HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** **LẦN THỨ XIV, NĂM 2023** **HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN HỌC - LỚP 11**

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

<table>
<tr><td>Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy số $\{a_n\}$ $(n=1,2,...)$ xác định bởi
$$\begin{cases} a_1 \in [0;2] \\ a_{n+1} = \dfrac{-a_n^2 + 2a_n}{2}, n \ge 1. \end{cases}$$
a) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n)$.
(Dựa theo THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương).</td><td>Điểm</td></tr>
<tr><td>a) Từ giả thiết ta có $2(a_{n+1}-a_n) = -a_n^2 \le 0$, suy ra dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm.
Lại do $0 \le a_1 \le 2$ nên $0 \le a_n \le 2, \forall n$, do đó $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn.
Giả sử $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn là A, từ $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$ ta có
$$2A - 2A + A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$</td><td>0,5
0,5

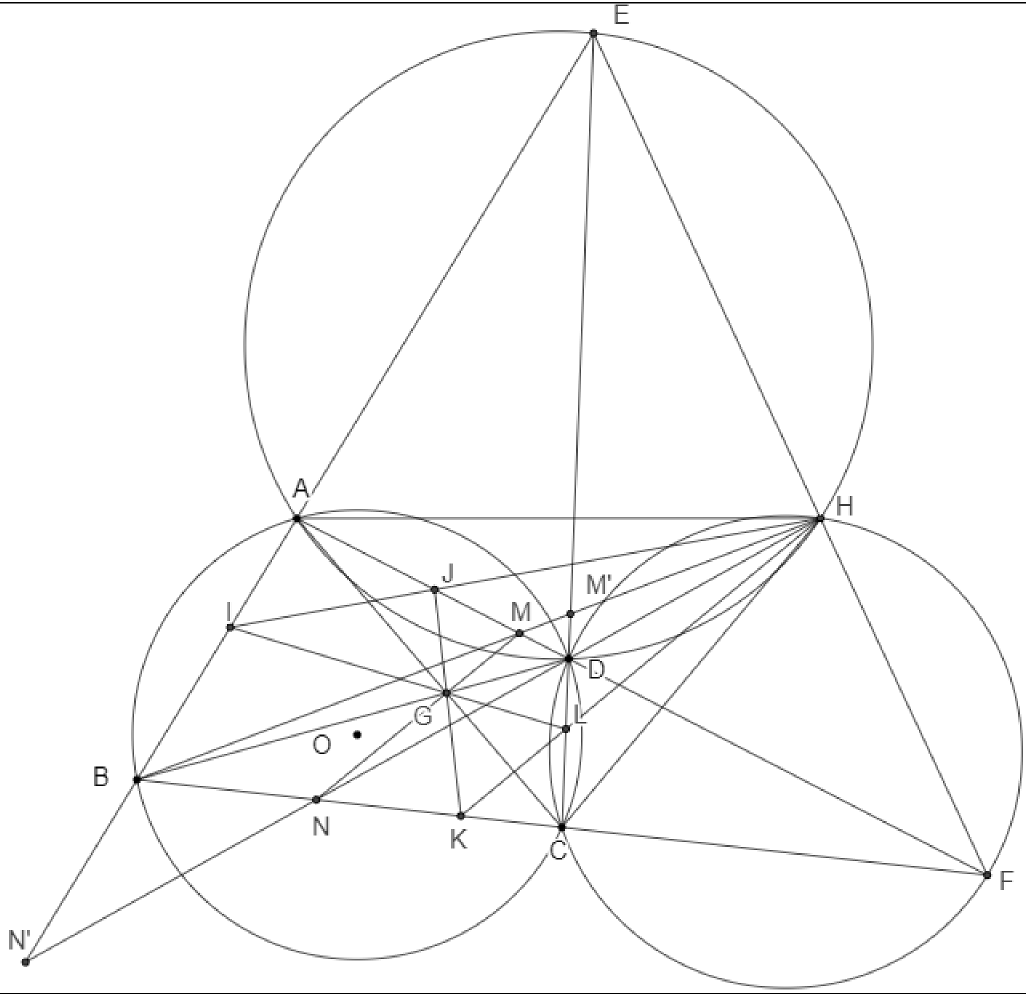
0,5</td></tr>
<tr><td>b) Tiếp theo, ta tính $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n)$.
Nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_1 = 2$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n) = 0$.
Nếu $0 < a_1 < 2$ ta có $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2}{2a_n - a_n^2} = \dfrac{1}{2-a_n} + \dfrac{1}{a_n}$.
Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2-a_n} = \dfrac{1}{2}$.
Ta sử dụng bổ đề quen thuộc : Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \alpha$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \alpha$.
Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{na_n} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(na_n) = 2$.</td><td>
0,5

1,0

0,5

0,5</td></tr>
<tr><td>Câu 2 (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ thỏa mãn:
$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + 2xf(y)), \forall x \ge 0, y \ge 0.$$
(Dựa theo THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên)</td><td>Điểm</td></tr>
<tr><td>Cho $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$.
Chứng minh f là hàm tăng.
Giả sử $z > y$. Khi đó tồn tại $a > 0$ để $z = y + a$.
Chọn $x > 0$ sao cho $x^2 + 2xf(y) = a$.
Khi đó $f(z) = f(y+a) = f(y + x^2 + 2xf(y)) = f(x^2) + f(y) \ge f(y)$.</td><td>1,0</td></tr>
</table>

Vậy f là hàm tăng.	
Trường hợp 1: Tồn tại $z>0$ sao cho $f\left(z\right)=0$. Do f tăng nên $f\left(x\right)=0,\forall x\in\left[0;z\right]$. Ta có $f\left(x\right)+f\left(z\right)=f\left(x+z+2\sqrt{x}f\left(z\right)\right)=f\left(x+z\right)$ $\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x+z\right),\forall x>0$ $\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x+nz\right),\forall x>0,n=0,1,2,...$	**1,0**
Giả sử $t>z$, với $x\in\left(0;z\right)$, ta chọn $n\in\mathbb{Z}^{+}$ để $x+nz>t$. Khi đó $0\le f\left(t\right)\le f\left(x+nt\right)=f\left(x\right)=0\Rightarrow f\left(t\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)=0,\forall x\ge 0$. Thử lại thấy đúng.	**1,0**
Trường hợp 2: $f\left(z\right)>0,\forall z>0$, khi đó f tăng ngặt. Ta có $f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(x+y+2\sqrt{x}f\left(y\right)\right)=f\left(y+x+2\sqrt{y}f\left(x\right)\right),\forall x,y\ge 0.$ Lại do f tăng ngặt nên ta suy ra $\sqrt{x}f\left(y\right)=\sqrt{y}f\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=a\sqrt{x},\forall x\ge 0.$ Thay vào phương trình hàm ở đầu bài ta được $a=1$, do đó $f\left(x\right)=\sqrt{x}$. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đầu bài gồm $f\left(x\right)=0,\forall x\ge 0$ và $f\left(x\right)=\sqrt{x},\forall x\ge 0$.	**1,0**
Câu 3 (4,0 điểm). Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp trong đường tròn (*O*) sao cho *AB* cắt *CD* tại *E* và *AD* cắt *BC* tại *F*. Gọi *G* là giao điểm của *AC* và *BD*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADE* và đường tròn ngoại tiếp tam giác *CDF* cắt nhau tại *D* và *H*. Phân giác trong góc AHB cắt *AB, AD* lần lượt tại *I, J* và phân giác trong góc DHC cắt *CB, CD* lần lượt tại *K, L*. Gọi M, M' lần lượt là giao điểm của *BH* với *AD* và *CD*; N, N' lần lượt là giao điểm của *DH* với *BC* và *BA*. Chứng minh rằng: a) Ba điểm G,I,L thẳng hàng. b) Các đường thẳng KJ, MN, $M'N'$ đồng quy. ***(Nguồn: THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định)***	**Điểm**
Chứng minh dưới đây dựa theo hình vẽ dưới đây. Các trường hợp khác của hình vẽ đều có chứng minh tương tự. a) Trước hết ta chứng minh *H, E, F* thẳng hàng. Thật vậy, do các tứ giác *ABCD, AEHD, CFHD* nội tiếp nên ta có $DHE=BAD=DCF$. Do đó $DHE+DHF=DCF+DHF=180^0$. Suy ra *H, E, F* thẳng hàng.	**0,5**
Ngoài ra do *H* là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$ nên $BCHE$ là tứ giác nội tiếp. Xét hai tam giác *HCB* và *HDA*, ta có $$DHA=DEA=CEB=CHB$$ $$BCH=180^0-HCF=180^0-BEH=ADH.$$ Suy ra hai tam giác *HCB* và *HDA* đồng dạng. Do đó $$\frac{HC}{HD}=\frac{HB}{HA}=\frac{CB}{AD}\quad(1)$$	**0,5**

	
Dễ thấy ΔGBC và ΔGAD đồng dạng nên $\frac{GC}{GD}=\frac{GB}{GA}=\frac{BC}{AD}$ (2) Theo giả thiết thì HL, HI lần lượt là phân giác trong của CHD, AHB nên ta lại có $\frac{LC}{LD}=\frac{HC}{HD},\frac{IB}{IA}=\frac{HB}{HA}$ (3)	**0,5**
Từ (1), (2), (3) ta được $\frac{GC}{GD}=\frac{LC}{LD}$ và $\frac{GB}{GA}=\frac{IB}{IA}$. Suy ra GL, GI tương ứng là phân giác trong các góc CGD và AGB. Mà hai góc này là hai góc đối đỉnh nên *G, I, L* thẳng hàng.	**0,5**
b) Ta sẽ chứng minh *KJ* và *MN*, $M'N'$ đồng quy tại *G*. Xét hai tam giác *AJI* và *CKL* ta có *CK* cắt *AJ* tại *F*, *IJ* cắt *KL* tại *H*, *IA* cắt *LC* tại *E*. Mà *H*, *F*, *E* thẳng hàng nên theo định lý Desargues thì *AC*, *JK*, *IL* đồng quy tại *G*.	**0,5** **0,5**
Xét hai tam giác *FAC* và *HBD* có *FH*, *AB*, *CD* đồng quy tại E. Mà *FA* cắt *HB* tại *M*, *AC* cắt *BD* tại *G*, *FC* cắt *HD* tại *N* nên theo định lý Desargues thì *M*, *N*, *G* thẳng hàng. Lại xét hai tam giác *BHD* và *CEA*, có BC, HE, DA đồng quy tại F; BH cắt CE tại M', BD cắt CA tại *G*, HD cắt AE tại N' nên ta cũng có M', N', G thẳng hàng.	**0,5** **0,5**
Câu 4 (4,0 điểm). Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn tính chất: với mỗi số nguyên dương n, nếu na^2+na+1 là lập phương đúng của một số nguyên dương thì $nb+1$ cũng là lập phương đúng của một số nguyên dương. Chứng minh rằng $4b+1$ là một số chính phương. ***(Nguồn: THPT Chuyên Chu Văn An – Hà Nội)***	**Điểm**

Đặt $n_k = k^3(a^2+a)^2 + 3(a^2+a)k^2 + 3k, \forall k \in \mathbb{N}^*$, khi đó $$n_k a^2 + n_k a + 1 = n_k\left(a^2+a\right) + 1 = \left(k(a^2+a)+1\right)^3$$ là lập phương đúng của một số nguyên dương. Vì thế tồn tại vô số số nguyên dương n để na^2+na+1 là lập phương đúng của một số nguyên dương.	**1,0**
Bổ đề: Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên có bậc bằng 3 thỏa mãn với mọi số nguyên dương n thì $P(n)$ là lập phương đúng. Khi đó sẽ tồn tại đa thức hệ số nguyên $Q(x)$ sao cho $P(x) = \left(Q(x)\right)^3$.	**0,5**
Chứng minh bổ đề: Viết $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$. Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại số nguyên x_n để $x_n^3 = P(n)$. Ta có với mọi số nguyên dương n thì $$x_{n+1}-x_n = \sqrt[3]{a(n+1)^3+b(n+1)^2+c(n+1)+d} - \sqrt[3]{an^3+bn^2+cn+d}$$ $$= \frac{a(3n^2+3n+1)+b(2n+1)+c}{\sqrt[3]{\left(P(n+1)\right)^2}+\sqrt[3]{P(n)P(n+1)}+\sqrt[3]{\left(P(n)\right)^2}}$$ $$= \frac{a\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+b\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{c}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{\left(P(n+1)\right)^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{P(n)P(n+1)}{n^3.n^3}}+\sqrt[3]{\frac{\left(P(n)\right)^2}{n^6}}}.$$ Vì vậy $\lim(x_{n+1}-x_n) = \sqrt[3]{a}$, ta lại có giới hạn của một dãy số nguyên là một số nguyên nên $\sqrt[3]{a}$ là số nguyên và tồn tại n_0 để $x_{n+1}-x_n = \sqrt[3]{a}, \forall n \geq n_0$. Khi đó sẽ tồn tại số nguyên A để $A^3 = a$ và $x_{n+1}-x_n = A, \forall n \geq n_0$. Ta có $x_{n_0+n} = A.n + x_{n_0} = A\left(n+n_0\right) + x_{n_0} - A.n_0, \forall n \geq n_0$ nên $x_n = A.n+B, \forall n \geq n_0$, ở đây $B = x_{n_0} - A.n_0$. Vì vậy $(A.n+B)^3 = x_n^3 = P(n), \forall n \geq n_0$ nên $P(x) = (A.x+B)^3$, lúc này ta chọn $Q(x) = A.x+B$ là bổ đề được chứng minh.	**1,5**
Trở lại bài toán: Với n_k đã chọn ở phía trên, theo giả thiết ta có $n_k b+1$ cũng là lập phương đúng. Xét đa thức $P(x) = b(a^2+a)^2x^3+3b(a^2+a)x^2+3bx+1$, ta có $n_k b+1 = P\left(k\right)$ là lập phương đúng với mọi số nguyên dương k. Áp dụng bổ đề thì sẽ tồn tại các số nguyên A, B để $P(x) = \left(Ax+B\right)^3$. Vậy sau khi đồng nhất hệ số ta sẽ có được $B=1, b=A$ nên $b = a^2+a$. Lúc này có $4b+1 = (2a+1)^2$ là số chính phương, từ đó ta có điều phải chứng minh.	**1,0**
Câu 5 (4,0 điểm). Sắp xếp 9 học sinh đứng cách đều nhau trên một vòng tròn tại vị trí 9 đỉnh của một đa giác đều. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác (có đỉnh là đỉnh đa giác đều) bằng nhau (các đỉnh của hai tam giác có thể trùng nhau nhưng hai tam giác là phân biệt) mà tất cả học sinh đứng ở các đỉnh của hai tam giác đó là cùng giới. (Giả thiết rằng mỗi em học sinh trong 9 em học sinh này chỉ thuộc một trong 2 giới là nam hoặc nữ). ***(Nguồn: THPT Chuyên Bắc Ninh)***	**Điểm**

Giả sử 9 học sinh đứng đứng cách đều nhau trên một vòng tròn tại vị trí 9 đỉnh của một đa giác đều. Khi đó 9 đỉnh này tạo thành đa giác đều $H_1H_2...H_9$. Vì có 9 học sinh đứng tại 9 đỉnh nên có ít nhất 5 đỉnh có học sinh cùng giới (hoặc là nam hoặc là nữ). Để cho tiện, ta giả sử 5 đỉnh này có 5 học sinh nam đứng (tương tự nếu là 5 học sinh nữ). Gọi một tam giác có 3 đỉnh mà 3 học sinh nam đứng là tam giác nam, như vậy có ít nhất $C_5^3 = 10$ tam giác nam.	**1,0**
Bây giờ ta sẽ chứng minh có hai tam giác nam bằng nhau: Thấy 9 đỉnh của đa giác chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 9 cung bằng nhau $H_iH_{i+1},\ i=\overline{1,8}$ và cung H_9H_1; ta gọi mỗi cung này là một “mảnh”. Không mất tính tổng quát, gọi $H_iH_jH_k$ là tam giác có $H_iH_j \le H_jH_k \le H_kH_i$. Hơn nữa số h_{ij} là số mảnh của cung H_iH_j không chứa điểm $H_k\,(i \ne j \ne k \ne i)$; tương tự ta định nghĩa như thế cho số $h_{jk},\ h_{ki}$.	**1,0**
Tương ứng mỗi tam giác $H_iH_jH_k$ với một bộ ba $(h_{ij};\ h_{jk};\ h_{ki})$, ta nhận thấy rằng: $1 \le h_{ij} \le h_{jk} \le h_{ki} \le 7$ và $h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 9$. Chẳng hạn, tam giác với 3 đỉnh $H_1,\ H_3,\ H_7$ ta gọi là tam giác $H_3H_1H_7$ tương ứng với một bộ ba (2; 3; 4) theo thứ tự đó. Như vậy, các tam giác bằng nhau ứng với cùng một bộ ba số như định nghĩa, trong khi các tam giác không bằng nhau ứng với các bộ ba khác nhau. Từ đó, ta xây dựng một song ánh giữa các lớp tam giác bằng nhau với tập hợp các bộ ba số nguyên dương có thứ tự (a,b,c), với $a \le b \le c;\ a+b+c=9$ (*).	**1,0**
Vì có 7 bộ số là $(1,1,7),\ (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4)$ và $(3,3,3)$ thỏa mãn (*) nên có 7 lớp tam giác bằng nhau. Lại do có ít nhất 10 tam giác nam nên có một lớp có ít nhất 2 tam giác nam. Vậy ta có điều phải chứng minh.	**1,0**

……………………..HẾT……………………..