

Câu 1. (1,5 điểm) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{8} + 2\sqrt{18} - 5\sqrt{2}$

b) $B = \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{4\sqrt{x} - 4}{x - 2\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 1; x \neq 4)$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho Parabol $(P): y = -2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 3$

a) Vẽ Parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy

b) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ sao cho (d_1) song song (d) và đi qua điểm $A(-1; -2)$

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

c) Cho tam giác vuông cạnh huyền bằng $13cm$. Tính các cạnh góc vuông của tam giác, biết hai cạnh góc vuông hơn kém nhau $7cm$

Câu 4. (1,5 điểm) Cho phương trình $x^2 - mx - 3 = 0$ (1) (với m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi

giá trị của m . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$A = \frac{2(x_1 + x_2) + 5}{x_1^2 + x_2^2}$$

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H

- a) Chứng minh rằng các tứ giác $CDHE, BCEF$ nội tiếp
- b) Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại M . Chứng minh $MB \cdot MC = ME \cdot MF$
- c) Đường thẳng qua B và song song với AC cắt AM, AH lần lượt tại I, K . Chứng minh rằng $HI = HK$.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $A = \sqrt{8} + 2\sqrt{18} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2 \cdot 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $B = \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{4\sqrt{x} - 4}{x - 2\sqrt{x}}$

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

$$B = \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{4\sqrt{x} - 4}{x - 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{x})(\sqrt{x} - 2) - x \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{4(\sqrt{x} - 1)}{4(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{x - 4 - x \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{4(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{-4}{4(\sqrt{x} - 1)} = -\frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

Câu 2.

a) Học sinh tự vẽ (P) và (d)

b) Đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song với đường thẳng $(d): y = x - 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq -3 \end{cases} \Rightarrow (d_1): y = x + b (b \neq -3)$$

Đường thẳng (d_1) đi qua điểm $A(-1; -2)$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng (d_1) ta được: $-2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1 (tm)$

Vậy $(d_1) y = x - 1$

Câu 3.

a)
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3 - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 1)$

b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$. Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$

$$t^2 - 9t + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 5(tm) \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ t_2 = 4(tm) \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Phương trình thành

$$S = \{ \pm\sqrt{5}; \pm 2 \}$$

Vậy

$$x(cm), (0 < x < 13)$$

c) Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ của tam giác đã cho là

Độ dài các cạnh góc vuông hơn kém nhau $7cm \Rightarrow$ độ dài cạnh góc vuông lớn là $x + 7(cm)$

Áp dụng định lý Pytago ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 14x + 49 = 169$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 12x - 60 = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) + 12(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 12)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(tm) \\ x = -12(ktm) \end{cases}$$

Vậy độ dài cạnh góc vuông nhỏ của tam giác là $5cm$, độ dài cạnh góc vuông lớn của tam giác là $5 + 7 = 12cm$

Câu 4.

a) Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) + (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ thì phương trình có tập nghiệm $S = \{ -1; 3 \}$

b) Phương trình có $\Delta = m^2 + 12 > 0 \quad \forall m$

\Rightarrow Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có

$$A = \frac{2(x_1 + x_2) + 5}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2m + 5}{m^2 + 6}$$

Ta có:

$$= \frac{m^2 + 2m + 1 - m^2 - 6 + 10}{m^2 + 6} = \frac{(m + 1)^2 + 10}{m^2 + 6} - 1$$

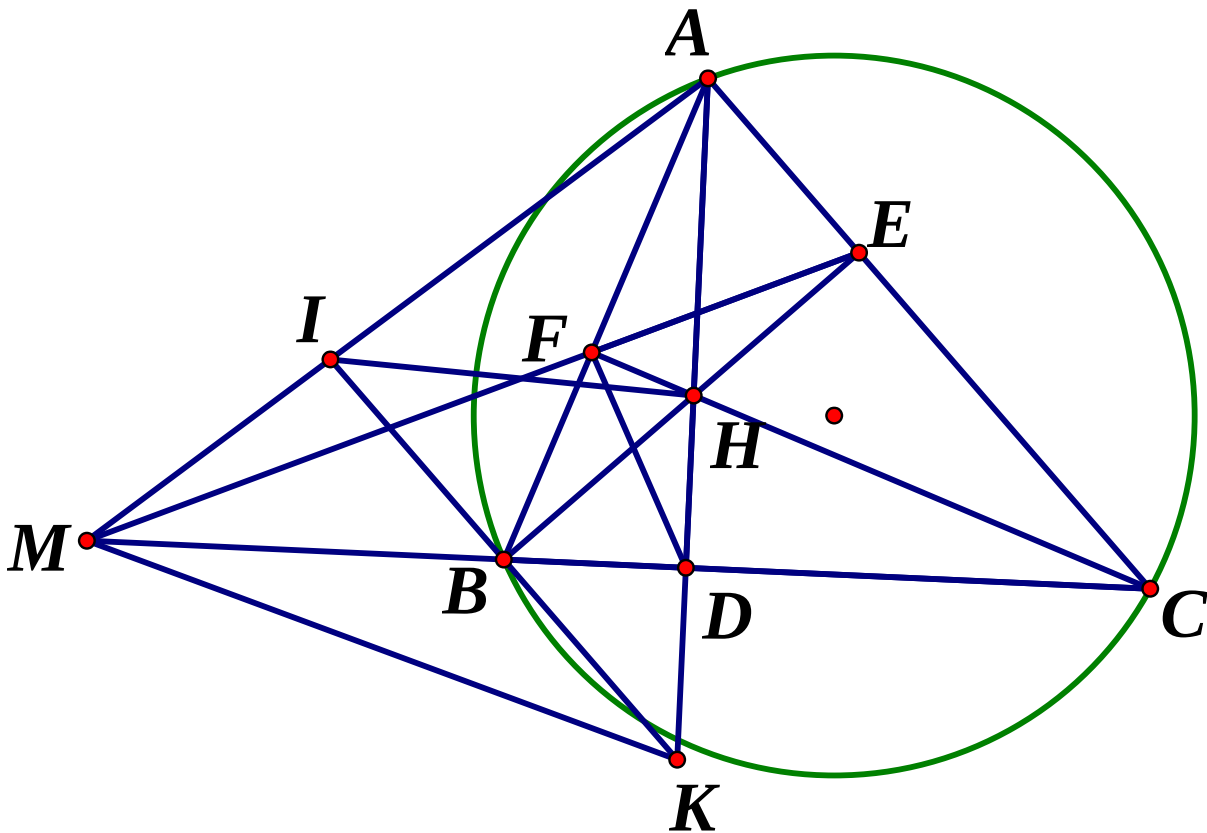
Để $A_{\max} \Leftrightarrow (m^2 + 6)_{\min} \Leftrightarrow \text{Min}(m^2 + 6) = 6 \Leftrightarrow m = 0$

Để

$$\text{Max}A = \frac{1^2 + 10}{6} - 1 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy

Câu 5.



$$\begin{cases} BE \perp AC(gt) \Rightarrow \sphericalangle BEC = \sphericalangle HEC = 90^\circ \\ AD \perp BC(gt) \Rightarrow \sphericalangle HDC = 90^\circ \\ CF \perp AB(gt) \Rightarrow \sphericalangle BFC = 90^\circ \end{cases}$$

a) Ta có:

Xét tứ giác $CDHE$ có: $\sphericalangle HEC + \sphericalangle HDC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $CDHE$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $BCEF$ có: $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau).

b) Do tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \sphericalangle MBF = \sphericalangle FEC = \sphericalangle MEC$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp)

Xét tam giác MBF và tam giác MEC có:

$$\sphericalangle EMC \quad \sphericalangle MBF = \sphericalangle MEC \text{ (cmt)} \Rightarrow \Delta MBF \sim \Delta MEC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{ME}{MC} \Rightarrow MB \cdot MC = ME \cdot MF$$

c) Nối FD

$$FB \text{ là tia phân giác} \quad \sphericalangle MFD \Rightarrow \frac{MB}{BD} = \frac{MF}{FD}$$

$FB \perp FC \Rightarrow FC$ là tia phân giác ngoài

$$\Rightarrow \frac{OD}{MC} = \frac{FD}{MF} \Rightarrow \frac{MC}{CD} = \frac{MF}{FD}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{BD} = \frac{MC}{CD} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BK}{AC} &= \frac{BD}{DC} \\ \frac{BI}{AC} &= \frac{MB}{MC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BK = BI$$

Áp dụng Ta-let suy ra

$\Rightarrow HB$ đồng thời là đường trung tuyến và là đường cao

$\Rightarrow \Delta HIK$ cân tại $H \Rightarrow HI = HK$