

**ĐỀ 77****HSG TOÁN 9 QUẢNG TRỊ 2023-2024****Bài 1. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức  $P = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-3\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{b-a} \right)$

( $a > 0, b > 0, a \neq b$ )

2. Cho  $a = \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + 1$ . Chứng minh rằng  $a$  là một nghiệm của phương trình  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

**Câu 2. (3,0 điểm)** Giải phương trình  $4x^2 - 2\sqrt{x+1} = x + 2$

**Câu 3. (4,0 điểm)** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương:

1. Chứng minh rằng  $\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$

2. Biết  $a^2+b^2+c^2 \leq 2022abc$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{a}{a^2+bc} \frac{+b}{b^2+ca} \frac{+c}{c^2+ab}$$

**Câu 4. (1,5 điểm)** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng

$y = (m^2 + 10)x - 25$  cắt độ thị hàm số  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt mà hoành độ của chúng đều là các số nguyên

**Câu 5. (6,0 điểm)** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Tiếp tuyến chung gần  $B$  hơn  $A$  tiếp xúc với  $(O)$  và  $(O')$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AB$  và  $MN$ .

a) Chứng minh rằng  $PM^2 = PB \cdot PA$ , từ đó suy ra  $P$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

b) Gọi  $D$  là hình chiếu của  $N$  lên đường thẳng  $MB$ . Chứng minh rằng  $AB$  là phân giác của  $\widehat{MAD}$ .

c) Gọi  $C$  là giao điểm của  $OO'$  và  $DN$ . Chứng minh rằng  $\widehat{CBN} = 90^\circ$

**Câu 6. (1,5 điểm)** Tại điểm tâm chùng số 1 của Trung tâm y tế thành phố Đông Hà, người ta bố trí một phòng chờ cho những người đến tiêm. Để đảm bảo an toàn về phòng chống dịch Covid-19, yêu cầu khoảng cách tối thiểu giữa hai người bất kỳ trong phòng là 2m. Hỏi tại một thời điểm, phòng chờ đó chứa được tối đa bao nhiêu người? Biết rằng nền của phòng chờ là một hình vuông có diện tích  $16m^2$ .

----- HẾT -----

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Bài 1. (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức  $P = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-3\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{b-a} \right)$

( $a > 0, b > 0, a \neq b$ )

2. Cho  $a = \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + 1$ . Chứng minh rằng a là một nghiệm của phương trình  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

#### Lời giải

1.  $P = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \sqrt{a}+\sqrt{b} - \frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) ; \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} ; \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

2. Ta có:  $a = \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Suy ra:  $a^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow (a^2 - 5)^2 = 24 \Leftrightarrow a^4 - 10a^2 + 1 = 0$

Vậy  $a = \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + 1$  là một nghiệm của phương trình

$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

### Câu 2. (3,0 điểm) Giải phương trình $4x^2 - 2\sqrt{x+1} = x + 2$

#### Lời giải

Điều kiện:  $x \geq -1$

Ta có:  $4x^2 - 2\sqrt{x+1} = x + 2 \Leftrightarrow 4x^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow (2x)^2 = (\sqrt{x+1} + 1)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x+1} + 1 \\ -2x = \sqrt{x+1} + 1 \end{cases}$

Đặt  $t = \sqrt{x+1} \geq 0$ , ta được  $\begin{cases} 2t^2 - t - 3 = 0 \\ 2t^2 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$  (do  $t \geq 0$ )

Với  $t = \frac{3}{2}$  thì  $\sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x+1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

Với  $t = \frac{1}{2}$  thì  $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \left\{ \frac{5}{4}; -\frac{3}{4} \right\}$

### Câu 3. (4,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương:

1. Chứng minh rằng  $\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$

2. Biết  $a^2+b^2+c^2 \leq 2022abc$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab}$$

**Lời giải**

1. Ta có:  $a^2+b^2+c^2 \leq 2a\sqrt{bc}$  (BĐT Cauchy)  $\Rightarrow \frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$

2. Ta có:  $\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Tương tự ta có:  $\frac{b}{b^2+ac} \leq \frac{1}{2\sqrt{ac}} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$

$$\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{ab+bc+ca}{2abc} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} \leq 1011$$

GTLN của Q bằng 1011 tại  $a = b = c = \frac{3}{2022}$

**Câu 4. (1,5 điểm)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng

$y = (m^2+10)x - 25$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt mà hoành độ của chúng đều là các số nguyên

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm  $x^2 - (m^2+10)x + 25 = 0$  (\*)

$\Delta = (10+m^2)^2 - 100 = m^4 + 20m^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$  nên phương trình (\*) luôn có 2 nghiệm

Giả sử hai nghiệm đó là  $x_1 \leq x_2$

Theo định lý Vi-et ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 + m^2 \\ x_1 \cdot x_2 = 25 \end{cases}$  ta suy ra  $0 < x_1 \leq x_2$

Từ  $x_1 \cdot x_2 = 25$  và  $x_1, x_2$  nguyên ta suy ra  $(x_1, x_2) = (1, 25)$  hoặc

$(x_1, x_2) = (5, 5)$

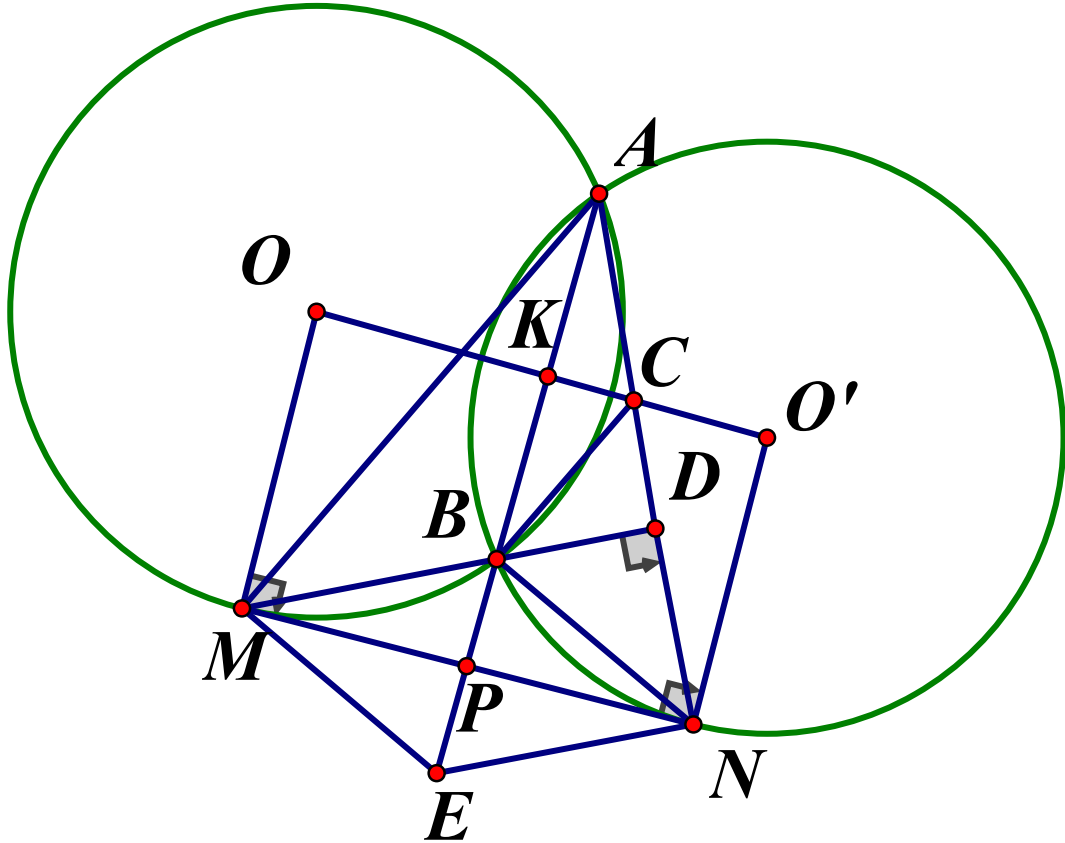
Theo yêu cầu bài toán thì  $x_1 \neq x_2$  nên  $(x_1, x_2) = (1, 25)$

Từ đó suy ra  $m \in \{-4; 4\}$

**Câu 5. (6,0 điểm)** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung gần B hơn A tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt tại M và N. Gọi P là giao điểm của AB và MN.

- a) Chứng minh rằng  $PM^2 = PB \cdot PA$ , từ đó suy ra P là trung điểm của đoạn thẳng MN.
- b) Gọi D là hình chiếu của N lên đường thẳng MB. Chứng minh rằng AB là phân giác của  $\widehat{MAD}$ .
- c) Gọi C là giao điểm của  $OO'$  và DN. Chứng minh rằng  $\widehat{CBN} = 90^\circ$

**Lời giải**



- a) Ta có  $\triangle PBM \sim \triangle PMA$  nên  $PM^2 = PB \cdot PA$  (1)  
Tương tự  $PN^2 = PB \cdot PA$  (2). Từ (1) và (2) ta có  $PM = PN$ , hay P là trung điểm của MN.
- b)  $\triangle MND$  vuông tại D, P là trung điểm của MN nên tam giác  $\triangle PDM$  cân tại P  
Suy ra  $\widehat{MDP} = \widehat{DMP}$   
Lại có  $\widehat{DMP} = \widehat{MAP}$   
Do đó  $\widehat{MDP} = \widehat{MAP}$ , điều này dẫn đến AMPD là tứ giác nội tiếp.  
Suy ra  $\widehat{DAP} = \widehat{DMP} = \widehat{MAP}$ . Vậy AB là phân giác  $\widehat{MAD}$ .
- c) Gọi E là điểm đối xứng của B qua P, K là giao điểm của AB và  $OO'$ .  
Theo câu b) tứ giác AMPD nội tiếp nên  $BD \cdot BM = BP \cdot BA = 2BP \cdot BK = BK \cdot BE$   
Suy ra MEDK nội tiếp. Do đó  $\widehat{DKE} = \widehat{DME}$

Mà BMEN là hình bình hành nên  $BN \parallel ME$  suy ra  $\widehat{DKE} = \widehat{DME} = \widehat{DBN}$  (1)

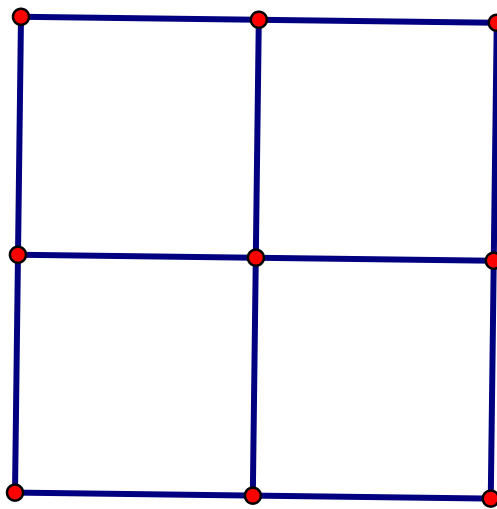
Mặt khác DCKB nội tiếp nên  $\widehat{DKE} = \widehat{DCB}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\widehat{DBN} = \widehat{DCB}$

Do đó  $\widehat{CBN} = \widehat{CBD} + \widehat{DBN} = \widehat{CBD} + \widehat{DCB} = 90^\circ$

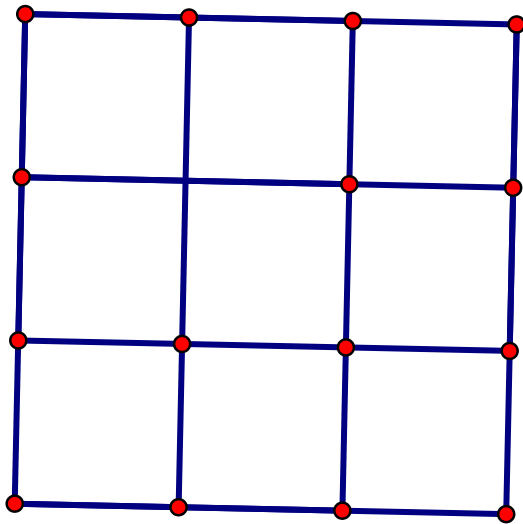
**Câu 6. (1,5 điểm)** Tại điểm tâm chung số 1 của Trung tâm y tế thành phố Đông Hà, người ta bố trí một phòng chờ cho những người đến tiêm. Để đảm bảo an toàn về phòng chống dịch Covid-19, yêu cầu khoảng cách tối thiểu giữa hai người bất kỳ trong phòng là 2m . Hỏi tại một thời điểm, phòng chờ đó chứa được tối đa bao nhiêu người? Biết rằng nền của phòng chờ là một hình vuông có diện tích  $16m^2$ .

**Lời giải**



Khi bố trí người ngồi tại các đỉnh của hình vuông như hình vẽ thì phòng chứa được 9 người đảm bảo yêu cầu phòng dịch. Ta sẽ chỉ ra tại một thời điểm, phòng chờ đó chứa được tối đa 9 người.

Thật vậy, giả sử phòng chứa được hơn 9 người, ta chia nền hình vuông thành 9 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông có kích thước  $\frac{4}{3}$  m (ta gọi là hình vuông cơ sở)



Theo nguyên lý Dirichlet có một hình vuông cơ sở chứa ít nhất 2 người. Khi đó khoảng cách giữa hai người đó không lớn hơn độ dài đường chéo của hình vuông cơ sở.

Tuy nhiên độ dài của đường chéo hình vuông cơ sở là  $l = \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} < 2$ . Điều này không thỏa mãn yêu cầu khoảng cách hai người tối thiểu  $2m$ . Do đó số người tối đa phòng chờ chứa được không vượt quá 9.

Vậy tại một thời điểm, phòng chờ đó chứa được tối đa 9 người

----- HẾT -----