**II. PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN ( NẾU CẦN BỔ XUNG MỜI CÁC THẦY CÔ CHO Ý KIẾN )**

**1. XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT**

1.1. DỰ ĐOÁN SỐ HẠNG TỔNG QUÁT VÀ CHỨNG MINH BẰNG QUY NẠP

1.2. DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC TRUY HỒI

|  |
| --- |
| 1. **Cho dãy số** **biết** **. Xác định số hạng tổng quát của dãy.**
 |
| **Hướng dẫn giải** |
| Dãy cấp số nhân với công bội là. |
| Nên .  |
| Do đó  |

1. a) Tính giới hạn .

b) Cho dãy số (un) xác định bởi : . Tìm công thức tính theo .

**Hướng dẫn giải**

a) Tính giới hạn 

Ta có: 



Vậy .

b) Ta có:



Dự đoán: 

Chứng minh:

Ta có: , công thức (1) đúng với 

Giả sử công thức (1) đúng với  ta có: 

Ta có: 

Công thức (1) đúng với 

Vậy  

1.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

1. Cho dãy số  xác định bởi  Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy dãy đã cho là dãy số dương, do đó không có số hạng nào của dãy bằng 0. Từ công thức truy hồi của dãy ta có 

Đặt , ta được dãy số 

Dễ thấy dãy  là dãy số dương và . Do đó

 Vậy ta có .

Xét hàm số . Ta có  Do đó có hai dãy con đơn điệu của dãy  và hai dãy con này đều bị chặn nên chúng có giới hạn. Giả sử  và  thì ta có hệ



Ta thấy chỉ có  thỏa mãn và đây là giới hạn cần tìm.

1. Tìm số các dãy số  thỏa mãn điều kiện: .

**Hướng dẫn giải**

 Viết lại  với 

Nhận xét: 

Vì vậy: 

 Với  tồn tại duy nhất α:  và .

Lúc đó: ; .

Quy nạp ta được: .



⇔ 

Vì  nên 

Do  nên: .

Từ đó có tất cả  giá trị u1 thỏa bài toán: .

Do đó có tất cả  dãy số  thỏa điều kiện đã cho.

1. Cho  là các nghiệm dương của phương trình  được sắp theo thứ tự tăng dần. Tính .

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số , với . Ta có  =>  tăng từ  đến 

Suy ra: trong khoảng  phương trình  có nghiệm duy nhất 

 với =>  => 

 =  = .

1. Cho dãy số xác định như sau: .

Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

\* Suy ra dãy số  tăng; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử tồn tại , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: 

- Nếu có chỉ số  mà  thì  nên  trái với kết quả .

Do đó:  với mọi  hay  nói riêng  từ đó ta được .

\* Đảo lại: Nếu 



và .

Bằng quy nạp ta chứng minh được  (H/s trình bày ra)

Như vậy dãy  tăng, bị chặn trên bới , do đó dãy  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn và 

1. Cho hai dãy số  và  được xác định như sau:

, ;, 

Chứng minh rằng  và  có cùng giới hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Bằng quy nạp, ta chứng minh rằng:

; (2)

Từ (1), (2) tồn tại  và 

Ngoài ra: 



Vậy hai dãy  có cùng giới hạn chung là 

1. Cho dãy số (xn) thỏa mãn: . Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) Ta chứng minh   với mọi n  1 (1)

Thật vậy:  đúng

Giả sử (1) đúng với  

 = 



 (đpcm)

\*) Ta chứng minh  có giới hạn.

NX:  tăng và  với mọi 

Ta có  với mọi  1

Vậy  có giới hạn.

1.4. PHƯƠNG PHÁP DÃY SỐ PHỤ

1.5. DÃY SỐ SINH BỞI PHƯƠNG PHƯƠNG TRÌNH

1.6. SỬ DỤNG PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC

1. Cho dãy số  định bởi . Tính 

**Hướng dẫn giải**

Tính đúng 



Từ  ta viết được 

Theo quy nạp từ  và 

Vậy 

1.7. CÁC DẠNG KHÁC

1. Cho dãy số thực được xác định như sau: 

Chứng minh rằng:  ( kí hiệu  là phần nguyên của số thực ).

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh rằng: , với 

,  quy nạp .Với  đúng giả sử đúng đến . Tức là . Từ đó suy ra



 

Việc tiếp theo ta chứng minh . Ta có BĐT  thật vậy,

Xét hàm số  

 hàm số  giảm trên khoảng

, ta suy ra  áp dụng



Từ đó: 

**2. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ**

**3. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**

3.1. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA

1. Cho dãy số  thỏa mãn .

Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn bằng  khi .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có , do đó dãy số  là dãy tăng, vì

vậy 

,

. Mà  nên theo định lý kẹp ta có



1. Tìm tất cả các hằng số sao cho mọi dãy số dãy số thỏa mãn: 

đều hội tụ. Với giá trị  tìm được hãy tính giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu , thì từ giả thiết, ta có 

Từ đây bằng quy nạp, ta suy ra . Do  nên  khi . Do đó,  không thỏa mãn.

+ Nếu , thì tồn tại  sao cho . Thật vây, lấy  đặt , thì

.

Chú ý là  Do đó, ta chỉ cần chọn như trên và  thì được 2 bất đẳng thức nêu trên.

Xét dãy số xác định bởi



thì dãy thỏa mãn giả thiết nhưng không hội tụ. Thành thử,  cũng không thỏa mãn.

+ Nếu , thì . Suy ra dãy tăng và bị chặn. Do đó, hội tụ.

Đặt thì từ giả thiết ta có  hay  Vậy 

1. Cho dãy số (xn) thỏa mãn: . Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) Ta chứng minh  với mọi   (1)

Thật vậy:  đúng

Giả sử (1) đúng với  

 



 (đpcm)

\*) Ta chứng minh  có giới hạn.

NX:  tăng và  với mọi 

Ta có  với mọi 1

Vậy  có giới hạn.

1. Cho dãy số  xác định bởi  .

Đặt . Tính lim.

**Hướng dẫn giải**

+ Ta có (1)

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được .

+ Từ (1) suy ra 

Do đó 

+ Ta chứng minh .

Thật vậy, ta có 

Suy ra là dãy tăng, ta có 

Giả sử bị chặn trên và  thì . Khi đó 

( vô lí). Suy ra không bị chặn trên, do đó 

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi:*.* Tìm .

**Hướng dẫn giải**

- Vì  nên đặt .

Ta có .

Bằng quy nạp, ta chứng minh được



- Xét



3.2. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

1. Cho dãy số  thỏa mãn 

Tìm  với 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Với n:  (1)

 (2)

Từ (1) và (2) ta có 

Suy ra 



 suy ra =

3.3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH LÍ KẸP

3.3. CÁC DẠNG KHÁC

1. Cho hai dãy số  và  xác định như sau: và khi .

Chứng minh rằng hai dãy  và  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có  suy ra  mà  khi 

Suy ra 



bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được





Mặt khác  nên ta có





Do đó



1. Với mỗi , đặt .

a) Chứng minh đa thức  có duy nhất 1 nghiệm thực thuộc .

b) Chứng minh tồn tại giới hạn của dãy .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có 

nên trong mỗi khoảng ,  có 1 nghiệm của phương trình .

Mặt khác, ta có  nên đa thức  có duy nhất 1 nghiệm  thuộc khoảng 

b) Ta có 

Do  có nghiệm không là nghiệm của nên nghiệm của phương trình  là nghiệm của phương trình:



Ta có: 

Nên nghịch biến trên 

Lại có: 

⇒ 



Do đó dãy  là dãy giảm.

Lại có . Vậy dãy  có giới hạn.

**4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**

4.1. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA

4.2. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

4.3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH LÍ KẸP

4.3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐẠO HÀM

4.4. CÁC DẠNG KHÁC

**------HẾT------**