

(Đề thi gồm có 01 trang)

Bài 1 (5 điểm).

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$

c) So sánh P^2 với $2P$.

Bài 2 (3 điểm).

a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$

b) Tìm x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1} \end{cases}$$

Bài 3 (2 điểm).

Cho x và y là các số hữu tỉ và thỏa mãn đẳng thức $x^3 + y^3 = 2xy$.

Chứng minh rằng $\sqrt{1 - xy}$ là một số hữu tỉ.

Bài 4 (5 điểm).

Cho đường tròn (O,R) đường kính AB. Qua điểm C thuộc đường tròn kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi I, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến đường thẳng d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB. Chứng minh:

a) $CI = CK$

b) $CH^2 = AI.BK$

c) AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính IK.

Bài 5 (2 điểm).

Cho hai điểm A, B cố định và điểm M di động sao cho tam giác MAB có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB và K là chân đường cao vẽ từ M của tam giác MAB. Tìm giá trị lớn nhất của tích $KH.KM$.

Bài 6 (3 điểm).

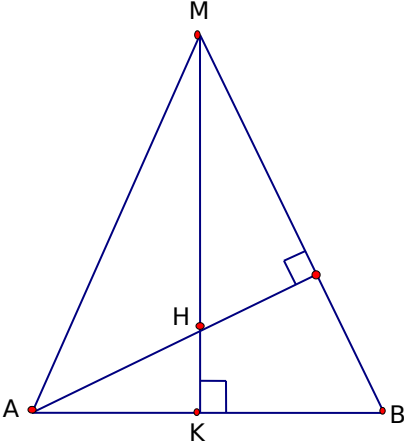
a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$

b) Cho $0 < x, y, z \leq 1$

Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+y+xz} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{3}{x+y+z}$

Họ tên học sinh:; Số báo
danh:

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (5 đ)		
a) 2,0 đ	<p>Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$</p> $P = \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $= \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ $= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
b) 1,5 đ	$P = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \text{ (vì } \sqrt{x}+3>0 \text{ với } x \geq 0)$ $\Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$ <p>Vậy với $x=4$ thì $P = \frac{2}{7}$</p>	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
c) 1,5 đ	$P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} > 0 \text{ vì } x \geq 0$ $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2 \text{ vì } x+\sqrt{x}+1 \geq 1$ <p>Ta có $P > 0$ và $P \leq 2$ nên $P.(P-2) \leq 0$ $\Rightarrow P^2 - 2P \leq 0 \Rightarrow P^2 \leq 2P$</p>	0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ
Bài 2 (3 đ)		
a) 1,0 đ	$\sqrt{x^2-4}-x^2+4=0 \quad \text{Điều kiện } x \geq 2$ $\sqrt{x^2-4}-(x^2-4)=0 \quad \text{Đặt } \sqrt{x^2-4}=t \text{ (} t \geq 0)$ $\Leftrightarrow t-t^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \end{cases}$ <p>*$t=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$ *$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$ (Thỏa mãn điều kiện)</p>	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
b) 2,0 đ	<p>Điều kiện: $x, y, z \geq \frac{1}{4}$</p> <p>Cộng từng vế ta có :</p>	0,5 đ

<p>b) 2,0 đ</p>	<p>Vì $\angle A I = \angle A C O$ (So le trong, $A I // C O$), $\angle A C O = \angle A O$ ($\Delta O A C$ cân) $\Rightarrow \angle A I = \angle A O \Rightarrow \Delta I A C = \Delta H A C$ (Cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow A I = A H$. Tương tự: $B K = B H$. Do $\Delta A B C$ nội tiếp đường tròn đường kính $A B$ nên $\Delta A B C$ vuông tại C. $\Rightarrow C H^2 = H A . H B = A I . B K$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)</p>	<p>0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ</p>
<p>c) 1,5 đ</p>	<p>Ta có: $\Delta I A C = \Delta H A C \Rightarrow C I = C H = C K$ $\Rightarrow H \in (C, \frac{I K}{2})$ Mà $C H \perp A B$ tại H $\Rightarrow A B$ là tiếp tuyến của $(C, \frac{I K}{2})$ Hay $A B$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $I K$.</p>	<p>0,5 đ 0,5 đ 0,5 đ</p>
<p>Bài 5 (2 đ)</p>		
	<p>Ta có: $\angle B M K = \angle H A K$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) Suy ra: $\angle B K M \sim \angle H K A$ (g.g) $\Rightarrow \frac{B K}{H K} = \frac{K M}{K A} \Rightarrow B K . K A = K M . K H$ Mặt khác: $B K . K A \leq \left(\frac{B K + K A}{2} \right)^2 = \frac{A B^2}{4}$. (bất đẳng thức Cosi) Dấu “=” xảy ra khi $B K = K A$ $\Rightarrow K M . K H \leq \frac{A B^2}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của tích $K M . K H = \frac{A B^2}{4}$ khi $B K = K A$, tức K là trung điểm của cạnh $A B$.</p>	<p>0,5 đ 0,25 đ 0,5 đ 0,5 đ 0,25 đ</p>

Bài 6
3 đ

 a)
 1,5 đ

Ta có:

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x^2 y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y)^2 - (2xy+1)^2 = -1 \Leftrightarrow (2x+2y-2xy-1)(2x+2y+2xy+1) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2xy-1=-1 \\ 2x+2y+2xy+1=1 \\ 2x+2y-2xy-1=1 \\ 2x+2y+2xy+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=1 \\ y=-1 \\ x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

 Vậy phương trình có 3 nghiệm là $(x,y) = (0;0); (1;-1); (-1;1)$

0,5 đ

0,5 đ

0,5 đ

 b)
 1,5 đ

 Vì $0 < x, y, z \leq 1$ nên $(1-x)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow 1+xy \geq x+y$

$$\Leftrightarrow 1+z+xy \geq x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{1+z+xy} \leq \frac{y}{x+y+z} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{x}{1+y+xz} \leq \frac{x}{x+y+z} \quad (2); \quad \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{z}{x+y+z} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3) ta được

$$\frac{x}{1+y+xz} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{x+y+z}{x+y+z} \leq \frac{3}{x+y+z}$$

 Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

0,25 đ

0,25 đ

0,25 đ

0,25 đ

0,25 đ

0,25 đ

Hết