), A\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), D\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$

$\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AC} \Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$

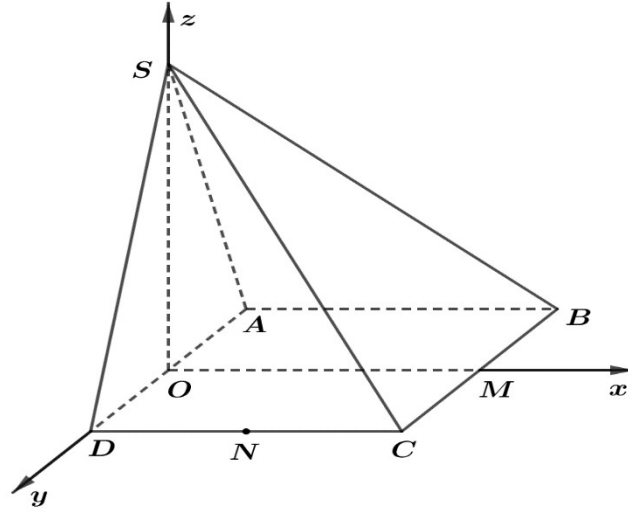
Ta có:

$\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AD} \Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$

$K(0;0;0), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right), N\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}; \frac{3a}{8}; 0\right)$

Vậy

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.

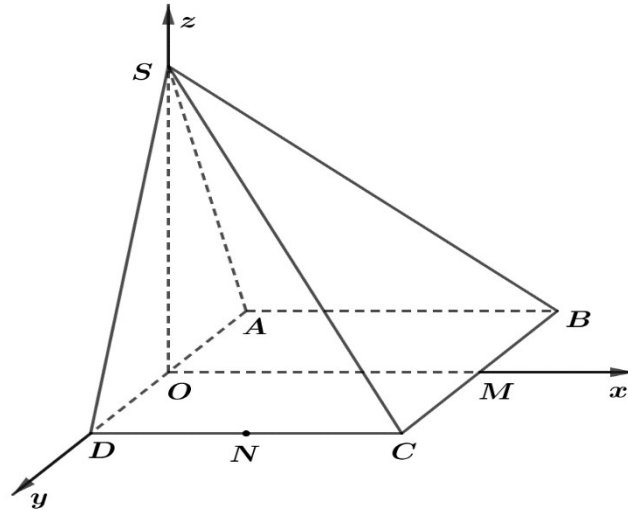


Xác định tọa độ các điểm S, M, N theo a .

- A. $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ B. $S(0;0;a\sqrt{3}); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$
- C. $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$ D. $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right); M(a;0;0); N\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$$S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right); M(a;0;0); N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right).$$

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=5, OB=2, OC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và AMN . Khoảng cách từ G đến K là:

A. $GK = \frac{\sqrt{5}}{3}$

B. $GK = \frac{\sqrt{3}}{2}$

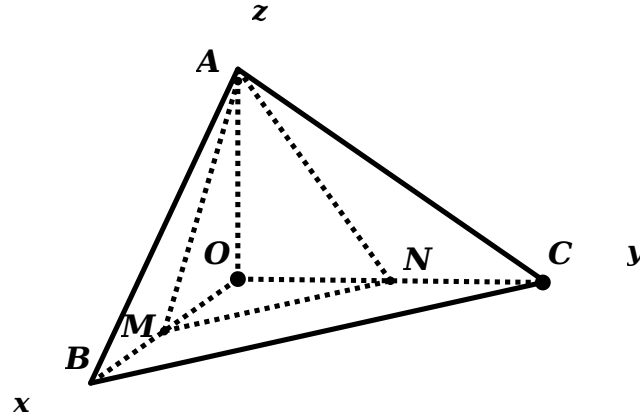
C. $GK = \frac{1}{2}$

D. $GK = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz$, $B \in Ox$, $C \in Oy$ sao cho $AO = 5$, $OB = 2$, $OC = 4$
 $\Rightarrow A(0;0;5)$, $B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$.

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

K là trọng tâm tam giác AMN nên $K\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

Khoảng cách từ G đến K là: $GK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE . Độ dài BG là:

A. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{6}$

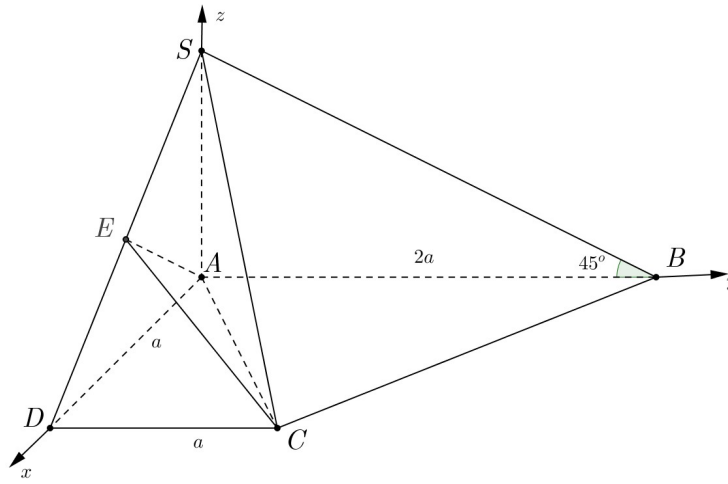
B. $BG = \frac{a\sqrt{113}}{6}$

C. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{2}$

D. $BG = \frac{a\sqrt{89}}{3}$

Lời giải

Chọn B



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AB \Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\angle SBA = 45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$,
 $E\left(\frac{a}{2};0;a\right)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $ACE \Rightarrow G\left(\frac{a}{2};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$

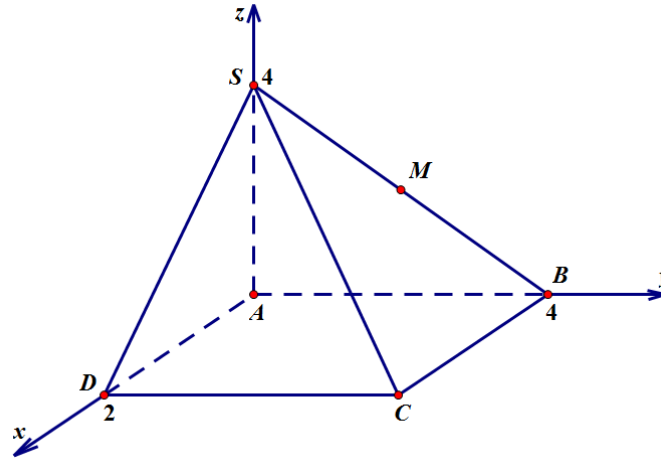
Độ dài BG là: $BG = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 2a\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = \frac{a\sqrt{113}}{6}$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD . Độ dài MG là:

- A. $MG = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $MG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $MG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ : $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$.

M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0;2;2)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;0)$$
 .

G là trọng tâm của tam giác $SCD \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Độ dài MG là:
$$MG = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4, AD=3, AA'=5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACB' . Độ dài BG là:

A. $BG = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

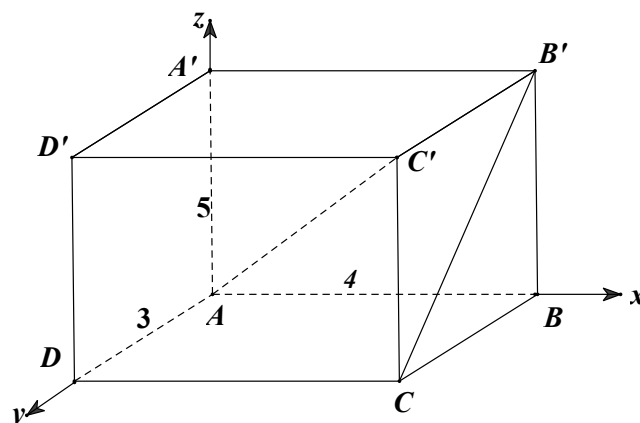
B. $BG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

C. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

D. $BG = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Có $A(0;0;0), C(4;3;0), B'(4;0;5), B(4;0;0)$,

G là trọng tâm của tam giác ACB' $\Rightarrow G\left(\frac{8}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$

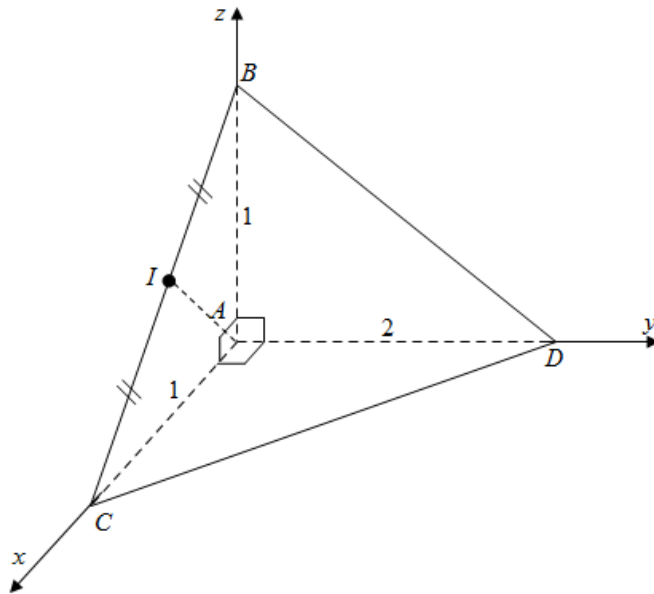
Độ dài BG là: $BG = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 4\right)^2 + (1 - 0)^2 + \left(\frac{5}{3} - 0\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD=2, AB=AC=1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC và G là trọng tâm của tam giác ABD . Tính độ dài BI .

Lời giải

Đáp án: $BI = \frac{1}{3}$



Vì tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ax , AD nằm trên trục Ay và AB nằm trên trục Az).

Từ đó suy ra: $A(0;0;0)$, $B(0;0;1)$ vì $B \in Az$, $C(1;0;0)$ vì $C \in Ax$, $D(0;2;0)$ vì $D \in Ay$.

Vì I là trung điểm của BC nên $I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

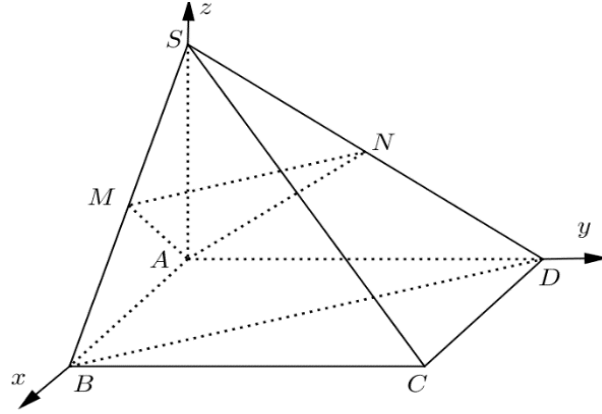
G là trọng tâm của tam giác $ABD \Rightarrow G\left(\frac{1}{6}; 0; \frac{1}{2}\right)$

Độ dài BI là: $BI = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 + (0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD và G là trọng tâm của tam giác AMN . Tính tọa độ điểm G .

Lời giải

Đáp án: $G\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{3}\right)$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn: $A \equiv O, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), S(0; 0; a)$ (như minh họa hình vẽ),

suy ra $M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$ và $N\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

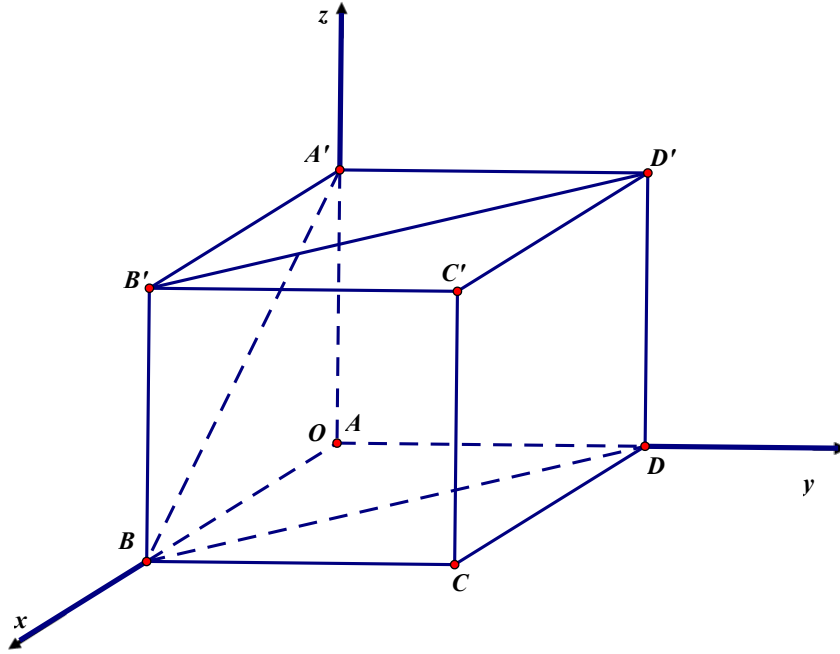
G là trọng tâm của tam giác $AMN \Rightarrow G\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{3}\right)$

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'BD$. Tính độ dài $C'G$.

Lời giải

$$C'G = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Đáp án:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

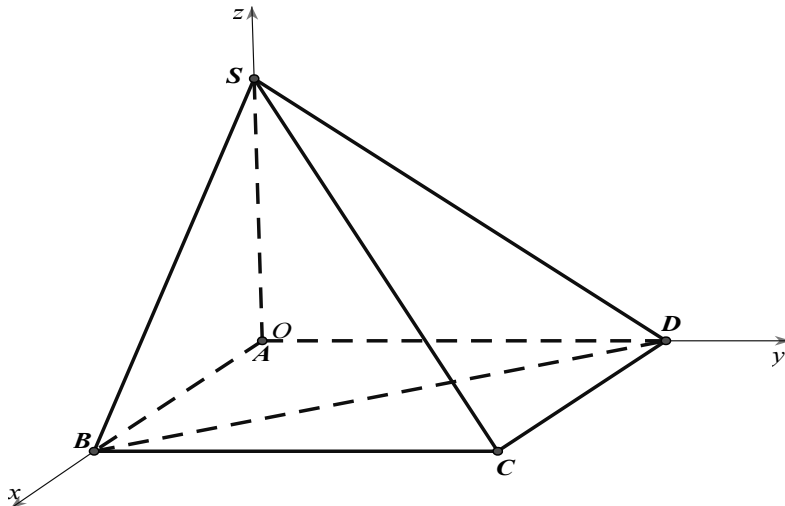
G là trọng tâm của tam giác $A'BD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$

Độ dài $C'G$ là: $C'G = \sqrt{\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - a\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD . Tính độ dài CG .

Lời giải

Đáp án: $CG = \frac{a\sqrt{17}}{3}$



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có:

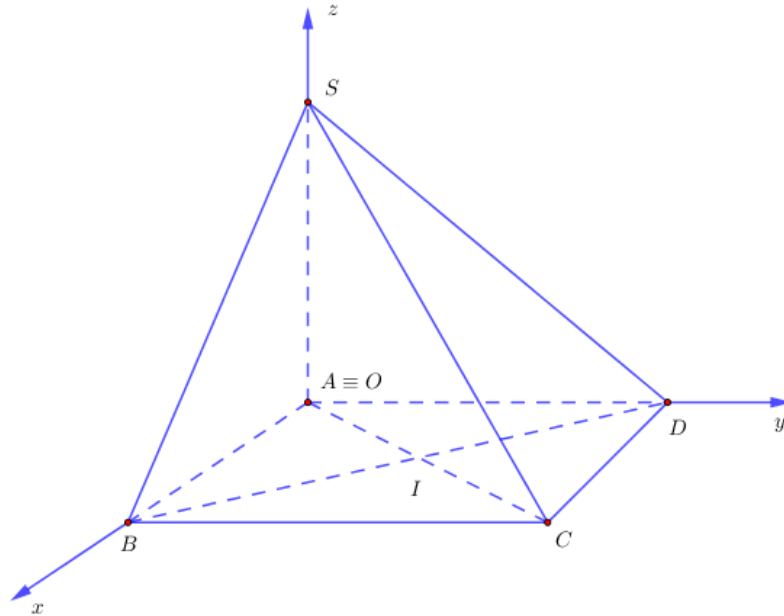
$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{3};0), D(0;a\sqrt{3};0), S(0;0;a)$$

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } SBD \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; \frac{a}{3}\right)$$

$$CG = \sqrt{\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - 0\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{3}$$

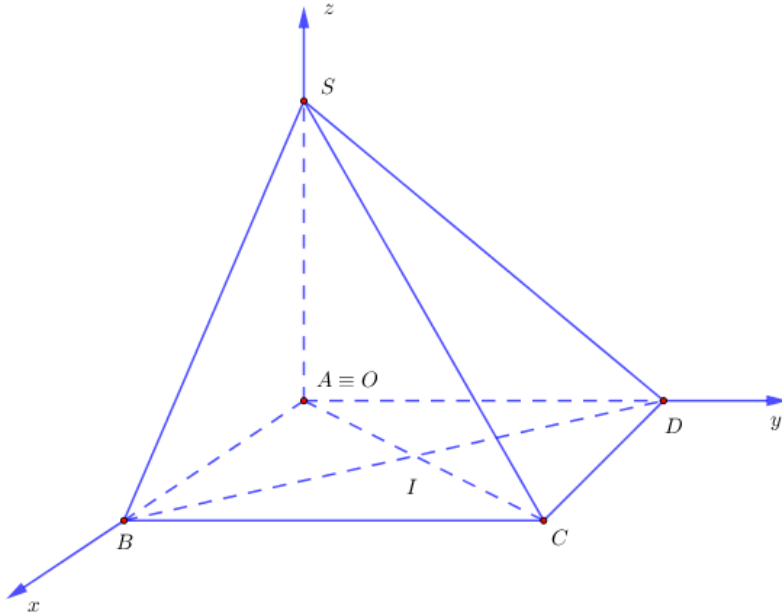
Độ dài CG là:

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì tọa độ điểm I là bao nhiêu? Biết $I = AC \cap BD$ và chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới.



Lời giải

Đáp án: $I\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (\overline{SI}; \overline{AI}) = \widehat{SIA}$$

Ta có

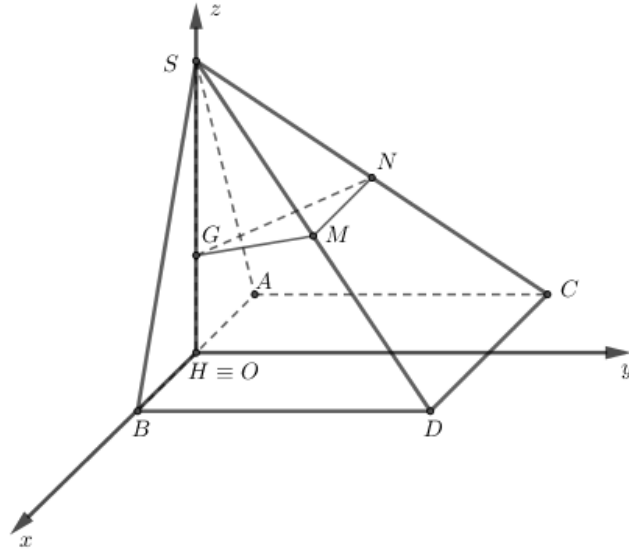
$$\tan \alpha = \tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a$$

Ta có

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

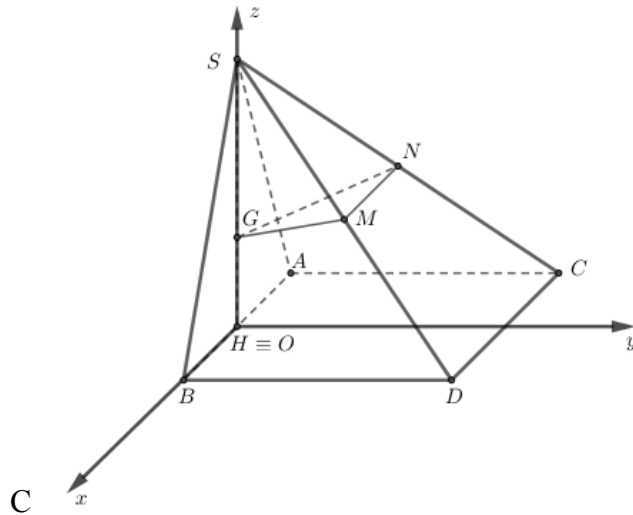
$$\Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới, Tính tọa độ các điểm G, M, N theo a .



Lời giải

Đáp án: $G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(-\frac{a}{2};0;0\right); B\left(\frac{a}{2};0;0\right); C\left(\frac{a}{2};a;0\right); D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$$

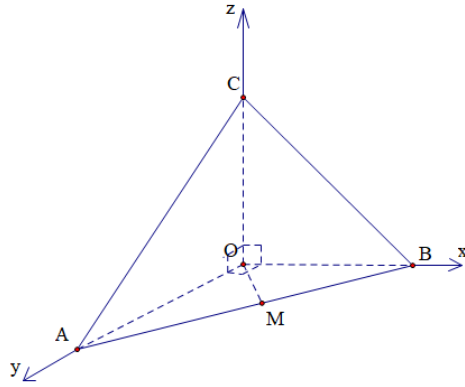
suy ra $G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Câu 21. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Tính góc tạo bởi hai vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$.

Lời giải

$$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OM}) = 120^\circ$$

Đáp án:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{BC} = (-a;0;a)$, $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{OM}|} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OM}) = 120^\circ$$

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính cosin góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA .

Lời giải

$$\cos(BG; SA) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

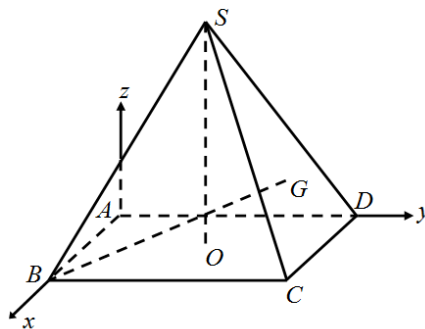
Đáp án:

Gọi $O = AC \cap BD$.

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Tam giác SAO vuông:

Gắn tọa độ như hình vẽ



$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$$

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\frac{a}{2};\frac{5a}{6};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.

Ta có : $\vec{AS} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{6}}{2} \right) = \frac{a}{2}(1; 1; \sqrt{6})$, $\vec{BG} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{5a}{6}; \frac{a\sqrt{6}}{6} \right) = \frac{a}{6}(-3; 5; \sqrt{6})$

Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

$$\cos(BG; SA) = \frac{|\vec{BG} \cdot \vec{AS}|}{|\vec{BG}| \cdot |\vec{AS}|} = \frac{|-3+5+6|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30° . Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC . Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN) .

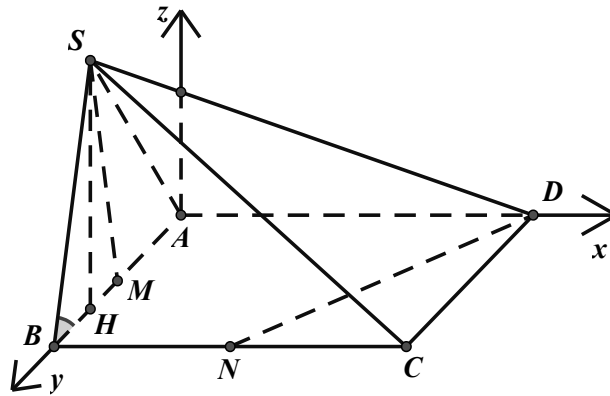
Lời giải

$$\cos(SM, DN) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Đáp án:

Trong (SAB) , kẻ $SH \perp AB$ tại H . Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$$

Kẻ tia $Az \parallel SH$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



Trong tam giác SAB vuông tại S , $SB = AB \cdot \cos \angle SBA = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác SBH vuông tại H , $BH = SB \cdot \cos \angle SBH = \frac{3a}{4}$ và $SH = BH \cdot \sin \angle SBA = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$AH = AB - BH = a - \frac{3a}{4} = \frac{a}{4} \Rightarrow H \left(0; \frac{a}{4}; 0 \right) \Rightarrow S \left(0; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$M \left(0; \frac{a}{2}; 0 \right), D(a; 0; 0), N \left(\frac{a}{2}; a; 0 \right)$$

$$\vec{SM} = \left(0; \frac{a}{4}; -\frac{a\sqrt{3}}{4} \right), \quad \vec{DN} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0 \right) \Rightarrow \cos(SM, DN) = \frac{|\vec{SM} \cdot \vec{DN}|}{|\vec{SM}| \cdot |\vec{DN}|} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ta có: