NGUYỄN THUỶ THANH

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP

Tập 3

Phép tính tích phân. Lý thuyết chuỗi.
Phương trình vi phân

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

Chương 10

Tích phân bất định

10.1 Các phương pháp tính tích phân

10.1.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa 10.1.1. Hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng nào đó nếu $F(x)$ liên tục trên khoảng đó và khả vi tại mỗi điểm trong của khoảng và $F'(x) = f(x)$.

Định lý 10.1.1. (về sự tồn tại nguyên hàm) *Mọi hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ đều có nguyên hàm trên khoảng (a, b).*

Định lý 10.1.2. *Các nguyên hàm bất kỳ của cùng một hàm là chỉ khác nhau bởi một hằng số cộng.*

Khác với đạo hàm, nguyên hàm của hàm sơ cấp không phải bao giờ cũng là hàm sơ cấp. Chẳng hạn, nguyên hàm của các hàm e^{-x^2}, $\cos(x^2)$, $\sin(x^2)$, $\dfrac{1}{\ln x}$, $\dfrac{\cos x}{x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$,... là những hàm không sơ cấp.

Định nghĩa 10.1.2. Tập hợp mọi nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) và được ký hiệu là

$$\int f(x)dx.$$

Nếu $F(x)$ là một trong các nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) thì theo định lý 10.1.2

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

trong đó C là hằng số tùy ý và đẳng thức cần hiểu là đẳng thức giữa hai tập hợp.

Các tính chất cơ bản của tích phân bất định:

1) $d\Big(\displaystyle\int f(x)dx\Big) = f(x)dx$.

2) $\Big(\displaystyle\int f(x)dx\Big)' = f(x)$.

3) $\displaystyle\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$.

Từ định nghĩa tích phân bất định rút ra bảng các tích phân cơ bản (thường được gọi là tích phân bảng) sau đây:

I. $\displaystyle\int 0.dx = C.$

II. $\displaystyle\int 1dx = x + C.$

III. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1$

IV. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ \ x \neq 0.$

V. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1);\ \ \int e^x dx = e^x + C.$

VI. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C.$

VII. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C.$

VIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

IX. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}x + C,\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \qquad -1 < x < 1.$

XI. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C, \\ -\mathrm{arccotg}x + C. \end{cases}$

XII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$
(trong trường hợp dấu trừ thì $x < -1$ hoặc $x > 1$).

XIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,\ |x| \neq 1.$

Các quy tắc tính tích phân bất định:

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k \neq 0$.

2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3) Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ khả vi liên tục thì $\int f(u)du = F(u) + C$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm $y = \text{sign}x$ có nguyên hàm trên khoảng bất kỳ không chứa điểm $x = 0$ và không có nguyên hàm trên mọi khoảng chứa điểm $x = 0$.

Giải. 1) Trên khoảng bất kỳ không chứa điểm $x = 0$ hàm $y = \text{sign}x$ là hằng số. Chẳng hạn với mọi khoảng (a, b), $0 < a < b$ ta có $\text{sign}x = 1$ và do đó mọi nguyên hàm của nó trên (a, b) có dạng

$$F(x) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) Ta xét khoảng (a, b) mà $a < 0 < b$. Trên khoảng $(a, 0)$ mọi nguyên hàm của $\text{sign}x$ có dạng $F(x) = -x + C_1$ còn trên khoảng $(0, b)$ nguyên hàm có dạng $F(x) = x + C_2$. Với mọi cách chọn hằng số C_1 và C_2 ta thu được hàm [trên (a, b)] không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. Nếu ta chọn $C = C_1 = C_2$ thì thu được hàm liên tục $y = |x| + C$ nhưng không khả vi tại điểm $x = 0$. Từ đó, theo định nghĩa 1 hàm $\text{sign}x$ không có nguyên hàm trên (a, b), $a < 0 < b$. ▲

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm của hàm $f(x) = e^{|x|}$ trên toàn trục số.

Giải. Với $x \geqslant 0$ ta có $e^{|x|} = e^x$ và do đó trong miền $x > 0$ một trong các nguyên hàm là e^x. Khi $x < 0$ ta có $e^{|x|} = e^{-x}$ và do vậy trong miền $x < 0$ một trong các nguyên hàm là $-e^{-x} + C$ với hằng số C bất kỳ.

Theo định nghĩa, nguyên hàm của hàm $e^{|x|}$ phải liên tục nên nó phải thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{x\to 0+0} e^x = \lim_{x\to 0-0}(-e^{-x}+C)$$

tức là $1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$.

Như vậy

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{nếu } x > 0, \\ 1 & \text{nếu } x = 0, \\ -e^{-x}+2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

là hàm liên tục trên toàn trục số. Ta chứng minh rằng $F(x)$ là nguyên hàm của hàm $e^{|x|}$ trên toàn trục số. Thật vậy, với $x > 0$ ta có $F'(x) = e^x = e^{|x|}$, với $x < 0$ thì $F'(x) = e^{-x} = e^{|x|}$. Ta còn cần phải chứng minh rằng $F'(0) = e^0 = 1$. Ta có

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0+0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$$
$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0-0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0-0}\frac{-e^{-x}+2-1}{x} = 1.$$

Như vậy $F'_+(0) = F'_-(0) = F'(0) = 1 = e^{|x|}$. Từ đó có thể viết:

$$\int e^{|x|}dx = F(x) + C = \begin{cases} e^x + C, & x < 0 \\ -e^{-x}+2+C, & x < 0. \end{cases} \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tìm nguyên hàm có đồ thị qua điểm $(-2, 2)$ đối với hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

Giải. Vì $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ nên $\ln|x|$ là một trong các nguyên hàm của hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Do vậy, nguyên hàm của f là hàm $F(x) = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$. Hằng số C được xác định từ điều kiện $F(-2) = 2$, tức là $\ln 2 + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \ln 2$. Như vậy

$$F(x) = \ln|x| + 2 - \ln 2 = \ln\left|\frac{x}{2}\right| + 2. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau đây:

$$1)\quad \int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx, \qquad 2)\quad \int \frac{2x+3}{3x+2}dx.$$

Giải. 1) Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int \Big(2\frac{2^x}{10^x} - \frac{5^x}{5\cdot 10^x}\Big)dx = \int \Big[2\Big(\frac{1}{5}\Big)^x - \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^x\Big]dx\\
&= 2\int \Big(\frac{1}{5}\Big)^x dx - \frac{1}{5}\int \Big(\frac{1}{2}\Big)^x dx\\
&= 2\frac{\Big(\frac{1}{5}\Big)^x}{\ln\Big(\frac{1}{5}\Big)} - \frac{1}{5}\frac{\Big(\frac{1}{2}\Big)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C\\
&= -\frac{2}{5^x\ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x\ln 2} + C.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2\Big(x+\frac{3}{2}\Big)}{3\Big(x+\frac{2}{3}\Big)}dx = \frac{2}{3}\frac{\Big[\Big(x+\frac{2}{3}\Big)+\frac{5}{6}\Big]}{\Big(x+\frac{2}{3}\Big)}dx\\
&= \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\ln\Big|x+\frac{2}{3}\Big| + C. \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính các tích phân sau đây:

$$1)\quad \int \mathrm{tg}^2 x dx, \qquad 2)\quad \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx, \qquad 3)\quad \int \sqrt{1-\sin 2x}dx.$$

Giải. 1)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx\\
&= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.
\end{aligned}$$

2)

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx\Big)$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{tg}x + x) + C.$$

3)

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int |\sin x - \cos x|dx$$
$$= (\sin x + \cos x)\mathrm{sign}(\cos x - \sin x) + C. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Bằng các phép biến đổi đồng nhất, hãy đưa các tích phân đã cho về tích phân bảng và tính các tích phân đó[1]

1. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. (ĐS. $\frac{1}{4}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x$)

2. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$. (ĐS. $\mathrm{arctg}x - \frac{1}{x}$)

3. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. (ĐS. $\arcsin x + \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$)

4. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^4-1}}dx$. (ĐS. $\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \ln|x+\sqrt{x^2+1}|$)

5. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$. (ĐS. $\ln|x| - \frac{1}{4x^4}$)

6. $\int \frac{2^{3x}-1}{e^x-1}dx$. (ĐS. $\frac{e^{2x}}{2} + e^x + 1$)

[1] Để cho gọn, trong các "Đáp số" của chương này chúng tôi bỏ qua không viết các hằng số cộng C.

7. $\displaystyle\int \frac{2^{2x}-1}{\sqrt{2^x}}dx.$ (ĐS. $\displaystyle\frac{2}{\ln 2}\Big[\frac{2^{\frac{3x}{2}}}{3}+2^{-\frac{x}{2}}\Big]$)

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}.$ (ĐS. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt{2}}$)

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx.$ (ĐS. $\displaystyle\frac{3}{5}\ln^{5/3}x$)

10. $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}dx.$ (ĐS. $-e^x-2\ln|e^x-1|$)

11. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{1+e^x}.$ (ĐS. $\ln(1+e^x)$)

12. $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}dx.$ (ĐS. $\displaystyle\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}$)

13. $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^2 x dx.$ (ĐS. $-x-\mathrm{cotg}x$)

14. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sin 2x}dx,\ x\in\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big).$ (ĐS. $-\cos x+\sin x$)

15. $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x dx.$ (ĐS. $-e^{\cos x}$)

16. $\displaystyle\int e^x\cos e^x dx.$ (ĐS. $\sin e^x$)

17. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx.$ (ĐS. $\displaystyle\mathrm{tg}\frac{x}{2}$)

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$ (ĐS. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|\mathrm{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\Big)\Big|$)

19. $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^3}dx.$ (ĐS. $\displaystyle-\frac{2}{2(x+\sin x)^2}$)

20. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}dx.$ (ĐS. $\displaystyle-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^2 x}$)

21. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx.$ (ĐS. $-\ln|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}|$)

22. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^4 x}}dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}\arcsin\Big(\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{3}}\Big)$)

23. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arccotg}3x}{1+9x^2}dx.$ (ĐS. $-\dfrac{1}{6}\mathrm{arccotg}^2 3x$)

24. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{\mathrm{arctg}2x}}{1+4x^2}dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{8}\ln(1+4x^2)+\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}^{3/2}2x$)

25. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}(\arcsin^2 x+\arccos^2 x)$)

26. $\displaystyle\int \frac{x+\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$ (ĐS. $-\dfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\dfrac{1}{8}\arcsin^4 2x$)

27. $\displaystyle\int \frac{x+\arccos^{3/2}x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ (ĐS. $-\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2}{5}\arccos^{5/2}x$)

28. $\displaystyle\int x|x|dx.$ (ĐS. $\dfrac{|x|^3}{3}$)

29. $\displaystyle\int (2x-3)|x-2|dx.$

$$\text{(ĐS.}\quad F(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{7}{2}x^2-6x+C, & x<2\\ \dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{7}{2}x^2+6x+C, & x\geqslant 2\end{cases}\text{)}$$

30. $\displaystyle\int f(x)dx,\ f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 1-|x|, & |x|>1.\end{cases}$

$$\text{(ĐS.}\quad F(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^3}{3}+C & \text{nếu } |x|\leqslant 1\\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}\mathrm{sign}x+C & \text{nếu} |x|>1\end{cases}\text{)}$$

10.1.2 Phương pháp đổi biến

Định lý. *Giả sử:*

1) *Hàm $x = \varphi(t)$ xác định và khả vi trên khoảng T với tập hợp giá trị là khoảng X.*

2) *Hàm $y = f(x)$ xác định và có nguyên hàm $F(x)$ trên khoảng X.*

Khi đó hàm $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của hàm $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ trên khoảng T.

Từ định lý 10.1.1 suy rằng

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{10.1}$$

Vì

$$F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C)\big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx\big|_{x=\varphi(t)}$$

cho nên đẳng thức (10.1) có thể viết dưới dạng

$$\int f(x)dx\big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{10.2}$$

Đẳng thức (10.2) được gọi là công thức đổi biến trong tích phân bất định.

Nếu hàm $x = \varphi(t)$ có hàm ngược $t = \varphi^{-1}(x)$ thì từ (10.2) thu được

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{10.3}$$

Ta nêu một vài ví dụ về phép đổi biến.

i) Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa căn $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ thì sử dụng phép đổi biến $x = a\sin t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ii) Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa căn $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$ thì dùng phép đổi biến $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x = a\text{ch}t$.

iii) Nếu hàm dưới dấu tích phân chứa căn thức $\sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$ thì có thể đặt $x = a\text{tg}t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = a\text{sh}t$.

iv) Nếu hàm dưới dấu tích phân là $f(x) = R(e^x, e^{2x}, \ldots. e^{nx})$ thì có thể đặt $t = e^x$ (ở đây R là hàm hữu tỷ).

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} \quad (\text{đặt } t=\sin x, dt=\cos x dx)\\ &= \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \ \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính $\displaystyle I = \int \frac{x^3dx}{x^8-2}$.

Giải. ta có

$$I = \int \frac{\frac{1}{4}d(x^4)}{x^8-2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}d\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2\left[1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}$$

Đặt $t = \dfrac{x^4}{\sqrt{2}}$ ta thu được

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right| + C. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính $\displaystyle I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

Giải. Đặt $x(t) = a\text{tg}t \Rightarrow dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t}$. Do đó

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{a^3\text{tg}^2t\cdot\cos^3 tdt}{a^3\cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos tdt\\ &= \ln\left|\text{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin t + C.\end{aligned}$$

Vì $t = \text{arctg}\dfrac{x}{a}$ nên

$$\begin{aligned}I &= \ln\left|\text{tg}\left(\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin\left(\text{arctg}\frac{x}{a}\right) + C\\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.\end{aligned}$$

Thật vậy, vì $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha$ nên dễ dàng thấy rằng

$$\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot$$

Tiếp theo ta có

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1-\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1+\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right)}{-\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right)}$$
$$= \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

và từ đó suy ra điều phải chứng minh. ▲

Ví dụ 4. Tính $I = \displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}dx$.

Giải. Đặt $x = a\mathrm{sh}t$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2(1+\mathrm{sh}^2t)}a\mathrm{ch}tdt = a^2\int \mathrm{ch}^2tdt \\ &= a^2\int \frac{\mathrm{ch}2t+1}{2}dt = \frac{a^2}{2}\Big(\frac{1}{2}\mathrm{sh}2t+t\Big)+C \\ &= \frac{a^2}{2}(\mathrm{sh}t\cdot\mathrm{ch}t+t)+C. \end{aligned}$$

Vì $\mathrm{ch}t = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2t} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$. $e^t = \mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t = \dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ nên $t = \ln\Big|\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\Big|$ và do đó

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C. \quad ▲$$

Ví dụ 5. Tính

1) $\displaystyle I_1 = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx,$ 2) $\displaystyle I_2 = \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx.$

Giải. 1) Ta có

$$I_1 = \int \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2-7+\dfrac{1}{x^2}}}dx = \int \frac{d\Big(x-\dfrac{1}{x}\Big)}{\sqrt{\Big(x-\dfrac{1}{x}\Big)^2-5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}}$$

$$= \ln|t+\sqrt{t^2-5}| + C = \ln\Big|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}\Big| + C.$$

2) Ta viết biểu thức dưới dấu tích phân dưới dạng

$$f(x) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}} + 13\cdot\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$$

và thu được

$$\begin{aligned}I_2 &= \int f(x)dx\\ &= -\frac{3}{2}\int(-x^2+6x-8)^{-\frac{1}{2}}d(-x^2+6x-8) + 13\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}\\ &= -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + C. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tính

$$1)\quad \int\frac{dx}{\sin x}, \qquad 2)\quad I_2 = \int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Giải

1) *Cách I.* Ta có

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

Cách II.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{d\Big(\dfrac{x}{2}\Big)}{\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \int\frac{d\Big(\dfrac{x}{2}\Big)}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \int\frac{d\Big(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\Big)}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}} = \ln\Big|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big| + C.$$

2) Ta có

$$I_2 = \int \frac{\sin x \cos x[(\cos^2 x + 1) - 1]}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Ta đặt $t = 1 + \cos^2 x$. Từ đó $dt = -2\cos x \sin x dx$. Do đó

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t} dt = -\frac{t}{2} + \ln|t| + C,$$

trong đó $t = 1 + \cos^2 x$. ▲

Ví dụ 7. Tính

$$1)\quad I_1 = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+5}}, \qquad 2)\quad I_2 = \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx.$$

Giải

1) Đặt $e^x = t$. Ta có $e^x dx = dt$ và

$$I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} = \ln|t + \sqrt{t^2+5}| + C = \ln|e^x + \sqrt{e^{2x}+5}| + C.$$

2) Tương tự, đặt $e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ và thu được

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{t+1}{t-1}\frac{dt}{t} = \int \frac{2dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = 2\ln|t-1| - \ln|t| + C \\ &= 2\ln|e^x - 1| - \ln e^x + c \\ &= \ln(e^x - 1)^2 - x + C. \quad ▲ \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân:

1. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx.$ (ĐS. $\dfrac{4}{21}(3e^x - 4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$)

Chỉ dẫn. Đặt $e^x + 1 = t^4$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. (ĐS. $\ln\Big|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\Big|$)

3. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$. (ĐS. $e^x + \ln|e^x-1|$)

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$. (ĐS. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$)

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$.
(ĐS. $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|$)

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$. (ĐS. $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})$)

7. $\displaystyle\int \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$. (ĐS. $(\text{arctg}\sqrt{x})^2$)

8. $\displaystyle\int \sqrt{e^{3x}+e^{2x}}dx$. (ĐS. $\dfrac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}$)

9. $\displaystyle\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)dx$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}e^{2x^2+2x-1}$)

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$. (ĐS. $2\text{arctg}\sqrt{e^x-1}$)

11. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$)

12. $\displaystyle\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. (ĐS. $\dfrac{\arcsin 2^x}{\ln 2}$)

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$. (ĐS. $2[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})]$)
Chỉ dẫn. Đặt $x+1=t^2$.

14. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$. (ĐS. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\text{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}$)

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$. (ĐS. $\dfrac{2}{a}\big[\sqrt{ax+b}-m\ln|\sqrt{ax+b}+m|\big]$)

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$. (ĐS. $3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}-1|$)

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. (ĐS. $\mathrm{tg}(\arcsin x)$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \sin t$, $t \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$)

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. (ĐS. $\dfrac{1}{a^2}\sin\Big(\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}\Big)$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = a\mathrm{tg}t$, $t \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{\cos t}$, $t = \arcsin\dfrac{1}{x}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \dfrac{1}{\sin t}$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < 0$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

20. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$. (ĐS. $\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = a\sin t$.

21. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}dx$. (ĐS. $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = a\mathrm{sh}t$.

22. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}\big[x\sqrt{a^2+x^2} - a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\big]$)

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$. (ĐS. $-\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \dfrac{1}{t}$ hoặc $x = a\mathrm{tg}t$, hoặc $x = a\mathrm{sh}t$.

24. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. (ĐS. $\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = a\sin t$.

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{a}{x}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \dfrac{1}{t}$, hoặc $x = \dfrac{a}{\cos t}$ hoặc $x = a\text{ch}t$.

26. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$ (ĐS. $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x$)

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$ (ĐS. $\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$)

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$ (ĐS. $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{9x}$)

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$ (ĐS. $-\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$)

30. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx.$

(ĐS. $-\dfrac{x}{4}(a^2-x^2)^{3/2} + \dfrac{a^2}{8}x\sqrt{x^2-a^2} + \dfrac{a^4}{8}\arcsin\dfrac{x}{a}$)

31. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$ (ĐS. $-\sqrt{a^2-x^2} + \arcsin\dfrac{x}{a}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = a\cos 2t$.

32. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

(ĐS. $\sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a})$ nếu $x > a$,
$-\sqrt{x^2-a^2} + 2a\ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a})$ nếu $x < -a$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \dfrac{a}{\cos 2t}$.

33. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}.$ (ĐS. $\arccos\dfrac{1}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \dfrac{1}{t}$.

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ (ĐS. $2\arcsin\sqrt{x}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \sin^2 t$.

35. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$ (ĐS. $\sqrt{x^2+1} - \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$)

36. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}.$ (ĐS. $-\dfrac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2} - \dfrac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$)

37. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^2}}{x^6}dx.$ (ĐS. $-\dfrac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}$)

38. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$ (ĐS. $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$)

39. $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}.$ (ĐS. $\ln\left|\dfrac{xe^x}{1+xe^x}\right|$)

Chỉ dẫn. Nhân tử số và mẫu số với e^x rồi đặt $xe^x = t$.

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2a^3}\left[\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + \dfrac{ax}{x^2+a^2}\right]$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = a\mathrm{tg}t$.

10.1.3 Phương pháp tích phân từng phần

Phương pháp tích phân từng phần dựa trên định lý sau đây.

Định lý. *Giả sử trên khoảng D các hàm $u(x)$ và $v(x)$ khả vi và hàm $v(x)u'(x)$ có nguyên hàm. Khi đó hàm $u(x)v'(x)$ có nguyên hàm trên D và*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \tag{10.4}$$

Công thức (10.4) được gọi là công thức tính tích phân từng phần. Vì $u'(x)dx = du$ và $v'(x)dx = dv$ nên (10.4) có thể viết dưới dạng

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{10.4*}$$

Thực tế cho thấy rằng phần lớn các tích phân tính được bằng phép tích phân từng phần có thể phân thành ba nhóm sau đây.

Nhóm I gồm những tích phân mà hàm dưới dấu tích phân có chứa thừa số là một trong các hàm sau đây: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}x$, $(\mathrm{arctg}x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln\varphi(x)$, $\arcsin\varphi(x)$,...

Để tính các tích phân này ta áp dụng công thức (10.4*) bằng cách đặt $u(x)$ bằng một trong các hàm đã chỉ ra còn dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân.

Nhóm II gồm những tích phân mà biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $P(x)e^{ax}$, $P(x)\cos bx$, $P(x)\sin bx$ trong đó $P(x)$ là đa thức, a, b là hằng số.

Để tính các tích phân này ta áp dụng (10.4*) bằng cách đặt $u(x) = P(x)$, dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân. Sau mỗi lần tích phân từng phần bậc của đa thức sẽ giảm một đơn vị.

Nhóm III gồm những tích phân mà hàm dưới dấu tích phân có dạng: $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\sin(\ln x)$, $\cos(\ln x)$,... Sau hai lần tích phân từng phần ta lại thu được tích phân ban đầu với hệ số nào đó. Đó là phương trình tuyến tính với ẩn là tích phân cần tính.

Đương nhiên là ba nhóm vừa nêu không vét hết mọi tích phân tính được bằng tích phân từng phần (xem ví dụ 6).

Nhận xét. Nhờ các phương pháp đổi biến và tích phân từng phần ta chứng minh được các công thức thường hay sử dụng sau đây:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \ a \neq 0.$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ \ a \neq 0.$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \ a \neq 0.$

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C.$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int \sqrt{x}\mathrm{arctg}\sqrt{x}dx$.

Giải. Tích phân đã cho thuộc nhóm I. Ta đặt

$$u(x) = \mathrm{arctg}\sqrt{x},$$
$$dv = \sqrt{x}dx.$$

Khi đó $du = \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, $v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Do đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x}dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int \left[1 - \frac{1}{1+x}\right]dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}(x - \ln|1+x|) + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính $I = \int \mathrm{arc}\cos^2 x dx$.

Giải. Giả sử $u = \mathrm{arc}\cos^2 x$, $dv = dx$. Khi đó

$$du = -\frac{2\mathrm{arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = x.$$

Theo (10.4*) ta có

$$I = x\mathrm{arc}\cos^2 x + 2\int \frac{x\mathrm{arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Để tính tích phân ở vế phải đẳng thức thu được ta đặt $u = \mathrm{arc}\cos x$, $dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. Khi đó

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = -\int d(\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2} + C_1$$

và ta chỉ cần lấy $v = -\sqrt{1-x^2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x\mathrm{arc}\cos x}{\sqrt{21-x^2}}dx &= -\sqrt{1-x^2}\mathrm{arc}\cos x - \int dx \\ &= -\sqrt{1-x^2}\mathrm{arc}\cos x - x + C_2. \end{aligned}$$

Cuối cùng ta thu được

$$I = x\text{arc}\cos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\text{arc}\cos x - 2x + C. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính $I = \displaystyle\int x^2 \sin 3x dx$.

Giải. Tích phân đã cho thuộc nhóm II. Ta đặt

$$u(x) = x^2,$$
$$dv = \sin 3x dx.$$

Khi đó $du = 2xdx$, $v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x$ và

$$I = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3x dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}I_1.$$

Ta cần tính I_1. Đặt $u = x$, $dv = \cos 3x dx$. Khi đó $du = 1dx$, $v = \dfrac{1}{3}\sin 3x$. Từ đó

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\Big[\frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx\Big] \\ &= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu đặt $u = \sin 3x$, $dv = x^2dx$ thì lần tích phân từng phần thứ nhất không đưa đến tích phân đơn giản hơn.

Ví dụ 4. Tính $I = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx$; $a, b \neq 0$.

Giải. Đây là tích phân thuộc nhóm III. Ta đặt $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$. Khi đó $du = ae^{ax}dx$, $v = \dfrac{1}{b}\sin bx$ và

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I_1.$$

Để tính I_1 ta đặt $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx dx$. Khi đó $du = ae^{ax}dx$, $v = -\dfrac{1}{b}\cos bx$ và

$$I_1 = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Thế I_1 vào biểu thức đối với I ta thu được

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Như vậy sau hai lần tích phân từng phần ta thu được phương trình tuyến tính với ẩn là I. Giải phương trình thu được ta có

$$\int e^{ax}\cos bx dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Tính $I = \int \sin(\ln \mathrm{x})dx$.

Giải. Đặt $u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$. Khi đó $du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)dx$, $v = x$. Ta thu được

$$I = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - I_1.$$

Để tính I_1 ta lại đặt $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$. Khi đó $du = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)dx$, $v = x$ và

$$I_1 = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx.$$

Thay I_1 vào biểu thức đối với I thu được phương trình

$$I = x(\sin\ln x - \cos\ln x) - I$$

và từ đó

$$I = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C. \quad \blacktriangle$$

Nhận xét. Trong các ví dụ trên đây ta đã thấy rằng từ vi phân đã biết dv hàm $v(x)$ xác định không đơn trị. Tuy nhiên trong công thức (10.4) và (10.4*) ta có thể chọn v là hàm bất kỳ với vi phân đã cho dv.

Ví dụ 6. Tính

$$1)\quad I = \int \frac{xdx}{\sin^2 x}\,; \qquad 2)\quad I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Giải. 1) Rõ ràng tích phân này không thuộc bất cứ nhóm nào trong ba nhóm đã nêu. Thế nhưng bằng cách đặt $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$ và áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} I &= -x\text{cotg}x + \int \text{cotg}x dx = -x\text{cotg}x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \\ &= -x\text{cotg}x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\text{cotg}x + \ln|\sin x| + C. \end{aligned}$$

2) Tích phân I_n được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\Big[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\Big] \\ &= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x\frac{2xdx}{(x^2+a^2)^n}\,. \end{aligned}$$

Ta tính tích phân ở vế phải bằng phương pháp tích phân từng phần. Đặt $u = x$, $dv = \dfrac{2xdx}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n}$. Khi đó $du = dx$, $v = -\dfrac{1}{(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$ và

$$\frac{1}{2a^2}\int x\frac{2xdx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

Từ đó suy rằng

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

hay là

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}. \qquad (*)$$

Ta nhận xét rằng tích phân I_n không thuộc bất cứ nhóm nào trong ba nhóm đã chỉ ra.

Khi $n = 1$ ta có

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Áp dụng công thức truy hồi (*) ta có thể tính I_2 qua I_1 rồi I_3 qua I_2,... ▲

Ví dụ 7. Tính $I = \displaystyle\int xe^{ax}\cos bx dx$.

Giải. Đặt $u = x$, $dv = e^{ax}\cos bx dx$. Khi đó $du = dx$,

$$v = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}$$

(xem ví dụ 4). Như vậy

$$\begin{aligned} I &= xe^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2}\int e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)dx \\ &= xe^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2}\int e^{ax}\cos bx dx \\ &\quad - \frac{b}{a^2 + b^2}\int e^{ax}\sin bx dx. \end{aligned}$$

Tích phân thứ nhất ở vế phải được tính trong ví dụ 4, tích phân thứ hai được tính tương tự và bằng

$$\int e^{ax}\sin bx dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}\cdot$$

Thay các kết quả thu được vào biểu thức đối với I ta có

$$\begin{aligned} I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\Big[&\Big(x - \frac{a}{a^2 + b^2}\Big)(a\cos bx + b\sin bx) \\ &- \frac{b}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)\Big] + C \quad ▲ \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. $\int x2^x dx.$ (ĐS. $\dfrac{2^x(x\ln 2 - 1)}{\ln^2 2}$)

2. $\int x^2 e^{-x} dx.$ (ĐS. $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$)

3. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$ (ĐS. $-\dfrac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}$)

4. $\int (x^3 + x)e^{5x} dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{5}e^{5x}\Big(x^3 - \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{31}{25}x - \dfrac{31}{125}\Big)$)

5. $\int \text{arc}\sin x dx.$ (ĐS. $x\text{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}$)

6. $\int x\text{arc}\sin x dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{4}(2x^2-1)\text{arc}\sin x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$)

7. $\int x^2 \text{arc}\sin 2x dx.$ (ĐS. $\dfrac{x^3}{3}\text{arc}\sin 2x + \dfrac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2}$)

8. $\int \text{arctg}x dx.$ (ĐS. $x\text{arctg}x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$)

9. $\int \text{arctg}\sqrt{x} dx.$ (ĐS. $(1+x)\text{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$)

10. $\int x^3 \text{arctg}x dx.$ (ĐS. $\dfrac{x^4-1}{4}\text{arctg}x - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x}{4}$)

11. $\int (\text{arctg}x)^2 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{x^2+1}{2}(\text{arctg}x)^2 - x\text{arctg}x + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$)

12. $\int (\text{arc}\sin x)^2 dx.$ (ĐS. $x(\text{arc}\sin x)^2 + 2\text{arc}\sin x\sqrt{1-x^2} - 2x$)

13. $\int \dfrac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{x+1}} dx.$ (ĐS. $2\sqrt{x+1}\text{arc}\sin x + 4\sqrt{1-x}$)

14. $\int \dfrac{\text{arc}\sin x}{x^2} dx.$ (ĐS. $-\dfrac{\text{arc}\sin x}{x} - \ln\Big|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\Big|$)

15. $\int \dfrac{x\text{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$ (ĐS. $\sqrt{1+x^2}\text{arcrg}x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$)

16. $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$ (ĐS. $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})$)

17. $\displaystyle\int \ln x dx.$ (ĐS. $x(\ln x - 1)$)

18. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{2}{3}x^{3/2}\Big(\ln^2 x - \dfrac{4}{3}\ln x + \dfrac{8}{9}\Big)$)

19. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{16+x^2})dsx.$ (ĐS. $x\ln(x+\sqrt{16+x^2})-\sqrt{16+x^2}$)

20. $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ (ĐS. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$)

21. $\displaystyle\int \sin x\ln(\mathrm{tg}x)dx.$ (ĐS. $\ln\Big(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\Big)-\cos x\ln(\mathrm{tg}x)$)

22. $\displaystyle\int x^2\ln(1+x)dx.$ (ĐS. $\dfrac{(x^3+1)\ln(x+1)}{3}-\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x}{3}$)

23. $\displaystyle\int x^2\sin 2x dx.$ (ĐS. $\dfrac{1-2x^2}{4}\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x$)

24. $\displaystyle\int x^3\cos(2x^2)dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{8}(2x^2\sin 2x^2+\cos 2x^2)$)

25. $\displaystyle\int e^x\sin x dx.$ (ĐS. $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}$)

26. $\displaystyle\int 3^x\cos x dx.$ (ĐS. $\dfrac{\sin x+(\ln 3)\cos x}{1+\ln^2 3}3^x$)

27. $\displaystyle\int e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)dx.$ (ĐS. $\dfrac{e^{3x}}{13}(\sin 2x-5\cos 2x)$)

28. $\displaystyle\int xe^{2x}\sin 5x dx.$

(ĐS. $\dfrac{e^{2x}}{29}\Big[\Big(2x+\dfrac{21}{29}\Big)\sin 5x+\Big(-5x+\dfrac{20}{29}\Big)\cos 5x\Big]$)

29. $\displaystyle\int x^2e^x\sin x dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}\big[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x\big]e^x$)

30. $\int x^2 e^x \cos x dx.$ (ĐS. $\dfrac{(x-1)^2 \sin x + (x^2-1)\cos x}{2} e^x$)

31. $\int x^2 \sin(\ln x) dx.$ (ĐS. $\dfrac{[3\sin x(\ln x) - \cos(\ln x)]x^3}{10}$)

32. Tìm công thức truy hồi đối với mỗi tích phân I_n được cho dưới đây:

1) $I_n = \int x^n e^{ax} dx$, $a \neq 0$. (ĐS. $I_n = \dfrac{1}{a} x^n e^{ax} - \dfrac{n}{a} I_{n-1}$)

2) $I_n = \int \ln^n x dx.$ (ĐS. $I_n = x \ln^n x - nI_{n-1}$)

3) $I_n = \int x^\alpha \ln^n x dx$, $\alpha \neq -1$. (ĐS. $I_n = \dfrac{x^{\alpha+1}\ln^n x}{\alpha+1} - \dfrac{n}{\alpha+1} I_{n-1}$)

4) $I_n = \int \dfrac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}$, $n > 2$. (ĐS. $I_n = \dfrac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a}}{n} - \dfrac{n-1}{n} a I_{n-2}$)

5) $I_n = \int \sin^n x dx$, $n > 2$. (ĐS. $I_n = -\dfrac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$)

6) $I_n = \int \cos^n x dx$, $n > 2$. (ĐS. $I_n = \dfrac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$)

7) $I_n = \int \dfrac{dx}{\cos^n x}$, $n > 2$. (ĐS. $I_n = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}$)

10.2 Các lớp hàm khả tích trong lớp các hàm sơ cấp

10.2.1 Tích phân các hàm hữu tỷ

1) Phương pháp hệ số bất định. Hàm dạng

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

trong đó $P_m(x)$ là đa thức bậc m, $Q_n(x)$ là đa thức bậc n được gọi là hàm hữu tỷ (hay phân thức hữu tỷ). Nếu $m \geqslant n$ thì $P_m(x)/Q_n(x)$ được gọi là phân thức hữu tỷ không thực sự; nếu $m < n$ thì $P_m(x)/Q_n(x)$ được gọi là phân thức hữu tỷ thực sự.

Nếu $R(x)$ là phân thức hữu tỷ không thực sự thì nhờ phép chia đa thức ta có thể tách phần nguyên $W(x)$ là đa thức sao cho

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W(x) + \frac{P_k(x)}{Q_n(x)} \tag{10.5}$$

trong đó $k < n$ và $W(x)$ là đa thức bậc $m - n$.

Từ (10.5) suy rằng việc tính tích phân phân thức hữu tỷ không thực sự được quy về tính tích phân phân thức hữu tỷ thực sự và tích phân một đa thức.

Định lý 10.2.1. *Giả sử $P_m(x)/Q_n(x)$ là phân thức hữu tỷ thực sự và*

$$Q(x) = (x-a)^\alpha \cdots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\gamma \cdots (x^2+rx+s)^\delta$$

trong đó $a, \dots, b$ là các nghiệm thực, $x^2+px+q, \dots, x^2+rx+s$ là những tam thức bậc hai không có nghiệm thực. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \cdots + \\ &+ \frac{K_\delta x + L_\delta}{(x^2+rx+s)^\delta} + \cdots + \frac{K_1 x + L_1}{x^2+rx+s},\end{aligned} \tag{10.6}$$

trong đó A_i, B_i, M_i, N_i, K_i và L_i là các số thực.

Các phân thức ở vế phải của (10.6) được gọi là các phân thức đơn giản hay các phân thức cơ bản và đẳng thức (10.6) được gọi là khai triển phân thức hữu tỷ thực sự $P(x)/Q(x)$ thành tổng các phân thức cơ bản với hệ số thực.

Để tính các hệ số $A_i, B_i, \dots, K_i, L_i$ ta có thể áp dụng

Phương pháp I. Quy đồng mẫu số đẳng thức (10.6) và sau đó cân bằng các hệ số của lũy thừa cùng bậc của biến x và đi đến hệ phương trình để xác định $A_i, \dots, L_i$ (phương pháp hệ số bất định).

Phương pháp II. Các hệ số $A_i, \dots, L_i$ cũng có thể xác định bằng cách thay x trong (10.6) (hoặc đẳng thức tương đương với (10.6)) bởi các số được chọn một cách thích hợp.

Từ (10.6) ta có

Định lý 10.2.2. *Tích phân bất định của mọi hàm hữu tỷ đều biểu diễn được qua các hàm sơ cấp mà cụ thể là qua các hàm hữu tỷ, hàm lôgarit và hàm arctang.*

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính $I = \displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$

Giải. Ta có

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Từ đó suy rằng

$$x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \tag{10.7}$$

Ta xác định các hệ số A, B_1, B_2 bằng các phương pháp sau đây.

Phương pháp I. Viết đẳng thức (10.7) dưới dạng

$$x \equiv (A+B_1)x^2 + (2A+B_2)x + (A-B_1-B_2).$$

Cân bằng các hệ số của lũy thừa cùng bậc của x ta thu được

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ 2A + B_2 = 1 \\ A - B_1 - B_2 = 0. \end{cases}$$

Từ đó $A = \dfrac{1}{4}$, $B_1 = -\dfrac{1}{4}$, $B_2 = \dfrac{1}{2}$.

Phương pháp II. Thay $x = 1$ vào (10.7) ta có $1 = A \cdot 4 \Rightarrow A = \dfrac{1}{4}$. Tiếp theo, thay $x = -1$ vào (10.7) ta thu được: $-1 = -B_2 \cdot 2$ hay là $B_2 = \dfrac{1}{2}$. Để tìm B_1 ta thế giá trị $x = 0$ vào (10.7) và thu được $0 = A - B_1 - B_2$ hay là $B_1 = A - B_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính $I = \displaystyle\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx$.

Giải. Khai triển hàm dưới dấu tích phân thành tổng các phân thức cơ bản

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+F}{(1+x^2)^2}$$

Từ đó

$$3x + 1 \equiv (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+F)x + A.$$

Cân bằng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta thu được

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 2A + B + D = 0 \Rightarrow A = 1, B = -1, C = 0, D = -1, F = 3 \\ C + F = 3 \\ A = 1. \end{cases}$$

Từ đó suy rằng

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-2}d(1+x^2) + 3\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + 3I_2. \end{aligned}$$

Ta tính $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ bằng công thức truy hồi thu được trong 10.1. Ta có

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}\\
&= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C.
\end{aligned}
$$

Cuối cùng ta thu được

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}x + C. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân (1-12)

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

(ĐS. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}|x-3|$)

2. $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx$.

ĐS. $\displaystyle\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \mathrm{arctg}(2x+1)$)

3. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx$.

ĐS. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$)

4. $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x(x-2)(x+2)}dx$.

(ĐS. $\displaystyle\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{21}{8}\ln|x-2| + \frac{21}{8}\ln|x+2|$)

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}$.

(ĐS. $\displaystyle \ln\Big|\frac{x-1}{x}\Big| - \frac{10}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}$)

6. $\displaystyle\int \frac{x^4-x^2+1}{(x^2-1)(x^2+4)(x^2-2)}dx$.

(ĐS. $\displaystyle -\frac{1}{10}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big| + \frac{7}{20}\text{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\Big|$)

7. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx$.

(ĐS. $\displaystyle -\frac{5}{4}\ln(x^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\ln(x^2+1) + \frac{9}{2}\text{arctg}x$)

8. $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}$.

(ĐS. $\displaystyle \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$)

9. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$.

(ĐS. $\displaystyle \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\text{arctg}x$)

10. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x^4}dx$.

(ĐS. $\displaystyle -x + \ln\Big|\frac{x+1}{x-1}\Big| + \frac{1}{2}\text{arctg}x$)

11. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

(ĐS. $\displaystyle \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \text{arctg}(x+1)$)

12. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx.$

$$\left(\text{ĐS.}\quad x+\frac{3-x}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)\right)$$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)^3}dx.$

$$\left(\text{ĐS.}\quad \frac{3}{5}\ln|x^2-2|-\frac{3}{10}\ln|x^2+1|+\frac{1-x}{x^2+1}-\frac{11}{5}\operatorname{arctg}x\right)$$

14. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}dx.$

$$\left(\text{ĐS.}\quad \frac{4}{x+2}+\ln|x+1|\right)$$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx.$

$$\left(\text{ĐS.}\quad -\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|\right)$$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^2}$

$$\left(\text{ĐS.}\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

17. $\displaystyle\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx.$

$$\left(\text{ĐS.}\quad 2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}\right)$$

18. $\displaystyle\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx.$

$$\left(\text{ĐS.}\quad x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

19. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx.$

$$(\text{ĐS.} \quad \ln\frac{|x|(x^2 - x + 1)}{(x+1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$$

20. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3}{x^4 + 10x^2 + 25} dx.$

$$(\text{ĐS.} \quad \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + \frac{25 - 3x}{10(x^2+5)} - \frac{3}{10\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}})$$

Chỉ dẫn. $x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2+5)^2$.

10.2.2 Tích phân một số hàm vô tỷ đơn giản

Một số tích phân hàm vô tỷ thường gặp có thể tính được bằng phương pháp hữu tỷ hóa hàm dưới dấu tích phân. Nội dung của phương pháp này là tìm một phép biến đổi đưa tích phân đã cho của hàm vô tỷ về tích phân hàm hữu tỷ. Trong tiết này ta trình bày những phép đổi biến cho phép hữu tỷ hóa đối với một số lớp hàm vô tỷ quan trọng nhất. Ta quy ước ký hiệu $R(x_1, x_2, \dots)$ hay $r(x_1, x_2, \dots)$ là hàm hữu tỷ đối với mỗi biến $x_1, x_2, \dots, x_n$.

I. *Tích phân các hàm vô tỷ phân tuyến tính.* Tích phân dạng

$$\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{p_1}, \dots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{p_n}\Big) dx \qquad (10.8)$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$; $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Q}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $ad - bc \neq 0$ được hữu tỷ hóa nhờ phép đổi biến

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$$

ở đây m là mẫu số chung của các số hữu tỷ $p_1, \dots, p_n$.

II. *Tích phân dạng*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \quad a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0 \qquad (10.9)$$

có thể hữu tỷ hóa nhờ phép thế Euler:

(i) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, nếu $a > 0$;

(ii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, nếu $c > 0$;

(iii) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_1)t$
$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_2)t$

trong đó x_1 và x_2 là các nghiệm thực khác nhau của tam thức bậc hai $ax^2+nbx+c$. (Dấu ở các vế phải của đẳng thức có thể lấy theo tổ hợp tùy ý).

III. *Tích phân của vi phân nhị thức. Đó là những tích phân dạng*

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx \tag{10.10}$$

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ và $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$; biểu thức $x^m(zx^n+b)^p$ được gọi là vi phân nhị thức.

Tích phân vi phân nhị thức (10.10) đưa được về tích phân hàm hữu tỷ trong ba trường hợp sau đây:

1) p là số nguyên,

2) $\dfrac{m+1}{n}$ là số nguyên,

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ là số nguyên.

Định lý (Trebưsép). *Tích phân vi phân nhị thức* (10.10) *biểu diễn được dưới dạng hữu hạn nhờ các hàm sơ cấp (tức là đưa được về tích phân hàm hữu tỷ hay hữu tỷ hóa được) khi và chỉ khi ít nhất một trong ba số* p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n}+p$ *là số nguyên.*

1) Nếu p là số nguyên thì phép hữu tỷ hóa sẽ là

$$x = t^N$$

trong đó N là mẫu số chung của các phân thức m và n.

2) Nếu $\dfrac{m+1}{n}$ là số nguyên thì đặt

$$ax^n+b = t^M$$

trong đó M là mẫu số của p.

3) Nếu $\dfrac{m+1}{n}+p$ là số nguyên thì đặt

$$a+bx^{-n}=t^M$$

trong đó M là mẫu số của p.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính

$$1)\quad I_1=\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx\,,\qquad 2)\quad I_2=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}\,\cdot$$

Giải. 1) Tích phân đã cho có dạng I, trong đó $p_1=1$, $p_2=\dfrac{1}{3}$, $p_3=\dfrac{1}{6}$. Mẫu số chung của p_1,p_2,p_3 là $m=6$. Do đó ta đặt $x=t^6$. Khi đó:

$$\begin{aligned}I&=6\int\frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}t^5dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt\\&=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\end{aligned}$$

2) Bằng phép biến đổi sơ cấp ta có

$$I_2=\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}\,\cdot$$

Đó là tích phân dạng I. Ta đặt

$$\frac{2-x}{2+x}=t^3$$

và thu được

$$x=2\frac{1-t^3}{1+t^3},\quad dx=-12\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}\,\cdot$$

Từ đó

$$I_2 = -12\int \frac{t^3(t^3+1)^2dt}{16t^6(t^3+1)^2} = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân

$$1)\quad I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}, \quad 2)\quad I_2 = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}},$$

$$3)\quad I_3 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}, .$$

Giải. 1) Tích phân I_1 là tích phân dạng II và $a = 1 > 0$ nên ta sử dụng phép thế Euler (i)

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+t, \quad x^2+x+1 = x^2+2tx+t^2$$

$$x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \quad \sqrt{x^2+x+1} = x+t = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$$

$$dx = \frac{2(-t^2+t-1)}{(1-2t)^2}dt.$$

Từ đó

$$I_1 = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}{1-x+\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C.$$

2) Đối với tích phân I_2 (dạng II) ta có

$$-x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3)$$

và do đó ta sử dụng phép thế Euler (iii):

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = t(x-1).$$

Khi đó

$$-(x-1)(x-3) = t^2(x-1)^2, \quad -(x-3) = t^2(x-1), \quad t = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}},$$

$$x = \frac{t^2+3}{t^2+1}, \quad \sqrt{-x^2+4x-3} = t(x-1) = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{-4tdt}{(t^2+1)^2}$$

và thu được

$$I_2 = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}\right| + C.$$

3) Đối với tích phân I_3 (dạng III) ta có $C = 1 > 0$. Ta sử dụng phép thế Euler (ii) và

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx-1, \quad 1+x-x^2 = t^2x^2-2tx+1,$$
$$x = \frac{2t+1}{t^2+1}, \quad \sqrt{1+x-x^2} = tx-1 = \frac{t^2+t-1}{t^2+1},$$
$$t = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}, \quad dx = \frac{-2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}\cdot$$

Do đó

$$I_3 = -2\int \frac{dt}{t^2+2t+2} = -2\int \frac{d(t+1)}{1+(t+1)^2} = -2\mathrm{arctg}(t+1) + C$$
$$= -2\mathrm{arctg}\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính các tích phân

1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx,\ x \geqslant 0;$ 2) $I_2 = \displaystyle\int \sqrt{x}\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\right)dx;$

3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}\cdot$

Giải. 1) Ta có

$$I_1 = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx,$$

trong đó $m = \dfrac{1}{2}$, $n = \dfrac{1}{3}$, $p = -2$, mẫu số chung của m và n bằng 6. Vì $p = -2$ là số nguyên, ta áp dụng phép đổi biến $x = t^6$ và thu được

$$I_1 = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt = 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt$$
$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt.$$

Vì

$$\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int td\Big(\frac{1}{1+t^2}\Big) = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\text{arctg}t$$

nên cuối cùng ta thu được

$$I_1 = \frac{6}{5}x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} - 21\text{arctg}x^{1/6} + C.$$

2) Ta viết I_2 dưới dạng

$$I_2 = \int x^{\frac{1}{2}}\big(1 - x^{-\frac{3}{2}}\big)^{\frac{1}{4}}dx.$$

Ở đây $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ và $\frac{m+1}{n} = -1$ là số nguyên và ta có trường hợp thứ hai. Ta sử dụng phép đổi biến

$$1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}} = t^4.$$

Khi đó $x = (1-t^4)^{-\frac{2}{3}}$, $dx = \frac{8}{3}(1-t^4)^{-\frac{5}{3}}t^3dt$ và do vậy

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{8}{3}\int \frac{t^4}{(1-t^4)^2}dt = \frac{2}{3}\int td\Big(\frac{1}{1-t^4}\Big) = \frac{2}{3}\Big[\frac{t}{1-t^4} - \int \frac{dt}{1-t^2}\Big] \\
&= \frac{2t}{3(1-t^4)} - \frac{1}{3}\int \Big[\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2}\Big]dt \\
&= \frac{2t}{3(1-t^4)} - \frac{1}{6}\ln\Big|\frac{1+t}{1-t}\Big| - \frac{1}{3}\text{arctg}t + C,
\end{aligned}$$

trong đó $t = \big(1 - x^{-3/2}\big)^{1/4}$.

3) Ta viết I_3 dưới dạng

$$I_3 = \int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx.$$

Ở đây $m = -2$, $n = 3$, $p = -\frac{5}{3}$ và $\frac{m+1}{n} + p = -2$ là số nguyên. Do vậy ta có trường hợp thứ ba. Ta thực hiện phép đổi biến

$$1 + x^{-3} = t^3 \Rightarrow 1 + x^3 = t^3x^3.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
&x^3 = \frac{1}{t^3-1}, \quad 1+x^3 = \frac{t^3}{t^3-1}, \quad x = (t^3-1)^{-\frac{1}{3}}\\
&dx = -t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}dt, \quad x^{-2} = (t^3-1)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\int (t^3-1)^{2/3}\Big(\frac{t^3}{t^3-1}\Big)^{-5/3} t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}dt = \int \frac{1-t^3}{t^3}dt\\
&= \int t^{-3}dt - \int dt = \frac{t^{-2}}{-2} - t + C = C - \frac{1+2t^3}{2t^3}\\
&= C - \frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\cdot \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân (1-15)

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$.

$$(\text{ĐS.}\quad u^3+\frac{3}{2}u^2+3u+3\ln|u-1|,\quad u^6=2x-1)$$

2. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{2}{9}\,\frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}})$$

3. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x)$$

4. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}$.

$$(\text{ĐS.}\quad -\frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}},\quad t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}})$$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{1}{2}(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)$$

6. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$.

$$(\text{ĐS.}\quad 6\Big[\frac{1}{9}u^9+\frac{1}{8}u^8+\frac{1}{7}u^7+\frac{1}{6}u^6+\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{4}u^4\Big],\ u^6=x+1)$$

7. $\displaystyle\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

$$(\text{ĐS.}\quad \Big(1-\frac{1}{2}x\Big)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x)$$

8. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}.$

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{3}{16}\sqrt[3]{\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big)^3})$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}.$ $\quad$ (ĐS. $2\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$)

Chỉ dẫn. Viết $\sqrt{(x-1)^3(x-2)} = (x-1)(x-2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$, đặt $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{1}{2}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1}-\sqrt{3}\text{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}},\quad u^3=\frac{x+1}{x-1})$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$ $\quad$ (ĐS. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{x-1}}$)

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$ $\quad$ (ĐS. $\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$)

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^2}}.$ $\quad$ (ĐS. $\dfrac{3}{16}\dfrac{3x-5}{x-1}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$)

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}.$ $\quad$ (ĐS. $-3\sqrt[6]{\dfrac{x-5}{x-7}}$)

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}},\ a\neq b.$ $\quad$ (ĐS. $\dfrac{n}{b-a}\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}$)

16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx.$

$$\text{(ĐS. } \frac{x^2}{3} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)$$

Sử dụng các phép thế Euler để tính các tích phân sau đây (17-22)

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$ (ĐS. $\ln\Big|\dfrac{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}{1-x+\sqrt{x^2+x+1}}\Big|$)

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}.$ (ĐS. $\ln\Big|\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}\Big|$)

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}.$ (ĐS. $-2\mathrm{arctg}\dfrac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}$)

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

$$\text{(ĐS. } \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\Big|\frac{x-1}{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}\Big|)$$

21. $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}.$ (ĐS. $\dfrac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}}$)

22. $\displaystyle\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

$$\text{(ĐS. } 5\sqrt{x^2+2x+5} - \ln\big|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\big|)$$

Chỉ dẫn. Có thể đổi biến $t = \dfrac{1}{2}(x^2+2x+5)' = x+1.$

Tính các tích phân của vi phân nhị thức

23. $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{3}}(1-x^{1/6})^{-1}dx.$ (ĐS. $6x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+6\ln\big|x^{\frac{1}{6}}-1\big|$)

24. $\displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}dx.$ (ĐS. $-\dfrac{3}{2}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$)

25. $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{-10}dx.$ (ĐS. $\dfrac{4}{9}(1+x^{\frac{1}{4}})^{-9}-\dfrac{1}{2}(1+x^{\frac{1}{4}})^{-8}$)

26. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx.$ (ĐS. $3\Big(\dfrac{t^5}{5} - \dfrac{2t^3}{3} + t\Big)$, $t = \sqrt{1+x^{2/3}}$)

27. $\displaystyle\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{2}{3}}dx.$ (ĐS. $\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{2x^2+1}}$)

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$ (ĐS. $\dfrac{1}{3}x^{-3}(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}$)

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)^{5/3}}.$ (ĐS. $-\dfrac{1}{8}x^{-1}(3x+4)(2+x^3)^{-\frac{2}{3}}$)

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}.$ (ĐS. $-2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}$)

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^3}.$ (ĐS. $-\dfrac{3}{2(\sqrt[3]{x}+1)^2}$)

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}dx.$

(ĐS. $6\Big(\dfrac{u^7}{7} - \dfrac{3}{5}u^5 + u^3 - u^2,\quad u^2 = \sqrt[3]{x}+1\Big)$)

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}.$

(ĐS. $\dfrac{u^5}{5} - \dfrac{2u^3}{3} + u,\quad u = \sqrt{1-x^{-2}}$)

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

(ĐS. $\dfrac{1}{10}\ln\Big|\dfrac{u^2-2u+1}{u^2+u+1}\Big| + \dfrac{\sqrt{3}}{5}\mathrm{arctg}\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}},\quad u^3 = 1+x^5$)

35. $\displaystyle\int x^7\sqrt{1+x^2}dx.$

(ĐS. $\dfrac{u^9}{9} - \dfrac{3u^7}{7} + \dfrac{3u^5}{5} - \dfrac{u^3}{3},\quad u^2 = 1+x^2$)

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

(ĐS. $\displaystyle\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}, \quad u^3 = 1+x^{-3}$)

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

(ĐS. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{2}\text{arctg}u, \quad u^4 = 1+x^{-4}$)

38. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x-x^3}dx$.

(ĐS. $\displaystyle\frac{u}{2(u^3+1)} - \frac{1}{12}\ln\frac{u^2+2u+1}{u^2-u+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}},\ u^3 = x^{-2}-1$)

10.2.3 Tích phân các hàm lượng giác

I. Tích phân dạng

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{10.11}$$

trong đó $R(u,v)$ là hàm hữu tỷ của các biến u bà v luôn luôn có thể hữu tỷ hóa được nhờ phép đổi biến $t = \text{tg}\dfrac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Từ đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}\cdot$$

Nhược điểm của phép hữu tỷ hóa này là nó thường đưa đến những tính toán rất phức tạp.

Vì vậy, trong nhiều trường hợp phép hữu tỷ hóa có thể thực hiện được nhờ những phép đổi biến khác.

II. Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì sử dụng phép đổi biến

$$t = \cos x, \quad x \in (0, \pi)$$

và lúc đó

$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

III. Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì sử dụng phép đổi biến

$$t = \sin x, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

IV. Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì phép hữu tỷ hóa sẽ là $t = \mathrm{tg}x$, $x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \mathrm{arctg}t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}\cdot$$

V. Trường hợp riêng của tích phân dạng (10.11) là tích phân

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{Z} \tag{10.12}$$

(i) Nếu số m lẻ thì đặt $t = \cos x$, nếu n lẻ thì đặt $\sin x = t$.

(ii) Nếu m và n là những số chẵn không âm thì tốt hơn hết là thay $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ theo các công thức

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

(iii) Nếu m và n chẵn, trong đó có một số âm thì phép đổi biến sẽ là $\mathrm{tg}x = t$ hay $\mathrm{cotg}x = t$.

(iv) Nếu $m + n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$ thì viết biểu thức dưới dấu tích phân bởi dạng phân thức và tách $\cos^2 x$ (hoặc $\sin^2 x$) ra khỏi mẫu số. Biểu thức $\frac{dx}{\cos^2 x}$ (hoặc $\frac{dx}{\sin^2 x}$) được thay bởi $d(\mathrm{tg}x)$ (hoặc $d(\mathrm{cotg}x)$) và áp dụng phép đổi biến $t = \mathrm{tg}x$ (hoặc $t = \mathrm{cotg}x$).

VI. Tích phân dạng

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}. \tag{10.13}$$

Bằng phép đổi biến $\sin^2 x = t$ ta thu được

$$I = \frac{1}{2}\int t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}dt$$

và bài toán được quy về tích phân của vi phân nhị thức.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$$

Giải. Đặt $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int (t+3)^{-2}dt \\ &= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3 + \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}} + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính

$$J = \int \frac{dx}{(3 + \cos 5x)\sin 5x}$$

Giải. Đặt $5x = t$. Ta thu được

$$J = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(3 + \cos t)\sin t}$$

và (trường hợp II) do đó bằng cách đặt phép đổi biến $z = \cos t$ ta có

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{5}\int \frac{dz}{(z+3)(z^2-1)} = \frac{1}{5}\int \Big[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+3}\Big]dz \\ &= \frac{1}{5}\int \Big[\frac{1}{8(z-1)} - \frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{8(z+3)}\Big]dz \\ &= \frac{1}{5}\Big[\frac{1}{8}\ln|z-1| - \frac{1}{4}\ln|z+1| + \frac{1}{8}\ln|z+3|\Big] + C \\ &= \frac{1}{40}\ln\Big|\frac{(z-1)(z+3)}{(z+1)^2}\Big| + C \\ &= \frac{1}{40}\ln\Big|\frac{\cos^2 x + 2\cos 5x - 3}{(\cos 5x + 1)^2}\Big| + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính

$$J = \int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx$$

Giải. Hàm dưới dấu tích phân có tính chất là

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Do đó ta sử dụng phép đổi biến $t = \text{tg}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Chia tử số và mẫu số của biểu thức dưới dấu tích phân cho $\cos^3 x$ ta có

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{2\text{tg}x + 3}{\text{tg}^2 x + 9} d(\text{tg}x) = \int \frac{2t+3}{t^2+9} dt \\ &= \ln(t^2 + 9) + \text{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + C \\ &= \ln(\text{tg}^2 x + 9) + \text{arctg}\left(\frac{\text{tg}x}{3}\right) + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính

$$J = \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

Giải. Áp dụng công thức

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \sin 2x)$$

ta thu được

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x).$$

Đặt $t = \text{tg}2x$, ta tìm được

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{4dx}{1 + 3\cos^2 2x} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 4} \\ &= \text{arctg}\frac{t}{2} + C = \text{arctg}\frac{\text{tg}2x}{2} + C. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính

$$J = \int \sin^{\frac{3}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x dx.$$

Giải. Đặt $z = \sin^2 x$ ta thu được

$$J = \frac{1}{2}\int z^{1/4}(1-z)^{-\frac{1}{4}} dx.$$

Đó là tích phân của vi phân nhị thức và

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{\frac{1}{4}+1}{1} - \frac{1}{4} = 1.$$

Do vậy ta thực hiện phép đổi biến

$$\frac{1}{z} - 1 = t^4, \quad -\frac{dz}{z^2} = 4t^3 dt, \quad z^2 = \frac{1}{(t^4+1)^2}$$

và do đó

$$J = -2\int \frac{t^2}{(t^4+1)^2} dt.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{y}$ ta thu được

$$J = 2\int \frac{y^4}{(1+y^4)^2} dy.$$

Thực hiện phép tích phân từng phần bằng cách đặt

$$u = y, \quad dv = \frac{y^3}{(1+y^4)^2} dy \Rightarrow du = dy, \quad v = -\frac{1}{4(1+y^2)}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} J &= 2\Big[-\frac{y}{4(1+y^4)} + \frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+y^4}\Big] \\ &= -\frac{y}{2(1+y^4)} + \frac{1}{2} J_1. \end{aligned}$$

Để tính J_1 ta biểu diễn tử số của biểu thức dưới dấu tích phân như sau:

$$1 = \frac{1}{2}\big[(y^2+1) - (y^2-1)\big]$$

và khi đó

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}\int \frac{y^2+1}{y^4+1}dy - \frac{1}{2}\int \frac{y^2-1}{y^4+1}dy \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)dy}{y^2+\dfrac{1}{y^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-\dfrac{1}{y^2}\right)dy}{y^2+\dfrac{1}{y^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y+\dfrac{1}{y}\right)}{\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y+\dfrac{1}{y}\right)}{\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2-2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{y-\dfrac{1}{y}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y+\dfrac{1}{y}-\sqrt{2}}{yb+\dfrac{1}{y}+\sqrt{2}}\right| + C.
\end{aligned}$$

Cuối cùng ta thu được

$$J = -\frac{y}{2(1+y^4)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{y-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y+\dfrac{1}{y}-\sqrt{2}}{y+\dfrac{1}{y}+\sqrt{2}}\right| + C$$

trong đó

$$y = \frac{1}{t}, \quad t = \sqrt[4]{\frac{1}{z}-1}, \quad z = \sin^2 x. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân bằng cách sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi hàm dưới dấu tích phân.

1. $\int \sin^3 x dx.$ (ĐS. $-\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$)

2. $\int \cos^4 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{3x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{\sin 4x}{32}$)

3. $\int \sin^5 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{2}{3}\cos^3 x - \dfrac{\cos^5 x}{5} - \cos x$)

4. $\int \cos^7 x dx.$ (ĐS. $\sin x - \sin^3 x + \dfrac{3\sin^5 x}{5} - \dfrac{\sin^7 x}{7}$)

5. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin 4x}{32}$)

6. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\cos^3 x}{3}$)

7. $\int \cos^3 x \sin^5 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{\sin^6 x}{6} - \dfrac{\sin^8 x}{8}$)

8. $\int \dfrac{dx}{\sin 2x}.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}x|$)

9. $\int \dfrac{dx}{\cos\dfrac{x}{3}}.$ (ĐS. $3\ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{6}\right)\right|$)

10. $\int \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}\left[\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right|\right]$)

11. $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$ (ĐS. $\dfrac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + \dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{3}$)

Chỉ dẫn. Đặt $t = \mathrm{tg}x$.

12. $\int \sin 3x \cos x dx.$ (ĐS. $-\dfrac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x)$)

13. $\int \sin\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{2x}{3}dx.$ (ĐS. $\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}\cos x$)

14. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx.$ (ĐS. $-\dfrac{1}{\sin x} - \sin x$)

15. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{\cos x} + \cos x$)

16. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx.$ (ĐS. $-\dfrac{\text{cotg}^4 x}{4}$)

17. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\cos x| - \dfrac{\cos^2 x}{2}$)

18. $\displaystyle\int \text{tg}^5 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{\text{tg}^4 x}{4} - \dfrac{\text{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x|$)

Trong các bài toán sau đây hãy áp dụng phép đổi biến

$$t = \text{tg}\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2\text{arctg}t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$ (ĐS. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2+\text{tg}\frac{x}{2}}{2-\text{tg}\frac{x}{2}}\right|$)

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$ (ĐS. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\right|$)

21. $\displaystyle\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx.$

(ĐS. $\dfrac{1}{13}(12x - 5\ln|2\text{tg}x + 3| - 5\ln|\cos x|)$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}.$ (ĐS. $\ln\left|1 + \text{tg}\dfrac{x}{2}\right|$)

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}.$

(ĐS. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\dfrac{2\text{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\dfrac{3\text{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}$)

Tính các tích phân dạng

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

24. $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^5 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{8}cos^8 x - \dfrac{1}{6}\cos^6 x$)

25. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{16}\big(x - \dfrac{1}{4}\sin 4x + \dfrac{1}{3}\sin^2 2x\big)$)

26. $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^6 x dx.$

(ĐS. $\dfrac{1}{2^{11}}\sin 8x - \dfrac{1}{2^8}\sin 4x + \dfrac{1}{5\cdot 2^6}\sin^5 2x + \dfrac{3}{2^8}x$)

27. $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^2 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{x}{16} - \dfrac{\sin 4x}{64} - \dfrac{\sin^2 2x}{48}$)

28. $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^5 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{5}\sin^5 x - \dfrac{2}{7}\sin^7 x + \dfrac{1}{9}\sin^9 x$)

29. $\displaystyle\int \sin^6 x\cos^3 x dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{7}\sin^7 x - \dfrac{1}{9}\sin^9 x$)

Tính các tích phân dạng

$$\int \sin^\alpha x\cos^\beta x dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

30. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx.$ (ĐS. $\dfrac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}$)

Chỉ dẫn. Đặt $t = \cos x$.

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x\cos x}}.$ (ĐS. $-\dfrac{3(1 + 4\mathrm{tg}^2 x)}{8\mathrm{tg}^2 x\cdot\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 x}}$)

Chỉ dẫn. Đặt $t = \mathrm{tg}x$.

32. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx.$ (ĐS. $3\sqrt[3]{\cos x}\big(\dfrac{1}{7}\cos^2 x - 1\big)$)

33. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx.$ (ĐS. $-\dfrac{3}{5}\cos^{5/3} x + \dfrac{3}{11}\cos^{\frac{11}{3}} x$)

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}.$ (ĐS. $4\sqrt[4]{\mathrm{tg}x}$)

35. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos x}}dx.$ (ĐS. $\dfrac{5}{14}\cos^{\frac{14}{5}} x - \dfrac{5}{4}\cos^{\frac{4}{5}} x$)

Chương 11

Tích phân xác định Riemann

11.1 Hàm khả tích Riemann và tích phân xác định

11.1.1 Định nghĩa

Giả sử hàm $f(x)$ xác định và bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Tập hợp hữu hạn điểm $\{x_k\}_{k=0}^{n}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

được gọi là phép phân hoạch đoạn $[a, b]$ và được ký hiệu là $T[a, b]$ hay đơn giản là T.

Định nghĩa 11.1.1. Giả sử $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $T[a, b] = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ là phép phân hoạch đoạn $[a, b]$. Trên mỗi đoạn $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$ ta chọn một cách tùy ý điểm ξ_j và lập tổng

$$S(f, T, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

gọi là tổng tích phân (Riemann) của hàm $f(x)$ theo đoạn $[a, b]$ tương ứng với phép phân hoạch T và cách chọn điểm ξ_j, $j = \overline{1, n}$. Nếu giới hạn

$$\lim_{d(T)\to 0} S(f, T, \xi) = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j \tag{11.1}$$

tồn tại hữu hạn không phụ thuộc vào phép phân hoạch T và cách chọn các điểm ξ_j, $j = \overline{1, n}$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$.

Tập hợp mọi hàm khả tích Riemann trên đoạn $[a, b]$ được ký hiệu là $\mathcal{R}[a, b]$.

11.1.2 Điều kiện để hàm khả tích

Định lý 11.1.1. *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Hệ quả. *Mọi hàm sơ cấp đều khả tích trên đoạn bất kỳ nằm trọn trong tập hợp xác định của nó.*

Định lý 11.1.2. *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm bị chặn và $E \subset [a, b]$ là tập hợp các điểm gián đoạn của nó. Hàm $f(x)$ khả tích Riemann trên đoạn $[a, b]$ khi và chỉ khi tập hợp E có độ đo - không, tức là E thỏa mãn điều kiện: $\forall\, \varepsilon > 0$, tồn tại hệ đếm được (hay hữu hạn) các khoảng (a_i, b_i) sao cho*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Nếu các điều kiện của định lý 11.1.2 (gọi là tiêu chuẩn khả tích Lơbe (Lebesgue)) được thỏa mãn thì giá trị của tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào giá trị của hàm $f(x)$ tại các điểm gián đoạn và tại các điểm đó hàm $f(x)$ được bổ sung một cách tùy ý nhưng phải bảo toàn tính bị chặn của hàm trên $[a, b]$.

11.1.3 Các tính chất cơ bản của tích phân xác định

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

3) Nếu $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ và $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$.

4) Nếu $f \in \mathcal{R}[a, b]$ thì $|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$ và

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)dx\Big| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx, \quad a < b.$$

5) Nếu $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ thì $f(x)g(x) \in \mathcal{R}[a, b]$.

6) Nếu $fg \in \mathcal{D}[a, b]$ và $]c, d] \subset [a, b]$ thì $f(x)g(x) \in \mathcal{R}[c, d]$.

7) Nếu $f \in \mathcal{R}[a, c]$, $f \in \mathcal{R}[c, b]$ thì $f \in \mathcal{R}[a, b]$, trong đó điểm c có thể sắp xếp tùy ý so với các điểm a và b.

Trong các tính chất sau đây ta luôn luôn xem $a < b$.

8) Nếu $f \in \mathcal{R}[a, b]$ và $f \geqslant 0$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

9) Nếu $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ và $f(x) \geqslant g(x)\ \forall\, x \in [a, b]$ thì

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

10) Nếu $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \not\equiv 0$ trên $[a, b]$ thì $\exists\, K > 0$ sao cho

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant K.$$

11) Nếu $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g(x) \geqslant 0$ trên $[a, b]$.

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f(x)$$

thì

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

11.2 Phương pháp tính tích phân xác định

Giả sử hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$. Hàm

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

được gọi là tích phân với cận trên biến thiên.

Định lý 11.2.1. *Hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ là có nguyên hàm trên đoạn đó. Một trong các nguyên hàm của hàm $f(x)$ là hàm*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{11.2}$$

Tích phân với cận trên biến thiên được xác định đối với mọi hàm $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$. Tuy nhiên, để hàm $F(x)$ dạng (11.2) là nguyên hàm của $f(x)$ điều cốt yếu là $f(x)$ phải liên tục.

Sau đây là định nghĩa mở rộng về nguyên hàm.

Định nghĩa 11.2.1. Hàm $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ nếu

1) $F(x)$ liên tục trên $[a,b]$.

2) $F'(x) = f(x)$ tại các điểm liên tục của $f(x)$.

Nhận xét. Hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ là trường hợp riêng của hàm liên tục từng đoạn. Do đó đối với hàm liên tục định nghĩa 11.2.1 về nguyên hàm là trùng với định nghĩa cũ trước đây vì $F'(x) = f(x)$ $\forall\, x \in [a,b]$ và tính liên tục của $F(x)$ được suy ra từ tính khả vi.

Định lý 11.2.2. *Hàm $f(x)$ liên tục từng đoạn trên $[a,b]$ là có nguyên hàm trên $[a,b]$ theo nghĩa của định nghĩa mở rộng. Một trong các* *nguyên hàm là*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Định lý 11.2.3. (Newton-Leibniz) *Đối với hàm liên tục từng đoạn trên* $[a, b]$ *ta có công thức Newton-Leibniz:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{11.3}$$

trong đó $F(x)$ *là nguyên hàm của* $f(x)$ *trên* $[a, b]$ *với nghĩa mở rộng.*

Định lý 11.2.4 (Phương pháp đổi biến) *Giả sử:*

(i) $f(x)$ *xác định và liên tục trên* $[a, b]$,

(ii) $x = g(t)$ *xác định và liên tục cùng với đạo hàm của nó trên đoạn* $[\alpha, \beta]$, *trong đó* $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ *và* $a \leqslant g(t) \leqslant b$.

Khi đó

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt. \tag{11.4}$$

Định lý 11.2.5 (Phương pháp tích phân từng phần). *Nếu* $f(x)$ *và* $g(x)$ *có đạo hàm liên tục trên* $[a, b]$ *thì*

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{11.5}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng trên đoạn $[-1, 1]$ hàm

$$f(x) = \text{sign}x = \begin{cases} 1 & \text{với } x > 0, \\ 0 & \text{với } x = 0, \ x \in [-1, 1] \\ -1 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

a) khả tích, b) không có nguyên hàm, c) có nguyên hàm mở rộng.

Giải. a) Hàm $f(x)$ khả tích vì nó là hàm liên tục từng đoạn.

b) Ta chứng minh hàm $f(x)$ không có nguyên hàm theo nghĩa cũ. Thật vậy mọi hàm dạng

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1 & \text{khi } x < 0 \\ x + C_2 & \text{khi } x \geqslant 0 \end{cases}$$

đều có đạo hàm bằng sign$x$ $\forall\, x \neq 0$, trong đó C_1 và C_2 là các số tùy ý. Tuy nhiên, thậm chí hàm "tốt nhất" trong số các hàm này

$$F(x) = |x| + C$$

(nếu $C_1 = C_2 = C$) cũng không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. Do đó hàm sign$x$ (và do đó mọi hàm liên tục từng đoạn) không có đạo hàm trên khoảng bất kỳ chứa điểm gián đoạn.

c) Trên đoạn $[-1, 1]$ hàm sign$x$ có nguyên hàm mở rộng là hàm $F(x) = |x|$ vì nó liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ và $F'(x) = f(x)$ khi $x \neq 0$. ▲

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx,\ \ a > 0.$

Giải. Đặt $x = a\sin t$. Nếu t chạy hết đoạn $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì x chạy hết đoạn $[0, a]$. Do đó

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos^2 tdt = a^2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dt + \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2tdt = \frac{a^2\pi}{4}\cdot \quad ▲$$

Ví dụ 3. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}dx.$$

Giải. Ta thực hiện phép đổi biến $x = \cos t$. Phép đổi biến này thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $x = \varphi(t) = \cos t$ liên tục $\forall\, t \in \mathbb{R}$

(2) Khi t biến thiên trên đoạn $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ thì x chạy hết đoạn $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(3) $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(4) $\varphi'(t) = -\sin t$ liên tục $\forall\, t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Như vậy phép đổi biến thỏa mãn định lý 11.2.4 và do đó

$$x = \cos t, \quad dx = -\sin t dt,$$
$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$$

Như vậy

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \text{cotg}\frac{t}{2}(-\sin t)dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)dt \\ &= \big[t + \sin t\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính tích phân

$$I = \int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

Giải. Ta thực hiện phép đổi biến

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

và biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

$$\frac{\cos t dt}{\sin t\sqrt{\cos^2 t}} = \begin{cases} \dfrac{dt}{\sin t} & \text{nếu } \cos t > 0, \\ -\dfrac{dt}{\sin t} & \text{nếu } \cos t < 0. \end{cases}$$

Các cận α và β của tích phân theo t được xác định bởi

$$\frac{1}{2} = \sin t \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin t \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}\cdot$$

(Ta cũng có thể lấy $\alpha_1 = \dfrac{5\pi}{6}$ và $\beta_1 = \dfrac{2\pi}{3}$). Trong cả hai trường hợp biến $x = \sin t$ đều chạy hết đoạn $[a, b] = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Ta sẽ thấy kết quả tích phân là *như nhau*. Thật vậy trong trường hợp thứ nhất ta có $\cos t > 0$ và

$$I = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = \ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}\cdot$$

Trong trường hợp thứ hai $t \in \left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ ta có $\cos t < 0$ và

$$I = -\int\limits_{5\pi/6}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = -\ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}\Big|_{5\pi/6}^{2\pi/3} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$$

Giải. Ta tính bằng phương pháp tích phân từng phần.
Đặt

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$
$$dv = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}\cdot$$

Do đó

$$I = x\cdot\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} - \int\limits_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{3}} - \ln\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\Big) + \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^1 x^2(1-x)^3dx.$$

Giải. Ta đặt

$$u = x^2,\quad dv = (1-x)^3dx \Rightarrow$$
$$du = 2xdx,\quad v = -\frac{(1-x)^4}{4}\cdot$$

Do đó

$$I = -x^2\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_0^1 + \underbrace{\int\limits_0^1 2x\frac{(1-x)^4}{4}dx}_{I_1} = 0 + I_1.$$

Tính I_1. Tích phân từng phần I_1 ta có

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x(1-x)^4dx = -\frac{1}{2}x\frac{(1-x)^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-x)^5}{5}dx$$

$$= 0 - \frac{1}{10}\frac{(1-x)^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{60} \Rightarrow I = \frac{1}{60}\cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Áp dụng công thức Newton-Leibnitz để tính tích phân

$$1)\quad I_1 = \int\limits_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx, \qquad 2)\quad I_2 = \int\limits_0^1 e^x\arcsin(e^{-x})dx.$$

Giải. Ta có $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}|\sin x|$. Do đó

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx &= \sqrt{2}\int\limits_0^{100\pi} |\sin x|dx \\
&= \sqrt{2}\Big[\int\limits_0^{\pi} \sin xdx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin xdx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \sin xdx - \dots \\
&\quad + \dots + \int\limits_{99\pi}^{100\pi} \sin xdx\Big] \\
&= -\sqrt{2}[2+2+\dots+2] = 200\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2) Thực hiện phép đổi biến $t = e^{-x}$, sau đó áp dụng phương pháp tích phân từng phần. Ta có

$$\begin{aligned}
\int e^x \text{arc}\sin(e^{-x})dx &= -\int \frac{\text{arc}\sin t}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{t}\text{arc}\sin t - \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{1}{t}\text{arc}\sin t + I_1.
\end{aligned}$$

$$I_1 = -\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{d\Big(\dfrac{1}{t}\Big)}{\sqrt{\Big(\dfrac{1}{t}\Big)^2 - 1}} = \ln\Big(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\Big) + C.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\int e^x \text{arc}\sin e^{-x}dx &= \frac{\text{arc}\sin t}{t} + \ln\Big(\frac{1}{t} + \sqrt{\Big(\frac{1}{t^2} - 1\Big)} + C \\
&= e^x \text{arc}\sin e^{-x} + \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + C
\end{aligned}$$

Nguyên hàm vừa thu được có giới hạn hữu hạn tại điểm $x = 0$. do đó theo công thức (11.3) ta có

$$\int\limits_0^1 e^x \text{arc}\sin e^{-x}dx = e\text{arc}\sin e^{-1} - \frac{\pi}{2} + \ln(e + \sqrt{e^2-1}). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 8. Tính tích phân Dirichlet

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Ta có công thức

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos 2kx = \frac{\sin(2n-1)x}{2\sin x} \cdot$$

Từ đó và lưu ý rằng $\int_0^{\pi/2} \cos 2kx dx = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ ta có

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp đổi biến (1-14).

1. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. (ĐS. 4)

2. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$. (ĐS. $\frac{\ln\frac{3}{2}}{2}$)

3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$. (ĐS. $\frac{7}{2\sqrt{3}} - 1$). Đặt $x = 2\sin t$.

4. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$. (ĐS. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$)

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^4}$. (ĐS. $\dfrac{1}{24}$)

6. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$. (ĐS. $\dfrac{4-\pi}{2}$)

7. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. (ĐS. 3)

Chỉ dẫn. Đặt $t = x^2+1$.

8. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx$. (ĐS. $0,8(2\sqrt[4]{2}-1)$)

Chỉ dẫn. Đặt $t = 1+\ln x$.

9. $\displaystyle\int_{-3}^{+\sqrt{3}} x^2\sqrt{9-x^2}dx$. (ĐS. $\dfrac{81\pi}{8}$)

chỉ dẫn. Đặt $x = 3\cos t$.

10. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}}dx$. (ĐS. $\dfrac{3(\pi-2)}{2}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = 6\sin^2 t$.

11. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^6\frac{x}{2}dx$. (ĐS. $\dfrac{5\pi}{16}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = 2t$.

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^7 2xdx$. (ĐS. $\dfrac{8}{35}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = \dfrac{t}{2}$

13. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}dx.$ (ĐS. $\dfrac{\pi}{4}+1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x=\cos t$.

14. $\int\limits_3^{29}\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx.$ (ĐS. $8+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$)

Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp tích phân từng phần (15-32).

15. $\int\limits_0^1 x^3\mathrm{arctg}x\,dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{6}$)

16. $\int\limits_{1/e}^{e}|\ln x|dx.$ (ĐS. $2(1-1/e)$)

17. $\int\limits_0^{\pi}e^x\sin x\,dx.$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}(e^{\pi}+1)$)

18. $\int\limits_0^1 x^3e^{2x}dx.$ (ĐS. $\dfrac{e^2+3}{8}$)

19. $\int\limits_0^1\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx.$ (ĐS. $\pi\sqrt{2}-4$)

20. $\int\limits_0^{\pi/4}\ln(1+\mathrm{tg}x)dx.$ (ĐS. $\dfrac{\pi\ln 2}{8}$)

21. $\int\limits_0^{\pi/b}e^{ax}\sin bx\,dx.$ (ĐS. $\dfrac{b}{a^2+b^2}\big(e^{\frac{\pi a}{b}}+1\big)$)

22. $\int\limits_0^1 e^{-x}\ln(e^x+1)dx.$ (ĐS. $-\dfrac{1+e}{e}\ln(e+1)+2\ln 2+1$)

23. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot \mathrm{arctg}(\sin x)dx.$ (ĐS. $\frac{\pi}{2} - 1$)

24. $\int\limits_1^{2} \sin(\ln x)dx.$ (ĐS. $\sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{2}$)

25. $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x dx.$ (ĐS. $\pi^3 - 6\pi$)

26. $\int\limits_1^{2} x \log_2 x dx.$ (ĐS. $2 - \frac{3}{4\ln 2}$)

27. $\int\limits_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{a^2 + x^2}}dx.$ (ĐS. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$)

28. $\int\limits_0^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx.$ (ĐS. $\frac{\pi a^2}{4}$)

29. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}dx.$ (ĐS. $\frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3})$)

30. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos(m+2)x dx.$ (ĐS. $-\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}$)

31. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x dx.$ (ĐS. 0)

32. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \cos 2nx dx.$ (ĐS. $\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$)

33. Tính $\int\limits_0^2 f(x)dx$, trong đó

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{khi } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

bằng hai phương pháp; a) sử dụng nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[0, 2]$; b) chia đoạn $[0, 2]$ thành hai đoạn $[0, 1]$ và $[1, 2]$. (ĐS. $\frac{5}{6}$)

34. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ell, \ell]$ thì

(i) $\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 2\int\limits_0^{\ell} f(x)dx$ khi $f(x)$ là hàm chẵn;

(ii) $\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0$ khi $f(x)$ là hàm lẻ.

35. Chứng minh rằng $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$ các đẳng thức sau đây được thỏa mãn:

(i) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$

(ii) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0,\ m \neq n.$

(iii) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0,\ m \neq n.$

36. Chứng minh đẳng thức

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a + b - x)dx.$$

Chỉ dẫn. Đặt $x = a + b - t$.

37. Chứng minh đẳng thức

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx.$$

Chỉ dẫn. Đặt $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

38. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục khi $x \geqslant 0$ thì

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)dx.$$

39. Chứng minh rằng nếu $f(t)$ là hàm lẻ thì $\int\limits_a^x f(t)dt$ là hàm chẵn, tức là

$$\int\limits_a^{-x} f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Chỉ dẫn. Đặt $t = -x$ và biểu diễn

$$\int\limits_{-a}^{-x} f(t)dt = \int\limits_{-a}^{a} + \int\limits_a^{-x}$$

và sử dụng tính chẵn lẻ của hàm f.

Tính các tích phân sau đây (40-65) bằng cách áp dụng công thức Newton-Leibnitz.

40. $\displaystyle\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. (ĐS. 4)

41. $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$. (ĐS. $\dfrac{\ln 1,5}{2}$)

42. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$ (ĐS. $\dfrac{7}{2\sqrt{3}} - 1$)

43. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}.$ (ĐS. $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$)

44. $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx.$ (ĐS. $\dfrac{4-\pi}{2}$)

45. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$ (ĐS. 3)

46. $\displaystyle\int\limits_1^{e} \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx.$ (ĐS. $0,8(2\sqrt[4]{2} - 1)$)

47. $\displaystyle\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}dx.$ (ĐS. $\dfrac{81\pi}{8}$)

48. $\displaystyle\int\limits_0^{3} \sqrt{\frac{x}{6-x}}dx.$ (ĐS. $\dfrac{3(\pi-2)}{2}$)

Chỉ dẫn. Đặt $x = 6\sin^2 t$.

49. $\displaystyle\int\limits_3^{4} \frac{x^2+3}{x-2}dx.$ (ĐS. $\dfrac{11}{2} + 7\ln 2$)

50. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)}dx.$ (ĐS. $2\ln\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2}$)

51. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{(x^2+3x)dx}{(x+1)(x^2+1)}.$ (ĐS. $\dfrac{\pi}{4}$)

52. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. (ĐS. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$)

53. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. (ĐS. $2-\ln 2$)

54. $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$. (ĐS. $\frac{1}{2}(e-e^{\frac{1}{4}})$)

55. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. (ĐS. $\frac{\pi}{4}$)

56. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$. (ĐS. $\sin 1$)

57. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$. (ĐS. $1-\frac{2}{e}$)

58. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$. (ĐS. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}$)

59. $\int\limits_1^3 \ln xdx$. (ĐS. $3\ln 3-2$)

60. $\int\limits_1^2 x\ln xdx$. (ĐS. $2\ln 2-\frac{3}{4}$)

61. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin xdx$. (ĐS. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$)

62. $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin xdx$. (ĐS. $\pi^3-6\pi$)

63. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x dx.$ (ĐS. $\dfrac{e^\pi - 2}{5}$)

64. $\int\limits_0^{2} |1-x|dx.$ (ĐS. 1)

65. $\int\limits_a^{b} \dfrac{|x|}{x}dx.$ (ĐS. $|b| - |a|$)

Tính các tích phân sau đây

66. $\int\limits_0^{a/b} \dfrac{dx}{a^2 + b^2x} = \dfrac{\pi}{4ab}$

67. $\int\limits_0^{1} \dfrac{x^2dx}{\sqrt{4+2x}} = \dfrac{9}{5}\sqrt{6} - \dfrac{64}{15}$

68. $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{x^2 + 5x + 4} = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{4}$

69. $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{x^2 - x + 1} = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

70. $\int\limits_0^{1} \dfrac{(x^2+1)}{x^4 + x^2 + 1}dx = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

71. $\int\limits_0^{pi/2} \dfrac{dx}{1 + \cos x} = 1$

72. $\int\limits_0^{1} \sqrt{x^2+1}dx = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

73. $\int\limits_0^1 \left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)^{3/2}dx = \dfrac{3\pi}{32}$

Đặt $x = \sin^3\varphi$.

74. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx = \left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}\right)a^2,\ a>0.$

Đặt $x = a\cos\varphi$.

75. $\int\limits_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}dx = \dfrac{\pi a^2}{2}$

Đặt $x = 2a\sin^2\varphi$.

76. $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

Chỉ dẫn. Đặt $x = \mathrm{tg}t$ rồi áp dụng công thức

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$$

77. $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \dfrac{\pi^2}{4}$

Chỉ dẫn. Biểu diễn $\int\limits_0^{\pi} = \int\limits_0^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}$ rồi thực hiện phép đổi biến trong tích phân từ $\pi/2$ đến π.

78. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt[3]{\sin x}dx = 0$

79. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{x^2}\sin x dx = 0$

80. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2 \sin x)dx = \frac{\pi}{2}$

81. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} (e^x + e^{-x})\mathrm{tg} x dx = 0$

82. $\displaystyle\int\limits_{0}^{pi/2} \sin x \sin 2x \ \sin 3x dx = \frac{1}{6}$

83. $\displaystyle\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x| dx = 2(1 - e^{-1})$

84. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x dx = \frac{3}{5}(e^\pi - 1)$

85. $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} (1 + \ln x)^2 dx = 2e - 1$

Chỉ dẫn. Tích phân từng phần.

11.3 Một số ứng dụng của tích phân xác định

11.3.1 Diện tích hình phẳng và thể tích vật thể

1 *Diện tích hình phẳng*

1^+. Diện tích hình thang cong D giới hạn bởi đường cong $\mathcal{L}$ có phương trình $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a, b]$ và các đường thẳng

$x = a$, $x = b$ và trục Ox được tính theo công thức

$$S_D = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{11.6}$$

Nếu $f(x) \leqslant 0 \ \ \forall x \in [a, b]$ thì

$$S_D = -\int\limits_a^b f(x)dx \tag{11.6*}$$

Nếu đáy hình thang cong nằm trên trục Oy thì

$$S_D = \int\limits_c^d g(y)dy, \quad x = g(y), \ y \in [c, d].$$

2^+ Nếu đường cong $\mathcal{L}$ được cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ thì

$$S_D = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{11.7}$$

3^+ Diện tích của hình quạt giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tọa độ cực $\rho = f(\varphi)$ và các tia $\varphi = \varphi_0$ và $\varphi = \varphi_1$ được tính theo công thức

$$S_Q = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} [f(\varphi)]^2 d\varphi. \tag{11.8}$$

4^+ Nếu miền $D = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b; f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$ thì

$$S_D = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \tag{11.9}$$

2. *Thể tích vật thể*

1^+ Nếu biết được diện tích $S(x)$ của thiết diện tạo nên bởi vật thể và mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x thì khi x thay đổi một đại lượng bằng dx thì vi phân của thể tích bằng

$$dv = S(x)dx,$$

và thể tích toàn vật thể được tính theo công thức

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{11.10}$$

trong đó $[a, b]$ là hình chiếu vuông góc của vật thể lên trục Ox.

2^+ Nếu vật thể được tạo nên do phép quay hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ xung quanh trục Ox thì diện tích *vật thể tròn xoay* đó được tính theo công thức

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{11.11}$$

Nếu quay hình thang cong xung quanh trục Oy thì vật tròn xoay thu được có thể tích

$$V_y = \pi \int_c^d [x(y)]^2 dy, \quad x = x(y); [c, d] = pr_{Oy}V. \tag{11.12}$$

3^+ Nếu hàm $y = f(x)$ được cho bởi các phương trình tham số

$$x = x(t)$$
$$y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

thỏa mãn những điều kiện nào đó thì thể tích vật thể tạo nên bởi phép quay hình thang cong xung quanh trục Ox bằng

$$V_x = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)dt \tag{11.13}$$

4^+ Nếu hình thang cong được giới hạn bởi các đường cong $0 \leqslant y_1(x) \leqslant y_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$, trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì thể tích vật thể tạo nên do phép quay hình thang đó xung quanh trục Ox bằng

$$V_x = \pi \int\limits_{a}^{b} \big[(y_2(x))^2 - (y_1(x))^2\big]dx. \tag{11.14}$$

5^+ Đối với vật thể thu được bởi phép quay hình thang cong xung quanh trục Oy và thỏa mãn một số điều kiện tương tự ta có

$$V_y = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2(t)y'(t)dt \tag{11.15}$$

$$V_y = \pi \int\limits_{c}^{d} \big[(x_2(y))^2 - (x_1(y))^2\big]dy. \tag{11.16}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường astroid $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Giải. Áp dụng công thức (11.7). Vì đường astroid đối xứng qua các trục tọa độ (hãy vẽ hình !) nên

$$
\begin{aligned}
S = 4S_1 &= 4\int\limits_{\pi/2}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt\\
&= 12a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 tdt\\
&= \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)(1-\cos^2 2t)dt\\
&= \frac{3\pi a^3}{8}\quad\blacktriangle
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2. Trên hypecbon $x^2 - y^2 = a^2$ cho điểm $M(x_0, y_0)$ $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox, hypecbôn và tia OM.

Giải. Ta chuyển sang tọa độ cực theo công thức $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Khi đó phương trình hypecbôn có dạng

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}\,\cdot$$

Đặt $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$ và lưu ý rằng $x_0^2 - y_0^2 = a^2$ ta thu được

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\alpha} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} &= \frac{a^2}{4}\ln\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}\\
&= \frac{a^2}{4}\ln\frac{(x_0+y_0)^2}{a^2} = \frac{a^2}{2}\ln\frac{x_0+y_0}{a}\,\cdot
\end{aligned}
$$

Ở đây ta đã sử dụng công thức

$$\int\frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.\quad\blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$; $y = x$ và $y = -x$.

Giải. Đưa phương trình đường tròn về dạng chính tắc ta có: $x^2 + (y-1)^2 = 1$ và $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Đó là hai đường tròn tiếp xúc trong tại tiếp điểm $O(0,0)$. Từ đó miền phẳng D giới hạn bởi các đường đã cho đối xứng qua trục Oy. Lời giải sẽ được đơn giản hơn nếu ta chuyển sang tọa độ cực (với trục cực trùng với hướng dương của trục hoành):

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r = 2\sin\varphi, \\ x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r = 4\sin\varphi, \end{cases}$$

và

$$D = \Big\{(r,\varphi) : \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}; 2\sin\varphi \leqslant r \leqslant 4\sin\varphi\Big\}.$$

Ký hiệu S^* là diện tích phần hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 4y$ (tức là $r = 4\sin\varphi$) và hai tia $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ và $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$; S là diện tích phân hình tròn giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 2y$ (tức là $r = 2\sin\varphi$) và hai tia đã nêu. Khi đó

$$\begin{aligned} S_D = S^* - S &= 2\Big[\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(4\sin\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(2\sin\varphi)^2 d\varphi\Big] \\ &= 12\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{2} + 3. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính thể tích vật tròn xoay tạo nên do phép quay hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = \pm b$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ xung quanh trục Oy.

Giải. Do tính đối xứng của vật tròn xoay đối với mặt phẳng xOz (bạn đọc hãy tự vẽ hình) ta chỉ cần tính nửa bên phải mặt phẳng xOz

là đủ. Ta có

$$V = 2V_1 = 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi a^2 \int_0^b \Big(1 + \frac{y^2}{b^2}\Big) dy$$
$$= 2\pi a^2 \Big(y + \frac{y^3}{3b^2}\Big)\Big|_0^b = \frac{8}{3}\pi a^2 b. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Tính thể tích vật thể lập nên do quay astroid $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ xung quanh trục Ox.

Giải. Đường astroid đối xứng đối với các trục Ox và Oy. Do đó

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = 2\pi \int_0^a y^2 dx$$

$$y^2 = a^2 \sin^6 t, \quad dx = -3a\cos^2 t \sin t dt$$
$$t = \frac{\pi}{2} \text{ khi } x = 0, \quad t = 0 \text{ khi } x = a.$$

Do đó

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx = -6a^3\pi \int_{\pi/2}^{0} \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt$$
$$= 6a^3\pi \int_{\pi/2}^{0} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t(-\sin t dt)$$
$$= 6a^3\pi \int_{\pi/2}^{0} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t)(d(\cos t)$$
$$= \cdots = \frac{32}{105}\pi a^3. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi hypecboloid một tầng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

và các mặt phẳng $z = 0$, $z = h$ $(h > 0)$.

Giải. Ta sẽ áp dụng công thức (11.10), trong đó ta xét các thiết diện tạo nên bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Oz. Khi đó (11.10) có dạng

$$V = \int_0^h S(z)dz,$$

trong đó $S(z)$ là diện tích của thiết diện phụ thuộc vào z. Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng $z = \text{const}$ ta thu được elip với phương trình

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{z^2}{c^2} \\ z = \text{const} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\Big(1 + \dfrac{z^2}{c^2}\Big)} + \dfrac{y^2}{b^2\Big(1 + \dfrac{z^2}{c^2}\Big)} = 1 \\ z = \text{const} \end{cases}$$

Từ đó suy rằng

$$a_1 = \sqrt{a^2\Big(1 + \frac{z^2}{c^2}\Big)}, \qquad b_1 = \sqrt{b^2\Big(1 + \frac{z^2}{c^2}\Big)}$$

là các bán trục của elip. Nhưng ta biết rằng diện tích hình elip với bán trục a_1, b_1 là $\pi a_1 b_1$ (có thể tính bằng công thức (11.7) đối với elip có phương trình tham số $x = a_1 \cos t$, $y = b_1 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$).

Như vậy

$$S(z) = \pi ab\Big(1 + \frac{z^2}{c^2}\Big), \quad z \in [0, h].$$

Từ đó theo công thức (11.10) ta có

$$V = \int_0^h \pi ab\Big(1 + \frac{z^2}{c^2}\Big)dz = \pi abh\Big(1 + \frac{h^2}{3c^2}\Big). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Tính thể tích vật thể thu được bởi phép quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y = 4 - x^2$ và $y = 0$ xung quanh đường thẳng $x = 3$ (hãy vẽ hình).

Giải. Vật tròn xoay thu được có tính chất là mọi thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục quay đều là vành tròn giới hạn bởi các đường tròn đồng tâm. Xét thiết diện cách gốc tọa độ khoảng bằng $y\ \ (0 \leqslant y \leqslant 4)$. Ta có

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi[(3+x)^2 - (3-x)^2] = 12\pi x = 12\pi\sqrt{4-y}$$

vì x là hoành độ của điểm trên parabôn đã cho. Khi y thay đổi đại lượng dy thì vi phân thể tích

$$dv = S(y)dy = 12\pi\sqrt{4-y}dy.$$

Do đó thể tích toàn vật bằng

$$V = 12\pi\int\limits_0^4 \sqrt{4-y}dy = 8\pi(4-y)^{3/2}\Big|_4^0 = 64\pi. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 8. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = R^2$; $y = 0$, $z = 0$, $\dfrac{x}{R} + \dfrac{z}{h} - 1 = 0$, $\dfrac{x}{R} - \dfrac{z}{h} - 1 = 0$.

Giải. Do tính đối xứng (hãy vẽ hình) của vật thể đối với mặt phẳng $x = 0$ nên ta chỉ cần tính thể tích phần nằm trong góc phần tám thứ nhất. Mọi thiết diện tạo nên bởi các mặt phẳng $\perp Ox$ đều là hình chữ nhật ABCD với $OA = x$. Khi đó

$$S(x) = S_{ABCD} = AB \cdot AD = \frac{h}{R}(R-x)\cdot\sqrt{R^2-x^2}.$$

Từ đó thu được

$$V = 2\int\limits_0^R S(x)dx = 2\frac{h}{R}\int\limits_0^R (R-x)\sqrt{R^2-x^2}dx \ (\text{đặt } x = R\sin t)$$

$$= 2hR^2\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin t)\cos^2 t dt = \frac{hR^2(3\pi-4)}{6}\cdot \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Trong các bài toán sau đây (1-17) tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đường đã chỉ ra.

1. $y = 6x - x^2 - 7$, $y = x - 3$. (ĐS. $\frac{9}{2}$)

2. $y = 6x - x^2$, $y = 0$. (ĐS. 36)

3. $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$. (ĐS. $5\frac{5}{24}$)

4. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$. (ĐS. 9)

5. $6x = y^3 - 16y$, $24x = y^3 - 16y$. (ĐS. 16)

6. $y = 1 - e^x$, $x = 2$, $y = 0$. (ĐS. $e^2 - 3$)

7. $y = x^2 - 6x + 10$, $y = 6x - x^2$; $x = -1$. (ĐS. $21\frac{1}{3}$)

8. $y = \arcsin x$, $y = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = 0$. (ĐS. 2)

9. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$. (ĐS. $\frac{(e-1)^2}{e}$)

10. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$. (ĐS. $\frac{4}{3}p^2$)

11. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$, $y = x^2 + 6x + 10$

$$(\text{ĐS.}\quad S_1 = \frac{3\pi + 2}{6}, \quad S_2 = \frac{9\pi - 2}{6})$$

12. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (ĐS. $3\pi a^2$)

Chỉ dẫn. Đây là phương trình tham số của đường xycloid.

13. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. (ĐS. $\frac{3\pi a^2}{8}$)

14. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. (ĐS. πab)

15. Đường lemniscate Bernoulli $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. (ĐS. a^2)

16. Đường hình tim (Cacdioid) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

(ĐS. $\frac{3\pi a^2}{2}$)

17* Các đường tròn $\rho = 2\sqrt{3}a\cos\varphi$, $\rho = 2a\sin\varphi$.

(ĐS. $a^2\Big(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\Big)$)

Trong các bài toán sau (18-22) hãy tính thể tích vật thể theo diện tích các thiết diện song song.

18. Thể tích hình elipxoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. (ĐS. $\frac{4}{3}\pi abc$)

19. Thể tích vật thể giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$. (ĐS. $\frac{16}{3}a^3$)

Chỉ dẫn. Do tính đối xứng, chỉ cần tính thể tích một phần tám vật thể với $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ là đủ. Có thể lấy các thiết diện song song với mặt phẳng xOz. Đó là các hình vuông.

20. Thể tích vật thể hình nón với bán kính đáy R và chiều cao h. (ĐS. $\frac{\pi R^2 h}{3}$)

Chỉ dẫn. Dịch chuyển hình nón về vị trí với đỉnh tại gốc tọa độ và trục đối xứng là Ox. Thiết diện cần tìm là hình tròn với bán kính $r(x) = \frac{R}{x}x$ (?).

21. Thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt nón

$$(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \quad \text{và mặt phẳng } z = 0.$$

(ĐS. $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$)

22. Thể tích vật thể giới hạn bởi mặt trụ partabolic $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x = a$. (ĐS. $\frac{16a}{3}$)

Trong các bài toán sau đây (23-34) hãy tính thể tích của vật tròn xoay thu được bởi phép quay hình phẳng D giới hạn bởi đường (các đường) cho trước xung quanh trục cho trước

23. $D : y^2 = 2px$, $x = a$; xung quanh trục Ox. (ĐS. πpa^2)

24. $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\ \ (b < a)$ xung quanh trục Oy. (ĐS. $\dfrac{4\pi}{3}a^2b$)

25. $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\ (b < a)$ xung quanh trục Ox. (ĐS. $\dfrac{4\pi}{3}ab^2$)

26. $D: 2y = x^2;\ 2x + 2y - 3 = 0$ xung quanh trục Ox. (ĐS. $18\dfrac{2}{15}\pi$)

27. $D: x^2 + y^2 = 1;\ x + y = 1$ xung quanh trục Ox. (ĐS. $\dfrac{\pi}{3}$)

28. $D: x^2 + y^2 = 4,\ x = -1,\ x = 1,\ y > 0$ xung quanh trục Ox.
(ĐS. 8π)

29. $D: y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ y = 0$ xung quanh trục Ox. (ĐS. $\dfrac{\pi^2}{2}$)

30. $D: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ y = 0,\ y = b$ xung quanh trục Oy. (ĐS. $\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$)

31. $D: y^2 + x - 4 = 0,\ x = 0$ xung quanh trục Oy. (ĐS. $34\dfrac{2}{15}\pi$)

32. $D: xy = 4,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$ xung quanh trục Ox. (ĐS. 12π)

33. $D: x^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2\ (0 < R \leqslant b)$ xung quanh trục Ox.
(ĐS. $2\pi^2 bR^2$)

Chỉ dẫn. Hình tròn D có thể xem như hiệu của hai thang cong

$$D_1 = \left\{(x, y) : -R \leqslant x \leqslant R, 0 \leqslant y \leqslant -\sqrt{R^2 - x^2}\right\} \text{ và}$$
$$D_2 = \left\{(x, y) : -R \leqslant x \leqslant R, 0 \leqslant y \leqslant +\sqrt{R^2 - x^2}\right\}.$$

34*. $D = \left\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$ xung quanh đường thẳng $y = R$.
(ĐS. $\dfrac{3\pi - 4}{3}\pi R^3$)

Chỉ dẫn. Chuyển gốc tọa độ về điểm $(0, R)$.

11.3.2 Tính độ dài cung và diện tích mặt tròn xoay

1^+ Nếu đường cong $\mathcal{L}(A, B)$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ (hay $x = g(y)$) hoặc bởi các phương trình tham số $x = \varphi(t)$,

$y = \psi(t)$ thì vi phân độ dài cung được biểu diễn bởi công thức

$$d = \sqrt{1 + (y'_x)^2}dx = \sqrt{1 + (x'_y)^2}dy = \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}dt \tag{11.17}$$

và độ dài của đường cong $\mathcal{L}(A, B)$ được tính bởi công thức

$$\begin{aligned} \ell(A, B) &= \int\limits_{x_A=a}^{x_B=b} \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int\limits_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x'_y)^2}dy \\ &= \int\limits_{t_A}^{t_B} \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}dt. \end{aligned} \tag{11.18}$$

Nếu đường cong được cho bởi phương trình trong tọa độ cực $\rho = \rho(\varphi)$ thì

$$d\ell = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}d\varphi$$

và

$$\ell(A, B) = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}d\varphi. \tag{11.19}$$

2^+ Nếu mặt σ thu được do quay đường cong cho trên $[a, b]$ bởi hàm không âm $y = f(x) \geqslant 0$ xung quanh trục Ox thì vi phân diện tích mặt

$$ds = 2\pi \cdot \frac{y + (y + dy)}{2}d\ell = \pi(2y + dy)d\ell \approx 2\pi y d\ell$$

và diện tích mặt tròn xoay được tính theo công thức

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'_x)^2}dx. \tag{11.20}$$

Nếu quay đường cong $\mathcal{L}(A, B)$ xung quanh trục Oy thì $ds \approx 2\pi x(y)d\ell$ và

$$S_y = 2\pi \int\limits_{y_A}^{y_B} x(y)\sqrt{1 + (x'_y)^2}dy. \qquad (11.21)$$

Nếu đường cong $\mathcal{L}(A, B)$ được cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t) \geqslant 0$ $(t \in [\alpha, \beta])$ thì

$$S_x = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt. \qquad (11.22)$$

Tương tự ta có

$$S_y = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt, \quad \varphi(t) \geqslant 0. \qquad (11.23)$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính độ dài đường tròn bán kính R.

Giải. Ta có thể xem đường tròn đã cho có tâm tại gốc tọa độ. Phương trình đường tròn dưới dạng tham số có dạng $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Ta chỉ cần tính độ dài của một phần tư đường tròn ứng với $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ là đủ. Theo công thức (11.18) ta có

$$\ell = 4\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt = 4Rt\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi R. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính độ dài của vòng thứ nhất của đường xoắn ốc Archimedes $\rho = a\varphi$.

Giải. Theo định nghĩa, đường xoắn ốc Archimedes là đường cong phẳng vạch nên bởi một điểm chuyển động đều theo một tia xuất phát từ gốc-cực mà tia này lại quay xung quanh gốc cực với vận tốc góc cố định. Vòng thứ nhất của đường xoắn ốc Archimedes được tạo nên khi góc cực φ biến thiên từ 0 đến 2π. Do đó theo công thức (11.19) ta có

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi.$$

Tích phân từng phần bằng cách đặt $u = \sqrt{\varphi^2 + 1}$, $dv = d\varphi$ ta có

$$\begin{aligned}
\ell &= a\Big[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\Big] \\
&= a\Big[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\Big] \\
&= a\Big[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\Big]\Big|_0^{2\pi} \\
&= a\Big[\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\big(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\big)\Big]. \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính diện tích mặt cầu bán kính R.

Giải. Có thể xem mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ và thu được bởi phép quay nửa đường tròn $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ xung quanh trục Ox.

Phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 = R^2$. Do đó $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Theo công thức (11.20) ta có

$$\begin{aligned}
S_x &= 2\pi\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2 + x^2}dx \\
&= 2\pi Rx\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính diện tích mặt tạo nên bởi phép quay đường lemniscat $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ xung quanh trục cực.

Giải. Biến ρ chỉ nhận giá trị thực khi $\cos 2\varphi \geqslant 0$ tức là khi $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$ (nhánh bên phải) hay khi $3\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 5\pi/4$ (nhánh bên trái). Vi phân cung của lemniscat bằng

$$d\ell = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + \Big(-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\Big)^2}d\varphi$$
$$= \frac{ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot$$

Ngoài ra $y = \rho\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi$. Từ đó diện tích cần tìm bằng hai lần diện tích của mặt thu được bởi phép quay nhánh phải. Do đó theo (11.20)

$$S = 2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\pi/4} yds = 4\pi\int\limits_0^{\pi/4}\frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot ad\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$
$$= 4\pi\int\limits_0^{\pi/4} a^2\sin\varphi d\varphi = 2\pi a^2(2-\sqrt{2}). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Tìm diện tích mặt tạo nên bởi phép quay cung parabôn $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ xung quanh trục Oy.

Giải. Ta có $x = \sqrt{2y}$, $x' = \dfrac{1}{\sqrt{2y}}$. Do đó, áp dụng công thức (11.18) ta thu được

$$S = 2\pi\int\limits_0^{3/2}\sqrt{2y}\sqrt{1+\frac{1}{2y}}dy = 2\pi\int\limits_0^{3/2}\sqrt{2y+1}dy$$
$$= 2\pi\cdot\frac{(2y+1)^{3/2}}{3}\Big|_0^{3/2} = \frac{14\pi}{3}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Tìm diện tích mặt tạo nên bởi phép quay elip $x^2+4y^2 = 26$ xung quanh: a) trục Ox; b) trục Oy.

Giải. Nửa trên của elip đã cho có thể xem như đồ thị của hàm $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{36-x^2}$; $-6 \leqslant x \leqslant 6$. Hàm này không có đạo hàm khi $x = \pm 6$, còn trên khoảng $(-6, 6)$ đạo hàm không bị chặn. Do vậy không thể tính bằng công thức (11.20) trong tọa độ Đề các được.

Để khắc phục khó khăn đó, ta dùng phép tham số hóa đường elip:

$$x = 6\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

1^+ Phép quay xung quanh trục Ox. Ta xét nửa trên của elip tương ứng với $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Theo công thức (11.22) dưới dạng tham số ta có

$$S_x = 2\pi \int\limits_0^{\pi} 3\sin t \cdot \sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt.$$

Đặt $\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi$ ta có

$$S_x = 24\sqrt{3}\pi \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2\varphi d\varphi = 2\sqrt{3}\pi(4\pi + 3\sqrt{3}).$$

2^+ Phép quay xung quanh trục Oy. Ta xét nửa bên phải của elip (tương ứng với $t \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$. Tương tự như trên ta áp dụng (11.23) và thu được

$$S_y = 2\pi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 6\cos t \cdot \sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt \quad \Big(\text{Đặt } \sin t = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{sh}\varphi\Big)$$

$$= 24\sqrt{3}\pi \int\limits_{-\text{arcsh}\sqrt{3}}^{\text{arcsh}\sqrt{3}} \text{ch}^2\varphi d\varphi = 24\sqrt{3}\pi\big(2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})\big).\ \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính độ dài cung của đường cong

1. $y = x^{3/2}$ từ $x = 0$ đến $x = 4$. (ĐS. $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$)

2. $y = x^2 - 1$ từ $x = -1$ đến $x = 1$. (ĐS. $\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$)

3. $y = \dfrac{a}{2}\big(e^{x/a} + e^{-x/a}\big)$ từ $x = 0$ đến $x = a$. (ĐS. $\dfrac{a(e^2-1)}{2e}$)

4. $y = \ln\cos x$ từ $x = 0$ đến $x = \dfrac{\pi}{6}$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}\ln 3$)

5. $y = \ln\sin x$ từ $x = \dfrac{\pi}{3}$ đến $x = \dfrac{2\pi}{3}$. (ĐS. $\ln 3$)

6. $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. (ĐS. $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$)

7. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (ĐS. $8a$)

8. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (ĐS. $6a$)

Chỉ dẫn. Vì $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \dfrac{3a}{1}|\sin 2t|$ và hàm $|\sin 2t|$ có chu kỳ $\pi/2$ nên $\ell = 4\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} d\ell$.

9. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ từ $t = 0$ đến $t = \ln\pi$. (ĐS. $\sqrt{2}(\pi - 1)$)

10. $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$ từ $t = 0$ đến $t = \dfrac{\pi}{2}$. (ĐS. 5π)

11. $\rho = ae^{k\theta}$ (đường xoắn ốc lôga) từ $\theta = 0$ đến $\theta = T$.

(ĐS. $\dfrac{a}{k}\sqrt{1+k^2}(e^{kT} - 1)$)

12. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (đường hình tim). (ĐS. $8a$)

13*. $\rho\varphi = 1$ từ điểm $A\Big(2, \dfrac{1}{2}\Big)$ đến điểm $B\Big(\dfrac{1}{2}, 2\Big)$ - đường xoắn ốc hypecbon.

(ĐS. $\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$)

Tính diện tích các mặt tròn xoay thu được khi quay cung đường cong hay đường cong xung quanh trục cho trước.

14. Cung của đường $y = x^3$ từ $x = -\dfrac{2}{3}$ đến $x = \dfrac{2}{3}$ xung quang trục Ox.

(ĐS. $\dfrac{2\pi}{27}\Big(\dfrac{125}{27}-1\Big)$)

15. Đường $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ xung quanh trục Ox.
(ĐS. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$)

16. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ xung quanh trục Ox.

(ĐS. $2\pi b\Big(b+\dfrac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\Big)$, ε là tâm sai của elip)

Chỉ dẫn. Đạo hàm hai vế phương trình elip rồi rút ra $yy' = -\dfrac{bx^2}{a^2}$, còn biểu thức dưới dấu tích phân được viết $y\sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{y^2+(yy')^3}dx$.

17. Cung đường tròn $x^2+(y-b)^2 = R$ (không cắt trục Oy) từ y_1 đến y_2 xung quanh trục Oy. (ĐS. $2\pi R(y_2-y_1)$)

Chỉ dẫn. Mặt thu được là *đới cầu.*

18. $y = \sin x$ từ $x = 0$ đến $x = \pi$ xung quanh trục Ox.

(ĐS. $2\pi\big[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\big]$)

19. $y = \dfrac{x^3}{3}$ từ $x = -2$ đến $x = 2$ xung quanh trục Ox.

(ĐS. $\dfrac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$)

20. Cung bên trái đường thẳng $x = 2$ của đường cong $y^2 = 4+x$, xung quanh trục Ox. (ĐS. $\dfrac{62\pi}{3}$)

21. $y = \dfrac{a}{2}\big(e^{x/a}+e^{-x/a}\big)$ từ $x = 0$ đến $x = a$ $(a > 0)$.

(ĐS. $\dfrac{\pi a^2}{4}(e^2+4-e^{-2})$)

22. $y^2 = 4x$ từ $x = 0$ đến $x = 3$, xung quanh trục Ox. (ĐS. $\dfrac{56\pi}{3}$)

23. $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$ từ $t = 0$ đến $t = \dfrac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox.

(ĐS. $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi-2)$)

24. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; quay xung quanh trục Ox.

(ĐS. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$)

Chỉ dẫn. Vì đường cong có tính đối xứng qua các trục tọa độ nên chỉ cần tính diện tích tạo nên bởi một phần tư đường thuộc góc I quay xung quanh trục Ox.

25. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (diện tích được tạo thành khi quay một cung); xung quanh trục Ox.

(ĐS. $\dfrac{64\pi}{3}$)

26. $y = \sin 2x$ từ $x = 0$ đến $x = \dfrac{\pi}{2}$; xung quanh trục Ox.

(ĐS. $\dfrac{\pi}{2}\big[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)\big]$)

27. $3x^2 + 4y^2 = 12$; xung quanh trục Oy. (ĐS. $2\pi(4 + 3\ln 3)$)

28. $x^2 = y + 4$, $y = 2$; xung quanh trục Oy. (ĐS. $\dfrac{62\pi}{3}$)

29. Cung của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ $(y > 0)$ giữa hai điểm có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$; xung quanh trục Ox. (ĐS. 8π)

30. Đường hình tim (cacdiod) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$; quay xung quanh trục cực.

(ĐS. $\dfrac{32\pi a^2}{5}$)

31. Đường tròn $\rho = 2r\sin\varphi$; quay xung quanh trục cực. (ĐS. $4\pi^2 r^2$)

32. Cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường xicloid $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; quay xung quanh đường thẳng $y = a$. (ĐS. $16\sqrt{2}\dfrac{\pi a^2}{3}$)

Chỉ dẫn. Áp dụng công thức

$$S = 2\pi \int\limits_{\pi/2}^{3\pi} 2(y(t) - a)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.$$

11.4 Tích phân suy rộng

11.4.1 Tích phân suy rộng cận vô hạn

1. Giả sử hàm $f(x)$ xác định $\forall\, x \geqslant a$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{11.24}$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ trên khoảng $[a, +\infty)$ và ký hiệu là $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Trong trường hợp này người ta còn nói rằng tích phân suy rộng (11.24) hội tụ và hàm $f(x)$ khả tích theo nghĩa suy rộng trên khoảng $[a, +\infty)$. Nếu giới hạn (11.24) không tồn tại thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là tích phân phân kỳ và hàm $f(x)$ không khả tích theo nghĩa suy rộng trên $[a, +\infty)$.

Tương tự như trên, theo định nghĩa

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{11.25}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{11.26}$$

2. **Các công thức cơ bản đối với tích phân suy rộng**

1) *Tính tuyến tính.* Nếu các tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ hội tụ

và

$$\int\limits_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx+\beta\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx.$$

2) *Công thức Newton-Leibnitz.* Nếu trên khoảng $[a,+\infty)$ hàm $f(x)$ liên tục và $F(x)$, $x\in[a,+\infty)$ là nguyên hàm nào đó của nó thì

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

trong đó $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

3) *Công thức đổi biến.* Giả sử $f(x)$, $x\in[a,+\infty)$ là hàm liên tục, $\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ là khả vi liên tục và $a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)<\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty$. Khi đó:

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_\alpha^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{11.27}$$

4) *Công thức tích phân từng phần.* Nếu $u(x)$ và $v(x)$, $x\in[a,+\infty)$ là những hàm khả vi liên tục và $\lim\limits_{x\to+\infty}(uv)$ tồn tại thì:

$$\int\limits_a^{+\infty}udv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty}vdu \tag{11.28}$$

trong đó $uv\Big|_a^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}(uv)-u(a)v(a)$.

3. **Các điều kiện hội tụ**

1) *Tiêu chuẩn Cauchy.* Tích phân $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,b=b(\varepsilon)\geqslant a$ sao cho $\forall\,b_1>b$ và $\forall\,b_2>b$ ta có:

$$\Big|\int\limits_{b_1}^{b_2}f(x)dx\Big|<\varepsilon.$$

2) *Dấu hiệu so sánh I.* Giả sử $g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \; \forall x \geqslant a$ và $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, $b < +\infty$. Khi đó:

(i) Nếu tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

(ii) Nếu tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

3) *Dấu hiệu so sánh II.* Giả sử $f(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0 \; \forall x \geqslant a$ và

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Khi đó:

(i) Nếu $0 < \lambda < +\infty$ thì các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

(ii) Nếu $\lambda = 0$ và tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

(iii) Nếu $\lambda = +\infty$ và tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.

Để so sánh ta thường sử dụng tích phân

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{array}{l} \nearrow \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \searrow \text{phân kỳ nếu } \alpha \leqslant 1. \end{array}} \tag{11.29}$$

Định nghĩa. Tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu tích phân $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ và được gọi là hội tụ có điều kiện nếu tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng tích phân $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Mọi tích phân hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

3) Từ dấu hiệu so sánh II và (11.29) rút ra

Dấu hiệu thực hành. Nếu khi $x \to +\infty$ hàm dương $f(x)$ là vô cùng bé cấp $\alpha > 0$ so với $\dfrac{1}{x}$ thì

(i) tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi $\alpha > 1$;

(ii) tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ khi $\alpha \leqslant 1$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\cdot$$

Giải. Theo định nghĩa ta có

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\cdot$$

Đặt $x = \dfrac{1}{t}$, ta thu được

$$I(b) = \int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_{1/2}^{1/b} \frac{-dt}{t^2 \cdot \dfrac{1}{t^2}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}} = -\int\limits_{1/2}^{1/b} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \sqrt{1-t^2}\Big|_{1/2}^{1/b} = \sqrt{1-\frac{1}{b^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{4}}.$$

Từ đó suy rằng $I = \lim\limits_{b\to+\infty} I(b) = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$. Như vậy tích phân đã cho hội tụ. ▲

Ví dụ 2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}dx.$$

Giải. Hàm dưới dấu tích phân $> 0 \; \forall\, x \geqslant 1$. Ta có

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4} = \frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}\cdot$$

Với x đủ lớn hàm $f(x)$ có dáng điệu như $\dfrac{2}{x}$. Do đó ta lấy hàm $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ để so sánh và có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^2+1)x}{x^2+3x+4} = 2 \neq 0.$$

Vì tích phân $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$ phân kỳ nên theo dấu hiệu so sánh II tích phân đã cho phân kỳ. ▲

Ví dụ 3. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-12}}\cdot$$

Giải. Ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} > \frac{1}{x} \quad \text{khi } x > 2.$$

Nhưng tích phân $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ, do đó theo dấu hiệu so sánh I tích phân đã cho phân kỳ. ▲

Ví dụ 4. Khảo sát sự hội tụ và đặc tính hội tụ của tích phân

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Giải. Đầu tiên ta tích phân từng phần một cách hình thức

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \tag{11.30}$$

Tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ hội tụ tuyệt đối, do đó nó hội tụ. Như vậy cả hai số hạng ở vế phải (11.30) hữu hạn. Từ đó suy ra phép tích phân từng phần đã thực hiện là hợp lý và vế trái của (11.30) là tích phân hội tụ.

Ta xét sự hội tụ tuyệt đối. Ta có

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

và do vậy $\forall\, b > 1$ ta có

$$\int\limits_1^{b} \frac{|\sin x|}{x} dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{\cos 2x}{x} dx. \tag{11.31}$$

Tích phân thứ nhất ở vế phải của (11.31) phân kỳ. Tích phân thứ hai ở vế phải đó hội tụ (điều đó được suy ra bằng cách tích phân từng phần như (11.30)). Qua giới hạn (11.31) khi $b \to +\infty$ ta có vế phải của (11.31) dần đến ∞ và do đó tích phân vế trái của (11.31) phân kỳ, tức là tích phân đã cho hội tụ có điều kiện (không tuyệt đối). ▲

BÀI TẬP

Tính các tích phân suy rộng cận vô hạn

1. $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx$ (ĐS. $\frac{1}{2}$)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. (ĐS. $\frac{\pi}{6}$)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. (ĐS. $\frac{\pi-2}{8}$)

4. $\int\limits_0^\infty x\sin x dx$. (ĐS. Phân kỳ)

5. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$. (ĐS. Phân kỳ)

6. $\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin x dx$. (ĐS. $\frac{1}{2}$)

7. $\int\limits_2^{+\infty} \Big(\frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{(x+1)^2}\Big)dx$. (ĐS. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln 3$)

8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$. (ĐS. $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$)

9. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$. (ĐS. $\dfrac{1}{36}$). *Chỉ dẫn.* Đặt $x = \sqrt{t}$.

10. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. (ĐS. $\ln\Big(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big)$). *Chỉ dẫn.* Đặt $x = \dfrac{1}{t}$.

11. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}x}{x^2}dx$. (ĐS. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$)

12. $\displaystyle\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10}dx$. (ĐS. Phân kỳ)

13. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\sin bxdx,\ a > 0$. (ĐS. $\dfrac{b}{a^2+b^2}$)

14. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\cos bxdx,\ a > 0$. (ĐS. $\dfrac{a}{a^2+b^2}$)

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng cận vô hạn

15. $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$. (ĐS. Hội tụ)

Chỉ dẫn. Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{e^{-x}}{x} \leqslant e^{-x}\ \forall x \geqslant 1$.

16. $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$. (ĐS. Phân kỳ)

Chỉ dẫn. Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} > \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}} \quad \forall x \geqslant 2.$$

17. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$. (ĐS. Hội tụ)

18. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$. (ĐS. Phân kỳ)

19. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^\alpha}dx$. (ĐS. Hội tụ nếu $\alpha > 0$)

20. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+2}}$. (ĐS. Hội tụ)

21. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}dx$. (ĐS. Hội tụ)

22. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$. (ĐS. Hội tụ)

23. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}dx$. (ĐS. Hội tụ)

24. $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}(e^{1/x}-1)dx$. (ĐS. Hội tụ)

25. $\displaystyle\int\limits_1^{\infty}\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}dx$. (ĐS. Phân kỳ)

26. $\displaystyle\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$. (ĐS. Hội tụ)

27*. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}(3x^4-x^2)e^{-x^2}dx$. (ĐS. Hội tụ)

Chỉ dẫn. So sánh với tích phân hội tụ $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (tại sao ?) và áp dụng dấu hiệu so sánh II.

28*. $\displaystyle\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{\ln(x-2)}{x^5+x^2+1}dx.$ (ĐS. Hội tụ)

Chỉ dẫn. Áp dụnng hệ thức

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0\ \forall \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-2)}{x^\alpha} = 0\ \forall\, \alpha > 0.$$

Từ đó so sánh tích phân đã cho với tích phân hội tụ $\displaystyle\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Tiếp đến áp dụng dấu hiệu so sánh II.

11.4.2 Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

1. Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên khoảng $[a, b)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, \xi]$, $\xi < b$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\xi\to b-0} \int\limits_{0}^{\xi} f(x)dx \tag{11.32}$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ trên $[a, b)$ và ký hiệu là:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx. \tag{11.33}$$

Trong trường hợp này tích phân suy rộng (11.33) được gọi là tích phân hội tụ. Nếu giới hạn (11.32) không tồn tại thì tích phân suy rộng (11.33) phân kỳ.

Định nghĩa tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ xác định trên khoảng $(a, b]$ được phát biểu tương tự.

Nếu hàm $f(x)$ khả tích theo nghĩa suy rộng trên các khoảng $[a, c)$ và $(c, b]$ thì hàm được gọi là hàm khả tích theo nghĩa suy rộng trên đoạn $[a, b]$ và trong trường hợp này tích phân suy rộng được xác định bởi đẳng thức:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

2. **Các công thức cơ bản**

1) Nếu các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có tích phân

$\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$ hội tụ và

$$\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

2) Công thức Newton-Leibnitz. Nếu hàm $f(x)$, $x \in [a, b)$ liên tục và $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của f trên $[a, b)$ thì:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a),$$
$$F(b-0) = \lim_{x\to b-0} F(x).$$

3) Công thức đổi biến. Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b)$ còn $\varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta)$ khả vi liên tục và $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t) = b$. Khi đó:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

4) Công thức tích phân từng phần. Giả sử $u(x)$, $x \in [a, b)$ và $v(x)$, $x \in [a, b)$ là những hàm khả vi liên tục và $\lim\limits_{x \to b-0}(uv)$ tồn tại. Khi đó;

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$$

$$uv\Big|_a^b = \lim_{x \to b-0}(uv) - u(a)v(a).$$

3. **Các điều kiện hội tụ**

1) Tiêu chuẩn Cauchy. Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên khoảng $[a, b)$, khả tích theo nghĩa thông thường trên mọi đoạn $[a, \xi]$, $\xi < b$ và không bị chặn trong lân cận bên trái của điểm $x = b$. Khi đó tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta \in [a, b)$ sao cho $\forall\, \eta_1, \eta_2 \in (\eta, b)$ thì

$$\Big|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\Big| < \varepsilon.$$

2) *Dấu hiệu so sánh I.* Giả sử $g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ trên khoảng $[a, b)$ và khả tích trên mỗi đoạn con $[a, \xi]$, $\xi < b$. Khi đó:

(i) Nếu tích phân $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

(ii) Nếu tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int\limits_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

3) *Dấu hiệu so sánh II.* Giả sử $f(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0$, $x \in [a, b)$ và

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Khi đó:

(i) Nếu $0 < \lambda < +\infty$ thì các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

(ii) Nếu $\lambda = 0$ và tích phân $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

(iii) Nếu $\lambda = +\infty$ và tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ.

Để so sánh ta thường sử dụng tích phân:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \begin{array}{l} \nearrow \text{hội tụ nếu } \alpha < 1 \\ \searrow \text{phân kỳ nếu } \alpha \geqslant 1 \end{array}$$

hoặc

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \begin{array}{l} \nearrow \text{hội tụ nếu } \alpha < 1 \\ \searrow \text{phân kỳ nếu } \alpha \geqslant 1. \end{array}$$

Định nghĩa. Tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu tích phân $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ hội tụ và được gọi là hội tụ có điều kiện nếu tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ nhưng $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ.

4) Tương tự như trong **11.4.1** ta có

Dấu hiệu thực hành. Nếu khi $x \to b - 0$ hàm $f(x) \geqslant 0$ xác định và liên tục trong $[a, b)$ là vô cùng lớn cấp α so với $\dfrac{1}{b-x}$ thì

(i) tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi $\alpha < 1$;

(ii) tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ khi $\alpha \geqslant 1$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải. Hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ liên tục và do đó nó khả tích trên mọi đoạn $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, nhưng khi $x \to 1 - 0$ thì $f(x) \to +\infty$. Ta có

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \operatorname{asrc}\sin 1 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Như vậy tích phân đã cho hội tụ. ▲

Ví dụ 2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot$$

Giải. Hàm dưới dấu tích phân có gián đoạn vô cùng tại điểm $x = 1$. Ta có

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \forall x \in [0, 1).$$

Nhưng tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ hội tụ, nên theo dấu hiệu so sánh I tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ 3. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$$

Giải. Ở đây hàm dưới dấu tích phân có gián đoạn vô cùng tại điểm $x = 0$. Khi $x \in (0, 1]$ ta có

$$\frac{1}{e^x - \cos x} \geqslant \frac{1}{xe}$$

vì rằng $xe \geqslant e^x - \cos x$ (tại sao ?). Nhưng tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{xe}dx$ phân kỳ nên tích phân đã cho phân kỳ. ▲

Ví dụ 4. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha}dx, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Giải. Ta chia khoảng lấy tích phân làm hai sao cho khoảng thứ nhất hàm có bất thường tại điểm $x = 0$. Chẳng hạn ta chia thành hai nửa khoảng $(0, 1]$ và $[1, +\infty)$. Khi đó ta có

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha}dx = \int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha}dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha}dx. \tag{11.34}$$

Đầu tiên xét tích phân $\int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha}dx$, Ta có

$$f(x) = \frac{\text{arctg}x}{x^\alpha} \underset{(x \to 0)}{\sim} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha - 1}} = \varphi(x)$$

Tích phân $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx$ hội tụ khi $\alpha - 1 < 1 \Rightarrow \alpha < 2$. Do đó tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ cũng hội tụ khi $\alpha < 2$ theo dấu hiệu so sánh II.

Xét tích phân $\int\limits_1^\infty f(x)dx$. Áp dụng dấu hiệu so sánh II trong 1° ta đặt $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ và có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \mathrm{arctg} x}{x^\alpha} = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Vì tích phân $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$ nên với $\alpha > 1$ tích phân được xét hội tụ. Như vậy cả hai tích phân ở vế phải (11.34) chỉ hội tụ khi $1 < \alpha < 2$.

Đó chính là điều kiện hội tụ của tích phân đã cho. ▲

Ví dụ 5. Khảo sát sự hội tụ của tích phân

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx.$$

Giải. Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn trong lân cận phải của điểm $x = 0$. Khi $x \to 0+0$ ta có

$$\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} \underset{(x\to 0+0)}{\sim} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \varphi(x).$$

Vì tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh II, tích phân đã cho hội tụ. ▲

BÀI TẬP

Tính các tích phân suy rộng sau.

1. $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$. (ĐS. $6\sqrt[3]{2}$)

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. (ĐS. 6)

3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$. (ĐS. Phân kỳ)

4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. (ĐS. Phân kỳ)

5. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x dx$. (ĐS. $-0,25$)

6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$. (ĐS. $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{125}$)

7. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$. (ĐS. Phân kỳ)

8. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{xdx}{x^2-1}$. (ĐS. Phân kỳ)

9. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$. (ĐS. $\dfrac{16}{3}$). *Chỉ dẫn.* Đặt $x = 2\sin t$.

10. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$. (ĐS. $-\dfrac{2}{e}$)

11. $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx.$ (ĐS. Phân kỳ)

12. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$ (ĐS. π)

13. $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; $a < b$. (ĐS. π)

14. $\int\limits_0^1 x\ln^2 x dx.$ (ĐS. $\frac{1}{4}$)

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau đây.

15. $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx.$ (ĐS. Hội tụ)

16. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}dx.$ (ĐS. Hội tụ)

17. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$ (ĐS. Hội tụ)

18. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}.$ (ĐS. Hội tụ)

19. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$ (ĐS. Phân kỳ)

20. $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$ (ĐS. Phân kỳ)

21. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$. (ĐS. Phân kỳ)

22. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin 2x)}{\sqrt[5]{x}} dx$. (ĐS. Hội tụ)

23. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. (ĐS. Hội tụ)

Chỉ dẫn. Sử dụng hệ thức $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha \ln x = 0 \ \forall\, \alpha > 0 \Rightarrow$ có thể lấy $\alpha = \frac{1}{4}$ chẳng hạn $\Rightarrow \frac{|lnx|}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{3/4}}$.

24. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$. (ĐS. Phân kỳ)

25. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x - x^3}}$. (ĐS. Hội tụ)

26. $\int\limits_1^2 \frac{(x-2)}{x^2 - 3x^2 + 4} dx$. (ĐS. Phân kỳ)

27. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(e^x - e^{-x})}}$. (ĐS. Hội tụ)

28. $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{16 + x^4}{16 - x^4}} dx$. (ĐS. Hội tụ)

29. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\sin x} dx$. (ĐS. Hội tụ)

30. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{1 - \cos x} dx$. (ĐS. Phân kỳ)

Chương 12

Tích phân hàm nhiều biến

12.1 Tích phân 2-lớp

12.1.1 Trường hợp miền chữ nhật

Giả sử

$$D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

và hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền D. Khi đó tích phân 2-lớp của hàm $f(x,y)$ theo miền chữ nhật

$$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b; c \leqslant y \leqslant d\}$$

được tính theo công thức

$$\iint\limits_D f(M)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(M)dy; \tag{12.1}$$

$$\iint\limits_D f(M)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(M)dx, \quad M = (x,y). \tag{12.2}$$

Trong (12.1): đầu tiên tính tích phân trong $I(x)$ theo y xem x là hằng số, sau đó tích phân kết quả thu được $I(x)$ theo x. Đối với (12.2) ta cũng tiến hành tượng tự nhưng theo thứ tự ngược lại.

12.1.2 Trường hợp miền cong

Giả sử hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền bị chặn

$$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b; \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

trong đó $y = \varphi_1(x)$ là biên dưới, $y = \varphi_2(x)$ là biên trên, hoặc

$$D = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d; g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\}$$

trong đó $x = g_1(y)$ là biên trái còn $x = g_2(y)$ là biên phải, ở đây ta luôn giả thiết các hàm $\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2$ đều liên tục trong các khoảng tương ứng. Khi đó tích phân 2-lớp theo miền D luôn luôn tồn tại.

Để tính tích phân 2-lớp ta có thể áp dụng một trong hai phương pháp sau.

1^+ Phương pháp Fubini dựa trên định lý Fubini về việc đưa tích phân 2-lớp về tích phân lặp. Phương pháp này cho phép ta đưa tích phân 2-lớp về tích phân lặp theo hai thứ tự khác nhau:

$$\iint\limits_D f(M)dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(M)dy\Big]dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(M)dy, \quad (12.3)$$

$$\iint\limits_D f(M)dxdy = \int\limits_c^d \Big[\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(M)dx\Big]dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(M)dx. \quad (12.4)$$

Từ (12.3) và (12.4) suy rằng *cận của các tích phân trong biến thiên và phụ thuộc vào biến mà khi tính tích phân trong, nó được xem là không đổi. Cận của tích phân ngoài luôn luôn là hằng số.*

Nếu trong công thức (12.3) (tương ứng: (12.4)) phần biên dưới hay phần biên trên (tương ứng: phần biên trái hay phải) gồm từ một số phần và mỗi phần có phương trình riêng thì miền D cần chia thành những miền con bởi các đường thẳng song song với trục Oy (tương ứng: song song với trục Ox) sao cho mỗi miền con đó các phần biên dưới hay trên (tương ứng: phần biên trái, phải) đều chỉ được biểu diễn bởi một phương trình.

2^+ Phương pháp đổi biến. Phép đổi biến trong tích phân 2-lớp được thực hiện theo công thức

$$\iint\limits_D f(M)dxdy = \iint\limits_{D^*} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\Big|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\Big|dudv \qquad (12.5)$$

trong đó D^* là miền biến thiên của tọa độ cong (u,v) tương ứng khi các điểm (x,y) biến thiên trong D: $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$; $(u,v) \in D^*$, $(x,y) \in D$; còn

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{12.6}$$

là Jacobiên của các hàm $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$.

Tọa độ cong thường dùng hơn cả là tọa độ cực (r,φ). Chúng liên hệ với tọa độ Đêcac bởi các hệ thức $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Từ (12.6) suy ra $J = r$ và trong tọa độ cực (12.5) có dạng

$$\iint\limits_D f(M)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \tag{12.7}$$

Ký hiệu vế phải của (12.7) là $I(D^*)$. Có các trường hợp cụ thể sau đây.

(i) Nếu cực của hệ tọa độ cực nằm ngoài D thì

$$I(D^*) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{12.8}$$

(ii) Nếu cực nằm trong D và mỗi tia đi ra từ cực cắt biên ∂D không quá một điểm thì

$$I(D^*) = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{12.9}$$

(iii) Nếu cực nằm trên biên ∂D của D thì

$$I(D^*) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{12.10}$$

12.1.3 Một vài ứng dụng trong hình học

1^+ Diện tích S_D của miền phẳng D được tính theo công thức

$$S_D = \iint\limits_D dxdy \Rightarrow S_D = \iint\limits_{D^*} rdrd\varphi. \qquad (12.11)$$

2^+ Thể tích vật thể hình trụ thẳng đứng có đáy là miền D (thuộc mặt phẳng Oxy) và giới hạn phía trên bởi mặt $z = f(x, y) > 0$ được tính theo công thức

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \qquad (12.12)$$

3^+ Nếu mặt (σ) được cho bởi phương trình $z = f(x, y)$ thì diện tích của nó được biểu diễn bởi tích phân 2-lớp

$$S_\sigma = \iint\limits_{D(x,y)} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}dxdy, \qquad (12.13)$$

trong đó $D(x, y)$ là hình chiếu vuông góc của mặt (σ) lên mặt phẳng tọa độ Oxy.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$\iint\limits_D xydxdy, \quad D = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 2; 1 \leqslant y \leqslant 2\}.$$

Giải. Theo công thức (12.2):

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^2 xydx.$$

Tính tích phân trong (xem y là không đổi) ta có

$$I(x) = \int\limits_1^2 xydx = y\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2y - \frac{1}{2}y.$$

Bây giờ tính tích phân ngoài:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 \Big(2y - \frac{1}{2}y\Big)dy = \frac{9}{4}\cdot \qquad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $\iint\limits_D xydxdy$ nếu D được giới hạn bởi các đường cong $y = x - 4$, $y^2 = 2x$.

Giải. Bằng cách dựng các đường giữa các giao điểm $A(8,4)$ và $B(2,-2)$ của chúng, bạn đọc sẽ thu được miền lấy tích phân D.

Nếu đầu tiên lấy tích phân theo x và tiếp đến lấy tích phân theo y thì tích phân theo miền D được biểu diễn bởi một tích phân bội

$$I = \iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{-2}^4 ydy \int\limits_{y^2/2}^{y^4} xdx,$$

trong đó đoạn $[-2,4]$ là hình chiếu của miền D lên trục Oy. Từ đó

$$I = \int\limits_{-2}^4 y\Big[\frac{x^2}{2}\Big|_{y^2/2}^{y^4}\Big]dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^4 y\Big[(y+4)^2 - \frac{y^4}{4}\Big]dy = 90.$$

Nếu tính tích phân theo thứ tự khác: đầu tiên theo y, sau đó theo x thì cần chia miền D thành hai miền con bởi đường thẳng qua B và song song với trục Oy và thu được

$$I = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy + \int\limits_2^8 xdx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy$$

$$= \int\limits_0^2 xdx \cdot 0 + \int\limits_2^8 x\Big[\frac{y^2}{2}\Big|_{x-4}^{\sqrt{2x}}\Big]dx = 90.$$

Như vậy tích phân 2-lớp đã cho không phụ thuộc thứ tự tính tích phân. Do vậy, cần chọn một thứ tự tích phân để không phải chia miền. ▲

Ví dụ 3. Tính tích phân $\iint\limits_D (y-x)dxdy$. trong đó miền D được giới hạn bởi các đường thẳng $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$, $y = -\dfrac{1}{3}x + 5$.

Giải. Để tránh sự phức tạp, ta sử dụng phép đổi biến $u = -y-x$; $v = y + \dfrac{1}{3}x$ và áp dụng công thức (12.5). Qua phép đổi biến đã chọn, đường thẳng $y = x+1$ biến thành đường thẳng $u = 1$; còn $y = x-3$ biến thành $u = -3$ trong mặt phẳng Ouv; tương tự, các đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$, $y = -\dfrac{1}{3}x + 5$ biến thành các đường thẳng $v = \dfrac{7}{3}$, $v = 5$. Do đó miền D^* trở thành miền $D^* = [-3,1] \times \left[\dfrac{7}{3}, 5\right]$. Dễ dàng thấy rằng $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{3}{4}$. Do đó theo công thức (12.5):

$$\iint\limits_D (y-x)dxdy = \iint\limits_{D^*} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}dudv$$

$$= \iint\limits_{D^*} \frac{3}{4}ududv = \int\limits_{7/3}^{5} dv \int\limits_{-3}^{4} \frac{3}{4}udu = -8. \ ▲$$

Nhận xét. Phép đổi biến trong tích phân hai lớp nhằm mục đích đơn giản hóa miền lấy tích phân. Có thể lúc đó hàm dưới dấu tích phân trở nên phức tạp hơn.

Ví dụ 4. Tính tích phân $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, trong đó D là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2 = 2x$.

Giải. Ta chuyển sang tọa độ cực và áp dụng công thức (12.7). Công thức liên hệ (x,y) với tọa độ cực (r,φ) với cực tại điểm $O(0,0)$

có dạng

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{12.14}$$

Thế (12.14) vào phương trình đường tròn ta thu được $r^2 = 2r\cos\varphi \Rightarrow r = 0$ hoặc $r = 2\cos\varphi$ (đây là phương trình đường tròn trong tọa độ cực). Khi đó

$$D^* = \left\{(r,\varphi) : -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi\right\}$$

Từ đó thu được

$$I = \iint\limits_{D} (x^2+y^2)dxdy = \iint\limits_{D^*} r^3 drd\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^3 dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right) d\varphi = 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi f\varphi = \frac{3\pi}{2}\cdot \ \blacktriangle$$

Nhận xét. Nếu lấy cực tại tâm hình tròn thì

$$\begin{aligned} x - 1 &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ D^* &= \{(r,\varphi) : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\} \end{aligned}$$

và do $x^2 + y^2 = 1 + 2r\cos\varphi + r^2$ nên

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D^*} r(1 + 2r\cos\varphi + r^2)drd\varphi \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r + 2r^2\cos\varphi + r^3)dr = \frac{3\pi}{2}\cdot \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính thể tích vật thể T giới hạn bởi paraboloid $z = x^2 + y^2$, mặt trụ $y = x^2$ và các mặt phẳng $y = 1$, $z = 0$.

Giải. Hình chiếu của vật thể T lên mặt phẳng Oxy là

$$D(x,y) = \Big\{(x,y) : -1 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\Big\}.$$

Do đó áp dụng (12.12) ta có

$$\begin{aligned} V(T) &= \iint\limits_{D(x,y)} z dxdy = \iint\limits_{D(x,y)} (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2+y^2)dy \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \Big[\Big(x^2y + \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_{x^2}^{1}\Big]dx = \frac{88}{105}\cdot \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tìm diện tích mặt cầu bán kính R với tâm tại gốc tọa độ.

Giải. Phương trình mặt cầu đã cho có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Do đó phương trình nửa trên mặt cầu là

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Do tính đối xứng nên ta chỉ tính diện tích nửa trên là đủ. Ta có

$$ds = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\cdot$$

Miền lấy tích phân $D(x,y) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Do đó

$$\begin{aligned} S &= 2\iint\limits_{D(x,y)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \left| \begin{aligned} & x = r\cos\varphi \\ & y = r\sin\varphi \\ & J = r \end{aligned} \right| \\ &= 2R \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \frac{rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ &= 4\pi R\Big[-\sqrt{R^2 - r^2}\Big|_0^R\Big] = 4\pi R^2. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Tính diện tích phần mặt trụ $x^2 = 2z$ giới hạn bởi giao tuyến của mặt trụ đó với các mặt phẳng $x - 2y = 0$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

Giải. Dễ thấy rằng hình chiếu của phần mặt đã nêu là tam giác với các cạnh nằm trên giao tuyến của mặt phẳng Oxy với các mặt phẳng đã cho.

Từ phương trình mặt trụ ta có $z = \dfrac{x^2}{2}$, do vậy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow dS = \sqrt{1 + x^2}dxdy.$$

Từ đó suy rằng

$$S = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2}dx \int\limits_{x/2}^{2x} dy = \frac{3}{2}\int\limits_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1 + x^2}dx = 13. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tìm cận của tích phân hai lớp $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ theo miền D giới hạn bởi các đường đã chỉ ra . (Để ngắn gọn ta ký hiệu $f(x, y) = f(-)$).

1. $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

(ĐS. $\displaystyle\int\limits_3^5 dx \int\limits_{\frac{3x+1}{5}}^{\frac{3x+4}{5}} f(-)dy$)

2. $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$

(ĐS. $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(-)dy$)

3. $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

$$\text{(ĐS. } \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(-)dy)$$

4. $x + y \leqslant 1$, $x - y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

$$\text{(ĐS. } \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(-)dy)$$

5. $y \geqslant x^2$, $y \leqslant 4 - x^2$.

$$\text{(ĐS. } \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(-)dy)$$

6. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1$.

$$\text{(ĐS. } \int\limits_{-2}^{+2} dx \int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(-)dy)$$

7. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

$$\text{(ĐS. } \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(-)dy)$$

8. $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

$$\text{(ĐS. } \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(-)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{6-x} f(-)dy)$$

Thay đổi thứ tự tích phân trong các tích phân

9. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_y^4 f(-)dx.$ (ĐS. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_2^x f(-)dy$)

10. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(-)dy.$ (ĐS. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(-)dx$)

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} f(-)dy.$ (ĐS. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y fdx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} fdx$)

12. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{1/y}^y fdx.$ (ĐS. $\int\limits_{1/2}^1 dx \int\limits_{1/x}^2 fdy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^2 fdy$)

Tính các tích phân lặp sau

13. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} (x - y + 1)dy.$ (ĐS. $\frac{1}{3}$)

14. $\int\limits_{-2}^4 dy \int\limits_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2}dx.$ (ĐS. 6π)

15. $\int\limits_2^0 dy \int\limits_0^{y^2} (x + 2y)dx.$ (ĐS. $-11,2$)

16. $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4 + x + y}dy.$ (ĐS. $\frac{506}{15}$)

17. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x + y)^2}.$ (ĐS. $\frac{25}{24}$)

18. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{-2\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} (x^2 + y^2)dy.$ (ĐS. $\frac{344}{105}a^4$)

19. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r dr.$ (ĐS. $\frac{\pi a^2}{2}$)

20*. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy.$ (ĐS. $\frac{\pi}{6}$)

Tính các tích phân 2-lớp theo các hình chữ nhật đã chỉ ra.

21. $\iint\limits_D (x+y^2)dxdy;\ 2 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 \leqslant y \leqslant 2.$ (ĐS. $4\frac{5}{6}$)

22. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy;\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$ (ĐS. $2\frac{5}{6}$)

23. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$ (ĐS. $\frac{2}{3}$)

24. $\iint\limits_D \frac{3y^2dxdy}{1+x^2};\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$ (ĐS. $\frac{\pi}{4}$)

25. $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy;\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$ (ĐS. 2)

26. $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 0.$ (ĐS. $\frac{1}{e}$)

27. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x-y)^2};\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 3 \leqslant y \leqslant 4.$ (ĐS. $\ln\frac{4}{3}$)

Tính các tích phân 2-lớp theo miền D giới hạn các đường đã chỉ ra

28. $\iint\limits_D xydxdy;\ y=0,\ y=x,\ x=1.$ (ĐS. $\frac{1}{8}$)

29. $\iint\limits_D xydxdy;\ y=x^2,\ x=y^2.$ (ĐS. $\frac{1}{12}$)

30. $\iint\limits_D x dx dy$; $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$. (ĐS. $\frac{7}{15}$)

31. $\iint\limits_D x dx dy$; $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$. (ĐS. $20\frac{5}{6}$)

32. $\iint\limits_D y^2 x dx dy$; $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$. (ĐS. $1\frac{3}{5}$)

33. $\iint\limits_D (x + y) dx dy$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $0 \leqslant x \leqslant \sin y$. (ĐS. $\frac{5\pi}{4}$)

34. $\iint\limits_D \sin(x + y) dx dy$; $x = y$, $x + y = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. (ĐS. $\frac{1}{2}$)

35. $\iint\limits_D e^{-y^2} dx dy$; D là tam giác với đỉnh $O(0,0)$, $B(0,1)$, $A(1,1)$.
(ĐS. $-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$)

36. $\iint\limits_D xy dx dy$; D là hình elip $4x^2 + y^2 \leqslant 4$. (ĐS. 0)

37. $\iint\limits_D x^2 y dx dy$; $y = 0$, $y = \sqrt{2ax - x^2}$. (ĐS. $\frac{4a^5}{5}$)

38. $\iint\limits_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$; $y = x$, $x = 2$, $x = 2y$. (ĐS. $\frac{\pi}{2} - 2\text{arctg}\frac{1}{2}$)

39. $\iint\limits_D \sqrt{x + y} dx dy$; $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. (ĐS. $\frac{2}{5}$)

40. $\iint\limits_D (x - y) dx dy$; $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$. (ĐS. $4\frac{4}{15}$)

41. $\iint\limits_D (x + 2y) dx dy$; $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$. (ĐS. $25\frac{1}{3}$)

42. $\iint\limits_D xdxdy$; $x = 2 + \sin y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2\pi$. (ĐS. $\dfrac{9\pi}{2}$)

43. $\iint\limits_D xydxdy$; $(x-2)^2 + y^2 = 1$. (ĐS. $\dfrac{4}{3}$)

44. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$; D là hình tròn bán kính a nằm trong góc vuông I và tiếp xúc với các trục tọa độ. (ĐS. $\dfrac{8}{3}a\sqrt{2a}$)

45. $\iint\limits_D ydxdy$; $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (là miền giới hạn bởi vòm của xicloid.) (ĐS. $\dfrac{5}{2}\pi R^3$)

$$\textit{Chỉ dẫn.}\quad \iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^{2\pi R} dx \int\limits_0^{y=f(x)} ydy$$

Chuyển sang tọa độ cực và tính tích phân trong tọa độ mới

46. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$; $D: x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$. (ĐS. $\dfrac{\pi R^4}{4}$)

47. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$; $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. (ĐS. $\dfrac{\pi}{4}(e-1)$)

48. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$; $D: x^2 + y^2 \leqslant R^2$. (ĐS. $2\pi(e^{R^2} - 1)$)

49. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$; $D: x^2 + y^2 \leqslant x$. (ĐS. $\dfrac{1}{4}\big(\pi - \dfrac{4}{3}\big)$)

50. $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$; $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

(ĐS. $\dfrac{\pi(\pi-2)}{2}$)

51. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$; $D: 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant e$. (ĐS. 2π)

52. $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$; D giới hạn bởi các đường tròn

$$x^2+y^2+2x-1=0, \quad x^2+y^2+2x=0. \quad (\text{ĐS. } \frac{5\pi}{2})$$

Chỉ dẫn. Đặt $x-1 = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt đã chỉ ra.

53. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. (ĐS. $\frac{1}{6}$)

54. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $z=x^2+y^2$. (ĐS. $\frac{1}{6}$)

55. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$. (ĐS. $\frac{88}{105}$)

56. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. (ĐS. $\frac{2}{3}\pi a^3$)

57. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. (ĐS. $\frac{\pi a^4}{2}$)

58. $z=x$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. (ĐS. $\frac{4a^3}{3}$)

59. $z=4-x^2-y^2$, $x=\pm 1$, $y=\pm 1$. (ĐS. $13\frac{1}{3}$)

60. $2-x-y-2z=0$, $y=x^2$, $y=x$. (ĐS. $\frac{11}{120}$)

61. $x^2+y^2=4x$, $z=x$, $z=2x$. (ĐS. 4π)

Tính diện tích các phần mặt đã chỉ ra.

62. Phần mặt phẳng $6x+3y+2z=12$ nằm trong góc phần tám I. (ĐS. 14)

63. Phần mặt phẳng $x+y+z=2a$ nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=a^2$. (ĐS. $2a^2\sqrt{3}$)

64. Phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.
(ĐS. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$)

65. Phần mặt $2z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.
(ĐS. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\pi$)

66. Phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$.
(ĐS. $\pi a^2\sqrt{2}$)

67. Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = Rx$.
(ĐS. $2R^2(\pi - 2)$)

68. Phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.
(ĐS. $2\sqrt{2}\pi$)

69. Phần mặt trụ $z^2 = 4x$ nằm trong góc phần tám thứ I và giới hạn bởi mặt trụ $y^2 = 4x$ và mặt phẳng $x = 1$. (ĐS. $\frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1)$)

70. Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$ $(a \leqslant R)$. (ĐS. $4\pi a(a - \sqrt{a^2 - R^2})$)

12.2 Tích phân 3-lớp

12.2.1 Trường hợp miền hình hộp

Giả sử miền $D \subset \mathbb{R}^3$:

$D = [a, b] \times [c, d] \times [e, g] = \{(x, y, z) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, e \leqslant z \leqslant g\}$

và hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong D. Khi đó tích phân 3-lớp của hàm $f(x, y, z)$ theo miền D được tính theo công thức

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \Big\{ \int\limits_c^d \Big[\int\limits_e^g f(x,y,z)dz \Big] dy \Big\} dx$$
$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^g f(M)dx. \qquad (12.15)$$

Từ (12.15) suy ra các giai đoạn tính tích phân 3-lớp:

(i) Đầu tiên tính $I(x,y) = \int\limits_e^g f(M)dz$;

(ii) Tiếp theo tính $I(x) = \int\limits_c^d I(x,y)dy$;

(iii) Sau cùng tính tích phân $I = \int\limits_a^b I(x)dx$.

Nếu tích phân (12.15) được tính theo thứ tự khác thì các giai đoạn tính vẫn tương tự: đầu tiên tính tích phân trong, tiếp đến tính tích phân giữa và sau cùng là tính tích phân ngoài.

12.2.2 Trường hợp miền cong

1^+ Giả sử hàm $f(M)$ liên tục trong miền bị chặn

$D = \big\{(x,y,z) : a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), g_1(x,y) \leqslant z \leqslant g_2(x,y)\big\}$.

Khi đó tích phân 3-lớp của hàm $f(M)$ theo miền D được tính theo công thức

$$\iiint\limits_D f(M)dxdydz = \int\limits_a^b \Big\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Big[\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(M)dx \Big] dy \Big\} dx \qquad (12.16)$$

hoặc

$$\iiint\limits_D f(M)dxdydz = \iint\limits_{D(x,y)} dxdy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(M)dz, \qquad (12.17)$$

trong đó $D(x,y)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy. Việc tính tích phân 3-lớp được quy về tính liên tiếp ba tích phân thông thường theo (12.16) từ tích phân trong, tiếp đến tích phân giữa và sau cùng là tính tích phân ngoài. Khi tính tích phân 3-lớp theo công thức (12.17): đầu tiên tính tích phân trong và sau đó có thể tính tích phân 2-lớp theo miền $D(x,y)$ theo các phương pháp đã có trong 12.1.

2^+ Phương pháp đổi biến. Phép đổi biến trong tích phân 3-lớp được tiến hành theo công thức

$$\iiint\limits_{D} f(M)dxdydz = \iiint\limits_{D^*} f\big[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\big]\times \times\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|dudvdw, \tag{12.18}$$

trong đó D^* là miền biến thiên của tọa độ cong u,v,w tương ứng khi các điểm (x,y,z) biến thiên trong D: $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\chi(u,v,w)$, $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ là Jacobiên của các hàm φ,ψ,χ

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial w}\\ \dfrac{\partial\chi}{\partial u} & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} & \dfrac{\partial\chi}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{12.19}$$

Trường hợp đặc biệt của tọa độ cong là tọa độ trụ và tọa độ cầu.

(i) Bước chuyển từ tọa độ Đêcác sang tọa độ trụ (r,φ,z) được thực hiện theo các hệ thức $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$; $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $-\infty<z<+\infty$. Từ (12.19) suy ra $J=r$ và trong tọa độ trụ ta có

$$\iiint\limits_{D} f(M)dxdydz = \iiint\limits_{D^*} f\big[r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\big]rdrd\varphi dz, \tag{12.20}$$

trong đó D^* là miền biến thiên của tọa độ trụ tương ứng khi điểm (x,y,z) biến thiên trong D.

(ii) Bước chuyển từ tọa độ Đêcác sang tọa độ cầu (r, φ, θ) được thực hiện theo các hệ thức $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Từ (12.19) ta có $J = r^2\sin\theta$ và trong tọa độ cầu ta có

$$\iiint\limits_D f(M)dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{D^*} f\big[r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\big]r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta, \quad (12.21)$$

trong đó D^* là miền biến thiên của tọa độ cầu tương ứng khi điểm (x, y, z) biến thiên trong D.

12.2.3

Thể tích của vật thể choán hết miền $D \subset \mathbb{R}^3$ được tính theo công thức

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz. \quad (12.22)$$

12.2.4 Nhận xét chung

Bằng cách thay đổi thứ tự tính tích phân trong tích phân 3-lớp ta sẽ thu được các công thức tương tự như công thức (12.16) để tính tích phân. Việc tìm cận cho tích phân đơn thông thường khi chuyển tích phân 3-lớp về tích phân lặp được thực hiện như đối với trường hợp tích phân 2-lớp.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính tích phân lặp

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_{0}^{2} (4 + z)dx.$$

Giải. Ta tính liên tiếp ba tích phân xác định thông thường bắt đầu từ tích phân trong

$$I(x,y) = \int\limits_0^2 (4+z)dz = 4z\Big|_0^2 + \frac{z^2}{2}\Big|_0^2 = 10;$$

$$I(x) = \int\limits_{x^2}^1 I(x,y)dy = 10\int\limits_{x^2}^1 dy = 10(1-x^2);$$

$$I = \int\limits_{-1}^1 I(x)dx = \int\limits_{-1}^1 10(1-x^2)dx = \frac{40}{3}\cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_D (x+y+z)dxdydz,$$

trong đó miền D được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x+y+z=1$.

Giải. Miền D đã cho là một tứ diện có hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng Oxy là tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Rõ ràng là x biến thiên từ 0 đến 1 (đoạn $[0,1]$ là hình chiếu của D lên trục Ox). Khi cố định x, $0\leqslant x\leqslant 1$ thì y biến thiên từ 0 đến $1-x$. Nếu cố định cả x và y ($0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1-x$) thì điểm (x,y,z) biến thiên theo đường thẳng đứng từ mặt phẳng $z=0$ đến mặt phẳng $x+y+z=1$, tức là z biến thiên từ 0 đến $1-x-y$. Theo công thức (12.16) ta có

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz.$$

Dễ dàng thấy rằng

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \Big[xz + yz + \frac{z^2}{2}\Big]\Big|_0^{1-x-y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big\{\Big[y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3}\Big]\Big|_0^{1-x}\Big\}dx$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (2 - 3x + x^3)dx = \frac{1}{8}\cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính $I = \iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$, trong đó miền D được giới hạn bởi các mặt phẳng $x + z = 3$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Giải. Miền D đã cho là một hình lăng trụ có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng Oxy là hình chữ nhật $D(x,y) = \big\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\big\}$. Với điểm $M(x,y)$ cố định thuộc $D(x,y)$ điểm $(x,y,z) \in D$ biến thiên trên đường thẳng đứng từ mặt phẳng Oxy ($z = 0$) đến mặt phẳng $x + z = 3$, tức là z biến thiên từ 0 đến $3 - x$: $0 \leqslant z \leqslant 3 - x$. Từ đó theo (12.17) ta có

$$\iiint\limits_D f(M)dxdydz = \iint\limits_{D(x,y)} dxdy \int\limits_{z=0}^{z=3-x} (x+y+z+1)^{-3}dz$$

$$= \iint\limits_{D(x,y)} \Big[\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\Big|_0^{3-x}\Big]dxdy = \cdots = \frac{4\ln 2 - 1}{8}\cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Tính tích phân $\iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, trong đó miền D được giới hạn bởi mặt $3(x^2 + y^2) + z^2 = 3a^2$.

Giải. Phương trình mặt biên của D có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{(a\sqrt{3})^2} = 1.$$

Đó là mặt elipxoid tròn xoay, tức là D là hình elipxoid tròn xoay. Hình chiếu vuông góc $D(x,y)$ của D lên mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Do đó áp dụng cách lập luận như trong các ví dụ 2 và 3 ta thấy rằng khi điểm $M(x,y) \in D(x,y)$ được cố định thì điểm (x,y,z) của miền D biến thiên trên đường thẳng đứng $M(x,y)$ từ mặt biên dưới của D

$$z = -\sqrt{3(a^2 - x^2 - y^2)}$$

đến mặt biên trên

$$z = +\sqrt{3(a^2 - x^2 - y^2)}.$$

Từ đó theo (12.17) ta có

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D(x,y)} dxdy \int\limits_{-\sqrt{3(a^2-x^2-y^2)}}^{+\sqrt{3(a^2-x^2-y^2)}} (x^2 + y^2 + z^2)dz \\
&= 2a^2\sqrt{3} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = |\text{chuyển sang tọa độ cực}| \\
&= 2a^2\sqrt{3} \iint\limits_{r\leqslant a} \sqrt{a^2 - r^2}rdrd\varphi = a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (a^2 - r^2)^{1/2}rdr \\
&= \frac{4\pi a^5}{\sqrt{3}} \cdot \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt phẳng $x + y + z = 4$, $x = 3$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Giải. Miền D đã cho là một hình lục diện trong không gian. Nó có hình chiếu vuông góc $D(x,y)$ lên mặt phẳng Oxy là hình thang vuông giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 2$ và

$x + y = 4$. Do đó áp dụng (12.17) ta có

$$V_D = \iiint\limits_D dxdydz = \iint\limits_{D(x,y)} dxdy \int\limits_0^{4-x-y} dz = \iint\limits_{D(x,y)} (4-x-y)dxdy$$
$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^3 (4-x-y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{4-y} (4-x-y)dx$$
$$= \int\limits_0^1 \left\{ \left[(4-y)x - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^3 \right\} dy + \int\limits_1^2 \left\{ \left[(4-y)x - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{4-y} \right\} dy$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{15}{2} - 3y\right)dy + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (4-y)^2 dy = \frac{55}{6} \cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

trong đó miền D giới hạn bởi mặt phẳng $y = 0$, $z = 0$, $z = a$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $a > 0$).

Giải. Chuyển sang tọa độ trụ ta thấy phương trình mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$ trong tọa độ trụ có dạng $r = 2\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (hãy vẽ hình !). Do đó theo công thức (12.20) ta có

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^a zdz = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr$$
$$= \frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{8}{9}a^2. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_D (x^2+y^2)dxdydz,$$

nếu miền D là nửa trên của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$.

Giải. Chuyển sang tọa độ cầu, miền biến thiên D^* của các tọa độ cầu tương ứng khi điểm (x,y,z) biến thiên trong D là có dạng

$$D^*: 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} I = \iiint\limits_{D^*} r^2\sin^2\theta \cdot r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^R r^4 dr \\ &= \frac{4}{15}\pi R^5. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân lặp sau

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y dy \int\limits_{1-x}^{2-2x} dz$. (ĐS. $\frac{1}{12}$)

2. $\int\limits_0^a y dy \int\limits_0^h dx \int\limits_0^{a-y} dz$. (ĐS. $\frac{a^3h}{6}$)

3. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^2 x dx \int\limits_0^3 z^2 dz$. (ĐS. 30)

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$. (ĐS. $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$)

5. $\int\limits_0^c dz \int\limits_0^b dy \int\limits_0^a (x^2+y^2+z^2) dx$. (ĐS. $\Big(\frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2)\Big)$)

6. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)dz$. (ĐS. $\dfrac{a^5}{20}$)

Tính các tích phân 3-lớp theo miền D giới hạn bởi các mặt đã chỉ ra.

7. $\iiint\limits_D (x + y - z)dxdydz$; $x = -1$, $x = 1$; $y = 0$, $y = 1$; $z = 0$, $z = 2$. (ĐS. -2)

8. $\iiint\limits_D xydxdydz$; $x = 1$, $x = 2$; $y = -2$, $y = -1$; $z = 0$, $z = \dfrac{1}{2}$. (ĐS. $-\dfrac{8}{9}$)

9. $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{(x + y + z)^2}$; $x = 1$, $x = 2$; $y = 1$, $y = 2$; $z = 1$, $z = 2$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{128}{125}$)

10. $\iiint\limits_D (x + 2y + 3z + 4)dxdydz$; $x = 0$, $x = 3$; $y = 0$, $y = 2$; $z = 0$, $z = 1$. (ĐS. 54)

11. $\iiint\limits_D zdxdydz$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x + y + z = 1$. (ĐS. $\dfrac{1}{24}$)

12. $\iiint\limits_D xdxdydz$; $x = 0$. $y = 0$, $z = 0$, $y = 1$; $x + z = 1$. (ĐS. $\dfrac{1}{6}$)

13. $\iiint\limits_D yzdxdydz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$. (ĐS. 0)

14. $\iiint\limits_D xydxdydz$; $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. (ĐS. $\dfrac{1}{8}$)

15. $\iiint\limits_D xyzdxdydz$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$. (ĐS. $\frac{1}{48}$)

16. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $z=1$. (ĐS. $\pi/6$)

17. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$; $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$,

$z=0$, $z=c$. (ĐS. $\frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2)$)

18. $\iiint\limits_D ydxdydz$; $y=\sqrt{x^2+z^2}$, $y=h$, $h>0$. (ĐS. $\frac{\pi h^4}{4}$)

Tính các tích phân 3-lớp sau bằng phương pháp đổi biến.

19. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$; $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$. (ĐS. $\frac{4\pi R^5}{5}$)

20. $\iiint\limits_D (x^2+y^2)dxdydz$; $z=x^2+y^2$, $z=1$. (ĐS. $\frac{\pi}{6}$)

21. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$; $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$. (ĐS. πR^4)

22. $\iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=3$.
(ĐS. 8)

23. $\iiint\limits_D zdxdydz$; $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

(ĐS. $\frac{\pi R^4}{16}$)

24. $\iiint\limits_D (x^2-y^2)dxdydz$; $x^2+y^2=2z$, $z=2$. (ĐS. $\frac{16\pi}{3}$)

25. $\iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; $y^2=3x-x^2$, $z=0$, $z=2$. (ĐS. 24)

Tính thể tích của các vật thể giới hạn bởi các mặt đã chỉ ra.

26. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + 2y + z - 6 = 0.$ (ĐS. 36)

27. $2x + 3y + 4z = 12;\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$ (ĐS. 12)

28. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$ (ĐS. $\dfrac{abc}{6}$)

29. $ax = y^2 + z^2,\ x = a.$ (ĐS. $\dfrac{\pi a^3}{2}$)

30. $2z = x^2 + y^2,\ z = 2.$ (ĐS. 4π)

31. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2.$ (ĐS. $\dfrac{\pi}{6}[8\sqrt{2} - 7]$)

32. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = x^2 + y^2.$ (ĐS. $\dfrac{\pi}{6}$)

33. $x^2 + y^2 - z = 1,\ z = 0.$ (ĐS. $\dfrac{\pi}{2}$)

34. $2z = x^2 + y^2,\ y + z = 4.$ (ĐS. $\dfrac{81\pi}{4}$)

35. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ (ĐS. $\dfrac{4}{3}\pi abc$)

12.3 Tích phân đường

12.3.1 Các định nghĩa cơ bản

Giả sử hàm $f(M)$, $P(M)$ và $Q(M)$, $M = (x, y)$ liên tục tại mọi điểm của đường cong đo được $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, B)$ với điểm đầu A và điểm cuối B. Chia một cách tùy ý $\mathcal{L}(A, B)$ thành n cung nhỏ với độ dài tương ứng là Δs_0, Δs_1, $\Delta s_2, \dots, \Delta s_{n-1}$. Đặt $d = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (\Delta s_i)$. Trong mỗi cung nhỏ, lấy một cách tùy ý điểm $N_0, N_1, \dots, N_{n-1}$. tính giá trị $f(N_i)$, $P(N_i)$ và $Q(N_i)$ tại điểm N_i đó.

Xét hai phương pháp lập tổng tích phân sau đây.

Phương pháp I. Lấy giá trị $f(N_i)$ nhân với độ dài cung Δs_i tương ứng và lập tổng tích phân

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{n-1} f(N_i)\Delta s_i. \tag{*}$$

Phương pháp II. Khác với cách lập tổng tích phân $(*)$, trong phương pháp này ta lấy giá trị $P(N_i)$, $Q(N_i)$ nhân *không phải với độ dài của các cung nhỏ* mà là nhân với hình chiếu vuông góc của các cung nhỏ đó trên các trục tọa độ, tức là lập tổng

$$\sigma_x = \sum_{i=0}^{n-1} P(N_i)\Delta x_i; \quad \Delta x_i = pro_{Ox}\Delta s_i,$$
$$\sigma_y = \sum_{i=0}^{n-1} Q(N_i)\Delta y_i; \quad \Delta y_i = pro_{Oy}\Delta s_i.$$

Mỗi cách lập tổng tích phân trên đây sẽ dẫn đến một kiểu tích phân đường.

Định nghĩa 12.3.1. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{d\to 0}\sigma_1$ không phụ thuộc vào phép phân hoạch đường cong $\mathcal{L}$ thành các cung nhỏ và không phụ thuộc vào việc chọn các điểm trung gian N_i trên mỗi cung nhỏ thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường theo độ dài (hay tích phân đường kiểu I) của hàm $f(x,y)$ theo đường cong $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A,B)$. Ký hiệu:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(x,y)ds. \tag{12.23}$$

Định nghĩa 12.3.2. Phát biểu tương tự như trong định nghĩa 12.3.1:

1⁺.
$$\lim_{d\to 0}\sigma_x = \lim_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} P(N_i)\Delta x_i = \int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} P(x,y)dx \tag{12.24}$$

gọi là tích phân đường theo hoành độ (nếu (12.24) tồn tại hữu hạn)

2$^+$. $$\lim_{d\to 0}\sigma_y = \lim_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} Q(N_i)\Delta y_i = \int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} Q(x,y)dy \tag{12.25}$$

gọi là tích phân đường theo tung độ (nếu (12.25) tồn tại hữu hạn)

Thông thường người ta lập tổng tích phân dạng

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} P(N_i)\Delta x_i + \sum_{o=0}^{n-1} Q(N_i)\Delta y_i$$

và nếu $\exists \lim\limits_{d\to 0}\Sigma$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường theo tọa độ dạng tổng quát:

$$\int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{12.26}$$

Định lý. *Nếu các hàm $f(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ liên tục theo đường cong $\mathcal{L}(A,B) = \mathcal{L}$ thì các tích phân đường* (12.23) - (12.26) *tồn tại hữu hạn.*

Từ định nghĩa 12.3.1 và khái niệm độ dài cung (không phụ thuộc hướng của cung) và định nghĩa 12.3.2 và tính chất của hình chiếu của cung (hình chiếu đổi dấu khi đổi hướng của cung) suy ra tính chất quan trọng của tích phân đường: *tích phân đường theo độ dài không phụ thuộc vào hướng của đường cong; tích phân đường theo tọa độ đổi dấu khi đổi hướng đường cong.*

12.3.2 Tính tích phân đường

Phương pháp chung để tính tích phân đường là đưa việc tính tích phân đường về tích phân xác định. Cụ thể là: xuất phát từ phương trình của đường lấy tích phân $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, B)$ ta biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân đường thành biểu thức một biến mà giá trị của biến đó tại điểm đầu A và điểm cuối B sẽ là cận của tích phân xác định thu được.

1^+ Nếu $\mathcal{L}(A, B)$ được cho bởi các phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$ (trong đó φ, ψ khả vi liên tục và $\varphi'^2 + \psi'^2 > 0$) thì

$$ds = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} f(x, y)ds = \int\limits_a^b f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt \tag{12.27}$$

và

$$\int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b \big[P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t)\big]dt. \tag{12.28}$$

2^+ Nếu $\mathcal{L}(A, B)$ được cho bởi phương trình $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ (trong đó $g(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$) thì

$$ds = \sqrt{1 + g'^2(x)}dx$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} f(x, y)ds = \int\limits_a^b f[x, g(x)]\sqrt{1 + g'^2(x)}dx. \tag{12.29}$$

và

$$\int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \big[P(x, g(x)) + Q(x, g(x))g'(x)\big]dx. \tag{12.30}$$

3^+ Nếu $\mathcal{L}(A,B)$ được cho dưới dạng tọa độ cực $\rho = \rho(\varphi)$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ thì

$$ds = \sqrt{\rho^2 + {\rho'_\varphi}^2}d\varphi$$

$$\int\limits_{\mathcal{L}(A,B)} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi]\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi. \tag{12.31}$$

4^+ Tích phân đường theo tọa độ có thể tính nhờ công thức Green. Nếu $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ cùng liên tục trong miền D giới hạn bởi đường cong không tự cắt trơn từng khúc $\mathcal{L} = \partial D$ thì

$$\oint\limits_{\mathcal{L}^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy. \tag{12.32}$$

Công thức (12.32) gọi là công thức Green, trong đó $\oint\limits_{\mathcal{L}^+}$ là tích phân theo đường cong kín có hướng dương $\mathcal{L}^+$.

Hệ quả. *Diện tích miền D giới hạn bởi đường cong $\mathcal{L}$ được tính theo công thức*

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_{\mathcal{L}} xdy - ydx. \tag{12.33}$$

5^+ *Nhận xét về tích phân đường trong không gian.* Giả sử $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A,B)$ là đường cong không gian; f, P, Q, R là những hàm ba biến liên tục trên $\mathcal{L}$. Khi đó tương tự như trường hợp đường cong phẳng ta có thể định nghĩa tích phân đường theo độ dài $\oint\limits_{\mathcal{L}(A,B)} f(x,y,z)ds$ và tích phân đường theo tọa độ

$$\int\limits_{\mathcal{L}} P(x,y,z)dx, \quad \int\limits_{\mathcal{L}} Q(x,y,z)dy, \quad \int\limits_{\mathcal{L}} R(x,y,z)dz$$

và

$$\int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Về thực chất kỹ thuật tính các tích phân này không khác biệt gì so với trường hợp đường cong phẳng.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính tích phân đường $\oint_{\mathcal{L}} \frac{x}{y} ds$, trong đó $\mathcal{L}$ là cung parabôn $y^2 = 2x$ từ điểm $(1, \sqrt{2})$ đến điểm $(2, 2)$.

Giải. Ta tìm vi phân độ dài cung. Ta có

$$y = \sqrt{2x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}},$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}dx = \frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt{2x}}dx.$$

Từ đó suy ra

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{x}{y} ds = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{6}[5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}]. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính độ dài của đường astroid $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Giải. Ta áp dụng công thức: độ dài $(\mathcal{L}) = \oint_{\mathcal{L}} ds$. Trong trường hợp này ta có

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y' = 3a\sin^2 t \cos t, \quad ds = \frac{3a}{2}\sin 2t dt.$$

Vì đường cong đối xứng với các trục tọa độ nên

$$\text{độ dài}(\mathcal{L}) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{3a}{2}\sin 2t dt = 6a\Big[\frac{-\cos 2t}{2}\Big]\Big|_0^{\pi/2} = 6a. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính $\oint\limits_{\mathcal{L}} (x-y)ds$, trong đó $\mathcal{L} : x^2+y^2 = 2ax$.

Giải. Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Trong tọa độ cực phương trình đường tròn có dạng $r = 2a\cos\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Vi phân độ dài cung

$$ds = \sqrt{r^2 + {r'_\varphi}^2}d\varphi = \sqrt{4a^2\cos^2\varphi + 4a^2\sin^2\varphi}d\varphi = 2ad\varphi.$$

Do đó

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} (x-y)ds = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \big[(2a\cos\varphi)\cos\varphi - (2a\sin\varphi)\sin\varphi\big]2ad\varphi$$

$$= 4a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi = 2\pi a^2. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Tính tích phân $\oint\limits_{\mathcal{L}} (3x^2+y)dx + (x-2y^2)dy$, trong đó $\mathcal{L}$ là biên của hình tam giác với đỉnh $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

Giải. Theo tính chất của tích phân đường ta có

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} = \oint\limits_{AB} + \oint\limits_{BC} + \oint\limits_{CA}.$$

a) Trên cạnh AB ta có $y = 0 \Rightarrow dy = 0$. Do đó

$$\oint\limits_{AB} = \int\limits_0^1 3x^2dx = 1.$$

b) Trên cạnh BC ta có $x+y = 1 \Rightarrow y = -x+1$, $dy = -dx$. Do đó

$$\oint\limits_{BC} = \int\limits_1^0 [3x^2 + (1-x) - x + 2(1-x^2)]dx = -\frac{5}{3}\cdot$$

c) Trên cạnh CA ta có $x = 0 \Rightarrow dx = 0$ và do đó

$$\oint\limits_{CA} = -\int\limits_1^0 2y^2 dy = \frac{2}{3}\cdot$$

Như vậy

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} = 1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = 0. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Tính tích phân $\oint\limits_{\mathcal{L}}(x+y)dx-(x-y)dy$, trong đó $\mathcal{L}$ là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có định hướng dương.

Giải. 1^+ Ta có thể tính trực tiếp tích phân đã cho bằng các phương pháp đã nêu (chẳng hạn bằng cách tham số hóa phương trình elip).

2^+ Nhưng đơn giản hơn cả là sử dụng công thức Green. Ta có

$$P = x + y, \quad Q = -(x - y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2.$$

Do đó theo công thức Green ta có

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (-2)dxdy = -2\pi ab,$$

vì diện tích hình elip bằng πab. ▲

Ví dụ 6. Tính tích phân $\oint\limits_{\mathcal{L}} 2(x^2+y^2)dx + x(4y+3)dy$, trong đó $\mathcal{L}$ là đường gấp khúc ABC với đỉnh $A(0,0)$, $B(1,1)$ và $C(0,2)$.

Giải. Nếu ta nối A với C thì thu được đường gấp khúc kín $\mathcal{L}^*$ giới hạn ΔABC. Trên cạnh CA ta có $x = 0$ nên $dx = 0$ và từ đó

$$\oint\limits_{CA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy = 0.$$

Do đó

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} + \oint\limits_{CA} = \oint\limits_{\mathcal{L}^*} \Rightarrow \oint\limits_{\mathcal{L}} = \oint\limits_{\mathcal{L}^*}.$$

Áp dụng công thức Green ta có

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\mathcal{L}} &= \iint\limits_{\Delta ABC} [(4y+3) - 4y]dxdy = 3\iint\limits_{\Delta ABC} dxdy\\ &= 3S_{\Delta ABC} = 3. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân đường theo độ dài sau đây

1. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x+y)ds$, $\mathcal{C}$ là đoạn thẳng nối $A(9,6)$ với $B(1,2)$. (ĐS. $36\sqrt{5}$)

2. $\oint\limits_{\mathcal{C}} xyds$, $\mathcal{C}$ là biên hình vuông $|x| + |y| = a$, $a > 0$. (ĐS. 0)

3. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x+y)ds$, $\mathcal{C}$ là biên của tam giác đỉnh $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,0)$. (ĐS. $1+\sqrt{2}$)

4. $\oint\limits_{\mathcal{C}} \dfrac{ds}{x-y}$, $\mathcal{C}$ là đoạn thẳng nối $A(0,2)$ với $B(4,0)$. (ĐS. $\sqrt{5}\ln 2$)

5. $\oint\limits_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}ds$, $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2+y^2 = ax$. (ĐS. $2a^2$)

6. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)^n ds$, $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2+y^2 = a^2$. (ĐS. $2\pi a^{2n+1}$)

7. $\oint\limits_{\mathcal{C}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, $\mathcal{C}$ là biên hình quạt tròn

$\{(r,\varphi) : 0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\}.$

$$(\text{ĐS.}\quad 2(e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4})$$

8. $\oint\limits_{\mathcal{C}} xyds$, $\mathcal{C}$ là một phần tư elip nằm trong góc phần tư I.

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b})$$

Chỉ dẫn. Sử dụng phương trình tham số của đường elip: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

9. $\oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, $\mathcal{C}$ là đoạn thẳng nối điểm $O(0,0)$ vơi $A(1,2)$.

$$(\text{ĐS.}\quad \ln\frac{\sqrt{5}+3}{4})$$

10. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2)ds$, $\mathcal{C}$ là cung đường cong $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$.

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2 + b^2}(3a^2 + 4\pi^2 b^2))$$

11. $\oint\limits_{\mathcal{C}} x^2 ds$, $\mathcal{C}$ là đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad (\text{ĐS.}\quad \frac{2\pi a^3}{3})$$

Chỉ dẫn. Chứng tỏ rằng $\oint\limits_{\mathcal{C}} x^2 ds = \oint\limits_{\mathcal{C}} y^2 ds = \oint\limits_{\mathcal{C}} z^2 ds$ và từ đó suy ra

$$I = \frac{1}{3}\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2)ds.$$

12. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x+y)ds$, $\mathcal{C}$ là một phần tư đường tròn

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ y = x \end{cases}$$

nằm trong góc phần tám I. (ĐS. $R^2\sqrt{2}$)

13. Tính $\oint\limits_{\mathcal{C}} xyzds$, $\mathcal{C}$ là một phần tư đường tròn

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x^2+y^2 = \dfrac{R^2}{4} \end{cases}$$

nằm trong góc phần tám I.

Tính các tích phân đường theo tọa độ sau đây

14. $\oint\limits_{\mathcal{C}} y^2dx + x^2dy$, $\mathcal{C}$ là đường từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(1,1)$:

1) $\mathcal{C}$ là đoạn thẳng.
2) $\mathcal{C}$ là cung parabol $y = x^2$.
3) $\mathcal{C}$ là cung parabol $y = \sqrt{x}$.

$$\text{(ĐS.}\quad 1)\ \frac{2}{3};\ 2)\ \frac{7}{10};\ 3)\ \frac{7}{10})$$

15. $\oint\limits_{\mathcal{C}} y^2dx - x^2dy$, $\mathcal{C}$ là đường tròn bán kính $R = 1$ và có hướng ngược chiều kim đồng hồ và:

1) với tâm tại gốc tọa độ.
2) với tâm tại điểm $(1,1)$.
(ĐS. 1) 0; 2) -4π)

16. $\oint\limits_{\mathcal{C}} xdy - ydx$, $\mathcal{C}$ là đường gấp khúc đỉnh tại các điểm $(0,0)$, $(1,0)$

và $(1,2)$. (ĐS. 2)

17. $\oint\limits_{\mathcal{C}} \cos y dx - \sin x dy$, $\mathcal{C}$ là đoạn thẳng từ điểm $(2,-2)$ đến điểm $(-2,2)$. (ĐS. $-2\sin 2$)

18. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, $\mathcal{C}$ là đường cong $y = 1 - |1-x|$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. (ĐS. $\dfrac{4}{3}$)

19. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x+y)dx + (x-y)dy$, $\mathcal{C}$ là elip có hướng dương $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (ĐS. 0)

20. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (2a-y)dx + xdy$, $\mathcal{C}$ là một vòm cuốn của đường xicloid $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (ĐS. $-2\pi a^2$)

21. $\oint\limits_{\mathcal{C}} \dfrac{dx+dy}{|z|+|y|}$, $\mathcal{C}$ là biên có hướng dương của hình vuông với đỉnh tại điểm $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ và $D(0,-1)$. (ĐS. 0)

22. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^2-y^2)dx + (x^2+y^2)dy$, $\mathcal{C}$ là elip có hướng dương $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (ĐS. 0)

23. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)dx + xydy$, $\mathcal{C}$ là cung của đường $y = e^x$ từ điểm $(0,1)$ đến điểm $(1,e)$. (ĐS. $\dfrac{3e^2}{4} + \dfrac{1}{2}$)

24. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^3-y^2)dx + xydy$, $\mathcal{C}$ là cung của đường $y = a^x$ từ điểm $(0,1)$ đến điểm $(1,a)$. (ĐS. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{3(1-a^2)}{4\ln a}$)

25. $\oint\limits_{\mathcal{C}} y^2dx + x^2dy$, $\mathcal{C}$ là vòm thứ nhất của đường xicloid

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ có định hướng theo hướng tăng của tham số. (ĐS. $a^3\pi(5 - 2\pi)$)

Áp dụng công thức Green để tính tích phân đường

26. $\oint\limits_{\mathcal{C}} xy^2dy - x^2dx$, $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$. (ĐS. $\dfrac{\pi a^4}{4}$)

27. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x + y)dx - (x - y)dy$, $\mathcal{C}$ là elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (ĐS. $-2\pi ab$)

28. $\oint\limits_{\mathcal{C}} e^{-x^2+y^2}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$, $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$. (ĐS. 0)

29. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (xy - e^{-y} + x - \sin y)dy$,
$\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$. (ĐS. $-\pi$)

30. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (1 + xy)dx + y^2dy$, $\mathcal{C}$ là biên của nửa trên của hình tròn $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ $(y \geqslant 0)$. (ĐS. $-\dfrac{\pi}{2}$)

31. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, $\mathcal{C}$ là biên của tam giác ΔABC với $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, Kiểm tra kết quả bằng cách tính trực tiếp. (ĐS. 0)

32. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (2xy - x^2)dx + (x + y^3)dy$, $\mathcal{C}$ là biên của miền bị chặn giới hạn bởi hai đường $y = x^2$ và $y^2 = x$. Kiểm tra kết quả bằng cách tính trực tiếp. (ĐS. $\dfrac{1}{30}$)

33. $\oint\limits_{\mathcal{C}} e^x[(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy]$, $\mathcal{C}$ là biên của tam giác ABC với $A = (1, 1)$, $B = (0, 2)$ và $C = (0, 0)$. (ĐS. $2(2 - e)$)

34. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, trong đó $\mathcal{C}$ là

a) elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

b) đường tròn $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$. (ĐS. a) 0; b) $-\dfrac{\pi a^3}{8}$)

35. $\oint\limits_{\mathcal{C}} xy^2dx - x^2ydy$, $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$. (ĐS. $\dfrac{\pi R^4}{2}$)

36. $\oint\limits_{\mathcal{C}} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$, $\mathcal{C}$ là đường gấp khúc với đỉnh $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 2)$. Kiểm tra kết quả bằng cách tính trực tiếp. (ĐS. 3)

Chỉ dẫn. Bổ sung cho $\mathcal{C}$ đoạn thẳng để thu được chu tuyến đóng.

37. Hãy so sánh hai tích phân

$$I_1 = \oint\limits_{AmB} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy \text{ và } I_2 = \oint\limits_{AnB} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy$$

nếu AmB là đoạn thẳng nối $A(1, 1)$ với $B(2, 6)$ và AnB là cung parabol qua A. B và gốc tọa độ. (ĐS. $I_1 - I_2 = 2$)

38. Tính $I = \oint\limits_{AmBnA} (x + y)dx - (x - y)dy$, trong đó AmB là cung parabol qua $A(1, 0)$ và $B(2, 3)$ và có trục đối xứng là trục Oy, còn AnB là đoạn thẳng nối A với B.

(ĐS. $-\dfrac{1}{3}$)

Chỉ dẫn. Đầu tiên viết phương trình parabol và đường thẳng, sau đó áp dụng công thức Green.

39. Chứng minh rằng giá trị của tích phân $\oint\limits_{\mathcal{C}} (2xy - y)dx + x^2dy$, trong đó $\mathcal{C}$ là chu tuyến đóng, bằng diện tích miền phẳng với biên là $\mathcal{C}$.

40. $\oint\limits_{\mathcal{C}}(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$, $\mathcal{C}$ là biên của ΔABC với đỉnh $A(1,1)$, $B(3,2)$ và $C(2,5)$. (ĐS. $-46\dfrac{2}{3}$)

41. $\oint\limits_{\mathcal{C}}(y-x^2)dx+(x+y^2)dy$, $\mathcal{C}$ là biên hình quạt bán kính R và góc φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2})$. (ĐS. 0)

42. $\oint\limits_{\mathcal{C}}y^2dx+(x+y)^2dy$, $\mathcal{C}$ là biên của hình tam giác ΔABC với $A(a,0)$, $B(a,a)$, $C(0,a)$. (ĐS. $\dfrac{2a^3}{3}$)

12.4 Tích phân mặt

12.4.1 Các định nghĩa cơ bản

Giả sử các hàm $f(M)$, $P(M)$, $Q(M)$ và $R(M)$, $M=(x,y,z)$ liên tục tại mọi điểm M của mặt trơn, đo được (σ) (mặt trơn là mặt có mặt phẳng tiếp xúc tại mọi điểm của nó). Chia một cách tùy ý mặt (σ) thành n mảnh con σ_0, $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ với diện tích tương ứng là ΔS_0, $\Delta S_1,\dots,\Delta S_{n-1}$. Đặt $d_k=\mathrm{diam}\sigma_k$; $d=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}d_k$. Trong mỗi mảnh mặt ta lấy một cách tùy ý điểm N_i. Tính giá trị của các hàm đã cho tại điểm N_i, $i=\overline{0,n-1}$. Ta ký hiệu $\cos\alpha(N_i)$, $\cos\beta(N_i)$ và $\cos\gamma(N_i)$ là các cosin chỉ phương của vectơ pháp tuyến $\vec{n}(N_i)$ tại điểm N_i của mặt (σ).

Xét hai cách lập tổng tích phân sau.

(I) Lấy giá trị $f(N_i)$ nhân với các phần tử diện tích mặt ΔS_0, $\Delta S_1,\dots,\Delta S_{n-1}$ và lập tổng

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(N_i)\delta S_i$$

(II) Khác với cách lập tổng tích phân trong (I), trong phương pháp này ta lấy giá trị $P(N_i)$, $Q(N_i)$ và $R(N_i)$ nhân không phải với phần tử diện tích ΔS_i của các mảnh mặt σ_i mà là nhân với hình chiếu của các mảnh đó lên các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz và Oyz, tức là lập các tổng dạng

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=0}^{n-1} P(N_i)m(\sigma^i_{xy}), \quad m(\sigma^i_{xy}) = pro_{Oxy}(\sigma_i);$$

$$\sigma_{xz} = \sum_{i=0}^{n-1} Q(N_i)m(\sigma^i_{xz}), \quad m(\sigma^i_{xz}) = pro_{Oxz}(\sigma_i);$$

$$\sigma_{yz} = \sum_{i=0}^{n-1} R(N_i)m(\sigma^i_{yz}), \quad m(\sigma^i_{yz}) = pro_{Oyz}(\sigma_i).$$

Định nghĩa 12.4.1. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(N_i)\Delta S_i \tag{12.34}$$

không phụ thuộc vào phép phân hoạch mặt (σ) thành các mảnh con và không phụ thuộc vào cách chọn các điểm trung gian $N_i \in \sigma_i$ thì giới hạn đó gọi là tích phân mặt theo diện tích.

Ký hiệu : $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)dS.$$

Định nghĩa 12.4.2. Các tích phân mặt theo tọa độ được định nghĩa bởi

$$\iint\limits_{(\sigma)} P(M)dxdy \overset{def}{=} \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(N_i)m(\sigma^i_{xy}) \tag{12.35}$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} Q(M)dxdz \overset{def}{=} \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(N_i)m(\sigma^i_{xz}) \tag{12.36}$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} R(M)dydz \overset{def}{=} \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} R(N_i)m(\sigma^i_{yz}) \tag{12.37}$$

nếu các giới hạn ở vế phải (12.35)-(12.37) tồn tại hữu hạn không phụ thuộc vào phép phân hoạch mặt (σ) và cách chọn điểm trung gian N_i, $i = \overline{0, n-1}$.

Tích phân mặt theo tọa độ dạng tổng quát

$$\iint\limits_{(\sigma)} P(M)dxdy + Q(M)dxdz + R(M)dydz$$

là tổng của các tích phân mặt theo tọa độ (12.35), (12.36) và (12.37).

Nếu (σ) là mặt đóng (kín !) thì tích phân mặt *theo phía ngoài* của nó được ký hiệu $\iint\limits_{(\sigma)^+}$ hoặc đơn giản là $\iint\limits_{(\sigma)}$ nếu nói rõ (σ) là mặt nào; còn tích phân *theo phía trong* được ký hiệu $\iint\limits_{(\sigma)^-}$ hoặc đơn giản là $\iint\limits_{(\sigma)}$ khi đã nói rõ (σ) là mặt nào.

12.4.2 Phương pháp tính tích phân mặt

Phương pháp chung để tính tích phân mặt cả hai dạng là đưa về tích phân hai lớp. Cụ thể là: xuất phát từ phương trình của mặt (σ) ta biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân thành biểu thức hai biến mà miền biến thiên của chúng là hình chiếu đơn trị của (σ) lên mặt phẳng tọa độ tương ứng với các biến đó.

1^+ Nếu mặt (σ) có phương trình $z = \varphi(x, y)$ thì tích phân mặt theo diện tích được biến đổi thành tích phân hai lớp theo công thức

$$dS = \sqrt{1 + {\varphi'_x}^2 + {\varphi'_y}^2}dxdy$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D(x,y)} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + {\varphi'_x}^2 + {\varphi'_y}^2}dxdy \quad (12.38)$$

trong đó $D(x, y)$ là hình chiếu vuông góc của (σ) lên mặt phẳng Oxy.

Nếu mặt (σ) có phương trình $y = \psi(x,z)$ thì

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D(x,z)} f[x,\psi(x,z),z]\sqrt{1+{\psi'_x}^2+{\psi'_z}^2}dxdz, \quad (12.39)$$

trong đó $D(x,z) = pro_{Oxz}(\sigma)$.

Nếu mặt (σ) có phương trình $x = g(y,z)$ thì

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(\cdot)dS = \iint\limits_{D(y,z)} f[g(y,z),y,z]\sqrt{1+{g'_y}^2+{g'_z}^2}dydz, \quad (12.40)$$

trong đó $D(y,z) = pro_{Oyz}(\sigma)$.

2^+ Giả thiết mặt (σ) chiếu được đơn trị lên các mặt phẳng tọa độ, tức là mặt có phương trình dạng

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x,y), \quad (x,y) \in D(x,y);\\ y &= \psi(x,z), \quad (x,z) \in D(x,z);\\ x &= g(y,z), \quad (y,z) \in D(y,z). \end{aligned}$$

Ta ký hiệu e_1, e_2, e_3 là các vectơ cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $\cos\alpha(M) = \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_1})$, $\cos\beta(M) = \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_2})$, $\cos\gamma(M) = \cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_3})$. Đó là các cosin chỉ phương của vectơ pháp tuyến với mặt (σ) tại điểm $M \in (\sigma)$. Khi đó các tích phân mặt theo tọa độ lấy theo mặt hai phía được tính như sau.

$$\iint\limits_{(\sigma)} P(M)dxdy = \begin{cases} +\iint\limits_{D(x,y)} P(x,y,\varphi(x,y))dxdy & \text{nếu } \cos\gamma > 0;\\ -\iint\limits_{D(x,y)} P(x,y,\varphi(x,y))dxdy & \text{nếu } \cos\gamma < 0 \end{cases}$$

(tức là dấu "+" tương ứng với phép tích phân theo phía ngoài (phía trên) của mặt, còn dấu "−" tương ứng với phép tích phân theo phía trong (phía dưới) của mặt.

Tương tự ta có

$$\iint\limits_{(\sigma)} Q(M)dxdz = \begin{cases} +\iint\limits_{D(x,z)} Q(x,\psi(x,z),z)dxdz & \text{nếu } \cos\beta > 0, \\ -\iint\limits_{D(x,z)} Q(\cdot)dxdz & \text{nếu } \cos\beta < 0; \end{cases}$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} R(M)dydz = \begin{cases} +\iint\limits_{D(y,z)} R(g(y,z),y,z)dydz & \text{nếu } \cos\alpha > 0 \\ -\iint\limits_{D(y,z)} R(\cdot)dydz & \text{nếu } \cos\alpha < 0. \end{cases}$$

Nhận xét. Tích phân mặt theo tọa độ lấy theo phần *mặt trụ* với đường sinh song song với trục Oz là bằng 0. Trong các trường hợp tương tự, các tích phân mặt theo tọa độ x, z hay y, z cũng $= 0$.

12.4.3 Công thức Gauss-Ostrogradski

Đó là công thức

$$\iiint\limits_{D} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz = \iint\limits_{\partial D} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Nó xác lập mối liên hệ giữa tích phân mặt theo mặt biên ∂D của D với tích phân 3-lớp lấy theo miền $D \subset \mathbb{R}^3$.

12.4.4 Công thức Stokes

Đó là công thức

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(\sigma)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy + \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx.$$

Nó xác lập mối liên hệ giữa tích phân mặt theo mặt (σ) với tích phân đường lấy theo bờ $\mathcal{L}$ của mặt (σ).

Ta nhận xét rằng số hạng thứ nhất ở vế phải của công thức Stokes cũng chính là vế phải công thức Green. Hai số hạng còn lại thu được từ đó bởi phép hoán vị tuần hoàn các biến x, y, z và các hàm P, Q, R:

$$
\begin{array}{ccc} & x & \\ \nearrow & & \searrow \\ z & \longleftarrow & y \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc} & P & \\ \nearrow & & \searrow \\ R & \longleftarrow & Q \end{array}
$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính tích phân $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)}(6x+4y+3z)dS$, trong đó (σ) là phần mặt phẳng $x+2y+3z=6$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Giải. Mặt tích phân là tam giác ABC tronng đó $A(6,0,0)$, $B(0,3,0)$ và $C(0,0,2)$. Sử dụng phương trình của (σ) để biến đổi tích phân mặt thành tích phân 2-lớp. Từ phương trình của (σ) rút ra $z=\dfrac{1}{3}(6-x-2y)$. Từ đó

$$dS=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy=\frac{\sqrt{14}}{2}dxdy.$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{\Delta OAB}\Big[(6x+4y+\frac{3}{3}(6-x-2y)\Big]dxdy\\
&=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{6-2y}(5x+2y+6)dx\\
&=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3\Big\{\Big[\frac{5}{2}x^2+2xy+6x\Big]\Big|_0^{6-2y}\Big\}dy=54\sqrt{14}.\ \blacktriangle
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2. Tính $\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$, (σ) là phần paraboloid tròn xoay $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trên mặt phẳng Oxy.

Giải. Mặt (σ) chiếu được đơn trị lên mặt phẳng Oxy và hình tròn $x^2 + y^2 \leqslant 1$ là hình chiếu của nó: $D(x,y) = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$. Ta tính dS. Ta có $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y \Rightarrow dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$. Do vậy

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\sigma)} &= \iint\limits_{D(x,y)} \sqrt{1+4x^2+4y^2} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy\\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (1+4x^2+4y^2)dxdy.\end{aligned}$$

Bằng cách chuyển sang tọa độ cực ta có

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1+4r^2)rdr = 3\pi. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính tích phân $\iint\limits_{(\sigma)} (y^2 + z^2dxdy$, trong đó (σ) là phía ngoài của mặt $z = \sqrt{1-x^2}$ giới hạn bởi các mặt phẳng $y = 0$, $y = 1$.

Giải. Mặt (σ) là nửa trên của mặt trụ $x^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$. Do đó hình chiếu của (σ) lên mặt phẳng Oxy là hình chữ nhật xác định bởi các điều kiện: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Do đó vì $z = \sqrt{1-x^2}$ nên $\cos\gamma > 0$ và

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\sigma)} (y^2+z^2)dxdy &= \iint\limits_{D(x,y)} [y^2 + (\sqrt{1-x^2})^2]dxdy\\ &= \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^1 (y^2+1-x^2)dy = 2. \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tính tích phân $\iint\limits_{(\sigma)} 2dxdy + ydxdz - x^2zdydz$, trong đó (σ) là phía trên của phần elipxoid $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ nằm trong góc phần tám I.

Giải. Ta viết tích phân đã cho dưới dạng

$$I = 2\iint\limits_{(\sigma)} dxdy + \iint\limits_{(\sigma)} ydydz - \iint\limits_{(\sigma)} x^2zdydz.$$

và sử dụng phương trình của mặt (σ) để biến đổi mỗi tích phân. Lưu ý rằng $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$.

(i) Vì hình chiếu của mặt (σ) lên mặt phẳng Oxy là phần tư hình elip $\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} \leqslant 1$ nên

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma)} dxdy = \iint\limits_{D(x,y)} dxdy = \frac{\pi}{2} \quad (\text{vì diện tích elip} = 2\pi)$$

(ii) Hình chiếu của (σ) lên mặt phẳng Oxz là phần tư hình tròn $4x^2 + 4z^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow x^2 + z^2 \leqslant 1$. Mặt khác từ phương trình mặt rút ra $y = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và do đó

$$I_2 = \iint\limits_{(\sigma)} ydxdz = 2\iint\limits_{D(x,y)} \sqrt{1 - x^2 - z^2}dxdz = |\text{chuyển sang tọa độ cực}|$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}rdr = \frac{\pi}{3}\cdot$$

(iii) Hình chiếu của (σ) lên mặt phẳng Oyz là một phần tư hình elip $\dfrac{y^2}{4} + z^2 \leqslant 1$ $(y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$. Từ phương trình mặt (σ) rút ra

$x = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4} - z^2}$ rồi thế vào hàm dưới dấu tích phân của I_3:

$$I_3 = \iint\limits_{(\sigma)} x^2 z dydz = \iint\limits_{D(y,z)} z\big(1 - \frac{y^2}{4} - z^2\big)dydz$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{2\sqrt{1-z^2}} z\big(1 - \frac{y^2}{4} - z^2\big)dy = \cdots = \frac{4}{15}\cdot$$

Như vậy $I = 2I_1 + I_2 - I_3 = \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{4}{15}\cdot$ ▲

Ví dụ 5. Tính $\iint\limits_{(\sigma)^-} ydydz$, trong đó (σ) là mặt của tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng $x+y+z=1$ và các mặt phẳng tọa độ, tích phân được lấy theo phía trong của tứ diện.

Giải. Mặt phẳng $x + y + z = 1$ cắt các trục tọa độ tại $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ và $C = (0, 0, 1)$. Ta ký hiệu gốc tọa độ là $O(0, 0, 0)$. Từ đó suy ra mặt kín (σ) gồm từ 4 hình tam giác ΔABC, ΔBCO, ΔACO và ΔABO. Do vậy tích phân đã cho là tổng của bốn tích phân.

(i) Tích phân $I_1 = \iint\limits_{ABC} ydxdz$. Rút y từ phương trình mặt $(\sigma) \supset \Delta ABC$ ta có $y = 1 - x - z$ và do đó

$$I_1 = -\iint\limits_{ACO} (1 - x - z)dxdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x + z - 1)dz = -\frac{1}{6}\cdot$$

(Lưu ý rằng $\cos\beta = \cos(\vec{n}, Oy) < 0$ vì vectơ $\vec{n}$ lập với hướng dương trục Oy một góc tù, do đó trước tích phân theo ΔACO xuất hiện dấu trừ)

(ii) $$\iint\limits_{(BCD)} ydxdz = \iint\limits_{(ABO)} ydxdz = 0$$

vì mặt phẳng BCO và ABO đều vuông góc với mặt phẳng Oxz.

(iii) $$\iint\limits_{(ACO)} ydxdz = \iint\limits_{ACO} 0dxdz = 0.$$

Vậy $I = -\frac{1}{6}$. ▲

Ví dụ 6. Tính tích phân $I = \iint\limits_{(\sigma)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó (σ) là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Giải. Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradski ta có

$$\iint\limits_{(\sigma)} = 3\iiint\limits_{D} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

trong đó $D \subset \mathbb{R}^3$ là miền với biên là mặt (σ). Chuyển sang tọa độ cầu ta có

$$\begin{aligned} 3\iiint\limits_{D} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz &= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^4 dr \\ &= \frac{12\pi R^5}{5}\cdot \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{12\pi R^5}{5}\cdot$ ▲

Ví dụ 7. Tính tích phân $\oint\limits_{\mathcal{L}} x^2y^3dx + dy + zdz$, trong đó $\mathcal{L}$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, còn mặt (σ) là phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$ và $\mathcal{L}$ có định hướng dương.

Giải. Trong trường hợp này $P = x^2y^3$, $Q = 1$, $R = z$. Do đó

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

và do đó theo công thức Stokes ta có

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} = -3\iint\limits_{(\sigma)} x^2y^2dxdy = -\frac{\pi}{8}\cdot \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân mặt theo diện tích sau đây

1. $\iint\limits_{(\Sigma)}(x+y+z)dS$, (Σ) là mặt lập phương $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. (ĐS. 9)

2. $\iint\limits_{(\Sigma)}(2x+y+z)dS$, (Σ) là phần mặt phẳng $x+y+z=1$ nằm trong góc phần tám I. (ĐS. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$)

3. $\iint\limits_{(\Sigma)}\left(z+2x+\dfrac{4y}{3}\right)dS$, (Σ) là phần mặt phẳng $6x+4y+3z=12$ nằm trong góc phần tám I. (ĐS. $4\sqrt{61}$)

4. $\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{x^2+y^2}dS$, (Σ) là phần mặt nón $z^2=x^2+y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

(ĐS. $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$)

5. $\iint\limits_{(\Sigma)}(y+z+\sqrt{a^2-x^2})dS$, (Σ) là phần mặt trụ $x^2+y^2=a^2$ nằm giữa hai mặt phẳng $z=0$ và $z=h$. (ĐS. $ah(4a+\pi h)$)

6. $\iint\limits_{(\Sigma)}\sqrt{y^2-x^2}dS$, (Σ) là phần mặt nón $z^2=x^2+y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=a^2$. (ĐS. $\dfrac{8a^3}{3}$)

7. $\iint\limits_{(\Sigma)} (x+y+z)dS$, (Σ) là nửa trên của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$.
(ĐS. πa^3)

8. $\iint\limits_{(\Sigma)} \sqrt{x^2+y^2}dS$, (Σ) là mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$. (ĐS. $\dfrac{8\pi a^3}{3}$)

9. $\iint\limits_{(\Sigma)} \dfrac{dS}{(1+x+y)}$, (Σ) là biên của tứ diện xác định bởi bất phương trình $x+y+z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. (ĐS. $\dfrac{1}{3}(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\ln 2$)

10. $\iint\limits_{(\Sigma)} (x^2+y^2)dS$, (Σ) là phần mặt paraboloid $x^2+y^2=2z$ được cắt ra bởi mặt phẳng $z=1$. (ĐS. $\dfrac{55+9\sqrt{3}}{65}$)

11. $\iint\limits_{(\Sigma)} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$, (Σ) là phần mặt paraboloid $z=1-x^2-y^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z=0$ và $z=1$. (ĐS. 3π)

12. $\iint\limits_{(\Sigma)} (x^2+y^2)dS$, (Σ) là phần mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm giữa các mặt phẳng $z=0$ và $z=1$. (ĐS. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$)

13. $\iint\limits_{(\Sigma)} (xy+yz+zx)dS$, (Σ) là phần mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$. (ĐS. $\dfrac{64a^4\sqrt{2}}{15}$)

14. $\iint\limits_{(\Sigma)} (x^2+y^2+z^2)dS$, (Σ) là mạt cầu. (ĐS. 4π)

15. $\iint\limits_{(\Sigma)} xds$, (Σ) là phần mặt được cắt ra từ partaboloid $10x=y^2+z^2$

bởi mặt phẳng $x = 10$. (ĐS. $\dfrac{50\pi}{3}(1 + 25\sqrt{5})$)

Sử dụng công thức tính diện tích mặt $S(\Sigma) = \iint\limits_{(\Sigma)} dS$ để tính diện tích của phần mặt (Σ) nếu

16. (Σ) là phần mặt phẳng $2x + 2y + z = 8a$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$. (ĐS. $3\pi R^2$)

17. (Σ) là phần mặt trụ $y + z^2 = R^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$. (ĐS. $8R^2$)

18. (Σ) là phần mặt paraboloid $x^2 + y^2 = 6z$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 27$. (ĐS. 42π)

19. (Σ) là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ nằm trong paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$. (ĐS. $2\pi a^2(3 - \sqrt{3})$)

20. (Σ) là phần mặt nón $z^2 = 2xy$ nằm trong góc phần tám I giữa hai mặt phẳng $x = 2$, $y = 4$. (ĐS. 16)

21. (Σ) là phần mặt trụ $x^2 + y^2 = Rx$ nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (ĐS. $4R^2$)

Tính các tích phân mặt theo tọa độ sau:

22. $\iint\limits_{(\Sigma)} dxdy$, (Σ) là phía ngoài phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ khi $0 \leqslant z \leqslant 1$. (ĐS. $-\pi$)

23. $\iint\limits_{(\Sigma)} ydzdx$, (Σ) là phía trên của phần mặt phẳng $x + y + z = a$ $(a > 0)$ nằm trong góc phần tám I. (ĐS. $\dfrac{a^3}{6}$)

24. $\iint\limits_{(\Sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, (Σ) là phía trên của phần mặt phẳng $x + z - 1 = 0$ nằm giữa hai mặt phẳng $y = 0$ và $y = 4$ và thuộc vào góc phần tám I. (ĐS. 4)

25. $\iint\limits_{(\Sigma)} -xdydz + zdzdx + 5dxdy$, (Σ) là phía trên của phần mặt phẳng $2x + 3y + z = 6$ thuộc góc phần tám I. (ĐS. 6)

26. $\iint\limits_{(\Sigma)} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, (Σ) là phía trên của tam giác tạo bởi giao tuyến của mặt phẳng $x + y + z = a$ với các mặt phẳng tọa độ. (ĐS. $\dfrac{a^4}{8}$)

27. $\iint\limits_{(\Sigma)} x^2dydz + z^2dxdy$, (Σ) là phía ngoài của phần mặt nón

$x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. (ĐS. $-\dfrac{4}{3}$)

28. $\iint\limits_{(\Sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, (Σ) là phía ngoài phần mặt cầu

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. (ĐS. $4\pi a^3$)

29. $\iint\limits_{(\sigma)} x^2dydz - y^2dzdx + z^2dxdy$, (Σ) là phía ngoài của mặt cầu

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ thuộc góc phần tám I. (ĐS. $\dfrac{\pi a^4}{8}$)

30. $\iint\limits_{(\Sigma)} 2dxdy + ydzdx - x^2zdydz$, (Σ) là phía ngoài của phần mặt elipxoid $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ thuộc góc phần tám I. (ĐS. $\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{4}{15}$)

31. $\iint\limits_{(\Sigma)} (y^2 + z^2)dxdy$, (Σ) là phía ngoài của mặt trụ $z^2 = 1 - x^2$,

$0 \leqslant y \leqslant 1$. (ĐS. $\dfrac{\pi}{3}$)

32. $\iint\limits_{(\Sigma)} (z - R)^2dxdy$, (Σ) là phía ngoài của nửa mặt cầu

$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$, $R \leqslant z \leqslant 2R$. (ĐS. $-\dfrac{5\pi}{24}$)

33. $\iint\limits_{(\Sigma)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, (Σ) là phía ngoài của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ thuộc góc phần tám I. (ĐS. $\dfrac{3\pi a^4}{8}$)

34. $\iint\limits_{(\Sigma)} z^2dxdy$, (σ) là phía trong của mặt elipxoid $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$. (ĐS. 0)

35. $\iint\limits_{(\Sigma)} (z+1)dxdy$, (Σ) là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (ĐS. $\dfrac{4\pi R^3}{3}$)

36. $\iint\limits_{(\Sigma)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, (Σ) là phía ngoài của mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. (ĐS. $\dfrac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$)

37. $\iint\limits_{(\Sigma)} x^2y^2zdxdy$, (Σ) là phía trong của nửa dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (ĐS. $\dfrac{2\pi R^7}{105}$)

38. $\iint\limits_{(\Sigma)} xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, (Σ) là phía ngoài của tứ diện tạo bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$. (ĐS. $\dfrac{1}{8}$)

Chỉ dẫn. Sử dụng nhận xét nêu trong phần lý thuyết.

39. $\iint\limits_{(\Sigma)} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, (Σ) là phía ngoài của mặt biên tứ diện lập bởi các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$. (ĐS. 0)

40. $\iint\limits_{(\Sigma)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, (Σ) là phía ngoài của nửa trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z \geqslant 0)$. (ĐS. $\dfrac{\pi R^4}{2}$)

Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradski để tính tích phân mặt theo phía ngoài của mặt (Σ) (nếu mặt không kín thì bổ sung để nó trở thành kín)

41. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, (Σ) là mặt cầu

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. (ĐS. $\dfrac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$)

42. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, (Σ) là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(ĐS. $4\pi R^3$)

43. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} 4x^3dydz + 4y^3dzdx - 6z^2dxdy$, (Σ) là biên của phần hình

trụ $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$. (ĐS. $6\pi a^2(a^2 - h^2)$)

44. $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, (Σ) là phần mặt

nón $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant x \leqslant h$. (ĐS. 0)

Chỉ dẫn. Vì (Σ) không kín nên cần bổ sung phần mặt phẳng $z = h$ nằm trong nón để thu được mặt kín.

45. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} dydz + zxdzdx + xydxdy$, (Σ) là biên của miền

$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant a^2, 0 \leqslant z \leqslant h\}$. (ĐS. 0)

46. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} ydydz + zdzdx + xdxdy$, (Σ) là mặt của hình chóp giới hạn bởi các mặt phẳng

$x + y + z = a$ $(a > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. (ĐS. 0)

47. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, (Σ) là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

(ĐS. $\dfrac{\pi}{5}$)

48. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, (Σ) là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(ĐS. $\dfrac{12\pi a^5}{5}$)

49. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} z^2dxdy$, (Σ) là mặt elipxoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. (ĐS. 0)

Chỉ dẫn. Xem ví dụ 10, mục III.

50. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, (Σ) là mặt elipxoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

(Đs. $4\pi abc$)

51. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, (Σ) là biên hình trụ $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $-h \leqslant z \leqslant h$. (ĐS. $6\pi a^2h$)

52. $\displaystyle\iint\limits_{(\Sigma)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, (Σ) là biên của hình lập phương $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$. (ĐS. $3a^4$)

Để áp dụng công thức Stokes, ta lưu ý lại quy ước

Hướng dương của chu tuyến $\partial\Sigma$ của mặt (Σ) được quy ước như sau: Nếu một người quan trắc đứng trên phía được chọn của mặt (tức là hướng từ chân đến đầu trùng với hướng của vectơ pháp tuyến) thì khi người quan sát di chuyển trên $\partial\Sigma$ theo hướng đó thì mặt (Σ) luôn luôn nằm bên trái.

Áp dụng công thức Stokes để tính các tích phân sau

53. $\displaystyle\oint\limits_{\mathcal{C}} xydx + yzdy + xzdz$, $\mathcal{C}$ là giao tuyến của mặt phẳng $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ với các mặt phẳng tọa độ. (ĐS. -7)

54. $\oint\limits_{\mathcal{C}} ydx+zdy+xdz$, $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phần dương trục Ox. (ĐS. $-\sqrt{3}\pi R^2$)

55. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, $\mathcal{C}$ là elip $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ điểm $(2a,0,0)$. (ĐS. $-2\pi a(a+h)$)

56. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, $\mathcal{C}$ là đường tròn $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\mathrm{tg}\alpha$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ điểm $(2a,0,0)$. (ĐS. $2\sqrt{2}\pi a^2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$)

57. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, $\mathcal{C}$ là elip $x^2+y^2=1$, $x+z=1$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phần dương trục Oz. (ĐS. -4π)

58. $\oint\limits_{\mathcal{C}} (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, $\mathcal{C}$ là biên của thiết diện của lập phương $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ với mặt phẳng $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ điểm $(2a,0,0)$. (ĐS. $-\dfrac{9}{2}a^3$)

59. $\oint\limits_{\mathcal{C}} e^x dx+z(x^2+y^2)^{3/2}dy+yz^3dz$, $\mathcal{C}$ là giao tuyến của mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$ với các mặt phẳng $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.
(ĐS. -14)

60. $\oint\limits_{\mathcal{C}} 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}dx+xy^3dy+\sin zdz$, $\mathcal{C}$ là biên của một phần tư elipxoid $4x^2+y^2+4z^2=4$ nằm trong góc phần tám thứ I.

(ĐS. $\dfrac{32}{5}$)

Chương 13

Lý thuyết chuỗi

13.1 Chuỗi số dương

13.1.1 Các định nghĩa cơ bản

Giả sử cho dãy số (a_n). Biểu thức dạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\geqslant 1} a_n \tag{13.1}$$

được gọi là *chuỗi số* (hay đơn giản là chuỗi). Các số $a_1, \dots, a_n, \dots$ được gọi là *các số hạng* của chuỗi, số hạng a_n gọi là *số hạng tổng quát* của chuỗi. Tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi được gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi và ký hiệu là s_n, tức là

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Vì số số hạng của chuỗi là vô hạn nên các tổng riêng của chuỗi lập thành dãy vô hạn các tổng riêng $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$

Định nghĩa 13.1.1. Chuỗi (13.1) được gọi là *chuỗi hội tụ* nếu dãy các tổng riêng (s_n) của nó *có giới hạn hữu hạn* và giới hạn đó được gọi là *tổng* của chuỗi hội tụ. Nếu dãy (s_n) không có giới hạn hữu hạn thì chuỗi (13.1) *phân kỳ*.

Định lý 13.1.1. *Điều kiện cần để chuỗi* (13.1) *hội tụ là số hạng tổng quát của nó dần đến 0 khi $n \to \infty$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Định lý 13.1.1 *chỉ là điều kiện cần* chứ không là điều kiện đủ. Nhưng từ đó có thể rút ra điều kiện đủ để chuỗi phân kỳ: *Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ phân kỳ.*

Chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant m+1} a_n$ thu được từ chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ sau khi cắt bỏ m số hạng đầu tiên được gọi là *phần dư thứ m* của chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Nếu chuỗi (13.1) hội tụ thì mọi phần dư của nó đều hội tụ, và một phần dư nào đó hội tụ thì bản thân chuỗi cũng hội tụ. Nếu phần dư thứ m của chuỗi

(13.1) hội tụ và tổng của nó bằng R_m thì $s = s_m + R_m$. Chuỗi hội tụ có các tính chất quan trọng là

(i) Với số m cố định bất kỳ chuỗi (13.1) và chuỗi phần dư thứ m của nó đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

(ii) Nếu chuỗi (13.1) hội tụ thì $R_m \to 0$ khi $m \to \infty$

(iii) Nếu các chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ và $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ hội tụ và α, β là hằng số thì

$$\sum_{n\geqslant 1}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n\geqslant 1} a_n + \beta \sum_{n\geqslant 1} b_n.$$

13.1.2 Chuỗi số dương

Chuỗi số $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Nếu $a_n > 0\ \forall n$ thì chuỗi được gọi là chuỗi số dương thực sự.

Tiêu chuẩn hội tụ. Chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó bị chặn trên.

Nhờ điều kiện này, ta có thể thu được những dấu hiệu đủ sau đây:

Dấu hiệu so sánh I. Giả sử cho hai chuỗi số

$$A : \sum_{n\geqslant 1} a_n, \quad a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{và} \quad B : \sum_{n\geqslant 1} b_n, \quad b_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

và $a_n \leqslant b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó:

(i) Nếu chuỗi số B hội tụ thì chuỗi số A hội tụ,

(ii) Nếu chuỗi số A phân kỳ thì chuỗi số B phân kỳ.

Dấu hiệu so sánh II. Giả sử các chuỗi số A và B là những chuỗi số dương thực sự và $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$ (rõ ràng là $0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$). Khi đó:

(i) Nếu $\lambda < \infty$ thì từ sự hội tụ của chuỗi số B kéo theo sự hội tụ của chuỗi số A

(ii) Nếu $\lambda > 0$ thì từ sự hội tụ của chuỗi số A kéo theo sự hội tụ của chuỗi số B

(iii) Nếu $0 < \lambda < +\infty$ thì hai chuỗi A và B đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ.

Trong thực hành dấu hiệu so sánh thường được sử dụng dưới dạng " thực hành" sau đây:

Dấu hiệu thực hành. Nếu đối với dãy số dương (a_n) tồn tại các số p và $C > 0$ sao cho $a_n \sim \dfrac{C}{n^p}$, $n \to \infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ hội tụ nếu $p > 1$ và phân kỳ nếu $p \leqslant 1$.

Các chuỗi thường được dùng để so sánh là

1) Chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n\geqslant 0} aq^n$, $a \neq 0$ hội tụ khi $0 \leqslant q < 1$ và phân kỳ khi $q \geqslant 1$.

2) Chuỗi Dirichlet: $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \leqslant 1$.

Chuỗi phân kỳ $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ gọi là chuỗi điều hòa.

Từ dấu hiệu so sánh I và chuỗi so sánh 1) ta rút ra:

Dấu hiệu D'Alembert. Nếu chuỗi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, $a_n > 0$ $\forall\, n$ có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathcal{D}$$

thì chuỗi hội tụ khi $\mathcal{D} < 1$ và phân kỳ khi $\mathcal{D} > 1$.

Dấu hiệu Cauchy. Nếu chuỗi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, $a_n \geqslant 0$ $\forall\, n$ có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \mathcal{C}$$

thì chuỗi hội tụ khi $\mathcal{C} < 1$ và phân kỳ khi $\mathcal{C} > 1$.

Trong trường hợp khi $\mathcal{D} = \mathcal{C} = 1$ thì cả hai dấu hiệu này đều không cho câu trả lời khẳng định vì tồn tại chuỗi hội tụ lẫn chuỗi phân kỳ với $\mathcal{D}$ hoặc $\mathcal{C}$ bằng 1.

Dấu hiệu tích phân. Nếu hàm $f(x)$ xác định $\forall\, x \geqslant 1$ không âm và giảm thì chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)$ hội tụ khi và chỉ khi tích phân suy rộng

$\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Từ dấu hiệu tích phân suy ra chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $0 < \alpha \leqslant 1$. Nếu $\alpha \leqslant 0$ thì do $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \not\to 0$ khi $\alpha \leqslant 0$ và $n \to \infty$ nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi

$$1)\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \qquad\qquad 2)\quad \sum_{n\geqslant 7} \frac{1}{n^{\ln n}}\cdot$$

Giải. 1) Sử dụng bất đẳng thức hiển nhiên

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}\cdot$$

Vì chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+1}$ là phần dư sau số hạng thứ nhất của chuỗi điều hòa nên nó phân kỳ.

Do đó theo dấu hiệu so sánh I chuỗi đã cho phân kỳ.

2) Vì $\ln n > 2\ \forall\, n > 7$ nên $\dfrac{1}{n^{\ln n}} < \dfrac{1}{n^2}\ \forall\, n > 7$.

Do chuỗi Dirichlet $\sum\limits_{n\geqslant 7} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên suy ra rằng chuỗi đã cho hội tụ. ▲

Ví dụ 2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi:

$$1)\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}, \qquad\qquad 2)\quad \sum_{n\geqslant 1} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

Giải. 1) Ta viết số hạng tổng quát của các chuỗi dưới dạng:

$$\frac{(n-1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Ta biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ nên $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{ne}$.

Nhưng chuỗi $\sum\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{ne}$ phân kỳ, do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

2) Rõ ràng là dấu hiệu D'Alembert và Cauchy không giải quyết được vấn đề về sự hội tụ. Ta nhận xét rằng $e^{-\sqrt{n}} = 0(n^{-\frac{\alpha}{2}})$ khi $n\to\infty$ $(\alpha > 0)$. Từ đó

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{a_0}{2}-2}}$$

hội tụ nếu $a_0 > 6$. Do vậy theo dấu hiệu so sánh I chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ hội tụ. ▲

Ví dụ 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$1)\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n+n^2}{3^n+n}, \qquad\qquad 2)\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Giải. 1) Ta có:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}+(n+1)^2}{3^{n+1}+(n+1)} \times \frac{3^n+n}{2^n+n^2} = \frac{\left(2+\dfrac{(n+1)^2}{2^n}\right)}{3+\dfrac{n+1}{3^n}} \times \frac{1+\dfrac{n}{3^n}}{1+\dfrac{n^2}{2^n}},$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{1+\dfrac{n^2}{2^n}}{1+\dfrac{n}{3^n}}}.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{3}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{2}{3}$. Và cả hai dấu hiệu Cauchy, D'Alembert đều cho kết luận chuỗi hội tụ.

2) Áp dụng dấu hiệu D'Alembert ta có:

$$\mathcal{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Do đó chuỗi đã cho hội tụ.

Nhận xét. Nếu áp dụng bất đẳng thức

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

thì

$$\frac{(n!)^{\frac{2}{n}}}{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{n}}} < \frac{e^{\frac{2}{n}}\left(\dfrac{n}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^2} = \frac{e^{2+\frac{2}{n}}}{4^2},$$

do đó $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} < \left(\dfrac{e}{4}\right)^2 < 1$ và khi đó dấu hiệu Cauchy cũng cho ta kết luận.

Ví dụ 4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$1)\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{2n}{n^2+1}, \qquad\qquad 2)\quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^p n},\ p>0.$$

Giải. 1) Ta có $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1} = f(n)$. Trong biểu thức của số hạng tổng quát của $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ ta thay n bởi biến liên tục x và chứng tỏ rằng hàm $f(x)$ thu được liên tục đơn điệu giảm trên nửa trục dương.

Ta có:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^A\frac{2x}{x^2+1}dx = \lim_{A\to+\infty}\ln(x^2+1)\Big|_1^A$$
$$= \ln(+\infty) - \ln 2 = \infty.$$

Do đó chuỗi 1) phân kỳ.

2) Như trên, ta đặt $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^p x}$, $p>0$, $x\geqslant 2$. Hàm $f(x)$ thỏa mãn mọi điều kiện của dấu hiệu tích phân. Vì tích phân $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$ hội tụ khi $p>1$ và phân kỳ khi $p\leqslant 1$ nên chuỗi đã cho hội tụ khi $p>1$ và phân kỳ khi $0<p\leqslant 1$- ▲

Ví dụ 5. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ thỏa mãn điều kiện cần hội tụ nhưng chuỗi phân kỳ.

Giải. Ta có

$$a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Tiếp theo $\forall\, k = 1, 2, \dots, n$ ta có

$$a_k = \frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

và do đó

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty \quad \text{khi } n \to \infty$$

và do đó chuỗi phân kỳ. ▲

BÀI TẬP

Trong các bài toán sau đây, bằng cách khảo sát giới hạn của tổng riêng, hãy xác lập tính hội tụ (và tính tổng S) hay phân kỳ của chuỗi

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{3^{n-1}}$. (ĐS. $S = \dfrac{3}{2}$)

2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2^n}$. (ĐS. $\dfrac{2}{3}$)

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1}$. (ĐS. Phân kỳ)

4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln^{2n} 2$. (ĐS. $\dfrac{1}{1-\ln^2 2}$)

5. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+5)}$. (ĐS. $\dfrac{137}{300}$)

6. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$, $\alpha \geqslant 0$. (ĐS. $\dfrac{1}{\alpha+1}$)

7. $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{1}{n^2-4}$. (ĐS. $\dfrac{25}{48}$)

8. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. (ĐS. 1)

9. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt[3]{n+2}-1\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})$. (ĐS. $1-\sqrt[3]{2}$)

10. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+3)(n+6)}$. (ĐS. $\dfrac{73}{1080}$)

Sử dụng điều kiện cần 2) để xác định xem các chuỗi sau đây chuỗi nào phân kỳ.

11. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}$. (ĐS. Phân kỳ)

12. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2n-1}{3n+2}$. (ĐS. Phân kỳ)

13. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{0,001}$. (ĐS. Phân kỳ)

14. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. (ĐS. Dấu hiệu cần không cho câu trả lời)

15. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2n}{3^n}$. (ĐS. Dấu hiệu cần không cho câu trả lời)

16. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt[n]{0,3}}$. (ĐS. Phân kỳ)

17. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. (ĐS. Phân kỳ)

18. $\sum\limits_{n\geqslant 1}n^2\sin\dfrac{1}{n^2+n+1}$. (ĐS. Phân kỳ)

19. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$. (ĐS. Phân kỳ)

20. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$. (ĐS. Phân kỳ)

21. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$. (ĐS. Phân kỳ)

22. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$. (ĐS. Dấu hiệu cần không cho câu trả lời)

23. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(n+1)\mathrm{arctg}\dfrac{1}{n+2}$. (ĐS. Phân kỳ)

Trong các bài toán sau đây, hãy dùng dấu hiệu so sánh để khảo sát sự hội tụ của các chuỗi đã cho

24 $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (ĐS. Phân kỳ)

25. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^n}$. (ĐS. Hội tụ). *Chỉ dẫn.* $n^n > 2^n\ \forall\, n \geqslant 3$.

26. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\ln n}$. (ĐS. Phân kỳ). *Chỉ dẫn.* So sánh với chuỗi điều hòa.

27. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n3^{n-1}}$. (ĐS. Hội tụ)

28. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. (ĐS. Phân kỳ)

29. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{2^n+1}$. (ĐS. Hội tụ)

30. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n}{(n+2)2^n}$. (ĐS. Hội tụ)

31. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$. (ĐS. Hội tụ)

32. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{5n^2-3n+10}{3n^5+2n+17}$. (ĐS. Hội tụ)

33. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}$. (ĐS. Hội tụ). *Chỉ dẫn.* $2\leqslant 5+3(-1)^n\leqslant 8$.

34. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n}$. (ĐS. Phân kỳ). *Chỉ dẫn.* $\ln n > 1\ \forall\, n > 2$.

35. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n^2}$. (ĐS. Hội tụ)

Chỉ dẫn. Sử dụng hệ thức $\ln n < n^\alpha\ \forall\,\alpha > 0$ và n đủ lớn.

36. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$. (ĐS. Phân kỳ)

37. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^5}{5^{\sqrt{n}}}$. (ĐS. Hội tụ)

38. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$. (ĐS. Hội tụ)

39. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^4+4n^2+1}{2^n}$. (ĐS. Hội tụ)

40. $\sum\limits_{n\geqslant 1}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$, $a > 0$. (ĐS. Phân kỳ $\forall\, a\neq 1$)

41. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2})$. (ĐS. Hội tụ)

42. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{1+a^n}$, $a > 0$. (ĐS. Hội tụ khi $a > 1$. Phân kỳ khi $0 < a\leqslant 1$)

43. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sin\dfrac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$. (ĐS. Hội tụ)

Trong các bài toán sau đây, hãy xác định những giá trị của tham số p để chuỗi đã cho hội tụ hoặc phân kỳ:

44. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\sin\dfrac{\pi}{n}\Big)^p$, $p > 0$. (ĐS. Hội tụ nếu $p > 1$, phân kỳ nếu $p \leqslant 1$)

45. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathrm{tg}^p\dfrac{\pi}{n+2}$, $p > 0$. (ĐS. Hội tụ khi $p > 1$, phân kỳ khi $p \leqslant 1$)

46. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sin\dfrac{1}{n^p}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{1}{n^q}$, $p > 0$, $q > 0$.

(ĐS. Hội tụ khi $p + q > 1$, phân kỳ khi $p + q \leqslant 1$)

47. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(1 - \cos\dfrac{1}{n^p}\Big)$, $p > 0$.

(ĐS. Hội tụ khi $p > \dfrac{1}{2}$, phân kỳ khi $p \leqslant \dfrac{1}{2}$)

48. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\dfrac{2n+1}{2n+3}$.

(ĐS. Hội tụ khi $p > 0$, phân kỳ khi $p \leqslant 0$)

Trong các bài toán sau đây, hãy khảo sát sự hội tụ của chuỗi đã cho nhờ dấu hiệu đủ D'Alembert

49. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n}{2^n}$. (ĐS. Hội tụ)

50. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2^{n-1}}{n^n}$. (ĐS. Hội tụ)

51. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$. (ĐS. Hội tụ)

52. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{2^n+1}$. (ĐS. Phân kỳ)

53. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{4^n n!}{n^n}$. (ĐS. Phân kỳ)

54. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{3^n}{n2^n}$. (ĐS. Phân kỳ)

55. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3^n n!}$. (ĐS. Hội tụ)

56. $\sum\limits_{n\geqslant 1}n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$. (ĐS. Hội tụ)

57. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n(n+1)}{3^n}$. (ĐS. Hội tụ)

58. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{7^{3n}}{(2n-5)!}$. (ĐS. Hội tụ)

59. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(n+1)!}{2^n n!}$. (ĐS. Hội tụ)

60. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}$. (ĐS. Phân kỳ)

61. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$. (ĐS. Hội tụ)

62. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{n!}$. (ĐS. Phân kỳ)

63. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^n}{n!3^n}$. (ĐS. Hội tụ)

64. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!a^n}{n^n}$, $a\neq e$, $a>0$. (ĐS. Hội tụ khi $a<e$, phân kỳ khi $a>e$)

Trong các bài toán sau đây, hãy khảo sát sự hội tụ của chuỗi đã cho nhờ dấu hiệu đủ Cauchy

65. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\dfrac{n}{2n+1}\Big)^n$. (ĐS. Hội tụ)

66. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\arcsin\dfrac{1}{n}\Big)^n$. (ĐS. hội tụ)

67. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{3^n}\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n^2}$. (ĐS. Hội tụ)

68. $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^5\left(\dfrac{3n+2}{4n+3}\right)^n$. (ĐS. Hội tụ)

69. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{3n}{n+5}\right)^n\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$. (ĐS. Phân kỳ)

70. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$. (ĐS. Phân kỳ)

Chỉ dẫn. Sử dụng công thức Stirling $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, $n\to\infty$

71. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$. (ĐS. Hội tụ)

72. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$. (ĐS. Hội tụ)

73. $\sum\limits_{n\geqslant 1}3^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. (ĐS. Phân kỳ)

74. $\sum\limits_{n\geqslant 10}\operatorname{arctg}^n\dfrac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$. (ĐS. Phân kỳ)

75. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{an}{n+2}\right)^n$, $a>0$.
(ĐS. Hội tụ khi $0<a<1$, phân kỳ khi $a\geqslant 1$)

76. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^\alpha}{\big[\ln(n+1)\big]^{n/2}}$, $\alpha>0$. (ĐS. Hội tụ $\forall\,\alpha$)

77. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{5+(-1)^n}{4^{n+1}}$. (ĐS. Hội tụ)

78. $\sum\limits_{n\geqslant 1}2^{(-1)^n+n}$. (ĐS. Phân kỳ)

79. $\sum\limits_{n\geqslant 1}2^{(-1)^n-n}$. (ĐS. Hội tụ)

80. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{[5-(-1)^n]^n}{n^2 4^n}$. (ĐS. Phân kỳ)

81. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{[5+(-1)^n]^n}{n^2 7^n}$. (ĐS. Hội tụ)

82. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{[3+(-1)^n]}{3^n}$. (ĐS. Hội tụ)

83. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^4[\sqrt{5}+(-1)^n]^n}{4^n}$. (ĐS. Hội tụ)

84. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\cdot$ (ĐS. Hội tụ)

13.2 Chuỗi hội tụ tuyệt đối và hội tụ không tuyệt đối

13.2.1 Các định nghĩa cơ bản

Chuỗi với các số hạng có dấu khác nhau

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n\geqslant 1} a_n \tag{13.2}$$

được gọi là *chuỗi hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi số dương

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots = \sum_{n\geqslant 1} |a_n| \tag{13.3}$$

hội tụ. Chuỗi (13.2) được gọi là chuỗi *hội tụ có điều kiện (không tuyệt đối)* nếu nó hội tụ còn chuỗi (13.3) phân kỳ.

Định lý 13.2.1. *Mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ, tức là sự hội tụ của chuỗi* (13.3) *kéo theo sự hội tụ của chuỗi* (13.2).

Chuỗi hội tụ có điều kiện có tính chất rất đặc biệt là: nếu chuỗi (13.2) hội tụ có điều kiện thì với số $A \subset \mathbb{R}$ bất kỳ luôn luôn có thể hoán vị các số hạng của chuỗi đó để chuỗi thu được có tổng bằng A.

13.2.2 Chuỗi đan dấu và dấu hiệu Leibnitz

Chuỗi dạng

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \dots,$$
$$a_n \geqslant 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{13.4}$$

được gọi là *chuỗi đan dấu.*

Dấu hiệu Leibnitz. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ và $a_n \geqslant a_{n+1} > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ thì chuỗi đan dấu (13.4) hội tụ và

$$|S - S_n| \leqslant a_{n+1} \tag{13.5}$$

trong đó S là tổng của chuỗi (13.4), S_n là tổng riêng thứ n của nó.

Như vậy để khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu ta cần kiểm tra hai điều kiện

i) $a_n \geqslant a_{n+1} > 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Hệ thức (13.5) chứng tỏ rằng sai số gặp phải khi thay tổng S của chuỗi đan dấu hội tụ bởi tổng của một số số hạng đầu tiên của nó là không vượt quá giá trị tuyệt đối của số hạng thứ nhất của chuỗi dư bị cắt bỏ.

Để *xác lập sự hội tụ* của chuỗi với các số hạng có dấu khác nhau ta có thể sử dụng các dấu hiệu hội tụ của chuỗi dương và định lý 13.1.1. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1}|a_n|$ phân kỳ thì sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ trở thành vấn đề để mở ngoại trừ trường hợp sử dụng dấu hiệu D'Alembert và dấu hiệu Cauchy vì các dấu hiệu này xác lập sự phân kỳ của chuỗi chỉ dựa trên sự phá vỡ điều kiện cần.

Nhận xét. Chuỗi đan dấu thỏa mãn dấu hiệu Leibnitz gọi là chuỗi Leibnitz.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Khảo sát sự hội tụ và đặc tính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Giải. Dãy số $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ đơn điệu giảm dần đến 0 khi $n\to\infty$. Do đó theo dấu hiệu Leibnitz nó hội tụ. Để khảo sát đặc tính hội tụ (tuyệt đối hay không tuyệt đối) ta xét chuỗi dương $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Chuỗi này phân kỳ. Do vậy chuỗi đã cho hội tụ có điều kiện. ▲

Ví dụ 2. Khảo sát sự hội tụ và đặc tính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}\cdot$$

Giải. Để khảo sát dáng điệu của dãy $\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$ ta xét hàm $\varphi(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$. Rõ ràng là $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ và $\varphi'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}(2-\ln x)$. Từ đó suy ra khi $x>e^2$ thì $\varphi'(x)<0$. Do đó dãy $(a_n)=\dfrac{\ln^2 n}{n}$ thỏa mãn dấu hiệu Leibnitz với $n>e^2$. Vì vậy chuỗi đã cho hội tụ. Dễ dàng thấy rằng chuỗi số dương $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln^2 n}{n}$ phân kỳ nên chuỗi đan dấu đã cho hội tụ có điều kiện. ▲

Ví dụ 3. Cũng hỏi như trên với chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n\alpha}{2^n}\cdot$$

Giải. Đây là chuỗi đổi dấu. Xét chuỗi dương

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|\cos n\alpha|}{2^n} \qquad (*)$$

Vì $\dfrac{|\cos\alpha n|}{2^n}\leqslant\dfrac{1}{2^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ nên theo dấu hiệu so sánh chuỗi (*) hội tụ và do vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối. ▲

Ví dụ 4. Cũng hỏi như trên đối với chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}\cdot$$

Giải. Dễ dàng thấy rằng dãy $\dfrac{1}{n(n+1)}$ đơn điệu giảm dần đến 0 khi $n \to \infty$. Do đó theo dấu hiệu Leibnitz nó hội tụ. Ta xét sự hội tụ của chuỗi dương $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Chuỗi này hội tụ, chẳng hạn theo dấu hiệu tích phân

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^{A} \frac{d\Big(x+\dfrac{1}{2}\Big)}{\Big(x+\dfrac{1}{2}\Big)^2 - \dfrac{1}{4}} = \lim_{A\to\infty} \ln \frac{x}{x+1}\Big|_1^A = \ln 2.$$

Do đó chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối. ▲

Ví dụ 5. Cần lấy bao nhiêu số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ để tổng của chúng sai khác với tổng của chuỗi đã cho không quá 0,01 ? 0,001 ?

Giải. 1^+ Chuỗi đã cho là chuỗi Leibnitz. Do đó phần dư của nó thỏa mãn điều kiện

$$|R_n| < a_{n+1} \Rightarrow |R_n| < \frac{1}{(n+1)^2}\cdot$$

Để tính tổng của chuỗi đã cho với sự sai khác không quá 0,01 ta cần đòi hỏi là

$$|R_n| < 0,01 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < 0,01 \Leftrightarrow n > 10.$$

Như vậy để tính tổng của chuỗi với sai số không vượt quá 0,01 ta chỉ cần tính tổng mười số hạng đầu là đủ.

2^+ Để tính tổng của chuỗi với sai số không vượt quá 0,001 ta cần tính tổng 31 số hạng đầu là đủ (tại sao ?) ▲

Nhận xét. Ta thấy rằng chuỗi Leibnitz là công cụ tính toán tiện hơn so với chuỗi dương. Chẳng hạn để tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ với sai số không vượt quá 0,001 ta cần phải lấy 1001 số hạng mới đủ. Thật vậy ta có thể áp dụng dấu hiệu tích phân. Ta có

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx < R_n < \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Từ đó

$$R_n < \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}\cdot$$

Tìm n để $\dfrac{1}{n} < 0,001$. Giải bất phương trình đối với n ta có $n > 1000$, tức là $R_{1001} < 0,001$. Vậy ta cần lấy 1001 số hạng đầu để tính tổng mới có được sai số không quá 0,001.

Ví dụ 6. Chứng tỏ rằng chuỗi

$$2 + \Big(\frac{5}{4} - \frac{7}{8}\Big) + \Big(\frac{10}{9} - \frac{26}{27}\Big) + \cdots + \Big(\frac{n^2+1}{n^2} - \frac{n^3-1}{n^3}\Big) + \dots \qquad (*)$$

hội tụ, còn chuỗi

$$2 + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{10}{9} - \frac{26}{27} + \cdots + \frac{n^2+1}{n^2} - \frac{n^3-1}{n^3} + \dots \qquad (**)$$

thu được từ chuỗi đã cho sau khi bỏ các dấu ngoặc đơn là chuỗi phân kỳ.

Giải. Số hạng tổng quát của chuỗi (*) có dạng

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^2} - \frac{n^3-1}{n^3} = \frac{n+1}{n^3}\cdot$$

Do đó $\forall\, n > 1$ ta có

$$\frac{n+1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$$

và do chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ hội tụ $\forall\,\alpha>1$ nên chuỗi đã cho hội tụ.

Bây giờ xét chuỗi (**). Rõ ràng số hạng tổng quát của (**) không dần đến 0 khi $n\to\infty$, do đó chuỗi (**) phân kỳ. ▲

BÀI TẬP

Sử dụng dấu hiệu Leibnitz để chứng minh các chuỗi sau đây hội tụ có điều kiện

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}n^9}{\sqrt{n^{20}+4n^3+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}$

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+20}$

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$

7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$

9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)$

10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

Khảo sát sự hội tụ và đặc tính hội tụ của các chuỗi

11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\Big(\frac{2n+1}{3n-2}\Big)^n.$ (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\Big(\frac{3n+1}{3n-2}\Big)^{5n+2}.$ (ĐS. Phân kỳ)

13. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}.$ (ĐS. Phân kỳ)

14. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$ (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

15. $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\mathrm{arctg}\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

Chỉ dẫn. Sử dụng bất đẳng thức $\ln(n+1) < \sqrt{n+1}$, $n > 2$.

16. $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n-\ln^3 n}$. (ĐS. Hội tụ có điều kiện)

Trong các bài toán sau đây hãy xác định giá trị của tham số p để chuỗi số hội tụ tuyệt đối hoặc hội tụ có điều kiện

17. $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^p}$, $p > 0$.

(ĐS. Hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$; hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leqslant 1$)

18. $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\mathrm{tg}^p\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $p > 0$.

(ĐS. Hội tụ tuyệt đối khi $p > \dfrac{2}{3}$; hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leqslant \dfrac{2}{3}$)

19. $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\sin^p\dfrac{5n+1}{n^2\sqrt{n+3}}$, $p > 0$.

(ĐS. Hội tụ tuyệt đối khi $p > \dfrac{2}{3}$; hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leqslant \dfrac{2}{3}$)

20. $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\left(\ln\dfrac{n+3}{n+1}\right)^p$, $p > 0$.

(ĐS. Hội tụ tuyệt đối khi $p > \dfrac{1}{2}$; hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$)

Khảo sát đặc tính hội tụ của các chuỗi (21-32):

21. $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

22. $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n-1)^3}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

23. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

24. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\Big(1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\Big)$. (ĐS. Hội tụ có điều kiện)

25. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

26. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$. (ĐS. Hội tụ có điều kiện)

27. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$. (ĐS. Phân kỳ)

28. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$. (ĐS. Hội tụ có điều kiện)

29. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.

(ĐS. Hội tụ tuyệt đối khi $|a|>1$, hội tụ có điều kiện khi $|a|=1$, phân kỳ khi $|a|<1$)

30. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(\sqrt{n+1}-1)}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

31. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}\Big(2+\dfrac{1}{n}\Big)^n}{5^n}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

32. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3^n}$. (ĐS. Hội tụ tuyệt đối)

Trong các bài toán sau đây, hãy tìm số số hạng của chuỗi đã cho cần lấy để tổng của chúng và tổng của chuỗi tương ứng sai khác nhau một đại lượng không vượt quá số δ cho trước

33. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n^2}$, $\delta=0,01$. (ĐS. $No=7$)

34. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\cos(n\pi)}{n!}$, $\delta = 0,001$. (ĐS. $No = 5$)

35. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}$, $\delta = 10^{-6}$. (ĐS. $No = 10^6$)

36. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\cos n\pi}{2^n(n+1)}$, $\delta = 10^{-6}$. (ĐS. $No = 15$)

37. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n 2n}{(4n+1)5^n}$, $\delta = 0,1$?; $\delta = 0,01$? (ĐS. $No = 2$, $No = 3$)

38. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n!}$, $\delta = 0,1$; $\delta = 0,001$? (ĐS. $No = 4$, $No = 6$)

13.3 Chuỗi lũy thừa

13.3.1 Các định nghĩa cơ bản

Chuỗi lũy thừa đối với biến thực x là chuỗi dạng

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{13.6}$$

hay

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \tag{13.7}$$

trong đó các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ là những hằng số. Bằng phép đổi biến x bởi $x - a$ từ (13.6) thu được (13.7). Do đó để tiện trình bày ta chỉ cần xét (13.6) là đủ (tức là xem $a = 0$).

Chuỗi (13.6) luôn hội tụ tại điểm $x = 0$, còn (13.7) hội tụ tại $x = a$. Do đó tập hợp điểm mà chuỗi lũy thừa hội tụ luôn luôn $\neq \emptyset$.

Đối với chuỗi lũy thừa bất kỳ (13.6) luôn luôn tồn tại số thực $R : 0 \leqslant R \leqslant +\infty$ sao cho chuỗi đó hội tụ tuyệt đối khi $|x| < R$ và phân kỳ khi $|x| > R$. Số R đó được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi

(13.6) và khoảng $I(R) = (-R, R)$ được gọi là *khoảng hội tụ* của chuỗi lũy thừa (13.6).

Bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa có thể tính thông qua các hệ số của nó bởi một trong các công thức

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{13.8}$$

hoặc

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{13.9}$$

nếu giới hạn ở vế phải của (13.8) và (13.9) tồn tại.

Định nghĩa 13.3.1. Người ta nói rằng hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ trên khoảng $(-R, R)$ nếu trên khoảng đó chuỗi đã nêu hội tụ và tổng của nó bằng $f(x)$, tức là

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Định nghĩa 13.3.2. 1^+ Chuỗi lũy thừa dạng

$$\begin{aligned} f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned} \tag{13.10}$$

được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ với tâm tại điểm x_0 (ở đây $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$).

2^+ Các hệ số của chuỗi Taylor

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{13.11}$$

được gọi là các hệ số Taylor của hàm $f(x)$.

3^+ Khi $x_0 = 0$, chuỗi Taylor

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (13.12)$$

được gọi là chuỗi Maclaurin.

13.3.2 Điều kiện khai triển và phương pháp khai triển

Định lý 13.3.1 (Tiêu chuẩn khai triển). *Hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

trên khoảng $(-R, R)$ khi và chỉ khi trên khoảng đó hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp và trong công thức Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

phần dư $R_n(x) \to 0$ khi $n \to \infty$ $\forall x \in (-R, R)$.

Trong thực hành người ta thường sử dụng dấu hiệu đủ như sau.

Định lý 13.3.2. *Để hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

điều kiện đủ là trên khoảng đó hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp và các đạo hàm đó bị chặn, tức là $\exists\, M > 0 : \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$ và $\forall\, x \in (-R, R)$ thì

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M.$$

Ta nêu ra đây hai phương pháp khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

1. *Phương pháp I* (phương pháp trực tiếp) gồm các bước sau:

a) Tính các hệ số theo công thức (13.11)

b) Chứng tỏ rằng $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Nhược điểm của phương pháp này là tính toán quá cồng kềnh và sau nữa là việc khảo sát giới hạn $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ lại càng phức tạp hơn.

2. *Phương pháp II* (phương pháp gián tiếp) là phương pháp dựa trên bảng các khai triển "có sẵn" (hay *Khai triển bảng*) cùng với các phép tính đối với chuỗi lũy thừa.

I. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} - \cdots = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

II. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \\ = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

III. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \\ = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

IV.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \\ = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1,\ \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ \binom{\alpha}{n} = C_n^\alpha \text{ nếu } \alpha \in \mathbb{N}.$$

Khi $\alpha = -1$ ta có

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$
$$= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n, \ -1 < x < 1.$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n\geqslant 0} x^n, \ -1 < x < 1.$$

V.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots; \ -1 < x < 1$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \ -1 < x < 1.$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1} n x^n.$$

Giải. 1^+ Ta sẽ áp dụng công thức (13.8). Vì $a_n = (-1)^{n-1}n$ và $a_{n+1} = (-1)^n(n+1)$ nên ta có

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Như vậy chuỗi hội tụ bới $-1 < x < 1$.

2^+ Ta còn cần khảo sát sự hội tụ của chuỗi tại các đầu mút của khoảng hội tụ.

Với $x = -1$ ta có

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1} n(-1)^n = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{2n-1} n = \sum_{n\geqslant 1}(-n).$$

Do đó chuỗi đã cho phân kỳ tại điểm $x = -1$ (không thỏa mãn điều kiện cần !)

Với $x = 1$ ta có

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}n \quad \text{không tồn tại}$$

Do đó chuỗi phân kỳ tại điểm $x = 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-1, 1)$. ▲

Ví dụ 2. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n^n}.$$

Giải. Trong trường hợp này ta sử dụng công thức (13.9) và thu được

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{n^n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Điều đó có nghĩa là chuỗi đã cho hội tụ với mọi giá trị x, tức là $I(R) = (-\infty, +\infty)$.

Ví dụ 3. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 0} n!x^n, \quad 0! \equiv 1.$$

Giải. Áp dụng công thức (13.8) ta có

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Vậy $R = 0$. Điều đó có nghĩa rằng chuỗi đã cho hội tụ tại điểm $x = 0$. ▲

Ví dụ 4. Khai triển hàm $\dfrac{1}{4-x}$ thành chuỗi lũy thừa tại lân cận điểm $x_0 = 2$ (cũng tức là: theo các lũy thừa của hiệu $x - 2$ hay chuỗi lũy thừa với tâm tại điểm $x_0 = 2$).

Giải. Ta biến đổi hàm đã cho để có thể áp dụng khai triển bảng:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n\geqslant 0} t^n, \quad -1 < t < 1.$$

Ta có

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x-2}{2}}$$

Xem $t = \dfrac{x-2}{2}$ ta có:

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{2}\Big[1 + \Big(\frac{x-2}{2}\Big) + \Big(\frac{x-2}{2}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{x-2}{2}\Big)^n + \dots\Big]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4-x} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n.$$

Khai triển này chỉ đúng khi

$$\Big|\frac{x-2}{2}\Big| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4. \ \blacktriangle$$

Nhận xét. Bạn đọc cũng dễ dàng thu được khai triển trên đây bằng phương pháp trực tiếp.

Ví dụ 5. Khai triển hàm $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4}$ thành chuỗi Taylor với tâm tại điểm $x_0 = 2$.

Giải. Ta biến đổi hàm đã cho như sau

$$\sin\frac{\pi}{4}x = \sin\frac{\pi}{4}(x-2+2) = \sin\Big[\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2}\Big] = \cos\frac{\pi}{4}(x-2).$$

Xem $\dfrac{\pi}{4}(x-2) = t$ và áp dụng khai triển bảng III ta có

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{4}x &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big(\frac{\pi}{4}(x-2)\Big)^{2n} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!}(x-2)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}. \ \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 6. Khai triển hàm $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ thành chuỗi Maclaurin.

Giải. Ta có $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Mặt khác

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x < 1;$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Từ đó

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$
$$-1 < x < 1. \ \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Sử dụng các khai triển bảng để khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa với tâm tại điểm $x_0 = 0$ và chỉ ra bán kính hội tụ của chuỗi

1. $f(x) = e^{-2x}$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n$, $R = +\infty$)

2. $f(x) = \ln \dfrac{1}{1-2x}$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2^n}{n} x^n$, $R = \dfrac{1}{2}$)

3. $f(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{x^3}{3}\right)$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n x^{3n+1}}{3^n n} x^n$, $R = \sqrt[3]{3}$)

4. $f(x) = \sqrt[3]{1-4x}$. (ĐS. $1 - \dfrac{4}{3}x + \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{4^n \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n \cdot n!} x^n$; $R = 1$)

5. $f(x) = \sin 5x$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n 5^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$; $R = +\infty$)

6. $f(x) = \cos \dfrac{x^3}{3}$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}$; $R = +\infty$)

Bằng cách biến đổi (trong trường hợp cần thiết) sao cho có thể áp dụng các khai triển bảng để khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi lũy thừa với tâm tại điểm x_0. Hãy chỉ ra bán kính hội tụ của chuỗi

7. $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, $x_0 = 10$. (ĐS. $e^{-5}\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{(x-10)^n}{2^n}$, $R = +\infty$)

8. $f(x) = 2^x$, $x_0 = a$. (ĐS. $2^a\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{\ln^n 2}{n!}(x-a)^n$, $R = +\infty$)

9. $f(x) = 2^x 3^{-x}$, $x_0 = 0$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)^n}{n!}x^n$, $R = +\infty$)

10. $f(x) = e^{1-2x^3}$, $x_0 = 0$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n 2^n e}{n!}x^{3n}$, $R = +\infty$)

11. $f(x) = (2+x)e^{x-1}$, $x_0 = -2$. (ĐS. $\dfrac{1}{e^3}\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(x+2)^{n+1}}{n!}$, $R = +\infty$)

12. $f(x) = \sin(a+x)$, $x_0 = 0$.

$$\text{(ĐS.}\quad \sin a\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \cos a\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = +\infty)$$

13. $f(x) = \sin x\cos 3x$, $x_0 = 0$.

$$\text{(ĐS.}\quad \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = +\infty)$$

14. $f(x) = \begin{cases}\dfrac{\cos x - 1}{x}, & x \neq 0\\ 0, & x = 0\end{cases};\ x_0 = 0.$

(ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n(x)^{2n-1}}{(2n)!}$, $R = +\infty$)

15. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $R = +\infty$)

16. $f(x) = \sin^2 x\cos^2 x$, $x = 0$.

(ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{4n-3}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=+\infty$)

17. $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$, $x_0=0$.

$$\text{(ĐS.}\quad \ln 2+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}[1+2^{-n}]\frac{x^n}{n}\,,\ R=+\infty)$$

18. $f(x)=\ln(4+3x-x^2)$, $x_0=2$.

$$\text{ĐS.}\quad \ln 6+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\big[(-1)^{n-1}3^{-n}-2^{-n}\big](x-2)^n)$$

19. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, $x_0=0$; $x_0=4$.

$$\text{(ĐS.}\quad 1)\ \sum_{n\geqslant 0}\Big[\frac{(-1)^{n+1}}{4}-\frac{1}{12}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n\Big]x^n,\quad |x|<1;$$

$$2)\ \sum_{n\geqslant 0}\Big[\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{20}\frac{(-1)^n}{5^n}\Big](x-4)^n,\quad |x-4|<1)$$

Chỉ dẫn. Biểu diễn $f(x)=\dfrac{1}{4}\Big[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}\Big]$.

20. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$, $x_0=0$.

(ĐS. $1-\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^{n+1}-(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$, $R=1$)

21. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0=-2$.

(ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$, $R=\sqrt{3}$)

Sử dụng phương pháp đạo hàm hoặc tích phân của chuỗi lũy thừa để khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi lũy thừa với tâm $x_0=0$ và chỉ ra bán kính hội tụ.

22. $f(x)=\text{arcctg}x$. (ĐS. $\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$, $|x|\leqslant 1$)

Chỉ dẫn. Khai triển arctg$x$ và sử dụng hệ thức arcctg$x = \frac{\pi}{2} -$ arctg$x$.

23. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$. (ĐS. $\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)x^n$, $R = 1$)

24. $f(x) = \arcsin x$. (ĐS. $x + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$, $R = 1$)

25. $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t^2}{t}dt$. (ĐS. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!(4n+2)}$, $R = +\infty$)

26. $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$. (ĐS. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$, $R = 1$)

27. $f(x) = \int\limits_0^x \frac{1-\cos 2t}{t^2}dt$. (ĐS. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}$, $R = +\infty$)

28. $f(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$, $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

$$(\text{ĐS.} \quad \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2},\ R = 1)$$

29. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
(ĐS. $x + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$, $R = 1$)

Chỉ dẫn. $f(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Áp dụng các phương pháp thích hợp để khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi lũy thừa với tâm tại x_0 và chỉ ra bán kính hội tụ của chuỗi

30. $f(x) = e^{x-1}$, $x_0 = 4$. (ĐS. $e^3\sum_{n\geqslant 0}\frac{(x-4)^n}{n!}$, $R = +\infty$)

31. $f(x) = e^{3x} - 2e^{-x}$, $x_0 = 0$. (ĐS. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{3^n - 2(-1)^n}{n!} x^n$, $R = +\infty$)

32. $f(x) = \frac{1}{2^{3x-2}}$, $x_0 = -1$. (ĐS. $32 \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(\ln 8)^n}{n!}(x+1)^n$, $R = +\infty$)

33. $f(x) = 2^x e^{x-1}$, $x_0 = 1$. (ĐS. $2 \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(\ln 2 + 1)^n}{n!}(x-1)^n$, $R = +\infty$)

34. $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{(ĐS. } \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n)!}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^{2n} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^{2n+1}, \ R = +\infty)$$

35. $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $x_0 = -\frac{\pi}{3}$.

$$\text{(ĐS. } \sqrt{3} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \Big(x + \frac{\pi}{3}\Big)^{2n}}{(2n)! 2^{2n+1}} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2^{2n+1}} \Big(x + \frac{\pi}{3}\Big(x + \frac{\pi}{3}\Big)^{2n+1}, \ R = +\infty)$$

36. $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{(ĐS. } \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n 4^{n-1}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \ R = +\infty)$$

37. $f(x) = \sin x \cos^2 x$, $x_0 = 0$.

$$\text{(ĐS. } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{4(2n)!}(1 + 3^{2n+1})x^{2n+1}, \ R = +\infty)$$

38. $f(x) = \cos x \cos 2x$, $x_0 = 0$.

$$\text{(ĐS. } \frac{1}{2} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \Big[\frac{1}{(2n)!} + \frac{3^{2n}}{(2n)!}\Big] x^{2n}, \ R = +\infty)$$

39. $f(x) = x\ln x$, $x_0 = 1$.

(ĐS. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n},\ R = 1$)

40. $f(x) = \ln(2x+3)$, $x_0 = 4$.

(ĐS. $\displaystyle\ln 11 + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}(x-4)^n,\ R = \frac{11}{2}$)

41. $f(x) = \ln(3-4x)$, $x_0 = -2$.

(ĐS. $\displaystyle\ln 11 - \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4}{11}\right)^n\frac{(x+2)^n}{n},\ x \in \left[\frac{-19}{4}, \frac{3}{4}\right]$)

42. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+3}{x-3}$, $x_0 = 0$.

(ĐS. $\displaystyle -\frac{\pi}{4} + \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ R = 3$)

Chỉ dẫn. $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2+9} = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{3^{2n+1}}$. Từ đó

$$\int\limits_0^x f(t)dt = f(x) - f(0) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\int\limits_0^x t^{2n}dt.$$

13.4 Chuỗi Fourier

13.4.1 Các định nghĩa cơ bản

Hệ hàm

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{\pi x}{\ell}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \dots \tag{13.13}$$

được gọi là hệ lượng giác cơ sở. Đó là hệ trực giao trên đoạn $[-\ell, \ell]$ (tức là tích phân theo đoạn đó của tích hai hàm khác nhau bất kỳ của hệ bằng 0).

Định nghĩa 13.4.1. 1) Chuỗi hàm dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big), \tag{13.14}$$

trong đó $\ell > 0$; a_n, b_n là các hằng số (gọi là hệ số của chuỗi (13.14)) được gọi là chuỗi lượng giác.

2) Chuỗi lượng giác (13.14) được gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ theo hệ lượng giác cơ sở (13.13) (gọi tắt là chuỗi Fourier) nếu các hệ số của nó được tính theo công thức

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad n = 0, 1, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{13.15}$$

Các hệ số a_n, b_n được tính theo công thức (13.15) được gọi là hệ số Fourier của hàm f theo hệ lượng giác cơ sở.

Giả sử hàm $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_{-\ell}^{\ell}|f(x)|dx < +\infty$. Khi đó luôn luôn xác định được các hệ số a_n, b_n theo (13.15) và lập chuỗi Fourier đối với hàm $f(x)$ và viết

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big), \tag{13.16}$$

ở đây dấu "$\sim$" được dùng khi đẳng thức chưa được chứng minh (và được gọi là dấu tương ứng).

13.4.2 Dấu hiệu đủ về sự hội tụ của chuỗi Fourier

Dấu tương ứng "$\sim$" trong hệ thức (13.16) có thể thay bằng dấu đẳng thức nếu hàm $f(x)$ thỏa mãn dấu hiệu đủ sau đây về khai triển hàm thành chuỗi Fourier.

Định lý Dirichlet. *Giả sử $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T (gọi là hàm T-tuần hoàn), $f(x)$ và $f'(x)$ hoặc liên tục khắp nơi hoặc liên tục từng khúc (tức là chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại I trong mỗi chu kỳ).*

Khi đó chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ với mọi x đến tổng $S(x)$ và

1) *Tại mọi điểm liên tục của hàm $f(x)$, chuỗi hội tụ đến chính hàm $f(x)$ tức là $S(x) = f(x)$.*

2) *Tại mọi điểm gián đoạn, chuỗi hội tụ đến nửa tổng các giới hạn một phía bên trái và bên phải của hàm, tức là*

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}, \quad x_0 \text{ là điểm gián đoạn.}$$

3) *Nếu $f(x)$ liên tục khắp nơi thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tuyệt đối và đều.*

Có hai trường hợp đặc biệt sau đây:

1) Nếu $f(x)$ là hàm chẵn, tức là $f(x) = f(-x)$ $\forall x$ thì $b_n = 0$ $\forall n \geqslant 1$ và chuỗi Fourier của nó chỉ chứa các hàm cosin:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ, tức là $f(x) = -f(-x)$ $\forall x$ thì $a_n = 0$ $\forall n = 0, 1, \ldots$ và chuỗi Fourier của nó chỉ chứa các hàm sin:

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \quad n = 1, 2, \ldots$$

Nếu hàm $f(x)$ chỉ xác định trên đoạn $[a, b] \subset [-\ell, \ell]$ và không xác định trên $[-\ell, \ell] \setminus [a, b]$ thì có thể dựng hàm phụ $F(x)$ sao cho

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \\ g(x), & x \in [-\ell, \ell] \setminus [a, b], \end{cases}$$

trong đó $g(x)$ là hàm khả tích tùy ý.

Sau đó giả thiết $F(x+2\ell) = F(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ và thu được hàm tuần hoàn $F(x)$ có chu kỳ 2ℓ. Phép dựng hàm $F(x)$ như vậy được gọi là phép thác triển tuần hoàn $f(x)$.

Hàm $f(x)$ được cho trên $[0,\ell]$ có thể thác triển tùy ý sang khoảng kề $[-\ell, 0]$ và do vậy nó được biểu diễn bởi các chuỗi Fourier khác nhau (mà thường gặp là chuỗi Fourier chỉ chứa hoặc các hàm cosin hoặc các hàm sin).

Ta xét hai trường hợp đặc biệt sau đây:

1) Chuỗi Fourier theo các hàm cosin thu được khi thác triển chẵn hàm đã cho trên đoạn $[0,\ell]$ sang khoảng kề $[-\ell, 0]$. Trong trường hợp này đồ thị của hàm $F(x)$ đối xứng qua trục tung.

2) Chuỗi Fourier theo các hàm sin thu được khi thác triển lẻ hàm đã cho sang khoảng kề $[-\ell, 0)$. Trong trường hợp này đồ thị của hàm $F(x)$ là đối xứng qua gốc tọa độ.

Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ell,\ell]$ và $f(-\ell) = f(\ell)$ và a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ là các hệ số Fourier của hàm $f(x)$. Khi đó ta có đẳng thức

$$\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geqslant 1}(a_n^2 + b_n^2). \tag{13.17}$$

Đẳng thức (13.17) được gọi là đẳng thức Parseval.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Khai triển hàn $f(x) = \text{sign}x$, $-\pi < x < \pi$ thành chuỗi Fourier và sử dụng khai triển ấy để tìm tổng của chuỗi Leibnitz

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot$$

Giải. Vì hàm $f(x)$ lẻ nên $a_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$ và

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \text{sign}x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\Big)$$
$$= \frac{2}{n\pi}([1-\cos n\pi]) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2m-1)} & \text{nếu } n = 2m-1 \\ 0 & \text{nếu } n = 2m \end{cases}, \ m \in \mathbb{N}.$$

Do đó với $-\pi < x < \pi$ ta có

$$\text{sign}x = \frac{4}{\pi}\sum_{m\geqslant 1}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}\cdot$$

Nếu đặt $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì từ chuỗi Fourier thu được, ta có

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{m\geqslant 1}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} \Rightarrow \sum_{m\geqslant 0}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}\cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tìm khai triển Fourier của hàm $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $x \in [-1, 1]$.

Giải. Như vậy ta phải khai triển hàm đã cho theo hệ cơ sở $\{1, \cos\pi x, \sin\pi x, \cos 2\pi x, \ \sin 2\pi x, \dots\}$.

Ta có

$$a_0 = \int\limits_1^1 (x^3 + x^2 - x - 1)dx = -\frac{4}{3},$$

$$a_n = \int\limits_{-1}^{1} (x^3 + x^2 - x - 1)\cos n\pi x dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\Big[(x^2-1)\sin n\pi x\Big|_{-1}^{1} - 2\int\limits_{-1}^{1} x\sin n\pi x dx\Big]$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}\Big[x\cos n\pi x\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\cos n\pi x dx\Big] = \frac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^n,\ n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \int\limits_{-1}^{1}(x^3 + x^2 - x - 1)\sin n\pi x dx = \frac{12}{\pi^3 n^3}(-1)^n,\ n = 1, 2, \dots$$

Vì hàm $f(x)$ khả vi trên khoảng $(-1, 1)$ nên ta có

$$x^3 + x^2 - x - 1 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}\Big[\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x + \frac{3(-1)^n}{\pi n^3}\sin n\pi x\Big],$$

$\forall x \in (-1, 1)$.

Ví dụ 3. Khai triển hàm $f(x) = x$, $x \in [0, \ell]$:

1) theo các hàm cosin;

2) theo các hàm sin.

Giải. 1) Để khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier theo các hàm cosin, ta thực hiện phép thác triển chẵn hàm $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ sang đoạn kề $[-\ell, 0]$ và thu được hàm $f^*(x) = |x|$, $x \in [-\ell, \ell]$. Từ đó thác triển 2ℓ-tuần hoàn hàm $f^*(x)$ ra toàn trục số. Hiển nhiên hàm $f^*(x)$ liên tục $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} x dx = \ell,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} x\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn},\\ -\dfrac{4\ell}{n^2\pi^2} & \text{nếu } n \text{ lẻ}.\end{cases}$$

Từ đó ta thu được
$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell.$$

2) Để khai triển hàm $f(x)$ theo các hàm sin, ta thực hiện phép thác triển lẻ hàm $f(x) = x$, $x \in [0,\ell]$ sang đoạn kề $[-\ell, 0]$ và thu được hàm $f^*(x) = x$, $x \in [-\ell,\ell]$. Từ đó thác triển 2ℓ-tuần hoàn hàm $f^*(x)$ ra toàn trục số. Hàm đã được thác triển thỏa mãn định lý Dirichlet. Do vậy ta có: $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $\forall\, n = 1, 2, \dots$
$$b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell x\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{\ell}\Big[-\frac{x\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi}\int\limits_0^\ell \cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\Big]$$
$$= \frac{2\ell}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$
Do đó
$$x = \frac{2\ell}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

Ví dụ 4. Khai triển hàm
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ |x| - \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } \dfrac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$
và $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ thành chuỗi Fourier.

Giải. Hàm $f(x)$ là hàm chẵn nên nó khai triển được thành chuỗi Fourier theo các hàm cosin. Ta có
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^\pi \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)dx = \frac{\pi}{4},$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^\pi \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\cos nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n^2}\Big], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Từ đó suy ra rằng với $x \in (-\pi, \pi)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geqslant 1} \Bigg[\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos \dfrac{n\pi}{2}}{n^2} \Bigg] \cos nx \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 2nx,
\end{aligned}
$$

trong đó ta đã sử dụng các hệ thức

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos \dfrac{n\pi}{2}}{n^2} \cos nx = 0 \quad \text{với } n = 2m - 1 \\
&\frac{\cos \dfrac{n\pi}{2}}{n^2} \cos nx = \frac{(-1)^m}{4m^2} \cos 2mx, \quad n = 2m. \ \blacktriangle
\end{aligned}
$$

BÀI TẬP

Khai triển hàm thành chuỗi Fourier trên đoạn (khoảng) đã cho và trong một số trường hợp hãy sử dụng khai triển thu được để tính tổng của chuỗi số:

1. $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$. (ĐS. $\dfrac{\pi}{2} - \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin nx}{n}$)

2. $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 3x & \text{nếu } 2 < x < 4. \end{cases}$

$$\text{(ĐS.}\quad \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2}\Big[\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2} + \dots\Big] - \frac{6}{\pi}\Big[\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \dots\Big]\text{)}$$

3. $f(x) = e^{-x}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

$$\text{(ĐS.}\quad e^{-x} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx + n\sin nx)\Big]\text{)}$$

4. $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi)$. Tính tổng các chuỗi số $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ và $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$.

(ĐS. $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n^2}$. Thay $x_0 = 0$, ta thu được

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.\ \text{Thay } x = \pi \text{ thu được } \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\text{)}$$

5. $f(x) = x^2$, $x \in (0, \pi)$, $f(x) = f(x + pi)$.

$$\text{(ĐS.}\quad \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geqslant 1}\Big(\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \frac{\pi}{n}\sin 2nx\Big)\text{)}$$

6. $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$, $x \in (0, 2\pi]$, $f(x) = f(x + 2\pi)$.

$$(\text{ĐS.}\quad \cos\frac{x}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{n\sin nx}{(2n-1)(2n+1)})$$

7. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -3 < x \leqslant 2 \\ x & \text{nếu } 0 < x < 3. \end{cases}$ Tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

$$(\text{ĐS. } \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)nx}{3} - \frac{3}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3},$$

tổng của chuỗi bằng $\dfrac{\pi^2}{8}$ với $x_0 = 0$)

8. $f(x) = x\sin x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

$$(\text{ĐS.}\quad 1 - \frac{\cos x}{2} + 2\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1})$$

Hãy khai triển các hàm sau đây thành chuỗi Fourier theo các hàm sin hoặc hàm cosin

9. $f(x) = x\cos x$, $x \in (0, \pi)$. Tính tổng chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}$.

(ĐS. 1) $x\cos x = -\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{\pi}{2}\cos x - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\cos 2nx.$

2) $x\cos x = -\dfrac{\sin x}{x} + 2\sum\limits_{n\geqslant 2}(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}\sin nx,\ 0 \leqslant x < \pi.$

3) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{4n^2+1}{(4n^2-1)} = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{1}{2}$ (thế $x = 0$ vào 1))

10. $f(x) = x(\pi - x)$, $0 \leqslant x < \pi$, $f(x) = f(x + \pi)$.

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geqslant 1}\cos\frac{2nx}{n^2})$$

11. $f(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Tính $S = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$.

(ĐS. $\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n \geqslant 1}(-1)^n \dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$; $S = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ khi $x_0 = 0$)

12. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu } 1 < x \leqslant \pi. \end{cases}$ Tính

$$\sigma_1 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin n}{n}; \qquad \sigma_2 = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$$

(ĐS. $\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\sin n}{n} \cos nx\right], \sigma_1 = \dfrac{\pi - 1}{2}$;

khi $x_0 = 0$; $\sigma_2 = -\dfrac{1}{2}$ với $x = \pi$)

13. $f(x) = |\cos x|$. Tính

$$S_1 = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{4n^2-1} \quad \text{và} \quad S_2 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}.$$

(ĐS. $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx$;

$S_1 = \dfrac{\pi - 2}{4}$ khi $x_0 = 0$, $S_2 = \dfrac{1}{2}$ khi $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$)

14. $f(x) = |\sin x|$, $x \in [-\pi, \pi]$. Tính $S = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

(ĐS. $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}$, $S = \dfrac{1}{2}$ khi $x_0 = 0$)

15. $f(x) = \mathrm{sign}(\sin x)$. Tính $S = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

(ĐS. $\dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \dfrac{\pi}{4}$ với $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$)

16. $f(x) = x - [x] = \{x\}$ - phần thập phân của số x.

$$(\text{ĐS.}\quad \{x\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin 2n\pi x}{n})$$

17. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{\pi} & \text{nếu } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{5\pi}{12} + \sum_{n\geqslant 1}\Big\{\frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\Big\})$$

18. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}x & \text{khi } 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$

$$(\text{ĐS.}\quad \frac{1}{4} + \sum_{n\geqslant 1}\Big[-\frac{2}{\pi^2(2n-1)^3}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big])$$

19. $f(x) = x$, $x \in [3, 5]$. (ĐS. $4 + \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin n\pi x$)

Chỉ dẫn. Ta hiểu khai triển Fourier của hàm $f(x) = x$ trên khoảng $(3, 5)$ là khai triển Fourier của hàm tuần hoàn với chu kỳ $2\ell = 5-3 = 2$ trùng với hàm $f(x)$ trên khoảng $(3, 5)$.

20. $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$, $x \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

$$(\text{ĐS.}\quad -\frac{2}{5\pi} + \sin 2x + \frac{20}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{4n^2 - 25}\cos 2nx)$$

21. $f(x) = x\sin 2x$, $x \in \Big[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\Big]$.

$$(\text{ĐS.}\frac{1}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2 - 1}\cos 4nx)$$

22. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

(ĐS. $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin x - \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx$)

23. $f(x) = \begin{cases} 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant |x| \leqslant \pi \\ \cos x, & |x| < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

(ĐS. $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\cos x - \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx$)

24. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ -\cos x, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$ trên đoạn $[0, \pi]$.

(ĐS. $\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$)

25. Giả sử $S_n(f,x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi Fourier của hàm 2π-tuần hoàn $f(x)$. Chứng minh rằng

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\dfrac{t-x}{2}}dt.$$

Chỉ dẫn. Sử dụng các công thức tính hệ số Fourier của hàm $f(x)$ và hệ thức

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cdot$$

Chương 14

Phương trình vi phân

14.1 Phương trình vi phân cấp 1

Trong mục này ta xét các phương trình vi phân thường cấp 1, tức là phương trình dạng $F(x, y, y') = 0$ hoặc dưới dạng giải được với y' là $y' = f(x, y)$.

Hàm khả vi $y = \varphi(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân nếu khi thay nó cho ẩn hàm của phương trình ta sẽ thu được đồng nhất thức.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 1: $y' = f(x, y)$ trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ là hàm $y = \varphi(x, C)$ thỏa mãn các tính chất sau:

1^+ Nó là nghiệm của phương trình đã cho $\forall C$ thuộc tập hợp nào đó;

2^+ Với mọi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ sao cho $(x_0, y_0) \in D$ chỉ có một giá trị duy nhất $C = C_0$ làm cho nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho.

Mọi nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ ứng với giá trị cụ thể $C = C_0$ được gọi là *nghiệm riêng.*

Bài toán tìm nghiệm riêng của phương trình $y' = f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ được gọi là bài toán Cauchy.

Tuy nhiên, ta còn gặp những phương trình vi phân có các nghiệm không thể thu được từ nghiệm tổng quát với bất cứ giá trị C nào. Nghiệm như vậy gọi là *nghiệm kỳ dị (bất thường!)* Chẳng hạn phương trình $y' = \sqrt{1 - y^2}$ có nghiệm tổng quát $y = \sin(x + C)$ và hàm $y = 1$ cũng là nghiệm nhưng không thể thu được từ nghiệm tổng quát với bất cứ giá trị C nào. Đó là nghiệm kỳ dị.

14.1.1 Phương trình tách biến

Phương trình vi phân cấp 1 dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

được gọi là *phương trình tách biến* nếu các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ phân tích được thành tích các thừa số mà mỗi thừa số chỉ phụ thuộc vào một biến:

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \tag{14.1}$$

Để tích phân phương trình này ta cần chia 2 vế của phương trình (14.1) cho $f_2(y)\varphi_1(x) \neq 0$ và thu được

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0 \tag{14.2}$$

và từ đó thu được tích phân tổng quát

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_1(y)}dy = C. \tag{14.3}$$

Trong phép chia để có (14.2), có thể làm mất nghiệm của các phương trình $f_1(y) = 0$ và $\varphi_1(x) = 0$. Do vậy để thu được toàn bộ nghiệm của (14.1) ta cần hợp nhất vào (14.3) các không điểm của hàm $f_1(y)$ và $\varphi_1(x)$.

Nhận xét. Phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

trong đó $f(ax+by)$ hàm liên tục, có thể đưa về phương trình tách biến

$$[a + bf(t)]dx - dt = 0$$

bởi phép đổi biến $t = ax + by$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

Giải. Đó là phương trình dạng (14.1). Chia hai vế cho tích $x\sqrt{y^2+1}$ ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad x \neq 0$$

và từ đó

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} + C \Rightarrow \ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C.$$

Như vậy, mọi nghiệm của phương trình đã cho là

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C, \quad \text{và} \quad x = 0. \ \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

Giải. Đầu tiên ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình. Ta có

$$(x^2-1)dy + 2xy^2dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2-1} = 0.$$

Từ đó thu được

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C. \tag{14.4}$$

Do vậy mọi nghiệm của phương trình đã cho là

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C, \quad \text{và} \quad y = 0.$$

Từ tập hợp mọi đường cong tích phân thu được ta tìm đường cong qua điểm $(0,1)$. Thay $x = 0$ và $y = 1$ vào (14.4) ta có $C = -1$. Như vậy hàm

$$y = \frac{1}{1+\ln|x^2-1|}$$

là nghiệm của bài toán Cauchy đã cho. ▲

Ví dụ 3. Giải phương trình $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

Giải. Ta có

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow ydy = \frac{e^x dx}{1+e^x} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C. \quad (14.5)$$

Thay $x = 0$ và $y = 1$ vào (14.5) ta thu được nghiệm riêng

$$y^2 = 1 + \ln\Big(\frac{1+e^x}{2}\Big)^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1+\ln\Big(\frac{1+e^x}{2}\Big)^2}.$$

Từ điều kiện ban đầu suy rằng $y > 0$ ($y\big|_{x=0} = 1 > 0$) do vậy trước dấu căn ta lấy dấu +. Như vậy nghiệm riêng cần tìm là

$$y = \sqrt{1+\ln\Big(\frac{1+e^x}{2}\Big)^2}. \quad ▲$$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y).$$

Giải. Áp dụng nhận xét đã nêu, ta đặt $z = x + y$. Khi đó ta có

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

và từ đó phương trình đã cho có dạng

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \cos z \Rightarrow \frac{dz}{1+\cos z} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{1+\cos z} = \int dx + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{2\cos^2\frac{z}{2}} = x + C \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{z}{2} = x + C \Rightarrow z = 2[\mathrm{arctg}(x+C) + n\pi].$$

Vì khi giải phương trình ta đã chia hai vế cho $1 + \cos z$. Do vậy, cần kiểm tra xem có mất nghiệm hay không. Vì $1 + \cos z = 0 \Leftrightarrow z_n = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Thế z_n vào phương trình ta thấy z_n là nghiệm của phương trình đã cho. Trở về biến cũ ta có nghiệm:

$$y = -x + 2\mathrm{arctg}(x+C) + 2n\pi,$$

và

$$y = -x + (2n+1)\pi. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$. (ĐS. $\text{arctg}x + \text{arctg}y = C$)

2. $(1+y^2)dx + xydy = 0$. (ĐS. $x^2(1+y^2) = C$)

3. $(1+y^2)dx = xdy$. (ĐS. $y = \text{tg}\ln Cx$)

4. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$. (ĐS. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$)

5. $e^{-y}(1+y') = 1$. (ĐS. $e^x = C(1-e^{-y})$)

6. $y' = a^{x+y}$ $(0 < a \neq 1)$. (ĐS. $a^x + a^{-y} = C$)

7. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$. (ĐS. $1 + e^y = C(1+x^2)$)

8. $y^2\sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$. (ĐS. $(1 + Cy + \ln y)\cos x$)

9. $e^x\sin^3 y + (1+e^{2x})\cos y \cdot y'$. (ĐS. $\text{arctg}e^x = \dfrac{1}{2\sin^2 y} + C$)

10. $y' = \sin(x-y)$. (ĐS. $x + C = \text{cotg}\Big(\dfrac{y-x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\Big)$)

11. $y' = \cos(y-x)$. (ĐS. $x - \text{cotg}\dfrac{y-x}{2} = C$, $y - x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

12. $y - y' = 2x - 3$. (ĐS. $y = 1 - 2x + Ce^x$)
Chỉ dẫn. Đổi biến $z = y + 2x - 3$.

13. $(x+1)^3dy - (y-2)^2dx = 0$. (ĐS. $-\dfrac{1}{y-2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2} = C$)

14. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$. (ĐS. $2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C$)

15. $2^{x+y} + 3^{x-2y}y' = 0$. (ĐS. $\dfrac{\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^x}{\ln\dfrac{2}{3}} - \dfrac{18^{-y}}{\ln 18} = C$)

16. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$. (ĐS. $x - y + \ln|xy| = C$)

17. $yy' + x = 1$. (ĐS. $(x-1)^2 + y^2 = C^2$)

18. $1 + (1 + y')e^y = 0$. (ĐS. $(e^y + 1)e^x = C$)

19. $y' = \dfrac{1}{2}\big[\cos(x - y) - \cos(x + y)\big]$.
(ĐS. $y = 2\big[\mathrm{arctg}(C_1 e^{-\cos x} + n\pi\big]$)

20. $3e^x \mathrm{tg} y dx + (2 - e^x)\dfrac{dy}{\cos^2 y} = 0$. (ĐS. $\mathrm{tg} y - C(2 - e^x)^3 = 0$)

Tìm nghiệm riêng của các phương trình thỏa mãn các điều kiện ban đầu đã chỉ ra.

21. $ydx + \mathrm{cotg} x dy = 0$, $y\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big) = -1$. (ĐS. $y = -2\cos x$)

22. $y^2 + x^2 y' = 0$, $y(-1) = 1$. (ĐS. $x + y = 0$)

23. $2(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 0$. (ĐS. $2e^{y^2} = e^x + 1$)

24. $xy' + y = y^2$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$. (ĐS. $4xy(1 - y) - 1 = 0$)

25. $y' \sin x = y \ln y$, a) $y\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = e$, b) $y\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1$.

$$(\text{ĐS.}\quad \text{a) } y = e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}},\ \text{b) } y \equiv 1)$$

26. $y' \sin x - y \cos x = 0$, $y\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1$. (ĐS. $y = \sin x$)

27. $y \ln y dx + x dy = 0$, $y(1) = 1$. (ĐS. $y = 1$)

28. $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$, $y(0) = 1$.

$$(\text{ĐS.}\quad \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1,\ y = 1)$$

29. $(2x + 1)dy + y^2 dx = 0$, $y(4) = 1$. (ĐS. $\ln\Big(\dfrac{2}{9}x + \dfrac{1}{9}\Big) = 2\Big(\dfrac{1}{y} - 1\Big)$)

30. $(1 + y^2)dx - xydy = 0$, $y(2) = 1$. (ĐS. $x^2 = 2 + 2y^2$)

31. $y' = (2y + 1)\mathrm{cotg} x$, $y\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{1}{2}$. (ĐS. $y = 2\sin^2 x - \dfrac{1}{2}$)

32. $y'\text{tg}x - y = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. (ĐS. $y = 2\sin x - 1$)

33. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin y dx$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$. (ĐS. $\cos x = \sqrt{2}\cos y$)

34. $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. (ĐS. $y = 1$)

35. $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0$, $y(\sqrt{8}) = 1$.

$$(\text{ĐS.} \quad 2\sqrt{1 + x^2} + \ln y^2 + y^2 = 7)$$

14.1.2 Phương trình đẳng cấp

1. Trước hết lưu ý rằng hàm $f(x, y)$ được gọi là *hàm đẳng cấp* cấp m đối với các biến của nó nếu nó thỏa mãn đồng nhất thức $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$.

Phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ được gọi là phương trình đẳng cấp đối với các biến x và y nếu hàm $f(x, y)$ là hàm đẳng cấp cấp 0 đối với các biến của nó.

Phương trình đẳng cấp luôn luôn có thể biểu diễn dưới dạng $\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Nhờ phép đổi biến

$$\boxed{u = \frac{y}{x}}$$

ta đưa được phương trình đẳng cấp về phương trình tách biến đã biết cách giải:

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Nếu $u = u_0$ là nghiệm của phương trình $\varphi(u) - u = 0$ thì phương trình đẳng cấp còn có nghiệm là $y = u_0 x$.

2. *Các phương trình đưa được về phương trình đẳng cấp*

i) Phương trình vi phân dạng

$$y = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big), \quad a_i = \text{const}, b_i = \text{const}, i = 1, 2. \tag{14.6}$$

có thể đưa được về phương trình đẳng cấp nếu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Để làm việc đó, ta đặt $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ và chọn α và β sao cho vế phải của phương trình (14.6) có dạng $f\Big(\dfrac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\Big)$. Nói cách khác α và β là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{aligned} &a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ &a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$\frac{dv}{du} = f\Big(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\Big)$$

rồi thay u bởi $x - \alpha$, thay v bởi $y - \beta$ ta thu được nghiệm tổng quát của (14.6).

ii) Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ thì $a_1x + b_1y = \lambda(a_2x + b_2y)$, $\lambda = \text{const}$. Trong trường hợp này phương trình (14.6) đưa được về phương trình tách biến bằng cách đặt $z = a_2x + b_2y$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x^2dy = (x^2 + y^2)dx$.

Giải. Chia hai vế của phương trình cho x^2dx ta thu được

$$2\frac{dy}{dx} = 1 + \Big(\frac{y}{x}\Big)^2.$$

Đặt $y = ux \Rightarrow y' = xu' + u$ và thu được

$$2xu' + 2u = 1 + u^2 \Rightarrow 2x\frac{dy}{dx} = u^2 - 2u + 1 \Rightarrow \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}\cdot$$

Tích phân phương trình này ta có

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln C \Rightarrow -\frac{2}{\dfrac{y}{x} - 1} = \ln Cx \Rightarrow \boxed{Cx = e^{-\frac{2x}{y-x}}}$$

Khi thực hiện việc chia cho x và $u - 1$ ta cần xem $x \neq 0$ và $u \neq 1$. Kiểm tra trực tiếp ta thấy $x = 0$ và $u = 1$ (tức là $y = x$) cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Vậy

$$Cx = e^{-\frac{2x}{y-x}}, \quad y = x, x = 0. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$xy' = y\Big(1 + \ln\frac{y}{x}\Big), \quad y(1) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Giải. Trong phương trình đẳng cấp $y' = \dfrac{y}{x}\Big(1+\ln\dfrac{y}{x}\Big)$ ta đặt $u = \dfrac{y}{x}$, $y' = u + xu'$. Ta thu được phương trình tách biến

$$\begin{aligned}
&u + x\frac{du}{dx} = u(1 + \ln u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = u\ln u\\
&\Rightarrow \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x} + \ln C \Rightarrow \ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C\\
&\quad\Rightarrow \ln u = Cx.
\end{aligned}$$

Thay u bởi $\dfrac{y}{x}$ ta có

$$\ln\frac{y}{x} = Cx \Rightarrow y = xe^{Cx}.$$

Đó là nghiệm tổng quát. Thay điều kiện ban đầu $y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ ta có $C = -\dfrac{1}{2}$ và do đó nghiệm riêng cần tìm là $y = xe^{-\frac{x}{2}}$. $\blacktriangle$

Ví dụ 3. Giải phương trình $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$.

Giải. Phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện $a_1b_2-a_2b_1=-2\neq 0$.

Ta tìm các số α và β bằng cách giải hệ

$$\left.\begin{aligned} x+y-2=0\\ x-y+4=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \alpha=x_0=-1, \beta=y_0=3.$$

Thực hiện phép đổi biến $x=u-1$, $y=v+3$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$(u+v)du+(u-v)dv=0. \tag{14.8}$$

Phương trình (14.8) là phương trình đẳng cấp. Đặt $v=zu$ ta thu được

$$\begin{aligned}
&(u+uz)du+(u-uz)(udz+zdu)=0,\\
&(1+2z-z^2)du+u(1-z)dz=0,\\
&\frac{du}{u}+\frac{1-z}{1+2z-z^2}dz=0,\\
&\ln|u|+\frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|=\ln C
\end{aligned}$$

hay là

$$u^2(1+2z-z^2)=C.$$

Trở về biến cũ x và y ta có

$$(x+1)^2\Big[1+2\frac{y-3}{x+1}-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\Big]=C_1$$

hay là

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y=C.\ (C=C_1+14).\ \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0.$$

Giải. Rõ ràng là đối với phương trình đã cho ta có $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, tức là hệ

$$\left.\begin{aligned} x+y+1 &= 0 \\ 2x+2y-1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

vô nghiệm. Trong trường hợp này ta đặt

$$z = x+y, \quad dy = dz - dx$$

và

$$\begin{aligned} &(2-z)dx + (2z-1)dz = 0 \Rightarrow dx - \frac{2z-1}{z-2}dz = 0 \\ &\Rightarrow x - 2z - 3\ln|z-2| = C. \end{aligned}$$

Trở về biến cũ ta có $x + 2y + 3\ln|x+y-2| = C$. ▲

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $(x-y)dx + xdy = 0.$ (ĐS. $y = x(C - \ln x)$)

2. $xy' = y(\ln y - \ln x).$ (ĐS. $y = xe^{1+Cx}$)

3. $(x^2+y^2)dx - xydy = 0.$ (ĐS. $y^2 = x^2(\ln x - C)$)

4. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x.$ (ĐS. $\sin\frac{y}{x} + \ln x = C$)

5. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$ (ĐS. $\ln Cx = -e^{-\frac{y}{x}}$)

6. $xy' = y\ln\frac{x}{y}.$ (ĐS. $y = xe^{Cx+1}$)

7. $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)dx$. (ĐS. $(x-y)\ln Cx = x$)

8. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$. (ĐS. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$, $y = x$)

9. $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$. (ĐS. $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$)

10. $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$. (ĐS. $x^2 + 2xy - x^2 = C$)

11. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$. (ĐS. $y = xe^{Cx}$)

12. $y - xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$. (ĐS. $y = xe^{Cx}$)

13. $y - xy' = x + yy'$. (ĐS. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \ln C\sqrt{x^2 + y^2} = 0$)

14. $ydy + (x - 2y)dx$. (ĐS. $x = (y - x)\ln C(y - x)$)

15. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$. (ĐS. $\sqrt{x} + \sqrt{y}\ln Cy = 0$)

16. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$. (ĐS. $\sin\dfrac{y}{x} + \ln x = C$)

17. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$. (ĐS. $y = \dfrac{1}{2C}(x^2 - C^2)$)

18. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$. (ĐS. $x^2 + 2xy - y^2 = C$)

Giải các phượng trình vi phân đưa được về phương trình đẳng cấp sau

19. $y' = -\dfrac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}$. (ĐS. $\dfrac{y - x - 3}{(y + x + 1)^3} = C$)

20. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.
(ĐS. $x^2 - xy + y^2 - x - y = C$)

21. $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.
(ĐS. $10y - 5x + 7\ln(10x + 5y + 9) = C$)

22. $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.
(ĐS. $x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C$)

23. $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.
(ĐS. $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$)

24. $(x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0$.

(ĐS. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$)

Tìm nghiệm riêng của các phương trình đẳng cấp hoặc đưa được về đẳng cấp sau

25. $xdy - ydx = ydy$, $y(-1) = 1$. (ĐS. $x = -y(1 + \ln |y|)$)

26. $xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$, $y(1) = 1$. (ĐS. $x^2 + y^2(\ln y^2 - 1) = 0$)

27. $xy' - y = x\mathrm{tg}\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$. (ĐS. $y = x\arcsin x$)

28. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $y(1) = 1$. (ĐS. $x^2 + 2x + y^2 = 0$)

14.1.3 Phương trình tuyến tính

Phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{14.9}$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những hàm liên tục, được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Tính chất tuyến tính ở đây có nghĩa là ẩn hàm y và đạo hàm y' của nó tham gia trong phương trình là tuyến tính, tức là có bậc bằng 1.

Nếu $Q(x) \equiv 0$ thì (14.9) được gọi là phương trình tuyến tính *thuần nhất* cấp 1. Nếu $Q(x) \not\equiv 0$ thì (14.9) được gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

Phương pháp giải. Hai phương pháp thường được sử dụng là

1^+ **Phương pháp biến thiên hằng số.**

Đầu tiên tìm nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \tag{14.10}$$

Sau đó trong công thức nghiệm tổng quát của (14.10) ta xem hằng số C là hàm khả vi của x: $C = C(x)$. Ta thu được hàm $C = C(x)$ từ phương trình vi phân tách biến sau khi thế nghiệm tổng quát của (14.10) vào (14.9). Phương pháp vừa nêu gọi là phương pháp Lagrange.

2^+ **Phương pháp đổi biến** còn gọi là phương pháp Bernoulli.

Để giải (14.9) ta tìm hàm y dưới dạng tích của hai hàm chưa biết của x: $y = u(x)v(x)$. Thế y vào (14.9) ta có

$$v[u' + P(x)u] + v'u = Q(x). \tag{14.11}$$

Vì y là tích của hai hàm nên một trong hai có thể chọn tùy ý, còn hàm kia được xác định bởi (14.11). Thông thường ta chọn $u(x)$ sao cho biểu thức trong dấu ngoặc vuông bằng 0, tức là $u' + P(x)u = 0$. Để có điều đó ta chỉ cần lấy $u(x)$ là nghiệm riêng của phương trình $u' + P(x)u = 0$. Giải phương trình này ta thu được $u(x)$. Thế $u(x)$ vào (14.11) ta có

$$v'u = Q(x)$$

và thu được nghiệm tổng quát $v = v(x, C)$. Như vậy $y = u(x)v(x, C)$ là nghiệm tổng quát của (14.9).

Trong nhiều trường hợp phương trình vi phân cấp 1 không tuyến tính đối với y mà là tuyến tính đối với x, tức là phương trình có thể đưa về dạng

$$\frac{dx}{dy} + F(y)x = R(y). \tag{14.12}$$

Việc giải phương trình (14.12) tương tự như giải phương trình (14.9) với chú ý là: y là đối số, $x = x(y)$ là ẩn hàm.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $y' + 3y = e^{2x}$.

Giải. Ta sẽ giải phương trình đã cho bằng phương pháp biến thiên hằng số.

Đầu tiên giải phương trình thuần nhất

$$y' + 3y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -3dx.$$

Từ đó thu được:

$$\ln|y| = -3x + \ln|C_1| \Rightarrow y = \pm C_1 e^{-3x} = Ce^{-3x}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đã cho sẽ được tìm dưới dạng $y = C(x)e^{-3x}$. Lấy đạo hàm y' rồi thế các biểu thức của y và y' vào phương trình đã cho ta có

$$C'(x)e^{-3x} = e^{2x} \Rightarrow C'(x) = e^{5x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_2$$

trong đó C_2 là hằng số tùy ý. Từ đó thu được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C(x)e^{-3x} = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C_2\right) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_2e^{-3x}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Giải phương trình trong ví dụ 1 bằng phương pháp đổi biến.

Giải. Đặt $y = uv$. Khi đó $y' = u'v + v'u$. Thay vào phương trình ta thu được

$$u'v + uv' + 3uv = e^{2x} \Rightarrow u[v' + 3v] + u'v = e^{2x}. \qquad (14.13)$$

Từ đó ta có hai phương trình để tìm u và v:

$$v' + 3v = 0, \qquad (14.14)$$

$$vu' = e^{2x}. \qquad (14.15)$$

Từ (14.14) suy ra

$$\frac{dv}{3v} = -dx \Rightarrow v = e^{-3x}.$$

Thế $v = e^{-3x}$ vào (14.15) ta được

$$e^{-3x}u' = e^{2x} \to u' = e^{5x} \Rightarrow u = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

và do đó

$$y = e^{-3x}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right) = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}.$$

Rõ ràng là cả hai cách giải đều cho một kết quả. ▲

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + a\sin 2y}\cdot \tag{14.16}$$

Giải. Phương trình đã cho không phải là phương trình tuyến tính đối với y. Tuy nhiên, bằng phép biến đổi đơn giản ta biến đổi nó về phương trình tuyến tính đối với x và x':

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = a\sin 2y.$$

Đặt $x = u(y)v(y) \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = u\dfrac{dv}{dy} + v\dfrac{du}{dy}$. Thế x vào phương trình vừa thu được ta có hai phương trình để xác định u và v

$$\frac{du}{dy} - u\cos y = 0, \tag{14.17}$$

$$u\frac{dv}{dy} = a\sin 2y. \tag{14.18}$$

Giải phương trình (14.17) ta thu được $u = e^{\sin y}$. Thế kết quả này vào (14.18) để tìm v. Ta có

$$\begin{aligned}
e^{\sin y}\frac{dv}{dy} &= a\sin 2y\\
v(y) &= 2a\int \sin y\cos y e^{-\sin y}dy + C\\
&= -2a(\sin y + 1)e^{-\sin y} + C.
\end{aligned}$$

Từ đó thu được nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned} x(y) = u \cdot v &= e^{\sin y}\big[-2a(\sin y + 1)e^{-\sin y} + C\big] \\ &= -2a(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Giải bài toán Cauchy

$$x(x-1)y + y = x^2(2x-1), \quad y(2) = 4.$$

Giải. Tìm nghiệm tổng quát dưới dạng

$$y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u.$$

Thế y và y' vào phương trình đã cho ta sẽ có hai phương trình để xác định $u(x)$ và $v(x)$:

$$x(x-1)v' + v = 0, \tag{14.19}$$

$$x(x-1)vu' = x^2(2x-1). \tag{14.20}$$

Giải (14.19) ta thu được $v = \dfrac{x}{x-1}$. Thế vào (14.20) ta có

$$u' = 2x - 1 \Rightarrow u(x) = x^2 - x + C.$$

Do đó nghiệm tổng quát có dạng

$$y = uv = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{Cx}{x-1} + x^2.$$

và sử dụng điều kiện ban đầu ta thu được

$$4 = C \cdot \frac{2}{2-1} + 2^2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = x^2.$$

Như vậy nghiệm của bài toán Cauchy là $y = x^2$. $\blacktriangle$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $y' - y = e^x$. (ĐS. $y = (x + C)e^x$)

2. $y' + 2y = e^{-x}$. (ĐS. $y = Ce^{-2x} + e^{-x}$)

3. $y' = x + y$. (ĐS. $y = Ce^x - x - 1$)

4. $y' + x^2y = x^2$. (ĐS. $y = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}}$)

5. $xy' + y = 3$. (ĐS. $y = 3 + \dfrac{C}{x}$)

6. $xy' + y = e^x$. (ĐS. $y = \dfrac{e^x + C}{x}$)

7. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. (ĐS. $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$)

8. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. (ĐS. $y = (x + C)e^{x^2}$)

9. $y' + 2xy = e^{-x^2}$. (ĐS. $y = (x + C)e^{-x^2}$)

10. $y' + y = \cos x$. (ĐS. $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$)

11. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$. (ĐS. $y = \dfrac{C - \cos 2x}{2\cos x}$)

12. $xy' - 2y = x^3 \cos x$. (ĐS. $y = Cx^2 + x^2 \sin x$)

13. $xy' + y = \ln x + 1$. (ĐS. $y = \ln x + \dfrac{C}{x}$)

14. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$. (ĐS. $y = \dfrac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$)

15. $y' - y\mathrm{tg}x = \mathrm{cotg}x$. (ĐS. $y = 1 + \dfrac{\ln C\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{\cos x}$)

16. $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$. (ĐS. $y = (C + x^3) \ln x$)

17. $y' + y \cos x = \sin 2x$. (ĐS. $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$)

18. $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^x(x - 2)}{x}$. (ĐS. $y = Cx^2 + e^x$)

19. $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$. (ĐS. $y = e^{-x^2}\Big(\dfrac{2x^3}{3} + C\Big)$)

Giải các phương trình tuyến tính đối với x sau đây

20. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$. (ĐS. $x = \dfrac{C}{y} + y\ln y$)

21. $(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy)dy - dx = 0$. (ĐS. $x = (C + y)e^{-\frac{y^2}{2}}$)

22. $(\sin^2 y + x\text{cotg}y)y' = 1$. (ĐS. $x = (-\cos y + C)\sin y$)

23. $(x + y^2)dy = ydx$. (ĐS. $x = Cy + y^2$, $y = 0$)

24. $(2e^y - x)y' = 1$. (ĐS. $x = Ce^{-y} + e^y$)

25. $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$. (ĐS. $x = \dfrac{1}{2}y^2 + Cy^3$)

26. $y = xy' + y'\ln y$. (ĐS. $x = Cy - 1 - \ln y$)

27. $(x^2\ln y - x)y' = y$. (ĐS. $x = \dfrac{1}{\ln y + 1 - Cy}$)

28. $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$. (ĐS. $x = Cy^2 - \dfrac{1}{y}$)

29. $(y^4 + 2x)y' = y$. (ĐS. $x = Cy^2 + \dfrac{y^4}{2}$)

30. $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$. (ĐS. $x = \dfrac{1}{y(y + C)}$)

31. $e^{-x}\dfrac{dy}{dx} - e^{-x} = e^y$. (ĐS. $e^{-y} = Ce^{-x} - \dfrac{1}{2}e^x$)

Chỉ dẫn. Đặt $z(x) = e^{-y}$.

32. $3dy + (1 + e^{x+3y})dx = 0$. (ĐS. $y = -\dfrac{1}{3}\ln(C + x) - \dfrac{x}{3}$)

Chỉ dẫn. Đặt $z(x) = e^{-3y}$.

Giải các bài toán Cauchy sau

33. $ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0$. $y\Big(-\dfrac{1}{3}\Big) = 1$.

(ĐS. $x = \dfrac{y^3 - 4}{9} - \dfrac{1}{3}\ln y$)

Chỉ dẫn. Xem x là ẩn hàm.

34. $x^2 + xy' = y$, $y(1) = 0$. (ĐS. $y = x - x^2$)

35. $y'\cos x - y\sin x = 2x$, $y(0) = 0$. (ĐS. $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$)

36. $y' - y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$, $y(0) = 0$. (ĐS. $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$)

37. $y' + y\cos x = \cos x$, $y(0) = 1$. (ĐS. $y = 1$)

38. $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$, $y(2) = 0$. (ĐS. $-e^{-x}\ln|1-x|$)

39. $y' + 3y\mathrm{tg}3x = \sin 6x$, $y(0) = \dfrac{1}{3}$. (ĐS. $y = \cos 3x[1 - \dfrac{2}{3}\cos 3x]$)

40. $y'\sin x - y\cos x = 1$; $y\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0$. (ĐS. $y = -\cos x$)

41. $y' - y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$. (ĐS. $y = \dfrac{x}{\cos x} + 1$)

42. $y' + x^2 y = x^2$, $y(2) = 1$. (ĐS. $y = 1$)

43. $y' - y\dfrac{1}{\sin x\cos x} = -\dfrac{1}{\sin x} - \sin x$, $y\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(ĐS. $\mathrm{tg}x + \cos x$)

44. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, $y(0) = 1$. (ĐS. $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$)

14.1.4 Phương trình Bernoulli

Phương trình dạng

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha = \mathrm{const}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \tag{14.21}$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những hàm liên tục, được gọi là phương trình Bernoolli.

Cũng giống như phương trình tuyến tính, phương trình Bernoulli được giải nhờ phương pháp

a) đổi biến $y = u(x)v(x)$,

b) biến thiên hằng số tùy ý.

Phương trình (14.21) có thể đưa về phương trình tuyến tính bởi phép đổi biến

$$\boxed{z = y^{1-\alpha}}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.

Giải. Chia hai vế cho x^2y^2:

$$y' + \frac{y}{x} = y^{-2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \tag{14.22}$$

Đó là phương trình Bernolli. Thay $y = uv$ vào (14.22) ta có:

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2u^2v^2},$$
$$\Rightarrow u'v + u\Big(v' + \frac{v}{x}\Big) = \frac{1}{x^2u^2v^2} \cdot$$

Từ đó để tìm u và v ta có hai phương trình

$$1)\quad v' + \frac{v}{x} = 0; \qquad 2)\quad vu' = \frac{1}{x^2u^2v^2} \cdot$$

Phương trình 1) cho ta nghiệm $v = \dfrac{1}{x}$ và từ đó

$$\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2} \Rightarrow u^2u' = x \Rightarrow u^2du = xdx$$
$$\Rightarrow \frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C}.$$

Do vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng

$$y = uv = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}. \ \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $y' - 2xy = 3x^3y^2$.

Giải. Đó là phương trình Bernolli. Chia hai vế của phương trình cho y^2:

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3.$$

Đặt $z = y^{-1} \to -y^{-2}y' = z'$. Do đó

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Giải phương trình này ta thu được

$$z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2$$

và do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Giải phương trình $xy' + y = y^2 \ln x$.

Giải. Phương trình đã cho là phương trình Bertnoulli. Ta sẽ bằng phương pháp biến thiên hằng số.

1^+ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = \dfrac{C}{x}$.

2^+ Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất sẽ được tìm dưới dạng $y = \dfrac{C(x)}{x}$, trong đó $C(x)$ là hàm mới chưa biết. Thay $y = \dfrac{C(x)}{x}$ vào phương trình đã cho ta thu được

$$C'(x) = C^2(x)\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{dC}{C^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{C(x)} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \Rightarrow C(x) = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}$$

và do đó nghiệm tổng quát của nó là

$$y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}\cdot \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình Bernoulli sau

1. $y' + 2xy = 2xy^2$. (ĐS. $y = \dfrac{1}{1 + Ce^{x^2}}$)

2. $3xy^2y' - 2y^3 = x^3$. (ĐS. $y^3 = x^3 + Cx^2$)

3. $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$. (ĐS. $x^3 e^{-y} = C + y$)

4. $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$. (ĐS. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{C - x}$)

5. $y' - y\cos x = y^2 \cos x$. (ĐS. $y = \dfrac{1}{Ce^{-\sin x} - 1}$)

6. $2y' \sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x$. (ĐS. $y^2(C - x)\sin x = 1$)

Sử dụng phép đổi biến đưa các phương trình phi tuyến sau đây về phương trình tuyến tính hoặc phương trình Bernoulli. Giải các phương trình đó.

7. $y' - \text{tg}y = e^x \dfrac{1}{\cos y}$. (ĐS. $\sin y = (x + C)e^x$.

Chỉ dẫn. Đặt $z = \sin y$.

8. $y' = y(e^x + \ln y)$. (ĐS. $\ln y = (x + C)e^x$)

Chỉ dẫn. Đặt $z = \ln y$.

9. $y' \cos y + \sin y = x + 1$. (ĐS. $\sin y = x + Ce^{-x}$)

Chỉ dẫn. Đặt $z = \sin y$.

10. $yy' + 1 = (x - 1)e^{-\frac{y^2}{2}}$. (ĐS. $x - 2 + Ce^{-x} = e^{\frac{y^2}{2}}$)

Chỉ dẫn. Đặt $z = e^{\frac{y^2}{2}}$

11. $y' + x\sin 2y = 2xe^{-x^2}\cos^2 y$. (ĐS. $\text{tg}y = (C + x^2)e^{-x^2}$)

Chỉ dẫn. Đặt $z = \text{tg}y$.

14.1.5 Phương trình vi phân toàn phần

I. Nếu trong phương trình vi phân cấp 1

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{14.23}$$

các hệ số P và Q thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{14.24}$$

thì vế trái của nó là vi phân toàn phần của hàm $V(x,y)$ nào đó và trong trường hợp này phương trình (14.23) được gọi là *phương trình vi phân toàn phần* (ptvptp) và

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dV(x,y) = 0 \tag{14.25}$$

Phương trình (14.23) là ptvptp khi và chỉ khi các hàm P, Q, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ liên tục trong miền đơn liên $D \subset \mathbb{R}^2$ và thỏa mãn điều kiện (14.24).

Nếu $dV(x,y) = 0$ thì nghiệm tổng quát của (14.25) có dạng

$$V(x,y) = C,$$

trong đó C là hằng số tùy ý và được tìm theo các phương pháp sau.

1^+ Tích phân biểu thức $dV(x,y)$ theo đường $\mathcal{L}(A,M) \subset D$ bất kỳ giữa hai điểm $A(x_0,y_0)$ và $M(x,y)$ và thu được nghiệm của ptvptp:

$$V(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = C.$$

Thông thường lấy $\mathcal{L}(A,M)$ là đường gấp khúc với các cạnh song song với trục tọa độ $A(x_0,y_0)$, $B(x,y_0)$, $M(x,y)$):

$$V(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C.$$

2^+ Vì $dV(x,y) = d_xV(x,y) + d_yV(x,y)$, trong đó d_xV và d_yV là các vi phân riêng của $V(x,y)$ nên bằng cách tích phân riêng biệt mỗi biểu thức đó, ta có $V(x,y)$ biểu diễn bởi hai dạng sau

1) $V(x,y) = \int Pdx + \varphi(y)$, xem y là không đổi,

2) $V(x,y) = \int Qdy + \psi(x)$, xem x không đổi.

Đến đây, hoặc xuất phát từ 1) ta tìm $\varphi(y)$ dựa vào điều kiện là

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \Big(\int P dx\Big)'_y + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

và từ đó thu được $\varphi(y)$.

Hoặc tìm $\psi(x)$ dựa vào điều kiện là

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow \Big(\int Q dy\Big)'_x + \psi'(x) = P(x,y)$$

và từ đó thu được $\psi(x)$.

II. *Thừa số tích phân*

Nếu phương trình (14.23) không là ptvptp nhưng tồn tại hàm $\mu = \mu(x,y) \not\equiv 0$ sao cho sau khi nhân hai vế của (14.23) với μ mà phương trình thu được trong kết quả là ptvptp thì hàm $\mu(x,y)$ được gọi là *thừa số tích phân*. Ta chỉ *hạn chế* xét hai trường hợp sau.

1^+ Nếu $\Big(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\Big)/Q$ là hàm chỉ của biến x thì phương trình (14.23) có thừa số tích phân $\mu = \mu(x)$ chỉ phụ thuộc x và được xác định bởi phương trình

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\cdot \tag{14.26}$$

2^+ Tương tự nếu $\Big(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\Big)/P$ là hàm chỉ của biến y thì (14.23) có thừa số tích phân $\mu = \mu(y)$ chỉ phụ thuộc y và được tìm từ phương trình

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}\cdot \tag{14.27}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Giải. Ở đây $P = x + y + 1$, $Q = x - y^2 + 3$. Vì

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

nên vế trái của phương trình đã cho là vi phân toàn phần của hàm $V(x, y)$ nào đó và

$$\begin{aligned} &1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = x + y + 1, \\ &2) \quad \frac{\partial V}{\partial y} = x - y^2 + 3. \end{aligned}$$

Từ 1) thu được

$$\begin{aligned} V &= \int P(x, y)dx + \varphi(y) = \int (x + y + 1)dx + \varphi(y) \\ &= \frac{x^2}{2} + yx + x + \varphi(y). \end{aligned} \tag{*}$$

Để tìm $\varphi(y)$ ta cần sử dụng 2) và kết quả vừa thu được

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x^2}{2} + yx + x + \varphi(y)\Big) = x - y^2 + 3 \Rightarrow \varphi'(y) = -y^2 + 3$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \int (-y^2 + 3)dy \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Thế biểu thức $\varphi(y)$ vào (*) ta thu được

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Phương trình đã cho có dạng $dV(x., y) = 0$ và nghiệm tổng quát của nó được xác định bởi phương trình

$$V(x, y) = C_2 \quad \text{hay} \quad \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1 = C_2.$$

Đặt $6(C_2 - C_1) = C$ - hằng số tùy ý và thu được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$(1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2+y^2})ydy = 0.$$

Giải. Dễ kiểm tra rằng phương trình đã cho là ptvptp. Thật vậy vì $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ liên tục khắp nơi trong mặt phẳng nên phương trình đã cho là ptvptp. Nghiệm tổng quát của nó có thể viết dưới dạng tích phân đường

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [Pdx + Qdy] = C.$$

Chọn đường tích phân là đường gấp khúc có các cạnh song song với trục tọa độ MNK, trong đó $M(x_0, y_0)$, $K(x, y_0)$, $N(x, y)$ và thu được

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t)dt = C.$$

Trong trường hợp này ta chọn $M(0; 1)$ và có

$$P(x, 1) = 1 + x\sqrt{x^2+1}; \quad Q(x, y) = (-1 + \sqrt{x^2+y^2})y.$$

Do đó tích phân tổng quát có dạng

$$\int\limits_{0}^{x} [1 + t\sqrt{t^2+1}]dt + \int\limits_{1}^{y} [-1 + \sqrt{x^2+t^2}]tdt = C$$

hay là

$$x + \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} - \frac{y^2}{2} = C.$$

Nếu ta chọn M là điểm khác của mặt phẳng thì thu được kết quả khác kết quả trên bởi dạng của hằng số tùy ý. ▲

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$(x+y^2)dx - 2xydy = 0.$$

Giải. Ở đây $P = x + y^2$, $Q = -2xy$. Ta thấy ngay phương trình đã cho không là phương trình vi phân toàn phần. Ta có

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y+2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

và do vậy

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \ln\mu = -2\ln|x| \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}\cdot$$

Phương trình

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - 2\frac{xy}{x^2}dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Vế trái của nó có thể viết dưới dạng

$$\frac{dx}{x} - \frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0 \Rightarrow d\Big(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\Big) = 0.$$

Từ đó thu được tích phân tổng quát

$$x = Ce^{y^2/x}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0.$$

Giải. Ở đây $P = 2xy\ln y,\ \ Q = x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}$. Ta có

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{d\ln\mu}{dy} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \mu = \frac{1}{y}\cdot$$

Nhân $\mu = \dfrac{1}{y}$ với hai vế của phương trình đã cho ta thu được phương trình vi phân toàn phần

$$\frac{2xy\ln y dx}{y} + \frac{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy = 0$$

hay là

$$d(x^2\ln y) + y\sqrt{y^2+1}dy = 0 \Rightarrow x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} = C. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$. (ĐS. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$)

2. $3xe^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$. (ĐS. $x^3e^y - y = C$)

3. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$. (ĐS. $y + xe^{-y} = C$)

4. $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$. (ĐS. $x^2\cos^2 y + y^2 = C$)

5. $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$. (ĐS. $x^3 + 2xy - 3y = C$)

6. $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$.
(ĐS. $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$)

7. $(x\cos 2y + 1)dx - x^2\sin 2y dy = 0$. (ĐS. $\dfrac{x^2\cos 2y}{2} + x = C$)

8. $(3x^2e^y)dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$. (ĐS. $x^3e^y - y = C$)

9. $(2y - 3)dx + (2x + 3y^2)dy = 0$. (ĐS. $2xy - 3x + y^3 = C$)

10. $(x + \ln|y|)dx + \Big(1 + \dfrac{x}{y} + \sin y)dy = 0$.
(ĐS. $\dfrac{x^2}{2} + x\ln|y| + y - \cos y = C$)

11. $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3y dy = 0$. (ĐS. $x^3y^2 + 7x = C$)

12. $(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy$.

(ĐS. $xe^y + ye^x + 3x - 2y = C$)

13. $\sin(x+y)dx + x\cos(x+y)(dx+dy) = 0.$
(ĐS. $x\sin(x+y) = C$)

14. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0.$ (ĐS. $xe^{-y} + y = C$)

15. $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0.$
(ĐS. $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 4y = C$)

16. $(3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0.$
(ĐS. $6y + 12y^3 - 9x^2y^2 + 2x^3 = C$)

17. $(\ln y - 2x)dx + \Big(\dfrac{x}{y} - 2y\Big)dy = 0.$
(ĐS. $x\ln y - x^2 - y^2 = C$)

18. $\Big(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\Big)dx + \Big(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\Big)dy = 0.$
(ĐS. $\dfrac{\sin^2 x}{y} + \dfrac{x^2 + y^2}{2} = C$)

19. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0.$
(ĐS. $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$)

20. $\Big(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\Big)dx + \Big(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\Big)dy = 0.$
(ĐS. $x\sin y - y\cos x + \ln|xy| = C$)

Tìm thừa số tích phân để giải các phương trình

21. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0.$
(ĐS. $xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx$, $\mu = \dfrac{1}{x^2}$)

22. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$, $\mu = \mu(x).$
(ĐS. $x - \dfrac{y}{x} = C$, $\mu = -\dfrac{1}{x^2}$)

23. $(x + y^2) - 2xydy = 0$, $\mu = \mu(x).$
(ĐS. $x\ln|x| - y^2 = Cx$, $\mu = \dfrac{1}{x^2}$)

24. $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0.$

(ĐS. $5\text{arctg}x + 2xy = C$, $x = 0$, $\mu = \dfrac{1}{1+x^2}$)

25. $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$.

(ĐS. $y^3 + x^3(\ln x - 1) = C$, $x = 0$, $\mu = \dfrac{1}{x^4}$)

26. $(x + \sin x + siny)dx + \cos y dy = 0$.

(ĐS. $2e^x \sin y + 2e^x(x-1) + e^x(\sin x - \cos x) = C$, $\mu = e^x$)

27. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$.

(ĐS. $x^2 - \dfrac{7}{y} - 3xy = C$, $\mu = \dfrac{1}{y^2}$)

Giải các bài toán Cauchy sau

28. $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0$, $y(0) = 1$.

(ĐS. $x^2 + y + e^{xy} = 2$)

29. $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$, $y(0) = 0$.

(ĐS. $2y^2 + x^2\cos 2y + x^2 = 0$)

30. $3x^2e^y + (x^3e^y - 1)y' = 0$, $y(0) = 1$. (ĐS. $x^3e^y - y = -1$)

31. $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$, $y(1) = 1$. (ĐS. $y = x$)

14.1.6 Phương trình Lagrange và phương trình Clairaut

Phương trình vi phân dạng

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{14.28}$$

được gọi là phương trình Lagrange, trong đó $\varphi(y')$ và $\psi(y')$ là các hàm đã biết của y'.

Trong trường hợp khi $\varphi(y') = y'$ thì (14.28) có dạng

$$y = xy' + \psi(y') \tag{14.29}$$

và được gọi là phương trình Clairaut.

1^+ **Phương pháp giải phương trình Lagrange**

a) Giải phương trình (14.28) đối với y' (để tìm biểu thức y' qua x và y) nếu phép giải đó thực hiện được. Tiếp đến là giải phương trình vi phân $y' = f(x, y)$.

b) *Phương pháp đưa tham số.* Đưa vào tham số

$$\frac{dy}{dx} = p$$

và thu được hệ thức thứ nhất liên hệ x, y và tham số p:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{14.30}$$

Để có hệ thức thứ hai cần thiết để xác định x và y ta lấy đạo hàm hai vế của (14.30) rồi thay $\dfrac{dy}{dx} = p$ vào:

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}, \tag{14.31}$$

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \tag{14.32}$$

Đây là phương trình tuyến tính đối với ẩn hàm x. Giải (14.32) ta có $x = W(p, C)$. Như vậy nghiệm của phương trình Lagrange là

$$\begin{aligned} x &= W(p, C), \\ y &= x\varphi(p) + \psi(p). \end{aligned}$$

Nhận xét. Chú ý rằng khi chuyển từ (14.31) đến (14.32) ta cần chia cho $\dfrac{dp}{dx}$ và khi đó bị mất các nghiệm mà p là hằng số $\left(\dfrac{dp}{dx} = 0\right)$. Do đó nếu xem p không đổi thì (14.31) chỉ thỏa mãn khi p là nghiệm của phương trình

$$p - \varphi(p) = 0. \tag{14.33}$$

Do vậy phương trình Lagrange còn chứa nghiệm bất thường dạng

$$y = x\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

trong đó α là nghiệm của (14.33). Đó là phương trình đường thẳng.

2^+ **Phương pháp giải phương trình Clairaut**

Đặt $y' = p$ ta có

$$y = xp + \psi(p). \tag{14.34}$$

Lấy đạo hàm đẳng thức này theo x ta có

$$\begin{aligned} p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \to \\ \Rightarrow [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow p = \text{const} = C, & (14.35) \\ x + \psi'(p) = 0. & (14.36) \end{array} \right.$$

Trong trường hợp (14.35) từ (14.34) ta có

$$y = Cx + \psi C$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (14.29).

Trong trường hợp (14.36) nghiệm của phương trình Clairaut được xác định bởi

$$\left. \begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x &= -\psi'(p). \end{aligned} \right\} \tag{14.37}$$

Phương trình Clairaut có thể có nghiệm bất thường thu được bởi việc khử p từ (14.37).

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình $y = 2xy' + \ln y'$.

Giải. Đặt $y' = p \Rightarrow dy = pdx$ và $y = 2xp + \ln p$. Lấy đạo hàm ta có

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{dp}{p} \Rightarrow p\frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p}$$

hay là

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2} \Rightarrow x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}\cdot$$

Thay giá trị x vừa thu được vào biểu thức đối với y ta có

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p^2}, \quad y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2. \ \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Giải phương trình $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}$ $(a = \text{const})$.

Giải. Đặt $y' = p$ ta có

$$y = xp + \frac{a}{2p}\cdot$$

Lấy đạo hàm đẳng thức này rồi thay dy bởi pdx ta có

$$pdx = pdx + xdp - \frac{a}{2p^2}dp \Rightarrow \Big(x - \frac{a}{2p^2}\Big)dp = 0$$

a) $dp = 0 \Rightarrow p = \text{const} = C \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình là $y = Cx + \frac{a}{2C}$.

b) $x - \dfrac{a}{2p^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2p^2}$. Khử p từ hai phương trình $x = \dfrac{a}{2p^2}$ và $y = xp + \dfrac{a}{2p}$ ta có $y^2 = 2ax$. Đó là nghiệm bất thường. $\blacktriangle$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $y = 2xy' + \sin y'$.

(ĐS. $x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{\cos p}{p^2} - \dfrac{\sin p}{p}$, $y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{2\cos p}{p} - \sin p$, $y = 0$)

2. $y = x(1 + y') + y'^2$.

(ĐS. $x = 2(1-p) + Ce^{-p}$, $y = [2(1-p) + Ce^{-p}](1+p) + p^2$)

3. $y = xy'^2 - \dfrac{1}{y'}$.

(ĐS. $x = \dfrac{Cp^2 + 2p - 1}{2p^2(p-1)^2}$, $y = \dfrac{Cp^2 + 2p - 1}{2(p-1)^2} - \dfrac{1}{p}$.)

4. $y = xy' + \dfrac{a}{y'^2}$. (ĐS. $y = Cx + \dfrac{a}{C^2}$, $4y^3 = 27ax^2$)

5. $y = xy' + y'^2$. (ĐS. $y = Cx + C^2$, $y = -\dfrac{x^2}{4}$)

6. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$. (ĐS. $y = Cx - \dfrac{C-1}{C}$, $(y+1)^2 = 4x$)

7. $\sqrt{y'^2 + 1} + xy' - y = 0$.

$$\text{(ĐS.}\quad y = Cx + \sqrt{1 + C^2}\,, \quad \begin{cases} x &= -\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}\,, \\ y &= px + \sqrt{1+p^2}. \end{cases}\ )$$

8. $y' + y = xy'^2$. (ĐS. $x = \dfrac{p - \ln p + C}{(1-p)^2}$, $y = xp - p^2$)

14.2 Phương trình vi phân cấp cao

Phương trình vi phân cấp n là phương trình dạng

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (14.38)$$

hay (nếu nó giải được đối với đạo hàm $y^{(n)}$):

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{14.39}$$

Bài toán tìm nghiệm $y = \varphi(x)$ của phương trình (14.39) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{14.40}$$

được gọi là *bài toán Cauchy* đối với phương trình (14.39).

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp n (14.39) là tập hợp mọi nghiệm xác định bởi công thức $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ chứa n hằng số tùy ý $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sao cho nếu cho trước các điều kiện ban đầu (14.40) thì tìm được các hằng số $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ để $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_n)$ là nghiệm của phương trình (14.39) thỏa mãn các điều kiện (14.40).

Mọi nghiệm thu được từ nghiệm tổng quát với các giá trị cụ thể của các hằng số tùy ý $C_1, C_2, \ldots, C_n$ được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân (14.39).

Phương trình dạng $\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dưới dạng ẩn được gọi là *tích phân tổng quát của phương trình*.

14.2.1 Các phương trình cho phép hạ thấp cấp

Dạng I. Phương trình dạng $y^{(n)} = f(x)$.

Sau n lần tích phân ta thu được nghiệm tổng quát

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \cdots dx}_{n} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n.$$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y^{(3)} = \frac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 2.$$

Giải. Tích phân 3 lần phương trình đã cho ta có

$$\begin{aligned} y'' &= \int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1, \\ y' &= -\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x + C_1 x + C_2, \\ y &= -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Sử dụng các điều kiện ban đầu ta có

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 &= 1 \\ -1 + C_1 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = 3, C_2 = -2, C_3 = \frac{1}{2}\cdot$$

Từ đó suy ra nghiệm riêng cần tìm là

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\cdot \blacktriangle$$

Dạng II. Phương trình (14.38) không chứa ẩn hàm và đạo hàm đến cấp $k-1$:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Khi đó bằng cách đặt

$$y^{(k)} = p(x)$$

cấp của phương trình sẽ hạ xuống k đơn vị.

Ví dụ 2. Giải phương trình $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$.

Giải. Phương trình đã cho không chứa ẩn hàm và các đạo hàm đến cấp 3. Do đó ta đặt

$$y^{(4)} = p$$

và thu được

$$x\frac{dp}{dx} - p = 0 \Rightarrow p = C_1x \Rightarrow y^{(4)} = C_1x.$$

Tích phân liên tiếp ta có

$$\begin{aligned}
y^{(3)} &= C_1\frac{x^2}{2} + C_2,\\
y^{(2)} &= C_1\frac{x^3}{6} + C_2x + C_3,\\
y' &= C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4,\\
y &= C_1\frac{x^5}{120} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5\\
&= \overline{C}_1x^5 + \overline{C}_2x^3 + \overline{C}_3x^2 + C_4x + C_5;\\
\overline{C}_1 &= \frac{C_1}{120}, \quad \overline{C}_2 = \frac{C_2}{6}, \quad \overline{C}_3 = \frac{C_3}{2}\cdot \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

Dạng III. Phương trình (14.38) không chứa biến độc lập

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{14.41}$$

Khi đó bằng cách đặt

$$y' = p$$

(trong đó p được xem là hàm của $y : p = p(y)$) cấp của phương trình hạ xuống 1 đơn vị.

Để giải ta cần biểu diễn các đạo hàm $y', y'', \dots, y^{(n)}$ qua các đạo hàm của hàm $p = p(y)$. Ta có

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = p,\\
y'' &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},\\
y''' &= \frac{d}{dx}\Big(p\frac{dp}{dy}\Big) = \frac{d}{dy}\Big[p\frac{dp}{dy}\Big]\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\Big(\frac{dp}{dy}\Big)^2, \dots
\end{aligned}$$

Thế các kết quả này vào vế trái của (14.41) ta thu được phương trình cấp $n-1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

Giải. Đây là phương trình không chứa biến độc lập x. Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ và thu được

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}.$$

Đó là phương trình Bernoulli. Bằng phép đổi ẩn hàm $p^2 = z$ ta thu được phương trình tuyến tính

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}, \quad z = y'^2.$$

Nó có nghiệm tổng quát là $z = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$. Thay z bởi y'^2 ta thu được

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}.$$

Tách biến và tích phân ta có

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1}$$
$$\Rightarrow e^y + \widetilde{C}_1 = (x + C_2)^2, \quad \widetilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}\cdot$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình đã cho. ▲

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $y^{(3)} = 60x^2$. (ĐS. $y = x^5 + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3$)

2. $(x-3)y'' - y' = 0$. (ĐS. $y = C_1\ln|x-3| + C_2$)

3. $y^{(3)} = x + \cos x$. (ĐS. $y = \dfrac{x^4}{24} - \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$)

4. $y'' = xe^x$; $y(0) = y'(0) = 0$. (ĐS. $y = (x-2)e^x + x + 2$)

5. $xy'' = y'$. (ĐS. $y = C_1x^2 + C_2$)

6. $xy'' + y' = 0$. (ĐS. $y = C_1 \ln|x| + C_2$)

7. $xy'' = (1+2x^2)y'$. (ĐS. $y = C_1e^{x^2} + C_2$)

8. $xy'' = y' + x^2$. (ĐS. $y = \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$)

9. $xy^{(3)} - y'' = 0$. (ĐS. $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$)

10. $y'' = y'^2$. (ĐS. $y = C_2 - \ln|C_1 - x|$)

11. $y'' = 1 + y'^2$. (ĐS. $y = C_2 - \ln|\cos(x + C_1)|$)

12. $y'' + y' + 2 = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$. (ĐS. $y = -2x$)

14.2.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

I. **Phương trình tuyến tính thuần nhất**

Phương trình vi phân dạng

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{14.42}$$

trong đó a_1, a_2 là các hằng số, được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 với hệ số hằng.

1. Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm riêng của (14.42) sao cho $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ const thì $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm tổng quát của (14.42).

2. Nếu $y = u(x) + iv(x)$ là nghiệm của (14.42) thì phần thực $u(x)$ và phần ảo $v(x)$ cũng là nghiệm.

Để xác định các nghiệm riêng $y_1(x)$ và $y_2(x)$ đầu tiên cần giải phương trình đặc trưng (ptđt) thu được bằng cách đặt $y = e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{14.43}$$

Hiển nhiên ta luôn xem bội của nghiệm của (14.43) là $r = 1$ (đơn) hoặc 2 (kép). Ta cũng quy ước bội $r = 0$ nếu λ không là nghiệm của (14.43). Ta có bảng tóm tắt sau

Nghiệm của ptđt	Nghiệm riêng của (14.42)	Nghiệm tổng quát của (14.42)
I. $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
II. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$	$y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$	$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ $= e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$
III. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\lambda = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x$ $+C_2\sin\beta x)$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Giải. Tìm nghiệm trong dạng $y = e^{\lambda x}$, ta có $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Thay vào phương trình ta thu được phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 & = 1, \\ \lambda_2 & = -2. \end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ và khác nhau nên theo trường hợp I ở bảng ta có $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$ và do đó

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Cũng hỏi như trên đối với phương trình

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Giải. Phương trình đặc trựng tương ứng có dạng

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Các nghiệm của phương trình đặc trưng thực và bằng nhau nên $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$. Do đó

$$y = C_1e^x + C_2xe^x = e^x(C_1 + C_2x). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Giải. Ptđt tương ứng có dạng

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 2 + 3i,\\ \lambda_2 = 2 - 3i.\end{array}\right.$$

Các nghiệm phức này tương ứng với các nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $y_1 = e^{2x}\cos 3x$, $y_2 = e^{2x}\sin 3x$. Do đó nghiệm tổng quávt có dạng

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x \\ &= e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

II. **Phương trình tuyến tính không thuần nhất**

Phương trình dạng

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \tag{14.44}$$

trong đó a_1, a_2 là những hằng số thực, $f(x)$ là hàm liên tục được gọi là *ptvp tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng.*

Định lý. *Nghiệm tổng quát của* (14.44) *là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất* (14.44).

Từ I và định lý vừa phát biểu suy rằng bài toán tìm nghiệm tổng quát của (14.44) được đưa về bài toán tìm nghiệm riêng $\tilde{y}$ của nó. Nói chung phép tích phân (14.44) luôn luôn có thể thực hiện nhờ phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.

Nếu vế phải có *dạng đặc biệt* ta có thể tìm nghiệm riêng của (14.44) nhờ *Phương pháp chọn* (phương pháp hệ số bất định không chứa quá trình tích phân). Ta có bảng tóm tắt sau trong đó $P_n(x), Q_m(x), \dots$ là các đa thức đại số bậc tương ứng.

Vế phải của (14.44)	Nghiệm của ptđt	Dạng nghiệm riêng
I. $f(x) = P_n(x)$	Số 0 là nghiệm bội r của ptđt	$\tilde{y} = Q_n(x)x^r$ Q_n cần được xác định
II. $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$	Số α là nghiệm bội r của ptđt	$\tilde{y}x^rQ_n(x)e^{\alpha x}$ $Q_n(x)$ cần được xác định
III. $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$	Số phức $i\beta$ là nghiệm bội r của ptđt	$\tilde{y} = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$; A, B - cần xác định
IV. $f(x) = e^{\alpha x}\times [P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$	Số $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội r của ptđt	$\tilde{y} = x^re^{\alpha x}\times [Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x]$, Q_1 và Q_2 là đa thức bậc $s = \max(m, n)$

V. Vế phải của phương trình là tổng của hai hàm

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x).$$

Khi đó nghiệm riêng có thể tìm dưới dạng

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$$

trong đó $\tilde{y}_1$ là nghiệm riêng của phương trình $y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x)$, còn $\tilde{y}_2$ là nghiệm riêng của phương trình $y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x)$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $y'' - 2y' + y = x + 1$ (dạng I)

Giải. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng $Y = e^x(C_1 + C_2x)$. Vì $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ nên số 0 không là nghiệm của ptđt và do đó $r = 0$ và nghiệm riêng của phương trình đã cho (trường hợp I) cần tìm dưới dạng

$$\tilde{y} = x^0(Ax + B)$$

trong đó A, B là những hằng số cần xác định. Thế $\tilde{y}$ và $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ vào phương trình và so sánh các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta thu được $A = 1$, $-2A + B = 1 \Rightarrow A = 1$, $B = 3$. Do vậy $\tilde{y} = x + 3$ và

$$y = \tilde{y} + Y = 3 + x + e^x(C_1 + C_2x). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Giải phương trình $y'' - 4y' + 3y = xe^x$ (dạng II).

Giải. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng $Y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Vì vế phải $f(x) = xe^x$ nên (xem II) ta có $P_n(x) = x$, $\alpha = 1$ và như vậy số $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng; $r = 1$. Do vậy nghiệm riêng cần tìm dưới dạng

$$\tilde{y} = (Ax + B)xe^x$$

Tính $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ rồi thế vào phương trình đã cho ta thu được $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = -\dfrac{1}{4}$ và từ đó

$$\begin{aligned} y = \tilde{y} + Y &= -\frac{1}{4}(x + 1)xe^x + C_1e^x + C_2e^{3x} \\ &= C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}x(x + 1)e^x. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Giải phương trình $y'' + y = \sin x$ (dạng III).

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Vì $f(x) = \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x$ nên $a = 0$, $b = 1$, $\beta = 1$. Vì $i\beta = i$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên $r = 1$ và nghiệm riêng cần tìm dưới dạng

$$\tilde{y} = (A\cos x + B\sin x)x.$$

Thế $\tilde{y}$ vào phương trình ta thu được $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = 0$ và

$$y = -\frac{1}{2}\cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Xét phương trình $y'' + y = \sin 2x$ (dạng III).

Giải. Tương tự như trong ví dụ 6 ta có

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Phương trình đã cho có $\beta = 2$. Vì $i\beta = 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $r = 0$ và

$$\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

Thế $\tilde{y}$ vào phương trình đã cho cùng với $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ ta có $A = 0$, $B = -\dfrac{1}{3}$. Do đó

$$y = \tilde{y} + Y = -\frac{1}{3}\sin 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 8. Giải phương trình $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$ (dạng V).

Giải. Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Do vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng $Y = e^x(C_1 + C_2 x)$.

Vì vế phải của phương trình đã cho là tổng của hai hàm $\sin x$ và e^{-x} nên nghiệm riêng cần tìm dưới dạng $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, trong đó $\tilde{y}_1$ là nghiệm riêng của

$$y'' - 2y' + y = \sin x \tag{14.45}$$

còn $\tilde{y}_2$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 2y' + y = e^{-x} \tag{14.46}$$

Tìm $\tilde{y}_1$. Vì $f(x) = \sin x \Rightarrow \beta = 1$. Tiếp đó vì $i\beta = i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $r = 0$ và nghiệm riêng $\tilde{y}$ cần tìm dưới dạng $\tilde{y}_1 = A\cos x + B\sin x$.

Thay $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_1'$, $\tilde{y}_1''$ vào (14.45) ta thu được $A = \dfrac{1}{2}$, $B = 0$:

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}\cos x.$$

Tìm $\tilde{y}_2$. Vế phải $f(x) = e^{-x}$ (xem II). Số $\alpha = -1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $r = 0$ nên nghiệm riêng cần tìm dưới dạng

$$\tilde{y}_2 = Ae^{-x}.$$

Thay $\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_2'$, $\tilde{y}_2''$ vào (14.46) ta thu được $A = \dfrac{1}{4}$ và do vậy

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Như vậy $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{4}e^{-x}$ và

$$y = \tilde{y} + Y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x} + e^{x}(C_1 + C_2 x). \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình vi phân sau

1. $y'' - 5y' + 4 = 0$. (ĐS. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$)

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$. (ĐS. $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$)

3. $y'' + 8y' + 25y = 0$. (ĐS. $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$)

4. $y'' - 3y' + 2y = 0$. (ĐS. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$)

5. $y'' - 4y' + 4y = 0$. (ĐS. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$)

6. $y'' - 2y' + 2y = 0$. (ĐS. $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$)

Giải các bài toán Cauchy sau

7. $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$.
(ĐS. $y = -3e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$)

8. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$. (ĐS. $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$)

9. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (ĐS. $y = e^{x}\sin x$)

10. $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
(ĐS. $y = e^{x}(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)$)

11. $y'' + 4y' = 0$; $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$. (ĐS. $y = 9 - 2e^{-4x}$)

12. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (ĐS. $y = \sin 2x$)

Giải các phương trình không thuần nhất sau

13. $y'' + 2y' + y = e^{x}$. (ĐS. $y = (C_1 x + C_2)e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^{x}$)

14. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$. (ĐS. $y = C_1 e^{2x} + (C_2 - x)e^{x}$)

15. $y'' + y' - 2y = 6x^2$. (ĐS. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 3(x^2 + x + 1,5)$)

16. $y'' + 3y' = 9x$. (ĐS. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \dfrac{3}{2}x^2 - x$)

17. $y'' - 2y = xe^{-x}$. (ĐS. $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} - (x - 2)e^{-x}$)

18. $y'' - 4y = 8x^3$. (ĐS. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$)

19. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

(ĐS. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$)

20. $y'' + 4y = 3\sin 2x$. (ĐS. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$)

21. $y'' + 4y = \sin 2x$. (ĐS. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x$)

22. $y'' + y = x\cos x$.

(ĐS. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x$)

23. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$.

(ĐS. $y = e^x(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\sin x)$)

24. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$.

(ĐS. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{e^{3x}}{2}(x^2 - 2x + 2)$)

25. $y'' + y = x + 2e^x$. (ĐS. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x + e^x$)

26. $y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$.

(ĐS. $y = \frac{3}{2}e^x x^2 + x + 3 + e^x(C_1x + C_2)$)

27. $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$.

(ĐS. $y = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}xe^{2x} + C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$)

28. $y'' + 9y = e^x\cos 3x$.

(ĐS. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{e^x}{37}(\cos 3x + 6\sin 3x)$)

29. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$. (ĐS. $y = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$)

30. $y'' + y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$.

(ĐS. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x\sin x + e^x(1 - x + \frac{1}{2}x^2)$)

31. $y'' - 6y' + 9y = 25e^x\sin x$.

(ĐS. $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + e^x(4\cos x + 3\sin x)$)

32. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$.

(ĐS. $y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x}\cos 2x$)

33. $y'' + y' = 4x^2e^x$. (ĐS. $y = C_1 + C_2e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x$)

34. $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$. (ĐS. $y = (C_1 + C_2x)e^{-5x} + 2x^2e^{-5x}$)

14.2.3 Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n (ptvptn cấp n) với hệ số hằng

Phương trình vi phân dạng

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \tag{14.47}$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những hằng số thực được gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n (ptvptn cấp n) với hệ số hằng.

1. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của (14.47): $Ly = 0$ thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của nó;

2. Nếu $y(x) = u(x) + iv(x)$ là nghiệm của (14.47) thì phần thực $u(x)$ và phần ảo $v(x)$ của nó cũng là nghiệm của (14.47).

Lược đồ giải phương trình (14.47)

Xuất phát từ ptvptn
$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$
$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

Lập phương trình đặc trưng
$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + x_{n-1}\lambda + A_n = 0$

$\downarrow$

Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng
$\varphi = 0 : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$\downarrow$

Tìm nghiệm riêng độc lập tuyến tính (đℓtt) $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ của ptvptn:$L(y) = 0$

$$\downarrow$$

Nghiệm tổng quát của phương trình $L(y) = 0$ $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ $C_1, C_2, \dots, C_n$ là các hằng số tùy ý

Giả sử tìm được các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ của phương trình đặc trưng đối với phương trình (14.47). Khi đó tùy thuộc vào *đặc tính* của nghiệm $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ta viết được các nghiệm riêng đltt của (14.47).

1^+ Nếu $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$ thì mỗi λ_i sẽ tương ứng với nghiệm riêng của phương trình (14.47) là

$$e^{\lambda_i x}, \quad i = \overline{1, n}$$

và nghiệm tổng quát của (14.47) sẽ là

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}. \tag{14.48}$$

2^+ Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm bội chẳng hạn $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \tilde{\lambda}$ và $n-k$ nghiệm còn lại đều khác nhau thì các nghiệm riêng đltt sẽ là

$$e^{\tilde{\lambda}x}, xe^{\tilde{\lambda}x}, \dots, x^{k-1}e^{\tilde{\lambda}x}, e^{\lambda_{k+1}x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

và nghiệm tổng quát có dạng

$$y = C_1e^{\tilde{\lambda}x} + C_2xe^{\tilde{\lambda}x} + \cdots + C_kx^{k-1}e^{\tilde{\lambda}x} + C_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}. \tag{14.49}$$

3^+ Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức xuất hiện từng cặp liên hợp, chẳng hạn để xác định ta giả thiết $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$,

$\lambda_3 = \gamma + i\delta$, $\lambda_4 = \gamma - i\delta$ và các nghiệm còn lại đều thực thì các nghiệm riêng đltt là

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\gamma x}\cos\delta x, e^{\gamma x}\sin\delta x, e^{\lambda_5 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

và khi đó nghiệm tổng quát có dạng

$$\begin{aligned} y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3e^{\gamma x}\cos\delta x \\ + C_4e^{\gamma x}\sin\delta x + C_5e^{\lambda_5 x} + \dots + C_ne^{\lambda_n x}. \end{aligned} \tag{14.50}$$

4^+ Sau cùng nếu $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng $\left(k \leq \dfrac{n}{2}\right)$ thì $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ cũng là nghiệm bội k của nó. Các nghiệm đltt sẽ là

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, \\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\lambda_{2k+1}x}, \dots, e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

và từ đó viết được nghiệm tổng quát.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} - 3y' = 0.$$

Giải. Lập phương trình đặc trưng

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Phương trình đặc trưng có ba nghiệm khác nhau là $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Khi đó áp dụng (14.48) ta thu được nghiệm tổng quát

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Cũng hỏi như trên với phương trình

$$y^{(3)} + 2y'' + y' = 0.$$

Giải. Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Từ đó suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Các nghiệm này đều thực và $\lambda = -1$ là nghiệm kép nên áp dụng (14.49) ta thu được

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Cũng hỏi như trên đối với phương trình

$$y^{(3)} + 4y^{(2)} + 13y' = 0.$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ có các nghiệm $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2 - 3i$, $\lambda_3 = -2 + 3i$. Do đó nghiệm tổng quát của nó có dạng

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}\cos 3x + C_3 e^{-2x}\sin 3x. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Xét phương trình

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y^{(2)} + y' - 2y = 0.$$

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

có các nghiệm: $\lambda_1 = 2$ - nghiệm đơn; $\lambda_2 = \pm i$ là cặp nghiệm phức liên hợp bội 2. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{2x} + C_2\cos x + C_3 x\cos x + C_4\sin x + C_5 x\sin x \\ &= C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 8y' + 4y = 0.$$

Giải. Lập phương trình đặc trưng

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Nó có các nghiệm kép phức $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i$; $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i$. Do đó từ 4^+ suy ra nghiệm tổng quát của nó sẽ là

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + C_3xe^{-x}\cos x + C_4xe^{-x}\sin x \\ &= e^{-x}[C_1 + C_3x]\cos x + e^{-x}[C_2 + C_4x]\sin x. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $y^{(3)} + 6y^{(2)} + 11y' + 6y = 0$. (ĐS. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$)

2. $y^{(3)} - 8y = 0$. (ĐS. $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x)$)

3. $y^{(4)} - y = 0$. (ĐS. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$)

4. $y^{(3)} - 3y' - 2y = 0$. (ĐS. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + C_3e^{2x}$)

5. $2y^{(3)} - 3y^{(2)} + y' = 0$. (ĐS. $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{x/2}$)

6. $y^{(3)} - 6y^{(2)} + 13y' = 0$. (ĐS. $y = C_1 + e^{3x}(C_2\cos 2x + C_3\sin 2x)$)

7. $y^{(4)} + 13y^{(2)} + 36y = 0$.
(ĐS. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x$)

Giải các bài toán Cauchy sau đây

8. $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$.
(ĐS. $y = -3e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$)

9. $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 3y' + y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.
(ĐS. $y = e^{-x}(3x^2 + x - 1)$)

10. $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.
(ĐS. $y = e^{x}(1 + x)$)

11. $y^{(3)} + y^{(2)} = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
(ĐS. $y = x + e^{-x}$)

Bây giờ xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp n với hệ số hằng:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \tag{14.51}$$

Tương tự như trường hợp phương trình cấp 2 với hệ số hằng bài toán tích phân phương trình (14.51) được quy về tìm một nghiệm riêng nào đó của (14.51). Trong trường hợp tổng quát phép tích phân phương trình (14.51) có thể thực hiện nhờ phương pháp biến thiên hằng số tùy ý. Đối với một số dạng đặc biệt của vế phải nghiệm riêng của (14.51) được tìm bởi phương pháp đơn giản hơn: đó là phương pháp chọn. Dạng tổng quát của vế phải (14.51) mà phương pháp chọn có thể áp dụng được là

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_\ell(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$$

trong đó $P_\ell(x)$ và $Q_m(x)$ là những đa thức bậc ℓ và m tương ứng. Trong trường hợp này nghiệm riêng của (14.51) cần được tìm dưới dạng

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\big[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\big]$$

$k = \max(\ell, m)$, $\tilde{P}_k$ và $\tilde{Q}_k$ là những đa thức bậc k của x dạng tổng quát với các hệ số chưa được xác định, r là bội của nghiệm $\lambda = \alpha + i\beta$ của ptđt (nếu $\lambda = \alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì $r = 0$).

Nội dung của phương pháp biến thiên hằng số Lagrange đối với phương trình vi phân cấp cao là như sau.

Giả sử $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ là hệ các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất tương ứng của (14.51) và

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny)n(x)$$

là nghiệm tổng quát của nó, trong đó $C_1, C_2, \dots, C_n$ là những hằng số tùy ý.

Ta sẽ tìm nghiệm của (14.51) dưới dạng

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x) \tag{14.52}$$

trong đó $C_1(x), \dots, C_n(x)$ là những hàm tạm thời chưa biết của biến x. Để xác định chúng ta lập hệ

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) + \cdots + y_n(x)C_n'(x) = 0, \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) + \cdots + y_n'(x)C_n'(x) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_1^{(n-1)}(x)C_1'(x) + y_2^{(n-1)}(x)C_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-1)}(x)C_n'(x) = f(x). \end{cases} \tag{14.53}$$

Vì $y_1, \dots, y_n$ là đltt nên định thức của hệ (Wronskian) luôn $\neq 0$ và hệ có nghiệm duy nhất:

$$\frac{dC_i(x)}{dx} = \varphi_i(x) \Rightarrow C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \tilde{C}_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{14.54}$$

trong đó $\tilde{C}_i$ là hằng số tùy ý. Thế (14.54) vào (14.52) ta thu được nghiệm tổng quát của (14.51).

Nhận xét. Đối với phương trình cấp 2 hệ (14.53) có dạng

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) = 0, \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{14.55}$$

Bảng tóm tắt các dạng nghiệm riêng
tương ứng với một số dạng vế phải khác nhau của (14.51)

N°	Vế phải của phương trình vi phân	Nghiệm của phương trình đặc trưng	Các dạng nghiệm riêng
I	$P_m(x)$	1. Số 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng	$\tilde{P}_m(x)$
		2. Số 0 là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng	$x^s\tilde{P}_m(x)$

N°	Vế phải của phương trình vi phân	Nghiệm của phương trình đặc trưng	Các dạng nghiệm riêng
II	$P_m(x)e^{\alpha x}$	Số α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng	$\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		2. Số α là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng	$x^s\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x+$ $Q_m(x)\sin\beta x$	1. số $\pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng	$\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+$ $\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$, $k=\max(m,n)$
		2. Số $\pm i\beta$ là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng	$x^s[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x$ $\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]$, $k=\max(m,n)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$	1. Số $\alpha\pm i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng	$[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+$ $\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, $k=\max(m,n)$
		2. Số $\alpha\pm i\beta$ là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng	$x^s[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x+$ $\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, $k=\max(m,n)$

Nhận xét. Nếu $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)$, trong đó $f_1, \ldots, f_m$ là các hàm dạng I-IV ở bảng và $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m$ là các nghiệm riêng tương ứng với $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ thì

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \cdots + \tilde{y}_m$$

là nghiệm riêng của phương trình (14.51). Đây cũng chính là nội dung của *phương pháp chồng nghiệm.*

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình

1) $y^{(3)} - y^{(2)} + y' - y = x^2 + x$;

2) $y^{(3)} - y^{(2)} = 12x^2 + 6x$.

Giải. 1) Phương trình đặc trưng $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ có các nghiệm khác nhau $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Do đó phương trình thuần nhất tương ứng với 1) có nghiệm tổng quát là

$$Y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x$$

(ở đây số $\alpha = 0$). Vì số $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên theo trường hợp I. 2, ta có $\tilde{y} = A_1x^2 + A_2x + A_3$, trong đó A_1, A_2, A_3 là những hệ số cần được xác định. Thế nghiệm riêng $\tilde{y}$ vào phương trình 1), ta thu được

$$-A_1x^2 + (2A_1 - A_2)x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x,$$

từ đó suy ra rằng $A_1 = -1$, $A_2 = -3$, $A_3 = -1$. Do đó $\tilde{y} = -x^2 - 3x - 1$ và nghiệm tổng quát có dạng

$$y = Y + \tilde{y} = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x - x^2 - 3x - 1.$$

2) Phương trình đặc trưng $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với 2) có dạng

$$Y = C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

Vì số $\alpha = 0$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên theo trường hợp I. 2, ta có

$$\tilde{y} = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$$

Thế $\tilde{y}$ vào phương trình 2), ta thu được

$$-12A_1x^2 + (24A_1 - 6A_2)x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x$$

và từ đó $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$ và

$$\tilde{y} = -x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Như vậy

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2y' = 4\cos x \cos 3x + 6\sin^2 x.$$

Giải. Ta sẽ áp dụng nhận xét đã nêu ra sau bảng tóm tắt nghiệm riêng. Trước tiên ta biến đổi vế phải của phương trình. Ta có

$$4\cos x \cos 3x + 6\sin^2 x = 2\cos 4x - \cos 2x + 3.$$

Khi đó

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2y' = 2\cos 4x - \cos 2x + 3.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $Y = C_1 + (C_2\cos x + C_3\sin x)e^x$.

Để tìm nghiệm riêng, ta sẽ áp dụng nhận xét đã nêu: Ta cần tìm nghiệm riêng của ba phương trình

$$\begin{aligned}
&y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2y' = 2\cos 4x,\\
&y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2y' = -\cos 2x,\\
&y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2y' = 3.
\end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{65}(\cos 4x - \frac{7}{4}\sin 4x);\ \tilde{y}_2 = \frac{1}{10}(\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x);\ \tilde{y}_3 = \frac{3}{2}x.$$

Do đó

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 = \frac{1}{65}(\cos 4x - \frac{7}{4}\sin 4x) + \frac{1}{10}(\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x) + \frac{3}{2}x.$$

Từ đó suy ra rằng

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 + (C_2\cos x + C_3\sin x)e^x + \frac{1}{65}(\cos 4x - \frac{7}{4}\sin 4x) + \frac{1}{10}\Big(\frac{\sin 2x}{2} - \cos 2x\Big) + \frac{3}{2}x. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y^{(3)} + y' = \mathrm{tg}x.$$

Giải. Dễ dàng thấy rằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y^{(3)} + y' = 0$ là

$$Y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất bằng phương pháp biến phân hằng số. Trước tiên, ta lập phương trình để xác định các hàm $C_i(x)$, $i = \overline{1,3}$. Ta có

$$\begin{cases} C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x &= 0,\\ \quad -C_2'\sin x + C_3'\cos x &= 0,\\ \quad -C_2'\cos x - C_3'\sin x &= \mathrm{tg}x. \end{cases}$$

Nhân phương trình thứ hai với $\sin x$, phương trình thứ ba với $\cos x$ rồi cộng lại, ta thu được $C_2' = -\sin x$. Từ đó $C_3' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Tiếp đến, cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ ba, ta có $C_1' = \mathrm{tg}x$.

Từ các kết quả này suy ra rằng $C_1 = -\ln|\cos x|$, $C_2 = \cos x$, $C_3 = \sin x - \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$ và do đó nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= -\ln|\cos x| + \cos^2 x + \sin x\left(\sin x - \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right)\\ &= -\ln|\cos x| + 1 - \sin x \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|.\end{aligned}$$

Từ $\tilde{y}$ và Y ta thu được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$\begin{aligned}y = Y + \tilde{y} &= C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x\\ &\quad - \ln|\cos x| - \sin x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + 1. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}\cdot$$

Giải. Đầu tiên tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Dễ thấy rằng

$$Y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x.$$

Vì vế phải $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ không thuộc vào nhóm các hàm dạng đặc biệt đã xét ở trên, nên việc chọn nghiệm riêng theo vế phải và nghiệm của ptđt như ở trên là không thực hiện được. Trong trường hợp này ta sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. (Lưu ý rằng đó là phương pháp tổng quát có thể áp dụng cho phương trình với vế phải liên tục bất kỳ $f(x)$).

Ta lập hệ phương trình để tìm $C_1'(x)$ và $C_2'(x)$:

$$\begin{aligned}C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x &= 0,\\ C_1'(x)(2\cos x - \sin x) + C_2'(x)(2\sin x + \cos x) &= \frac{1}{\cos x}\cdot\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $C_1'(x) = -\text{tg}x$, $C_2'(x) = 1$ và do đó

$$C_1(x) = \int -\text{tg}x dx = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1,$$
$$C_2(x) = \int dx = x + \tilde{C}_2.$$

Thay $C_1(x)$ và $C_2(x)$ vào biểu thức của Y ta có nghiệm tổng quát

$$y = \Big[\ln|\cos x| + \tilde{C}_1\Big]e^{2x}\cos x + \big(x + \tilde{C}_2\big)e^{2x}\sin x,$$

trong đó $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ là những hằng số tùy ý. ▲

Ví dụ 5. Giải bài toán Cauchy đối với phương trình

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Giải. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$Y = C_1 + C_2e^x.$$

Đặt $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$. Ta lập hệ phương trình để xác định $C_1'(x)$ và $C_2'(x)$. Ta có

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)e^x &= 0,\\ C_2'(x)e^x &= \frac{1}{1+e^x}\end{aligned}\right\}$$

(vì $y_1(x) = 1 \Rightarrow y_1'(x) = 0$; $y_2(x) = e^x \Rightarrow y_2'(x) = e^x$). Giải hệ này ta thu được

$$C_1'(x) = -\frac{1}{1+e^x} \Rightarrow C_1(x) = -x + \ln(1+e^x) + \tilde{C}_1$$
$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)} \Rightarrow C_2(x) = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x) + \tilde{C}_2.$$

Từ đó thu được nghiệm tổng quát

$$y = -x + \ln(1+e^x) + e^x\big[-e^{-x} - x + \ln(1+e^x) + \tilde{C}_2\big] + \tilde{C}_1.$$

Thay $x = 0$, $y = 1$ vào nghiệm tổng quát ta có

$$1 = 2\ln 2 - 1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_1.$$

Tính $y'(x)$ rồi thay $x = 0$ và $y'(0) = 2$ vào ta có

$$2 = -1 + \tilde{C}_2 + \ln 2 \Rightarrow \begin{aligned} \tilde{C}_2 &= 3 - \ln 2 \\ \tilde{C}_1 &= -\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Sau cùnh nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$\tilde{y} = (1 + e^x)\ln(1 + e^x) + e^x\big(3 - \ln 2 - x\big) - (2 + \ln 2 + x). \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Hãy xác định *dạng nghiệm riêng* của các phương trình sau

1. $y^{(3)} + y = x$. (ĐS. $\tilde{y} = A_1 + A_2x$)

2. $y^{(3)} + y' = 2$. (ĐS. $\tilde{y} = Ax$)

3. $y^{(3)} + y^{(2)} = 3$. (ĐS. $\tilde{y} = Ax^2$)

4. $y^{(4)} - y = 1$. (ĐS. $\tilde{y} = A$, $A = \text{const}$)

5. $y^{(4)} - y' = 2$. (ĐS. $\tilde{y} = Ax$)

6. $y^{(4)} - y^{(2)} = 3$. (ĐS. $\tilde{y} = Ax^2$)

7. $y^{(4)} - y^{(3)} = 4$. (ĐS. $\tilde{y} = Ax^3$)

8. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = e^{4x}$. (ĐS. $\tilde{y} = Ae^{4x}$)

9. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = e^{-x}$. (ĐS. $\tilde{y} = Ax^2e^{-x}$)

10. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = xe^{-x}$. (ĐS. $\tilde{y} = (A_1x^2 + A_2x^3)e^{-x}$)

11. $y^{(4)} + 4y^{(2)} + 4y = \sin 2x$. (ĐS. $\tilde{y} = A_1\cos 2x + A_2\sin 2x$)

12. $y^{(4)} + 4y^{(2)} + 4y = x\sin 2x$.

(ĐS. $\tilde{y} = (A_1 + A_2x)\sin 2x + (B_1 + B_2x)\cos 2x$)

Giải các phương trình tuyến tính không thuần nhất sau

13. $y^{(3)} + y^{(2)} = 1.$ (ĐS. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \dfrac{x^2}{2}$)

14. $3y^{(4)} + y^{(3)} = 2.$ (ĐS. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-\frac{x}{3}} + \dfrac{x^3}{3}$)

15. $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 1.$

(ĐS. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (C_3 + C_4x)e^x + 1$)

16. $y^{(3)} - y^{(2)} + y' - y = x^2 + x.$

(ĐS. $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x - (x^2 + 3x + 1)$)

17. $y^{(4)} + y^{(2)} = x^2 + x.$

(ĐS. $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$)

18. $y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = \cos x.$

(ĐS. $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)e^{-x} + \dfrac{1}{4}\cos x$)

19. $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y' - y = e^x\cos x.$

(ĐS. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x - \dfrac{e^x}{8}\sin 2x$)

20. $y^{(4)} - 3y^{(2)} = 9x^2.$

(ĐS. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} - \dfrac{x^4}{4} - x^2$)

21. $4y^{(3)} + y' = 3e^x + 2\sin\dfrac{x}{2}.$

(ĐS. $y = C_1 + C_2\cos\dfrac{x}{2} + C_3\sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{5}e^x - x\sin\dfrac{x}{2}$)

22. $y^{(3)} + y^{(2)} = 12x^2.$

(ĐS. $y = x^4 - 4x^3 + 12x^2 + C_1 + C_2x + C_3e^{-x}$)

23. $y^{(3)} - 5y^{(2)} + 8y' - 4y = e^{2x}.$

(ĐS. $y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$)

Tìm các nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện ban đầu đã chỉ ra.

24. $y^{(3)} - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$. (ĐS. $y = \mathrm{sh}x + x^2$)

25. $y^{(4)} - y = 8e^x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 0$.

(ĐS. $y = \cos x + 2\sin x + e^{-x} + (2x - 3)e^x$)

26. $y^{(4)} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y^{(2)}(0) = 4$, $y^{(3)}(0) = 6$. (ĐS. $y = 2xe^x$)

Giải các phương trình sau bằng phương pháp biến thiên hằng số.

27. $y'' + y = \mathrm{tg}x$; $y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

(ĐS. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 \cdot \sin x - \cos x \cdot \ln \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$)

28. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$. (ĐS. $y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x$)

29. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$. (ĐS. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{\cos 2x}{2\cos x}$)

30. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$. (ĐS. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$)

31. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$. (ĐS. $y = C_1e^x + C_2e^x - xe^x + xe^x\ln|x|$)

32. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$. (ĐS. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{x}$)

14.3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 với hệ số hằng

Hệ phương trình vi phân dạng

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n),\\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_2, \dots, x_n),\\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{14.56}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn hàm của biến độc lập t, được gọi là *hệ chuẩn tắc*.

Tập hợp n hàm $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$ xác định trên khoảng (a, b) được gọi là *nghiệm* của hệ chuẩn tắc (14.56) nếu khi thế chúng vào các phương trình (14.56) thì các phương trình này trở thành đồng nhất thức.

Bài toán Cauchy đối với hệ (14.56) là bài toán tìm nghiệm $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ của hệ đó thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$$

trong đó $t_0, x_1^0, \dots, x_n^0$ là những số cho trước

Tập hợp n hàm

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, C_1, \dots, C_n),\\ x_2 &= \varphi_2(t, C_1, \dots, C_n),\\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots\\ x_n &= \varphi_n(t, C_1, \dots, C_n) \end{aligned}\right\} \tag{14.57}$$

phụ thuộc vào t và n hằng số tùy ý $C_1, C_2, \dots, C_n$ được gọi là nghiệm tổng quát của hệ (14.56) trong miền D nào đó nếu:

1^+ Với mỗi giá trị cho phép của các hằng số $C_1, C_2, \dots, C_n$ các hàm này là nghiệm của hệ (14.56);

2^+ Trong miền D các hàm (14.57) là nghiệm của mọi bài toán Cauchy đối với hệ (14.56).

Các phương pháp giải

I. **Phương pháp khử.** Nội dung của nó là đưa hệ đã cho về một phương trình cấp n đối với một ẩn hàm.

II. **Phương pháp tổ hợp khả tích.** Trong phương pháp này, bằng các phép toán số học, từ các phương trình của hệ ta lập được các tổ hợp (gọi là *tổ hợp khả tích*) mà việc tích phân sẽ được thực hiện dễ hơn.

III. **Phương pháp biến phân hằng số** (Phương pháp Lagrange). Bằng cách xuất phát từ *hệ nghiệm cơ sở* của hệ thuần nhất và với việc áp dụng phương pháp biến phân hằng số tùy ý ta sẽ thu được nghiệm của hệ (14.56).

IV. **Phương pháp Euler.** Phương pháp này *chỉ áp dụng được cho hệ với hệ số hằng.*

Ta sẽ trình bày phương pháp Euler và phương pháp Lagrange để giải hệ phương trình tuyến tính với hệ số hằng. Trước hết ta trình bày phương pháp Euler. Để tiện trình bày bản chất của phương pháp, ta xét hệ ba phương trình với ba ẩn hàm

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\\
\frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,\\
\frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.
\end{aligned} \tag{14.58}$$

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của hệ đó dưới dạng

$$\begin{aligned}
x &= \alpha e^{kx},\\
y &= \beta e^{kx},\\
z &= \gamma e^{kx},
\end{aligned} \tag{14.59}$$

trong đó ta cần phải xác định các hằng số α, β, γ và k sao cho (14.59) là nghiệm của (14.58). Thay (14.59) vào (14.58) và giản ước cho $e^{kx} \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned} k\alpha &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ k\beta &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ k\gamma &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} &(a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ &a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{33}\gamma = 0, \\ &a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{aligned} \tag{14.60}$$

Hệ (14.60) là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Nó có nghiệm khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{14.61}$$

Đẳng thức (14.61) là phương trình bậc ba đối với k và nó được gọi là phương trình đặc trưng của hệ (14.58).

Ta chỉ hạn chế xét trường hợp khi (14.61) có các nghiệm khác nhau k_1, k_2 và k_3.

Đối với mỗi nghiệm vừa thu được ta thay vào (14.60) và xác định được

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3.$$

Nếu ký hiệu các nghiệm riêng của hệ tương ứng với các nghiệm của phương trình đặc trưng là:

i) đối với k_1: x_1, y_1, z_1;

ii) đối với k_2: x_2, y_2, z_2;

iii) đối với k_3: x_3, y_3, z_3

thì nghiệm tổng quát của hệ (14.58) có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3,\\ y(t) &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3,\\ z(t) &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3, \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\alpha_1e^{k_1t} + C_2\alpha_2e^{k_2t} + C_3\alpha_3e^{k_3t},\\ y(t) &= C_1\beta_1e^{k_1t} + C_2\beta_2e^{k_2t} + C_3\beta_3e^{k_3t},\\ z(t) &= C_1\gamma_1e^{k_1t} + C_2\gamma_2e^{k_2t} + C_3\gamma_3e^{k_3t}. \end{aligned} \qquad (14.62)$$

Ta xét một ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x - 3y,\\ \frac{dy}{dt} &= -x. \end{aligned}$$

Giải. Lập phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -2-k & -3\\ -1 & 0-k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} k_1 &= -3,\\ k_2 &= 1. \end{aligned}\right.$$

Nghiệm riêng của hệ được tìm dưới dạng

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1e^{k_1t},\\ y_1 &= \beta_1e^{k_1t},\\ x_2 &= \alpha_2e^{k_2t},\\ y_2 &= \beta_2e^{k_2t}. \end{aligned}$$

Lập hệ (14.60)

$$[-2-(-3)]\alpha_1 - 3\beta_1 = 0,$$
$$-\alpha_1 + [0-(-3)]\beta_1 = 0,$$

hay là

$$\alpha_1 - 3\beta_1 = 0,$$
$$-\alpha_1 + 3\beta_1 = 0.$$

Hệ này có vô số nghiệm. Chẳng hạn ta cho $\beta_1 = 1$. Khi đó $\alpha_1 = 3$.

Như vậy với nghiệm $k_1 = -3$ của phương trình đặc trưng ta có các nghiệm riêng

$$x_1 = 3e^{-3t},$$
$$y_1 = e^{-3t}.$$

Đối với nghiệm $k = 1$ của phương trình đặc trưng ta có

$$-3\alpha_2 - 3\beta_2 = 0,$$
$$-\alpha_2 - \beta_2 = 0.$$

Ta có thể lấy $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -1$. Khi đó tương ứng với $k = 1$ ta có

$$x_2 = e^t,$$
$$y_2 = -e^t.$$

Nghiệm tổng quát của hệ đã cho (theo (14.62)) có dạng

$$x(t) = 3C_1e^{-3t} + C_2e^t,$$
$$y(t) = C_1e^{-3t} - C_2e^t. \quad \blacktriangle$$

Ta sẽ minh họa nội dung phương pháp Lagrange (phương pháp biến thiên hằng số) trên ví dụ hệ ba phương trình không thuần nhất.

Giả sử cho hệ

$$\begin{aligned} &x' + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = f_1(t),\\ &y' + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = f_2(t),\\ &z' + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = f_3(t). \end{aligned} \tag{14.63}$$

Ta giả thiết rằng nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng đã được tìm dưới dạng

$$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3,\\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3,\\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3. \end{aligned} \tag{14.64}$$

Ta tìm nghiệm của hệ thuần nhất (14.63) dưới dạng

$$\begin{aligned} x &= C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2 + C_3(t)x_3,\\ y &= C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 + C_3(t)y_3,\\ z &= C_1(t)z_1 + C_2(t)z_2 + C_2(t)z_3, \end{aligned} \tag{14.65}$$

trong đó $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ là những hàm còn chưa biết.

Thế (14.65) vào (14.63). Khi đó phương trình thứ nhất của hệ (14.63) có dạng

$$\begin{aligned} &C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3\\ &\ + C_1(x_1' + a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1)\\ &\ + C_2(x_2' + a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2)\\ &\ + C_3(x_3' + a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}z_3) = f_1(t). \end{aligned} \tag{14.66}$$

Các tổng trong các dấu ngoặc đơn đều $= 0$ vì (14.64) là nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng. Từ đó và (14.66) ta có

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 = f_1(t). \tag{14.67}$$

Tương tự như vậy sau khi thế (14.65) vào (14.63) từ phương trình thứ hai và thứ ba của hệ ta có

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2' + C_3'y_3' &= f_2(t), \\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 &= f_3(t). \end{aligned} \tag{14.68}$$

Hệ phương trình gồm (14.67) và (14.68) là hệ phương trình tuyến tính đối với C_1', C_2' và C_3'. Hệ này có nghiệm vì định thức

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(do tính độc lập tuyến tính của các nghiệm riêng của hệ thuần nhất tương ứng).

Sau khi tìm được $C_1'(t)$, $C_2'(t)$, $C_3'(t)$ ta sẽ tìm được $C_1(t)$, $C_2(t)$ và $C_3(t)$ bằng phép tích phân và do đó thu được (14.65).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 2x + 4y &= 1 + 4t, \\ \frac{dy}{dt} + x - y &= \frac{3}{2}t^2. \end{aligned}$$

Giải. Đầu tiên ta giải hệ thuần nhất tương ứng

$$\begin{aligned} x' + 2x + 4y &= 0, \\ y' + x - y &= 0. \end{aligned} \tag{14.69}$$

Từ phương trình thứ hai của (14.69) ta có $x = y - y'$ và do đó

$$x' = y' - y''.$$

Thay biểu thức đối với x và x' vào phương trình thứ nhất của (14.69) ta thu được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0. \tag{14.70}$$

Nghiệm tổng quát của (14.70)có dạng

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Vì $x = y - \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}$.

Như vậy, nghiệm tổng quát của hệ (14.69) là

$$\begin{aligned} x &= -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}, \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}. \end{aligned}$$

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình đã cho dưới dạng

$$\begin{aligned} x &= -C_1(t) e^{2t} + 4C_2(t) e^{-3t}, \\ y &= C_1(t) e^{2t} + C_2(t) e^{-3t}. \end{aligned} \tag{14.71}$$

Sau khi thế (14.71) vào phương trình đã cho ta thu được

$$\begin{aligned} -C_1'(t) e^{2t} + 4C_2'(t) e^{-3t} &= 1 + 4t, \\ C_1'(t) e^{2t} + C_2'(t) e^{-3t} &= \frac{3}{2} t^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= \frac{(6t^2 - 4t - 1) e^{-2t}}{5}, \\ C_2'(t) &= \frac{(3t^2 + 8t + 2) e^{3t}}{10}. \end{aligned}$$

Bằng phép tích phân ta thu được

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{5}(t + 3t^2) e^{-2t} + C_1, \\ C_2(t) &= \frac{1}{10}(2t + t^2) e^{3t} + C_2, \end{aligned} \tag{14.72}$$

trong đó C_1 và C_2 là những hằng số tùy ý. Thế (14.72) vào (14.71) ta thu được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$\begin{aligned} x &= -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t^2 + t,\\ y &= C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình bằng phương pháp tổ hợp khả tích

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t},\\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t},\ t > 0. \end{cases} \qquad 2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2y,\\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} - xy^2. \end{cases}$$

Giải. 1) Cộng vế với vế hai phương trình của hệ, ta được

$$\frac{d(x+y)}{dt} = -\frac{1}{t}(x+y).$$

Từ đó $x + y = \dfrac{C_1}{t}$. Trừ vế với vế hai phương trình của hệ, ta có

$$\frac{d(x-y)}{dt} = \frac{1}{t}(x-y).$$

Từ đó $x - y = C_2t$. Từ hệ phương trình

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{C_1}{t},\\ x - y &= C_2t, \end{aligned}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\Big(\frac{C_1}{t} + C_2t\Big),\\ y &= \frac{1}{2}\Big(\frac{C_1}{t} - C_2t\Big). \end{aligned}$$

2) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với y, của phương trình thứ hai với x, rồi cộng các phương trình thu được, ta có

$$y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = \frac{xy}{t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(xy) = \frac{xy}{t}\cdot$$

Từ đó

$$xy = C_1 t \tag{14.73}$$

Thế biểu thức $xy = C_1 t$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$\frac{dx}{dt} = C_1 tx.$$

Từ đó $x = C_2 e^{C_1 \frac{t^2}{2}}$.

Từ (14.73) với $C_2 \neq 0$ ta có

$$y = \frac{C_1 t}{x} = \frac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 \frac{t^2}{2}}.$$

Ngoài ra nếu $x = 0$ thì từ phương trình thứ hai ta được $y = Ct$ và nếu $y = 0$ thì từ phương trình thứ nhất ta có $x = C$. ▲

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình vi phân sau bằng phương pháp khử ẩn hàm:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -9y, \\ \dfrac{dy}{dt} &= x. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= 3C_1 \cos t - 3C_2 \sin 3t, \\ y &= C_2 \cos 3t + C_1 \sin 3t. \end{cases}$)

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} &= x - t. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} + t - 1, \\ y &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t + 1. \end{cases}$)

3. $$\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \\ y &= C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$)

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -y+z, \\ \dfrac{dy}{dt} & -z, \\ \dfrac{dz}{dt} &= -x+z. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= (C_1-C_2)\cos t + (C_1+C_2)\sin t, \\ y &= C_1\sin t - C_2\cos t + C_3e^t, \\ z &= C_1\cos t + C_2\sin t + C_3e^t. \end{cases}$)

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 4. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$)

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} &= xe^{\cos t}. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1e^{-\cos t}, \\ y &= C_1t + C_2. \end{cases}$)

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= ax + y, \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x + ay. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= e^{at}(C_1\cos t + C_2\sin t), \\ y &= e^{at}(-C_1\sin t + C_2\cos t). \end{cases}$)

8. $\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} &= -x + yt, \\ t^2\dfrac{dy}{dt} &= -2x + yt. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1 + C_2t, \\ y &= \dfrac{C_1}{t} + 2C_2,\ t \neq 0. \end{cases}$)

Giải các hệ sau bằng phương pháp tổ hợp khả tích

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x^2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} &= 2xy. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + t = C_1, \\ \dfrac{1}{x-y} + t = C_2. \end{cases}$)

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} &= \dfrac{1}{x}\cdot \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_2e^{-\frac{t}{C_1}}, \\ y &= \dfrac{C_1}{C_2}e^{\frac{t}{C_1}}. \end{cases}$)

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} &= \dfrac{y}{x}\cdot \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = C_1, \\ 1 + C_1x = C_2e^{C_1t}. \end{cases}$)

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{y}{x-y}, \\ \dfrac{dy}{dt} &= \dfrac{x}{x-y}. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x - y + t = C_2. \end{cases}$)

13. $\begin{cases} e^t\dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{1}{y}, \\ e^t\dfrac{dy}{dt} &= \dfrac{1}{x}. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} y = C_1x, \\ C_1x^2 = C_2 - 2e^{-t}. \end{cases}$)

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \sin x\cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} &= \cos x\sin y. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} \mathrm{tg}\dfrac{x+y}{2} &= C_1e^t, \\ \mathrm{tg}\dfrac{x-y}{2} &= C_2e^t. \end{cases}$)

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} &= x^2 + y, \\ \dfrac{dz}{dt} &= x^2 + z. \end{cases}$

(ĐS. $\begin{cases} x &= C_2e^t + C_1, \\ y &= -C_1^2 + (2C_1C_2t + C_3)e^t + C_2^2e^{2t}, \\ z &= -C_2e^t + (2C_1C_2t + C_3)e^t + C_2^2e^{2t} - C_1^2. \end{cases}$)

Giải các hệ phương trình vi phân sau bằng phương pháp Euler:

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} &= x + y. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}, \\ y &= C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}. \end{cases}$)

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} &= y - x. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1 + C_2e^t, \\ y &= C_1. \end{cases}$)

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &\equiv 0, \\ y &\equiv 0. \end{cases}$)

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2x, \\ x(0) = 0, y(0) = -1. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= e^{2t} - e^{3t}, \\ y &= e^{2t} - 2e^{3t}. \end{cases}$)

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y, \\ x(0) = -1, y(0) = 2. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= e^{t} - 2e^{2t}, \\ y &= -e^{t} + 3e^{2t}. \end{cases}$)

Giải các hệ phương trình vi phân không thuần nhất sau bằng phương pháp biến phân hàm số.

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - y = -e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= \dfrac{8}{3}e^{2t} + 2C_1e^{t} + C_2e^{-t}, \\ y &= \dfrac{29}{3}e^{2t} + 3C_1e^{t} + C_2e^{-t}. \end{cases}$)

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \\ x(0) = 1, y(0) = 2. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= (1-t)\cos t - \sin t, \\ y &= (t-2)\cos t + t\sin t. \end{cases}$)

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x + \mathrm{tg}t. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}t, \\ y &= -C_1\sin t + C_2\cos t + 2. \end{cases}$)

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} &= x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1e^{t} + 2C_2e^{4t} - e^{2t}, \\ y &= -C_1e^{t} + C_2e^{4t} - e^{2t}. \end{cases}$)

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -2x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} &= -3x + 2y + 6e^{2x}, \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= 2e^{2t} + C_1e^{t} + C_2e^{-t}, \\ y &= 9e^{2t} + 3C_1e^{t} + C_2e^{-t}. \end{cases}$)

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x - y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} &= y - 4x + t. \end{cases}$ (ĐS. $\begin{cases} x &= C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{t}{3}, \\ y &= 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{t}{3}\cdot \end{cases}$)

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x - y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} &= x - 4y + e^{3t}. \end{cases}$

(ĐS. $\begin{cases} x &= C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + \dfrac{1-4t}{16}e^{3t}, \\ y &= 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} + e^t + \dfrac{1}{8}(1+4t)e^{3t}. \end{cases}$)

Chương 15

Khái niệm về phương trình vi phân đạo hàm riêng

Đẳng thức chứa ẩn hàm (của nhiều biến độc lập), chứa các biến độc lập và các đạo hàm riêng của ẩn hàm theo các biến độc lập đó được gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Cấp cao nhất của đạo hàm riêng hiện diện trong phương trình được gọi là *cấp của phương trình*. Một phương trình vi phân đạo hàm riêng bao giờ cũng phải chứa ít nhất một trong các đạo hàm riêng của ẩn hàm.

Một hàm có các đạo hàm riêng tương ứng (với giả thiết chúng liên tục) mà khi thế vào phương trình đạo hàm riêng thì phương trình đó trở thành đồng nhất thức được gọi là *nghiệm* của phương trình đó. Quá trình tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng được gọi là *phép tích phân* phương trình đạo hàm riêng. Thông thường việc tích phân một phương trình đạo hàm riêng sẽ cho phép thu được một họ nghiệm phụ thuộc vào các *hàm tùy ý* chứ không phải các hằng số tùy ý như trong trường hợp phương trình vi phân thường.

Nếu phương trình chứa ẩn hàm z chỉ phụ thuộc hai biến độc lập x và y thì nghiệm $z = z(x, y)$ của nó tương ứng với một mặt nào đó trong không gian (x, y, z). Mặt này được gọi là *mặt tích phân* của phương trình đã cho.

Đối với trường hợp khi ẩn hàm phụ thuộc hai biến độc lập các phương trình sau đây được xem là những phương trình cơ bản:

1^+ Phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

(đây là phương trình dạng hypecbolic).

2^+ Phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

(phương trình dạng parabolic)

3^+ Phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(phương trình dạng eliptic).

Phương pháp thường dùng để giải các phương trình trên đây là phương pháp Fourier.

Đầu tiên, tìm các nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng tích các hàm mà mỗi hàm chỉ phụ thuộc một đối số. Sau đó xuất phát từ các điều kiện gọi là *điều kiện biên* người ta xác định các giá trị của các hằng số tùy ý chứa trong các nghiệm riêng đó. Sau cùng nghiệm cần tìm (thỏa mãn phương trình và các điều kiện biên) thu được dưới dạng chuỗi lập nên từ các nghiệm riêng đó.

15.1 Phương trình vi phân cấp 1 tuyến tính đối với các đạo hàm riêng

Giả sử xét phương trình

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x} + X_2\frac{\partial z}{\partial y} = R, \tag{15.1}$$

trong đó X_1, X_2, R là các hàm của x, y, z. Nếu biến z không tham gia trong X_1, X_2 và $R \equiv 0$ thì (15.1) được gọi là phương trình thuần nhất. Trong trường hợp ngược lại (15.1) gọi là phương trình *không thuần nhất*.

Trong trường hợp thuần nhất

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x} + X_2\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{15.2}$$

thì (15.2) luôn luôn có nghiệm $z = C$ là hằng số bất kỳ. Nghiệm này được gọi là *nghiệm hiển nhiên*.

Để giải (15.1) đầu tiên ta giải sơ bộ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2} = \frac{dz}{R} \tag{15.3}$$

Giả sử nghiệm của hệ đó được xác định bởi các đẳng thức

$$\omega_1(x, y, z) = C_1, \quad \omega_2(x, y, z) = C_2.$$

Khi đó nghiệm tổng quát của (15.1) có dạng

$$\Phi[\omega_1(x,y,z),\omega_2(x,y,z)] = 0.$$

trong đó $\Phi(\omega_1,\omega_2)$ là hàm khả vi liên tục tùy ý.

Nếu trong phương trình với hai biến độc lập

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial y}{\partial y} = 0 \tag{15.4}$$

thì hệ (15.3) có dạng

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}\,.$$

Nếu $\psi(x,y)$ là tích phân của nó thì nghiệm tổng quát của (15.4) là

$$z = F(\psi(x,y))$$

trong đó F là hàm khả vi liên tục tùy ý. Trong trường hợp phương trình (15.4) với hai biến độc lập bài toán Cauchy có nội dung như sau: Tìm nghiệm $z = f(x,y)$ sao cho $z(x_0) = \varphi(y)$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Giải. Ta lập hệ

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}\cdot$$

Sử dụng tính chất của tỷ lệ thức ta có

$$\begin{aligned}&\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy}\Rightarrow\frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}\\&\Rightarrow-\frac{1}{(x+y)}=-\frac{1}{x-y}+C\Rightarrow\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C\\&\Rightarrow\frac{2y}{x^2-y^2}=C\Rightarrow\frac{y}{x^2-y^2}=C_1.\end{aligned}$$

Mặt khác $dz=0\Rightarrow z=C_2$. Như vậy nghiệm tổng quát có dạng

$$F\Big(\frac{y}{x^2-y^2},z\Big)=0$$

hay là

$$z=G\Big(\frac{y}{x^2-y^2}\Big).\quad\blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tìm mặt thỏa mãn phương trình

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\frac{\partial z}{\partial y}=z;\quad z=y-4\text{ khi }x=2.$$

Giải. Lập hệ phương trình tương ứng

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y+x^2}=\frac{dz}{z}\cdot$$

Từ phương trình $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y + x^2}$ suy ra

$$y = x(C_1 + x) \Rightarrow \frac{y - x^2}{x} = C_1 \Rightarrow \psi_1 = \frac{y - x^2}{x}\cdot$$

Từ phương trình $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}$ suy ra

$$\frac{z}{x} = C_2 \Rightarrow \psi_2 = \frac{z}{x}\cdot$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$F\Big(\frac{y - x^2}{x}, \frac{z}{x}\Big) = 0$$

hay là

$$z = xf\Big(\frac{y - x^2}{x}\Big). \tag{15.5}$$

Để tìm nghiệm (mặt !) thỏa mãn điều kiện đã cho ta thế $x = 2$ vào ψ_1 và ψ_2 ta có

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &= \frac{y - x^2}{x}\Big|_{x=2} = \frac{y - 4}{2} \Rightarrow y = 2\tilde{\psi}_1 + 4;\\ \tilde{\psi}_2 &= \frac{z}{x}\Big|_{x=2} = \frac{z}{2} \Rightarrow z = 2\tilde{\psi}_2.\end{aligned}$$

Thế y, z vào điều kiện $z = y - 4$ và thế $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$ bởi ψ_1 và ψ_2 ta có

$$2\tilde{\psi}_2 = 2\tilde{\psi}_1 + 4 - 4 \Rightarrow \psi_2 = \psi_1 \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{y - x^2}{x}$$

hay là $z = y - x^2$. Nghiệm này thu được từ (15.5) khi $f(t) \equiv t$. ▲

BÀI TẬP

Tích phân các phương trình sau [1]

[1]Trong các đáp số ta bỏ qua cụm từ"... trong đó ψ, φ, ... là những hàm khả vi liên tục tùy ý."

1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$ (ĐS. $z = x\psi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$)

2. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy.$ (ĐS. $z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2)$)

3. Tìm mặt thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4$$

và đi qua parabon $y^2 = z$, $x = 0$.

(ĐS. Paraboloid tròn xoay $z = x^2 + y^2$)

4. $(1+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z(0) = y^2$.

$$\text{(ĐS.}\quad z = \psi\Big(\frac{y^2}{1+x^2}\Big);\ z = \frac{y^2}{1+x^2}\text{)}$$

5. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2xy.$

$$\text{(ĐS.}\quad x + \frac{z^2}{2} = \psi(x^2 - y^2)\text{)}$$

6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $x > 0$. (ĐS. $F(z, \ln x + \dfrac{y}{z}) = 0$)

Chỉ dẫn. Đây không là phương trình thuần nhất vì hệ số của z'_y có chứa z. Đầu tiên cần giải $dz = 0 \Rightarrow z = C_1$ sau thế $z = C_1$ vào hệ

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-z} = \frac{dy}{-C_1}\cdot$$

15.2 Giải phương trình đạo hàm riêng cấp 2 đơn giản nhất

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng (ptđhr)

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 0$$

trong đó $z(x,y)$ là ẩn hàm của biến độc lập.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big) = 0.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ không phụ thuộc x. Do đó

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C_1(y),$$

trong đó $C_1(y)$ là hàm tùy ý của y. Từ phương trình này thu được

$$z(x,y) = \int C_1(y)dx = xC_1(y) + C_2(y)$$

trong đó $C_1(y)$, $C_2(y)$ là những hàm tùy ý của y. Nếu hàm thu được hai lần khả vi theo x thì $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, do vậy hàm thu được là nghiệm cần tìm. ▲

Ví dụ 2.

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = x^2 - y.$$

Giải. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big) = x^2 - y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \int (x^2 - y)dy = x^2 y - \frac{y^2}{2} + C_1(x).$$

Từ đó lấy tích phân biểu thức thu được theo x ta có

$$z(x,y) = \int \Big[x^2 y - \frac{y^2}{2} + C_1(x)\Big]dx = \frac{x^3 y}{3} - \frac{y^2 x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y),$$

trong đó $C_1^*(x) = \int C_1(x)dx$. Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$z(x,y) = \frac{x^3y}{3} - \frac{y^2x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y)$$

trong đó $C_1^*(x)$ và $C_2(y)$ là những hàm tùy ý và $C_1^*(x)$ là hàm khả vi. ▲

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot \tag{15.6}$$

Giải. Ta viết phương trình (15.6) dưới dạng

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial z}{\partial y} - 2z\Big) = 0.$$

Tích phân đẳng thức này ta có

$$\frac{\partial z}{\partial y} - 2z = C_1(y).$$

Trong phương trình này đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ có thể xem như đạo hàm thông thường theo y, còn x được xem là tham số

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy} - 2z = C_1(y) \Rightarrow z(x,y) &= e^{\int 2dy}\Big[C_2(x) + \int C_1(y)e^{-\int 2dy}dy\Big]\\ &= C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y).\end{aligned}$$

Như vậy

$$z(x,y) = C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y)$$

trong đó $C_2(x)$ và $C_1^*(y)$ là những hàm tùy ý. ▲

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau.

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1.$ (ĐS. $z = x + \varphi(y)$)

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$ (ĐS. $z = y^3 + y\varphi(x) + \psi(x)$)

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$ (ĐS. $z = \varphi(x) + \psi(y)$)

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1.$ (ĐS. $z = xy + \varphi(x) + \psi(y)$)

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 + y.$ (ĐS. $z = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{yx^2}{2} + xC_1(y) + C_2(y)$)

6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y.$ (ĐS. $z = \dfrac{x^2 y}{2} + \dfrac{xy^2}{2} + C_1(x) + C_2(y)$)

7. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y}.$ (ĐS. $z = e^{x+y} + yC_1(x) + C_2(y)$)

8. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0.$ (ĐS. $z = C_1(x) + \dfrac{1}{x}C_2(y)$)

9. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot$ (ĐS. $z = C_1(x)e^{y^2} + C_2(y)$)

10. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x.$ (ĐS. $z = x^2 y + C_1(y) + C_2(x)$)

11. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x + y.$ (ĐS. $z = \dfrac{xy^2}{2} + \dfrac{y^3}{6} + yC_1(x) + C_2(x)$)

15.3 Các phương trình vật lý toán cơ bản

Đối với trường hợp khi ẩn hàm phụ thuộc hai biến độc lập các phương trình vật lý toán sau đây được xem là những phương trình cơ bản.

1^+ Phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot \tag{15.7}$$

2^+ Phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \tag{15.8}$$

3^+ Phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{15.9}$$

Thông thường người ta không tìm nghiệm tổng quát mà là *tìm nghiệm riêng* của phương trình thỏa mãn những điều kiện nào đó gọi là *điều kiện biên* và *điều kiện ban đầu.*

15.3.1 Phương trình truyền sóng

Bài toán cơ bản. Tìm nghiệm riêng của phương trình (15.7) thỏa mãn các điều kiện biên và điều kiện ban đầu sau:

i) Điều kiện biên: (1) $u(0,t) = 0$; (2) $u(\ell,t) = 0$.

ii) Điều kiện ban đầu: (1) $u(x,0) = \varphi_1(x)$; (2) $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(x)$.

Giải. Áp dụng phương pháp Fourier đầu tiên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng tích hai hàm mà một hàm chỉ phụ thuộc x, còn hàm kia chỉ phụ thuộc t:

$$u(x,t) = X(t)T(t). \tag{15.10}$$

Thay $u(x,t)$ vào phương trình đã cho ta thu được

$$XT'' - a^2 TX'' = 0 \to \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} \cdot \tag{15.11}$$

Vế trái của (15.11) không phụ thuộc t, vế phải không phụ thuộc x. Điều đó chỉ xẩy ra khi cả hai vế của (15.11) không phụ thuộc cả x lẫn t tức là bằng một hằng số. Ký hiệu hằng số đó là $-\lambda^2$. Ta thu được

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \tag{15.12}$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2 \Rightarrow T'' + a^2\lambda^2 T = 0 \Rightarrow T = C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t, \tag{15.13}$$

trong đó A, B, C, D là những hằng số tùy ý. Từ (15.12), (15.13) và (15.10) suy rằng

$$u(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t). \tag{15.14}$$

Áp dụng điều kiện biên

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0$$

cho (15.14) và sau khi đã đơn giản cho $T(t) \not\equiv 0$ ta có

$$\begin{aligned} &0 = A\cos 0 + B\sin 0 \Rightarrow A = 0,\\ &0 = A\cos\lambda\ell + B\sin\lambda\ell \Rightarrow \sin\lambda\ell = 0 \text{ (vì } B \neq 0 \text{ khi } A = 0). \end{aligned}$$

Từ đó ta xác định được tham số $\lambda = \dfrac{n\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, \dots$ là tham số tùy ý. Lưu ý rằng nếu trong (15.12) và (15.13) thay cho $-\lambda^2$ ta lấy $+\lambda^2$ thì $X = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$ và đối với hàm X dạng này các điều kiện i) và ii) chỉ được thỏa mãn khi $X \equiv 0$.

Như vậy mỗi giá trị λ (hay n) đều tương ứng với nghiệm riêng dạng

$$u_n = X_nT_n = \left(\alpha_n\cos\frac{an\pi t}{\ell} + \beta_n\sin\frac{an\pi t}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

trong đó $\alpha_n = B_nC_n$, $\beta_n = B_nD_n$ là các hằng số tùy ý.

Vì phương trình đã cho là tuyến tính và thuần nhất nên tổng các nghiệm cũng là nghiệm. Do đó tổng của chuỗi

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1}\left(\alpha_n\cos\frac{an\pi t}{\ell} + \beta_n\sin\frac{an\pi t}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}} \tag{15.15}$$

cũng là nghiệm của phương trình đã cho và nó thỏa mãn các điều kiện biên.

Để xác định α_n và β_n ta sẽ áp dụng các điều kiện ban đầu: khi $t = 0$ thì $u(x,t) = \varphi_1(x)$ nên

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \tag{15.16}$$

Từ (15.15) ta còn có

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{an\pi}{\ell}\Big(\beta_n \cos\frac{an\pi t}{\ell} - \alpha_n \sin\frac{an\pi t}{\ell}\Big)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

và do điều kiện $u'_t(x,0) = \varphi_2(x)$ nên

$$\varphi_2(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{an\pi}{\ell}\beta_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cdot \tag{15.17}$$

Các đẳng thức (15.16) và (15.17) là khai triển của các hàm $\varphi_1(x)$ và $\varphi_2(x)$ thành chuỗi Fourier trong khoảng $(0,\ell)$. Các khai triển này chỉ chứa hàm sin. Các hệ số của khai triển được tính theo công thức

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx; \quad \beta_n = \frac{2}{na\pi}\int_0^{\ell} \varphi_2(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.} \tag{15.18}$$

Như vậy nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện đã nêu là hàm (15.15) với các hệ số α_n và β_n được tính theo công thức (15.18). ▲

BÀI TẬP

Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.19}$$

thỏa mãn các điều kiện ban đầu và điều kiện biên

1. (i) Các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5} & \text{với } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\ell}{2}, \\ -\dfrac{1}{5}(x-\ell) & \text{với } \dfrac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) = 0.$$

(ii) Các điều kiện biên $u(0,t) = 0$, $u(\ell,t) = 0$.

$$(\text{ĐS.}\quad u(x,t) = \frac{4\ell}{5\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi ant}{\ell}\sin\frac{\pi nx}{\ell})$$

2. (i) $u(x,0) = 0$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1$;
(ii) $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

$$(\text{ĐS.}\quad u(x,t) = \frac{2\ell}{\pi^2 a}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{2n-1}{\ell}\pi at\sin\frac{(2n-1)\pi x}{\ell})$$

3. Cũng hỏi như trên đối với phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

và các điều kiện:
(i) $u(x,0) = \sin\dfrac{4\pi x}{3}$, $u'_t(x,0) = 0$;
(ii) $u(0,t) = 0$, $u(3,t) = 0$.

$$(\text{ĐS.}\quad u(x,t) = \cos\frac{8\pi t}{3}\sin\frac{4\pi x}{3})$$

15.3.2 Phương trình truyền nhiệt

Bài toán cơ bản. Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

thỏa mãn các điều kiện

1) $u(x,0) = \varphi(x)$

2) $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

Giải. Áp dụng phương pháp Fourier, ta đặt

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

và phương trình đã cho trở thành

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T} = -\lambda^2$$

và thu được hai phương trình

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X = 0 &\Rightarrow X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,\\ T' + a^2\lambda^2 T = 0 &\Rightarrow T = Ce^{-a^2\lambda^2 t}. \end{aligned}$$

Do đó

$$u(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\big[\alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x\big]$$

trong đó $\alpha = AC$, $\beta = BC$ là những hằng số tùy ý.

Áp dụng điều kiện 2) ta có

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha\cos 0 + \beta\sin 0\\ 0 &= \alpha\cos\lambda\ell + \beta\sin\lambda\ell \end{aligned}\right. \Rightarrow \alpha = 0,\ \lambda = \frac{n\pi}{\ell},\ n = 1,2,3,\dots$$

Cũng như trong 1^+, mỗi giá trị λ (hay n) tương ứng với nghiệm riêng

$$u_n = \beta_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{\ell^2}}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

và tổng của chúng cũng là nghiệm của phương trình

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n\geqslant 1}\beta_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{\ell^2}}\sin\frac{\pi nx}{\ell}\cdot} \tag{15.20}$$

Bây giờ áp dụng điều kiện 1) ta có: $u(x,0) = \varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 1} \beta_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cdot$$

Đó là khai triển Fourier của hàm $\varphi(x)$ trong khoảng $(0,\ell)$. Do đó ta có

$$\beta_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{15.21}$$

Như vậy tổng chuỗi (15.20) với hệ số tính theo vông thức (15.21) là nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện đã cho. ▲

BÀI TẬP

1. Giải phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.22}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & \text{với } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\ell}{2}, \\ \ell - x & \text{với } \dfrac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \ell; \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0.$$

(ĐS. $u = \dfrac{4\ell}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}e^{-\frac{\pi^2 a^2(2n-1)^2}{\ell^2}t}\sin^{\frac{\pi(2n-1)}{\ell}x}$)

2. Giải phương trình (15.22) với các điều kiện

$$u(x,0) = f(x); u(0,t) = A, u(\ell,t) = B; A, B - \text{const}.$$

Chỉ dẫn. Đưa vào ẩn hàm mới

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{B-A}{\ell}x - A.$$

Khi đó (15.22) trở thành $\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ với các điều kiện $v(0,t) = 0$, $v(\ell,t) = 0$, $v(x,0) = u(x,0) - \dfrac{B-A}{\ell}x - A = f(x) - \dfrac{B-A}{\ell}x - A = g(x)$. Đó là bài toán đã biết cách giải.

3. Tìm nghiệm $u(x,y)$ của phương trình $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ thỏa mãn các điều kiện biên $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ và điều kiện ban đầu $u(x,0) = 3\sin 2x$.

(ĐS. $u(x,y) = 3e^{-4y}\sin 2x$)

15.3.3 Phương trình Laplace

Hàm $u(x,y)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền phẳng D nếu nó có các đạo hàm riêng liên tục cấp 2 trên D và trên D nó thỏa mãn phương trình

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{15.23}$$

Tập hợp các hàm điều hòa - chính là tập hợp mọi nghiệm của phương trình Laplace. Cũng như đối với phương trình vi phân thường, để tách một nghiệm xác định của phương trình Laplace người ta phải cho những điều kiện bổ sung. Đối với phương trình Laplace những điều kiện bổ sung đó được phát biểu dưới dạng điều kiện biên, tức là cho những hệ thức mà nghiệm cần tìm phải thỏa mãn trên biên. *Điều kiện đơn giản nhất* trong số đó là cho giá trị của hàm điều hòa cần tìm tại mỗi điểm biên của miền. Người ta gọi bài toán này là bài toán biên thứ nhất hay bài toán Dirichlet.

Bài toán biên của phương trình Laplace được đặt ra như sau. Giả sử miền $D \subset \mathbb{R}^2$ với biên ∂D là đường cong đóng. Hãy tìm hàm $u(x,y)$ liên tục trong $\overline{D} = D \cup \partial D$ sao cho

a) Thỏa mãn phương trình Laplace trong D.

b) Thỏa mãn điều kiện biên

$$u(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial D} = f(x,y),$$

trong đó $f(x,y)$ là hàm được cho trên biên ∂D.

Bài toán vừa nêu còn được gọi là bài toán Dirichlet. Trong giáo trình này ta chỉ xét *bài toán Dirichlet đối với hình tròn.*

Bổ đề 1. *Trong tọa độ cực* (r,φ) *phương trình Laplace* (15.23) *có dạng*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{15.24}$$

Lời giải của bài toán Dirichlet đối với hình tròn (cũng tức là lời giải của phương trình Laplace (15.23) hay (15.24)) với điều kiện biên cho trước được mô tả trong định lý sau đây.

Định lý. *Giả sử* S *là hình tròn đơn vị mở với tâm tại gốc tọa độ và giả sử trên biên* ∂S *cho hàm* 2π*-tuần hoàn liên tục* $f(\theta)$, *trong đó* θ *là góc cực của các điểm biên của* ∂D.

Khi đó trong miền $\overline{S} = S + \partial S$ *tồn tại hàm duy nhất* $u(x,y)$ *liên tục trên* $\overline{S}$ *và điều hòa trên* S *sao cho* $u(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial S} = f(\theta)$. *Trong tọa độ cực* (r,θ) *hàm* $u(r,\theta)$ *biểu diễn được dưới dạng chuỗi*

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$$

trong đó

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \sin n\theta\end{Bmatrix} d\theta, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

là các hệ số Fourier của hàm $f(\theta)$.

Hàm điều hòa có tính chất đặc biệt là thỏa mãn *Định lý về giá trị trung bình*

Định lý. *Nếu hàm* $u(x,y)$ *liên tục trong hình tròn đóng tâm* $O(0,0)$ *và bán kính* R *và điều hòa trong hình tròn đó thì giá trị của hàm*

$u(x,y)$ tại tâm hình tròn bằng trung bình cộng các giá trị của nó trên đường tròn, tức là

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{x^2+y^2=R^2} u(x,y)ds$$

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng hàm $u(x,y) = a(x^2 - y^2) + bxy$ trong đó a, b là các hằng số tùy ý, là hàm điều hòa.

Giải. Ta có

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2ax + by, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2a; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2ay + bx, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta u = 0. \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Chứng minh Bổ đề 1.

Giải. Xét $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Ta có

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{15.25}$$

Áp dụng (15.25) để tính $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ và $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\Big(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big) - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big)\\
&= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
&\quad + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\
&\quad - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\cdot
\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Hãy tìm giá trị của hàm điều hòa $u(x,y)$ tại tâm hình tròn $x^2+y^2 \leqslant R^2$ nếu

$$u(x,y)\big|_{x^2+y^2=R^2} = xy + x - 1.$$

Giải. Áp dụng định lý trung bình đã phát biểu ở trên ta có

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{x^2+y^2=R^2} u(x,y)ds.$$

Chuyển sang tọa độ cực: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ ta thu được

$$u\Big|_{x^2+y^2=R^2} = f(\varphi); \quad ds = Rd\varphi$$

và do đó

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi.$$

Theo giả thiết

$$f(\varphi) = R\cos\varphi \cdot R\sin\varphi + R\cos\varphi - 1 = \frac{R^2\sin 2\varphi}{2} + R\cos\varphi - 1$$

và do đó

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{R^2\sin 2\varphi}{2} + R\cos\varphi - 1\Big)d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{R^2}{4}\cos 2\varphi + R\sin\varphi - \varphi\Big]_0^{2\pi} = -1. \ \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Tìm hàm $u(x,y)$ điều hòa trong hình tròn $x^2+y^2<R^2$ và trên biên hình tròn nó nhận các giá trị

$$u\big|_{x^2+y^2=R^2} = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y.$$

Giải. Bài toán đặt ra là bài toán Dirichlet đối với hình tròn. Chuyển sang tọa độ cực ta có

$$u\big|_{x^2+y^2=R^2} = u(R,\varphi) = R^2\cos^2\varphi - R^2\sin^2\varphi + \frac{1}{2}R\sin\varphi$$
$$= R^2\cos 2\varphi + \frac{R}{2}\sin\varphi. \qquad (15.26)$$

Trong lý thuyết phương trình Laplace người ta đã chứng minh rằng nếu giá trị của hàm điều hòa $u(r,\varphi)$ trên đường tròn bán kính R có khai triển Fourier dạng

$$u(R,\varphi) = f(\varphi) = \sum_{n\geqslant 0} R^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$$

thì trong hình tròn ta có

$$u(r,\varphi) = \sum_{n\geqslant 0} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \qquad (15.27)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Từ điều kiện biên (15.26) thu được

$$\begin{aligned} u(R,\varphi) &= R^2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}R\sin\varphi \\ &= \sum_{n\geqslant 0}(R^nA_n\cos n\varphi + R^nB_n\sin n\varphi) \end{aligned}$$

So sánh các hệ số của $\cos 2\varphi$ và $\sin\varphi$ ta thu được $R^2 = R^2A_2$, $\frac{1}{2}R = R\cdot B_1$. Do đó $A_2 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$; tất cả các số còn lại đều bằng 0. Thế các giá trị tìm được này vào (15.27) ta thu được nghiệm

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= r^2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}r\sin\varphi = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{1}{2}r\sin\varphi \\ &= x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Chứng minh rằng các hàm đã cho là những hàm điều hòa

1. $u = \ln\frac{1}{r}$. *Chỉ dẫn.* Áp dụng ví dụ 2.

2. $u = r^n\cos n\varphi$, $v = r^n\sin n\varphi$.

3. $u - x^3 - 3y^2x$.

4. $u = \sqrt{x + \sqrt{x^2+y^2}}$. *Chỉ dẫn.* Đặt $t = x + \sqrt{x^2+y^2}$.

5. $u = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

Tìm giá trị của hàm điều hòa $u(x,y)$ tại tâm hình tròn $x^2+y^2 \leqslant R^2$ nếu trên biên hình tròn nó nhận các giá trị chỉ ra:

6. $u(x,y) = \frac{y^2}{R^2}$. (ĐS. $u(0,0) = \frac{1}{2}$)

7. $u(x,y) = R + x$. (ĐS. $u(0,0) = R$)

8. $u(x,y) = |x| + |y|$. (ĐS. $u(0,0) = \frac{4R}{\pi}$)

9. $u(x,y) = 2 + 3y$. (ĐS. $u(0,0) = 2$)

Giải bài toán Dirichlet đối với hình tròn $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ nếu cho các điều kiện biên dưới đây (10-11):

10. $u\big|_{r=R} = \dfrac{3x}{R}$. (ĐS. $u(r,\varphi) = \dfrac{3}{R} r\cos\varphi = \dfrac{3x}{R}$)

11. $u\big|_{r=R} = 3 - 5y$. (ĐS. $u = 3 - 5y = 3 - 5r\sin\varphi$)

Tài liệu tham khảo

[1] R. Ph. Apatenok. *Cơ sở Đại số tuyến tính*, Minsk, 1977 (tiếng Nga)

[2] Ia. S. Bugrov, S. M. Nikolski. *Cơ sở Đại số tuyến tính và Hình học giải tích*, M. 1988 (tiếng Nga)

[3] Ia. S. Bugrow, S, M. Nikolski. *Bài tập Toán cao cấp*, M. 1987 (tiếng Nga)

[4] P. E. Danko và các tác giả khác. *Bài tập toán cao cấp T1, 2.* Hà Nội 1983.

[5] Vũ Văn Khương. *Đại số tuyến tính*, Hà Nội 2002.

[6] M. L. Krasnov và các tác giả khác. *Bài tập phương trình vi phân thường*, M. 1978 (tiếng Nga)

[7] L. D. Kudriasev và các tác giả khác. *Bài tập giải tích. T1, 2*, M. 1985 (tiếng Nga)

[8] L. Ia. Okunev. *Bài tập đại số cao cấp*, M. 1964 (tiếng Nga)

[9] L. B. Sneperman. *Bài tập đại số và lý thuyết số*, Minsk 1982 (tiếng Nga)

[10] V. S. Sipatchev. *Bài tập toán cao cấp*, M. 1997 (tiếng Nga)

[11] I. Ia. Vilenkin và các tác giả khác. *Bài tập giải tích, T1, 2*, M. 1971 (tiếng Nga)

[12] D. K. Phadeev, I. S. Sominski. *Bài tập đại số cao cấp*, M. 1977.

[13] Nguyễn Thuỷ Thanh. *Bài tập giải tích*, NXBGD, Hà Nội 2002.

[14] Nguyễn Thuỷ Thanh, Đỗ Đức Giáo. *Hướng dẫn giải bài tập giải tích toán học. T1, 2*, ĐHQG Hà Nội 1999.