

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
Mở đầu	2
Chương 1: Cơ sở lý luận	3
1. Bất đẳng thức Cauchy	3
2. Hệ quả bất đẳng thức Cauchy	3
Chương 2: Một số ứng dụng của bất đẳng thức Cauchy	4
I. Ứng dụng bất đẳng thức Cauchy vào chứng minh bất đẳng thức	4
II. Ứng dụng bất đẳng thức Cauchy vào giải phương trình, bất phương trình	8
III. Ứng dụng bất đẳng thức Cauchy vào tìm GTLN- GTNN	13
1. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy	13
2. Ứng dụng vào tìm GTLN- GTNN	17
IV. Ứng dụng bất đẳng thức Cauchy vào chứng minh tính chất nghiệm	20
Kết luận	21
Tài liệu tham khảo	22

MỞ ĐẦU

1- LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI :

Bất đẳng thức là một trong những mảng kiến thức khó nhất của toán học phổ thông mà học sinh cần phải nắm được, bởi ứng dụng của bất đẳng thức xuyên suốt chương trình toán học THPT. Đặc biệt phải kể đến mảng ứng dụng, bởi lí do đó nên tôi chọn đề tài : “ Bất đẳng thức Cauchy và một số ứng dụng ”. Đề tài cũng giúp tôi hiểu sâu hơn về phương pháp dạy bài tập bất đẳng thức cho học sinh.

2- MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU :

Để cho học sinh thấy được vai trò bất đẳng thức Cauchy trong giải quyết bài toán. Yêu cầu đặt đến đối với học sinh là thấy rõ, hiểu và biết cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy trong thực hành giải toán.

3- ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU :

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là vận dụng bất đẳng thức Cauchy vào giải quyết một số bài toán liên quan trong các đề thi HSG và tuyển sinh ĐH.

4- NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU :

Đưa ra những cơ sở lí luận về bất đẳng thức Cauchy. Từ đó mô tả phân tích để tìm ra biện pháp dạy cho học sinh cách vận dụng vào giải toán.

5- CÁC PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU CHÍNH :

Với nền tảng cơ sở lí luận về phương pháp dạy toán học, thì đòi hỏi phương pháp phân tích sản phẩm, tổng kết kinh nghiệm để rút ra được lí thuyết cho chính bản thân người dạy.

6- KẾT CẤU CỦA ĐỀ TÀI :

Đề tài gồm 2 chương :

Chương 1 : Cơ sở lí luận.

Chương 2 : Một số ứng dụng của bất đẳng thức Cauchy.

Chương 1 : Cơ sở lí luận

1. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

Cho $a_i \in \mathbb{R}_+, i = \overline{1, n}$. Ta có : $\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (1)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.
CM

- Với $n = 2$ ta có : $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$ (luôn đúng).
- Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là : $\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i\right)^k \geq \prod_{i=1}^k a_i$. Ta chứng minh (1)

cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, giả sử

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1} \Rightarrow a_{k+1} \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$$

Đặt $x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i, a_{k+1} = x + y, (y \geq 0)$.

$$\text{Vì } \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i + \frac{a_{k+1}}{k+1} = \frac{k}{k+1} x + \frac{x+y}{k+1} = \left(x + \frac{1}{k+1} y\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } \left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^{k+1} &= \left(x + \frac{1}{k+1} y\right)^{k+1} \geq x^{k+1} + \frac{k+1}{k+1} x^k y \\ &\geq x^k (x + y) \geq \prod_{i=1}^{k+1} a_i \quad (\text{đúng}). \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học bất đẳng thức (1) đúng $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Với $n = 1$ thì hiển nhiên bất đẳng thức (1) đúng.

2. HỆ QUẢ BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

+ Hệ quả 1:

Nếu $\sum_{i=1}^n a_i = S(\text{const})$ thì $\text{Max}\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \left(\frac{S}{n}\right)^n$ xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

+ Hệ quả 2:

Nếu $\prod_{i=1}^n a_i = P(\text{const})$ thì $\text{Min}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = n\sqrt[n]{P}$ xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Chương 2 : Một số ứng dụng của bất đẳng thức Cauchy.

I.ỨNG DỤNG BĐT CAUCHY VÀO CHỨNG MINH BĐT

Bài toán 1 (BĐT Bernoulli)

Cho $\alpha \in \mathbb{R}_+, x \geq -1$, khi đó :

- $\alpha \geq 1$, ta có: $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$ (2). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \alpha=1$ hoặc $x=0$.
- $0 \leq \alpha < 1$, ta có: $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$ (3). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \alpha=0$ hoặc $x=1$.

CM

- $\alpha \geq 1$. Trước hết ta chứng minh $\alpha \in \mathbb{Q}_+$

+ Với $\alpha=1$ thì bất (2) hiển nhiên đúng.

+ Với $\alpha > 1$, đặt $\alpha = \frac{n}{m}, (n, m)=1, n > m$. Khi đó ta có :

$$m(1+\alpha x) + \underbrace{1+1+\dots+1}_{n-m} \geq n \sqrt[n]{(1+\alpha x)^m} \Leftrightarrow \left(\frac{m(1+\alpha x) + (n-m)}{n} \right)^n \geq (1+\alpha x)^m$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^n \geq (1+\alpha x)^m \Leftrightarrow (1+x)^{\frac{n}{m}} \geq (1+\alpha x) \Leftrightarrow (1+x)^\alpha \geq (1+\alpha x).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

+ Với $\alpha \in I_+$, giả sử α là số vô tỷ tùy ý. Khi đó vì $\mathbb{Q}$ là tập trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại dãy số hữu tỷ $(\alpha_n)_{n=1}^\infty, \alpha_n > 1$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$.

Với mọi n , ta có: $(1+x)^{\alpha_n} \geq 1+\alpha_n x$. chuyển qua giới hạn ta có :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)^{\alpha_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\alpha_n x) \text{ hay } (1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x. \text{ Như vậy BĐT (2)}$$

được chứng minh trọn vẹn.

- $0 \leq \alpha < 1, \alpha \in \mathbb{Q}_+$

+ Với $\alpha=0$, thì bất (3) hiển nhiên đúng.

+ Với $0 < \alpha < 1$, đặt $\alpha = \frac{m}{n}, (n, m)=1, m < n, (m, n \in \mathbb{N}_+^*)$.

$$\text{Ta có: } m(1+x) + (n-m) \geq n \sqrt[n]{(1+x)^m} \Leftrightarrow \left(\frac{mx+n}{n} \right)^n \geq (1+x)^m$$

$$\Leftrightarrow (1+\alpha x)^n \geq (1+x)^m \Leftrightarrow (1+x)^{\frac{m}{n}} \leq (1+\alpha x) \Leftrightarrow (1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Giả sử α là số vô tỷ tùy ý, vì $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên $\exists (\alpha_n)_{n=1}^\infty$ hữu tỷ, $0 < \alpha_n < 1$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$.

$\forall n \in \mathbb{N}_+^*$ ta có : $(1+x)^{\alpha_n} \leq 1 + \alpha_n x$. Chuyển qua giới hạn, thì được :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\alpha_n} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n x) \quad \text{hay} \quad (1+x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x.$$

Như vậy bất (3) được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 2 : Cho $a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, i = \overline{1, k}, (n, k \in \mathbb{Z}_+^*)$. Ta có :

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i^n \geq \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i \right)^n \quad (4). \text{ Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k.$$

CM

Đặt $S = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$

- $k=1$, thì BĐT (4) hiển nhiên đúng.
- $k > 1$, áp dụng BĐT Cauchy cho 1 số a_i^n và $(n-1)$ số S^n ta được :

$$a_i^n + (n-1)S^n \geq nS^{n-1} \cdot a_i, \forall i$$

Do đó : $\sum_{i=1}^k a_i^n + k(n-1)S^n \geq nS^{n-1} \sum_{i=1}^k a_i = knS^n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k a_i^n \geq kS^n.$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i^n \geq S^n = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i \right)^n. \text{ Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k. (\text{đpcm}).$$

Chú ý : + Ta có thể chứng minh BĐT (4) nhờ BĐT Bernoulli như sau :

Đặt $S = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$. Khi đó : $(4) \Leftrightarrow k \leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{ka_i}{S} \right)^n.$

$$\forall i, \text{ ta có : } \left(\frac{ka_i}{S} \right)^n = \left(1 + \frac{ka_i - S}{S} \right)^n \geq 1 + n \frac{ka_i - S}{S}$$

$$\text{Do đó : } \sum_{i=1}^k \left(\frac{ka_i}{S} \right)^n \geq k + n \left(\frac{ks - ks}{S} \right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \left(\frac{ka_i}{S} \right)^n \geq k.$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \frac{ka_i - S}{S} = 0, (i = \overline{1, k}) \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k.$$

+ Nếu thay điều kiện $n \geq 1, n \in \mathbb{R}$ thì cách chứng minh thứ 2 hợp lý hơn.

+ Các BĐT (2), (3), (4) đều có thể chứng minh bằng đạo hàm.

Bài toán 3 : Cho $x, y, z > 0$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^m}{z^n} + \frac{z^m}{x^n} \geq x^{m/n} + y^{m/n} + z^{m/n}. \text{ Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z.$$

CM

Áp dụng BĐT Cauchy cho $(m^2 + mn + n^2)$ số, ta có :

$$\begin{aligned} m^2 \frac{x^m}{y^n} + mn \frac{y^m}{z^n} + n^2 \frac{z^m}{x^n} &\geq (m^2 + mn + n^2)^{(m^2+mn+n^2)} \sqrt[m^2+mn+n^2]{\frac{x^{m^3} y^{m^2 n} z^{m^2}}{y^{m^2} z^{n^2 m} x^{n^3}}} \\ &\geq (m^2 + mn + n^2)^{(m^2+mn+n^2)} \sqrt{x^{m^3-n^3}} = (m^2 + mn + n^2) x^{m \cdot n} \end{aligned}$$

Tương tự ta có : $m^2 \frac{y^m}{z^n} + mn \frac{z^m}{x^n} + n^2 \frac{x^m}{y^n} \geq (m^2 + mn + n^2) y^{m \cdot n}$

và $m^2 \frac{z^m}{x^n} + mn \frac{x^m}{y^n} + n^2 \frac{y^m}{z^n} \geq (m^2 + mn + n^2) z^{m \cdot n}$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên và rút gọn ta được điều phải chứng minh.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ:

1. Cho $a_i \in \mathbb{R}, a_i > 0, i = \overline{1, k}, m \geq n; k \geq 2; m, n, k \in \mathbb{N}^*$. Đặt $S = \sum_{i=1}^k a_i^n$.

Chứng minh rằng : $\sum_{i=1}^k \frac{a_i^m}{S - a_i^n} \geq \frac{k}{k-1} \sum_{i=1}^k \frac{a_i^m}{S} \geq \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k a_i^{m-n} \geq \frac{k}{k-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i \right)^{m-n}$.

2. Cho $a_i \in \mathbb{R}, a_i > 0, i = \overline{1, n}, \forall k, l \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng :

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^l}{n} \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{k+l}}{n}, \text{ trong đó } S = \sum_{i=1}^n a_i^l.$$

3. Cho $a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}_+^*$. Chứng minh rằng :

$$\prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{l_j} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{\sum_{j=1}^m l_j}, (m, l_j \in \mathbb{N}^*), \text{ trong đó } \sum_{j=1}^m l_j = \alpha \text{ (chẵn)}.$$

4. Cho $x_i \in \mathbb{R}, x_i > 0, i = \overline{1, k}, k \geq 2, k, m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng :

$$\sum_{i=1}^k \frac{x_i^n}{x_{i+1}^m} \geq \sum_{i=1}^k x_i^{n-m}, \text{ trong đó } x_{k+1} \equiv x_1.$$

Chú ý : Với việc sử dụng hằng đẳng thức sau :

$$m^k - n^k = (m - n)(m^{k-1} + m^{k-2}n + \dots + mn^{k-2} + n^{k-1}).$$

Ta sẽ có một lời giải bằng BĐT Cauchy thật đẹp cho bài 4.

5. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng nếu $k, m, n \in \mathbb{Z}_+^*$ thỏa mãn điều kiện

$k^2 \geq m \cdot n$, thì ta có : $\frac{x^m y^n}{z^k} + \frac{y^m z^n}{x^k} + \frac{z^m x^n}{y^k} \geq x^{m+n-k} + y^{m+n-k} + z^{m+n-k}$.

II. ỨNG DỤNG BĐT CAUCHY VÀO GIẢI PT, BPT, HPT, HBPT.

1. ỨNG DỤNG BĐT CAUCHY VÀO GIẢI PT, BPT.

Ví dụ 1. Giải pt sau :

$$x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = 8\sqrt[4]{4x + 4}.$$

Lời giải

Điều kiện $4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Ta có :

$$x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = 8\sqrt[4]{4x + 4} = 4\sqrt[4]{(x+1)4.4.4} \stackrel{CS}{\leq} x+1+4+4+4$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Giải phương trình sau :

$$\sqrt[5]{27}x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0$$

lời giải

Do $x=0$ không là nghiệm của pt, nên chia cả 2 vế cho $\sqrt[5]{27}x^6$ ta được :

$$x^4 - \frac{5}{\sqrt[5]{27}} + \sqrt[5]{\frac{864}{27}} \cdot \frac{1}{x^6} = 0 \Leftrightarrow x^4 + \frac{2}{x^6} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt[5]{27}} = 3 \cdot \frac{x^4}{3} + 2 \cdot \frac{1}{x^6} \geq 5 \sqrt[5]{\left(\frac{x^4}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{x^6}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x^4}{3} = \frac{1}{x^6} \Leftrightarrow x^{10} = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[10]{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \pm \sqrt[10]{3}$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm x, y của bất phương trình sau :

$$e^{\frac{2002}{2003}x + \frac{1}{2003}y} > \frac{2002}{2003}e^x + \frac{1}{2003}e^y \quad (1)$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{2002}{2003}, \frac{1}{2003} = b \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow b=1-a$. Khi đó phương trình (1) trở

$$\text{thành : } e^{ax+(1-a)y} > ae^x + be^y = ae^x + (1-a)e^y \Leftrightarrow e^{a(x-y)} > ae^{x-y} + 1-a \quad (2)$$

Giả sử (x_0, y_0) là nghiệm của BPT (2), điều này cũng có nghĩa là nghiệm của BPT (1)

$$\text{Tức là : } e^{a(x_0-y_0)} > ae^{x_0-y_0} + 1-a \quad (*)$$

Mặt khác theo BĐT Bernoulli, ta lại có :

$$e^{a(x_0-y_0)} = \left[1 + (e^{a(x_0-y_0)} - 1)\right]^a \leq 1 + a(e^{a(x_0-y_0)} - 1) = (1-a) + ae^{a(x_0-y_0)} \text{ mâu thuẫn với } (*).$$

Vậy BPT đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các BPT sau không có nghiệm nguyên dương:

$$a) x^y + y^x \leq 1 \quad (1)$$

$$b) (x+y)^z + (y+z)^x + (x+z)^y \leq 2 \quad (2)$$

Lời giải

a) Từ (1) suy ra $0 < x, y < 1$. Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của BPT (1), tức là :

$$x_0^{y_0} + y_0^{x_0} \leq 1 \quad (*)$$

Theo BĐT Bernoulli, ta có :

$$x_0^{y_0} = \frac{x_0}{x_0^{1-y_0}} = \frac{x_0}{[1+(x_0-1)]^{1-y_0}} \geq \frac{x_0}{1+(1-y_0)(x_0-1)} = \frac{x_0}{x_0+y_0-x_0y_0}$$

$$\text{Và } y_0^{x_0} \geq \frac{y_0}{x_0+y_0-x_0y_0}.$$

$$\text{Do đó : } x_0^{y_0} + y_0^{x_0} \geq \frac{x_0}{x_0+y_0-x_0y_0} + \frac{y_0}{x_0+y_0-x_0y_0} \geq \frac{x_0+y_0}{x_0+y_0-x_0y_0} > 1$$

Mâu thuẫn (*) suy ra điều giả sử là sai. Vậy BPT (1) vô nghiệm.

b) làm tương tự ý a.

2. ỨNG DỤNG BĐT CAUCHY VÀO GIẢI HPT, HBPT

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 3\sqrt{3} & (1) \\ x + y + z = 1 & (2) \\ xy + yz + zx = \frac{7}{27} + 2xyz & (3) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $x, y, z > 0$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \geq 3\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xyz}}} \Leftrightarrow xyz \geq 3\sqrt{xyz} \Leftrightarrow xyz \geq \frac{1}{27} \quad (4)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow 1 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{27} \quad (5)$$

Dấu “=” ở (4) và (5) xảy ra đồng thời $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$

Thay vào (1) $\Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$ thoả mãn (3).

Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất là $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Nhận xét :

- Thay vì lý luận dấu “=” ở (4) và (5) xảy ra đồng thời, ta có thể làm như sau :

Từ (4) và (5) $\Rightarrow xyz = \frac{1}{27}$ (6) thế vào (3) ta được : $xy + yz + zx = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ (7)

Từ (2), (6), (7) và theo định lý Vi-ét thì x, y, z là 3 nghiệm của phương trình sau :

$$X^3 - X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{27} = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{3}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

- Với cách làm ở trên thì phương trình (3) là không cần thiết.
- Ta cũng có thể trình bày lời giải bài toán trên theo cách sau :
 Vì vai trò x, y, z là như nhau. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$. Ta có $3z \leq x + y + z = 1 \Rightarrow 0 \leq 3z \leq 1 \Rightarrow 0 \leq z \leq \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} (3) \Leftrightarrow \frac{7}{27} &= xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - 2z) + z(x + y) \leq \\ &\leq \frac{(x + y)^2}{4}(1 - 2z) + z(x + y) = \frac{(1 - z)^2}{4}(1 - 2z) + z(1 - z) \\ &= \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 + 1) = \frac{1}{4}[z \cdot z(1 - 2z) + 1] \leq \frac{1}{4} \left[\left(\frac{z + z + 1 - 2z}{3} \right)^3 + 1 \right] = \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 1 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$ Thế vào (2) ta được $x = y = z = \frac{1}{3}$ thoả

mãn phương trình (1). Vậy $x = y = z = \frac{1}{3}$ là nghiệm của hệ đã cho.

Bình luận : Với cách làm trên ta thấy phương trình (1) chỉ cần thay bằng giả thiết $x, y, z > 0$ là đủ.

Ví dụ 2 . Tìm m để hệ sau có nghiệm dương :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = 9m \\ xyz = m \end{cases}$$

Lời giải

- Giả sử hệ có nghiệm nguyên dương $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$, tức là :

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 1 & (1) \\ x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 = 9m & (2) \\ x_0 y_0 z_0 = m & (3) \end{cases}$$

Ta có : $1 = x_0 + y_0 + z_0 \geq 3\sqrt[3]{x_0 y_0 z_0} = 3\sqrt[3]{m} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{27}$ (4)

Mặt khác : $9m = x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \geq 3\sqrt[3]{(x_0 y_0 z_0)^2} = 3\sqrt[3]{m^2} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{27}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $m = \frac{1}{27}$.

- Với $m = \frac{1}{27}$, thì ta có :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = \frac{1}{3} \\ xyz = \frac{1}{27} \end{cases} \Rightarrow x, y, z \text{ là 3 nghiệm (phân biệt hoặc trùng nhau) của phương}$$

trình sau : $X^3 - X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{27} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{3}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Vậy với $m = \frac{1}{27}$, thì ycbt được thoả mãn.

Ví dụ 3. Tìm $a, b \in \mathbb{Z}_+$ thoả mãn :

$$\begin{cases} a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \leq 12 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq 28 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Từ (1) ta có : $12 \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \geq 2\sqrt[4]{(ab)^3} \Leftrightarrow ab \leq 6\sqrt[3]{6} < 6\sqrt[3]{8} = 12$

Do $a, b \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow ab \leq 11$ (3).

$$\begin{aligned} \text{Từ (2) ta có : } 28^2 &\leq (a\sqrt{a} + b\sqrt{b})^2 \leq (a^2 + b^2)(a + b) \\ &\leq (a + b)^2(a + b) = (a + b)^3 \\ \Leftrightarrow a + b &> \sqrt[3]{28} > 9 \Leftrightarrow a + b \geq 10 \quad (4) \end{aligned}$$

Giả sử $a \leq b$, từ (3) suy ra $ab \leq 11 \Leftrightarrow a^2 \leq 11 \Rightarrow a \leq 3$.

- Với $2 \leq a \leq 3$, thì từ (4) $\Rightarrow b \geq 7 \Rightarrow ab \geq 2.7 = 14 > 11$ (mâu thuẫn (3))
- Với $a = 1$, từ (4) suy ra $b \geq 9$ kết hợp với (3) ta được $b = 9; 10; 11$.

Dễ dàng kiểm tra thấy chỉ có cặp (1 ; 9) là thoả mãn.

Vậy nghiệm của hệ BPT đã cho là $(a, b) = \{(1; 9), (9; 1)\}$.

Ví dụ 4 . Tìm nghiệm dương của HBPT sau :

$$\begin{cases} a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} = 3 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT cauchy ta có :

$$a^{2000} + 999.1 \geq 1000 \sqrt[1000]{a^{2000}.1} \geq 1000a^2$$

Tương tự , ta có :

$$b^{2000} + 999.1 \geq 1000b^2 \text{ và } c^{2000} + 999.1 \geq 1000c^2$$

$$\text{Do đó : } a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} + 3.999 \geq 1000(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2).1000 \leq 3.(1 + 999) = 3.1000$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 3 \quad (3) .$$

Từ (2) và (3) suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Vậy nghiệm của HBPT đã cho là : $a = b = c = 1$ $\square$

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

1. Tìm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn : $\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{n}}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

2. Giải phương trình sau :

$$\frac{16}{\sqrt{x-1986}} + \frac{1}{\sqrt{y-2002}} = 10 - (\sqrt{x-1986} + \sqrt{y-2002})$$

3. Tìm GTLN của tham số a để BPT sau có ít nhất một nghiệm :

$$\sqrt{a^3}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{a}}{(x-1)^2} \leq \sqrt[4]{a^3} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|.$$

4. Giải các HPT , HBPT sau :

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = xy \\ x^{2008} + y^{2008} = 8(xy)^{\frac{2005}{2}} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x, y, z, t > 0 \\ x + y + z + t = 12 \\ xy + yz + zx + xt + yt + zt = xyz - 27 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^3 y = 9 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 6x^2 \sqrt{x^3 - 6x + 5} = (x^3 + 4)(x^2 + 2x - 6) \\ x + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{2}{x^2} \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2 \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} (x-1)^4 (y-2)^2 z^3 t^6 = 1024 \\ 4x^2 + z^3 + 16y + t^6 = 8x + 76 \\ x \geq 1; y \geq 2; z \geq 0; t \geq 0 \end{cases}$$

III. ỨNG DỤNG BĐT CAUCHY VÀO TÌM GTLN - GTNN .

1. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BĐT CAUCHY

Giả sử ta cần chứng minh, BĐT sau :

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq C_{\text{const}} (*)$$

hoặc $S(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq C_{\text{const}}$

1.1. Trường hợp 1 : $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một biểu thức đối xứng của các $a_i, i=1, n$. Ta dự đoán dấu “=” trong BĐT (*) xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Kiểm tra lại dự đoán nếu đúng thì kết hợp với điều kiện xảy ra dấu “=” trong BĐT Cauchy, ta sẽ tìm được các hằng số trong các đánh giá giả định. Từ đó đưa ra lời giải của bài toán.

Ví dụ 1:

Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ Chứng minh rằng :

$$S = 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{15}{2}.$$

Lời giải

Dự đoán $S = \frac{15}{2}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. Do đó ta cần chọn α sao cho :

$$\begin{cases} 2a^2 = 2b^2 = 2c^2 \\ \frac{1}{\alpha a} = \frac{1}{\alpha b} = \frac{1}{\alpha c} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 4. \text{ Từ đó ta có lời giải sau :}$$

$$\begin{aligned} S &= \left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &\geq \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \left(3 \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \right) \geq \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$ (đpcm).

Ví dụ 2 :

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Trước tiên ta xét đánh giá giả định sau :

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} &\geq \alpha a + \beta b \\ \Leftrightarrow (1 - \alpha)a^3 - \beta b^3 &\geq (\alpha + \beta)ab(a + b) \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \alpha}{\alpha + \beta}a^3 + \frac{-\beta}{\alpha + \beta}b^3 &\geq ab(a + b) \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \stackrel{cs}{\geq} (a + b)(2ab - ab) = ab(a + b) \quad \forall a, b \geq 0.$$

Do đó (*) luôn đúng nếu ta chọn được α, β thoả mãn :

$$\begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\alpha + \beta} = 1 \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Khi này, ta có lời giải sau :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} &\geq \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b, \quad \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \\ \text{và } \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} &\geq \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế 3 BĐT trên ta được ĐPCM $\square$

Ví dụ 3 : Cho $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ t/m $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Trước tiên ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{b+c}{4bc}. \text{ Do đó :}$$

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)} \cdot \frac{b+c}{4bc}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Tương tự ta có : $\frac{1}{b^3(c+a)} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$ và $\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Cộng vế với vế 3 BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{2}.$$

1.2. Trường hợp 2 : Trong biểu thức $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ các $a_i, i = \overline{1, n}$ không có tính đối xứng. Khi này việc dự đoán dấu “=” trong BĐT (*) cho một lớp bài toán là rất khó. Kết quả của việc này chủ yếu dựa vào kinh nghiệm và trực quan toán học của mỗi người làm toán.

Ví dụ 1 : Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + 2b + 3c \geq 20 \end{cases}$ Chứng minh rằng :

$$S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13.$$

Trước tiên, ta dự đoán $S = 13$, khi $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a + 2b + 3c = 20$
Biểu diễn S dưới dạng sau :

$$S = \left(\alpha a + \frac{3}{a}\right) + \left(\beta b + \frac{9}{2b}\right) + \left(\gamma c + \frac{4}{c}\right) + (1 - \alpha)a + (1 - \beta)b + (1 - \gamma)c$$

Như vậy ta cần chọn các số α, β, γ thỏa mãn các điều kiện sau đây :

$$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{1} = \frac{1-\beta}{2} = \frac{1-\gamma}{3} = k > 0 \\ a = \sqrt{\frac{3}{\alpha}}, b = \frac{3}{\sqrt{2\beta}}, c = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \\ a + 2b + 3c = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - k & (1) \\ \beta = 1 - 2k & (2) \\ \gamma = 1 - 3k & (3) \\ \sqrt{\frac{3}{\alpha}} + \frac{6}{\sqrt{2\beta}} + \frac{6}{\sqrt{\gamma}} = 20 & (4) \end{cases}$$

Thế (1),(2),(3) vào (4) ta được :

$$\sqrt{\frac{3}{1-k}} + \frac{6}{\sqrt{2-4k}} + \frac{6}{\sqrt{1-3k}} = 20 \quad (5)$$

Ta cần chọn $0 < k < 1$ sao cho thay vào (5) thì ta khai căn được ở các biểu thức có chứa dấu căn. Dễ thấy $k = \frac{1}{4}$ đáp ứng được yêu cầu đó. Khi này ta có một lời giải đẹp như sau :

LG

Ta có :

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{4} \left(a + \frac{4}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(b + \frac{9}{b} \right) + \frac{1}{4} \left(c + \frac{16}{c} \right) + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{6}c \\ \Leftrightarrow S &\stackrel{cs}{\geq} 2 \cdot \frac{3}{4} \sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{b \cdot \frac{9}{b}} + 2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{c \cdot \frac{16}{c}} + \frac{1}{4}(a + 2b + 3c) \\ &\geq 3 + 3 + 2 + \frac{20}{4} = 13 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow S \geq 13. \text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow a = 2, b = 3, c = 4 \quad \square$$

Ví dụ 2 : Cho $x, y > 0, x + y \geq 1$. Chứng minh rằng :

$$P = 51x + 23y + \frac{9}{x} + \frac{48}{y} \geq 68.$$

Trước tiên ta dự đoán $P = 68$, khi $x, y > 0$ và $x + y = 1$.

Ta biểu diễn P dưới dạng sau :

$$P = \left(\alpha x + \frac{9}{x} \right) + \left(\beta y + \frac{48}{y} \right) + (51 - \alpha)x + (23 - \beta)y$$

Như vậy , ta cần chọn $\alpha, \beta > 0$ thoả mãn các điều kiện sau :

$$\begin{cases} 51 - \alpha = 23 - \beta \\ x = \frac{3}{\sqrt{\alpha}}, y = 4\sqrt{\frac{3}{7\beta}} \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 28 + \beta \quad (1) \\ x = \frac{3}{\sqrt{28 + \beta}}, y = 4\sqrt{\frac{3}{7\beta}} \quad (2) \\ x + y = 1 \quad (3) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2) vào (3) ta được : } \frac{3}{\sqrt{28 + \beta}} + 4\sqrt{\frac{3}{7\beta}} = 1 \quad (4)$$

Dễ thấy $\beta = 21$ thoả mãn (4) , thay vào (1) ta được $\alpha = 49$.

Khi này , ta có lời giải sau :

$$P = \left(49x + \frac{9}{x} \right) + \left(21y + \frac{48}{7y} \right) + 2(x + y)$$

$$\stackrel{CS}{\geq} 42 + 24 + 2 = 68. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } x = \frac{3}{7}, y = \frac{4}{7} \square$$

2. ỨNG DỤNG VÀO TÌM GTLN - GTNN .

Ví dụ 1 : Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của biểu thức sau :

$$S = \frac{(x + y + z)^6}{xy^2z^3}$$

LG

Do x, y, z không có mối quan hệ ràng buộc nào . Nên để tìm MinS ta có 2 cách sau .

Cách 1 . Sử dụng BĐT Cauchy ngược ta có : $xy^2z^3 \leq \alpha (x + y + z)^6$

$$\text{Ta có : } xy^2z^3 = \frac{1}{423} (6x.3y.3y.2z.2z.2z) \leq \frac{1}{423} \left(\frac{6(x + y + z)}{6} \right)^6$$

$$\Leftrightarrow xy^2z^3 \leq \frac{1}{432} (x + y + z)^6 . \text{ Do đó : }$$

$$S = \frac{(x + y + z)^6}{xy^2z^3} \geq \frac{(x + y + z)^6}{\frac{1}{432} (x + y + z)^6} = 432.$$

$$\text{Vậy } \text{Min}S = 432 , \text{ khi } x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}z > 0 \quad \square$$

Cách 2 . Sử dụng BĐT Cauchy thuận ta có : $(x + y + z)^6 \geq \alpha xy^2z^3$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (x + y + z)^6 &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z \right)^6 \\ &\stackrel{CS}{\geq} \left(6 \sqrt[6]{\frac{xy^2z^3}{108}} \right)^6 = 432xy^2z^3 . \text{ Do đó, ta có kết quả như cách 1.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2 : Cho $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ Tìm GTLN của :

$$S = (3 - x)(4 - y)(2x + 3y).$$

LG

Nhận xét : Rõ ràng với điều kiện đã cho thì $3 - x \geq 0, 4 - y \geq 0$. Mặt khác, theo hệ quả của BĐT cauchy thì $\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)_{\min} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i = C_{\text{const}}$. Vậy ta cần chọn α, β sao cho :

$$(3\alpha - \alpha x) + (4\beta - \beta y) + (2x + 3y) = C_{\text{const}}.$$

Để dàng thấy $\alpha = 2, \beta = 3$. Khi đó ta có lời giải sau :

$$S = \frac{1}{6}(6 - 2x)(12 - 3y)(2x + 3y) \\ \leq \frac{1}{6} \left[\frac{(6 - 2x) + (12 - 3y) + (2x + 3y)}{3} \right]^3 \leq 36.$$

Vậy $\text{Max} S = 36$, khi $x = 0, y = 2$ $\square$

Ví dụ 3 : Cho $a, b, c, d > 0$. Trong tất cả các nghiệm dương (x, y, z, t) của phương trình :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{t} = 1 \quad . \text{ Hãy chỉ ra nghiệm với tổng :}$$

$$S_n = x^n + y^n + z^n + t^n \text{ nhỏ nhất với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n} + \sqrt[n+1]{d^n}.$$

Theo BĐT cauchy, ta có :

$$x^n + \underbrace{\frac{a}{x} + \frac{a}{x} + \dots + \frac{a}{x}}_{n \text{ số}} + \dots + \frac{a}{x} A^{n+1} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{a^n} A^n$$

$$y^n + n \frac{b}{y} A^{n+1} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{b^n} A^n$$

$$z^n + n \frac{c}{z} A^{n+1} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{c^n} A^n$$

Và
$$t^n + n \frac{d}{t} A^{n+1} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{d^n} A^n$$

$$\text{Do đó : } x^n + y^n + z^n + t^n + nA^{n+1} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{t} \right) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq (n+1)A^n \left(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n} + \sqrt[n+1]{d^n} \right) \\ &\geq (n+1)A^{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy $S = x^n + y^n + z^n + t^n \geq A^{n+1} = \left(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n} + \sqrt[n+1]{d^n} \right)^{n+1}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^n = \frac{a}{x} A^{n+1}, y^n = \frac{b}{y} A^{n+1}, z^n = \frac{c}{z} A^{n+1}, t^n = \frac{d}{t} A^{n+1} \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{t} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n+1]{a} A, y = \sqrt[n+1]{b} A \\ z = \sqrt[n+1]{c} A, t = \sqrt[n+1]{d} A \end{cases} \quad (*)$$

Vậy $\text{Min} S_n = \left(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n} + \sqrt[n+1]{d^n} \right)^{n+1}$, đạt được khi có (*).

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ :

1. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 2004 \end{cases}$. Tìm GTLN của : $P = \frac{x^{30}}{y^{21}} + \frac{y^{30}}{z^{21}} + \frac{z^{30}}{x^{21}}$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 9x^2 \sqrt{1+x^4} + 13x^2 \sqrt{1-x^4}, \quad (|x| \leq 1)$$
3. Với $0 \leq x \leq \sqrt[2001]{2002}$. Tìm GTLN của $y = x(2002 - x^{2001})$.
4. Cho $\begin{cases} a \geq 1 \\ b \geq 2 \\ c \geq 3 \end{cases}$ Tìm GTLN của $S = \frac{bc\sqrt{a-1} + ca\sqrt{b-2} + ab\sqrt{c-3}}{abc}$.
5. Tìm GTLN, GTNN của hàm số : $y = x(\sqrt{1999 - x^2} + 1997)$.

IV. ỨNG DỤNG BĐT CAUCHY VÀO CM TÍNH CHẤT NGHIỆM

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng nếu phương trình $x^{2n+1} + \frac{1}{x} - 4 = 0$ (1) có nghiệm dương x_0 , thì $x_0 < \sqrt[n]{2}$ ($n \geq 2$).

Lời giải

Giả sử $x_0 > 0$ là nghiệm của (1) thì ta có :

$$\begin{aligned} x_0^{2n+1} + \frac{1}{x_0} - 4 = 0 &\Leftrightarrow 4 = x_0^{2n+1} + \frac{1}{x_0} \geq 2x_0^n \\ &\Leftrightarrow x_0 \leq \sqrt[n]{2}. \text{ Dấu “=” xảy ra} \\ &\Leftrightarrow x_0^{2n+1} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 1. \end{aligned}$$

Nhưng $x_0 = 1$ không thỏa mãn (1). Do đó $x_0 < \sqrt[n]{2}$ $\square$

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng phương trình :

$x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 = 0$, $a > 0$ không thể có 4 nghiệm không âm.

Lời giải

Giả sử phương trình đã cho có 4 nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Theo định lý Vi-et ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = a^4 \end{cases}$$

Mặt khác theo BĐT Cauchy, ta lại có :

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} &\leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt[4]{a^4} \leq \frac{a}{4} \Leftrightarrow a \leq \frac{a}{4} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{4} \text{ (vô lý)}. \end{aligned}$$

Vậy điều giả sử là sai, tức là phương trình đã cho không thể có 4 nghiệm không âm $\square$

Ví dụ 3 : Cho $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, n-1}$ và $P(x) = 0$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng $P(m) \geq (m+1)^n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Vì $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, n-1}$ và $1 > 0$ nên trong n nghiệm của $P(x) = 0$ không có nghiệm nào dương. Giả sử đó là α_i , $i = \overline{1, n}$. Khi này $P(x)$ có dạng :

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) = \prod_{i=1}^n (x + \beta_i) \quad (\text{với } \beta_i = -\alpha_i > 0, i = \overline{1, n})$$

Theo định lý Vi-et thì $\prod_{i=1}^n \beta_i = (-1)^n \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n (-1)^n = 1$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta được :

$$P(m) = \prod_{i=1}^n (m + \beta_i) \geq (m+1)^n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \beta_i} = (m+1)^n.$$
$$\Leftrightarrow P(m) \geq (m+1)^n \quad \square$$

KẾT LUẬN

Như chúng ta đã biết, bất đẳng thức Cauchy là một bất đẳng thức khá nổi tiếng bởi phạm vi ứng dụng rộng rãi của nó. Ngoài việc được vận dụng để chứng minh các bất đẳng thức đại số thì bất đẳng thức Cauchy còn được sử dụng trong các bài chứng minh bất đẳng thức lượng giác hay các bài toán cực trị hình học. Tuy nhiên, do thời gian nghiên cứu không nhiều nên trong chuyên đề này những vấn đề thú vị đó vẫn chưa được đề cập đến.

Trên đây là một số kinh nghiệm có được trong quá trình dạy học, tìm tòi tự bồi dưỡng nghiệp vụ chuyên môn. Các ví dụ được sưu tầm và chọn lọc kĩ lưỡng từ đề thi đại học các năm và đề thi học sinh giỏi các tỉnh trong cả nước. Mặc dù đã cố gắng song kinh nghiệm còn rất khiêm tốn. Mong nhận được sự góp ý chân thành của quý thầy cô và các bạn đồng nghiệp về cả nội dung và hình thức trình bày để chuyên đề được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

Mê Linh , ngày 10 tháng 05 năm 2011

Giáo viên

Trần công Văn

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bất đẳng thức (Phan Đức Chính).
2. Chuyên đề bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số (Nguyễn Đức Tấn).
3. Bảo toán học và tuổi trẻ.
4. Bảo toán tuổi thơ.