

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT MƯỜNG LÁT**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**SỬ DỤNG MỘT SỐ KẾT QUẢ “ĐẸP” CỦA HÀM SỐ VÀ
TÍCH PHÂN LIÊN KẾT ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN**

Họ và tên: Đỗ Đình Bằng

Chức vụ: Giáo viên Toán

Đơn vị: Trường THPT Mường Lát

Sáng kiến kinh nghiệm thuộc lĩnh vực: Toán học

THANH HÓA NĂM 2016

Phụ lục
1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài	2
1.2. Mục đích nghiên cứu	2
1.3. Đối tượng nghiên cứu	2
1.4. Phương pháp nghiên cứu	2

2. Nội dung sáng kiến

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến.....	2
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến.....	3
2.3. Các giải pháp sử dụng để giải quyết vấn đề.....	3
2.3.1. Sử dụng một số kết quả “đẹp” của hàm số để tính tích phân	3
Kết quả 1	3
Kết quả 2	5
Kết quả 3	7
Kết quả 4	8
Kết quả 5	10
Kết quả 6	12
Kết quả 7	13
Bài tập tương tự	14
2.3.2. Sử dụng tích phân liên kết để tính tích phân	15
Bài tập tương tự	18
2.4. Hiệu quả của sáng kiến	19

3. Kết luận

3.1. Kết luận	19
3.2. Kiến nghị	20

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài

Phương pháp tính tích phân và vi phân đã được hai nhà toán học nổi tiếng I. Newton (1643 – 1727) người Anh và G. Leibniz (1646 – 1716) người Đức, sáng tạo ra đồng thời và độc lập với nhau và họ đã giải quyết khối lượng lớn các bài toán quan trọng trong lĩnh vực toán học, đặc biệt là các bài toán về tích phân.

Cho đến ngày nay tích phân rất quan trọng trong bộ môn Giải tích toán học, nó có nhiều ứng dụng như: Tính diện tích hình phẳng, thể tích vật thể, thể tích khối tròn xoay..., chính vì quan trọng như vậy đã đưa vào giảng dạy chương trình Giải tích lớp 12. Hơn thế nữa, trong một số đề thi Đại học và đề thi học sinh giỏi toán có những bài tích phân không dễ dàng chút nào, để làm được nó chúng ta phải có một cái nhìn thật khéo léo và tinh tế cộng với sự hiểu biết của mình về một số tính chất của hàm số thì bài toán được giải quyết một cách nhẹ nhàng.

Với hy vọng giúp học sinh học tốt hơn phần tích phân, nhất là học sinh ôn thi Đại học và thi học sinh giỏi toán, tôi mạnh dạn đề xuất sáng kiến của mình ***“Sử dụng một số kết quả “đẹp” của hàm số và tích phân liên kết để tính tích phân”***

1.2. Mục đích nghiên cứu

Tìm ra phương pháp dạy học phù hợp với học sinh vùng cao và tạo cho học sinh có hứng thú học tích phân, đặc biệt giúp học sinh chủ động khi đứng trước những loại tích phân kiểu này

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Sử dụng một số kết quả “đẹp” của hàm số và tích phân liên kết để tính tích phân

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Trong quá trình nghiên cứu sáng kiến tôi đã sử dụng những phương pháp sau:

- +) Phương pháp nghiên cứu lí luận: Nghiên cứu sách giáo khoa, sách tham khảo và một số tài liệu khác có liên quan đến đề tài
- +) Phương pháp sư phạm: Thông qua các tiết giảng dạy trên lớp
- +) Phương pháp quan sát: Quan sát dạy và học ở Trường THPT Mường Lát

2. Nội dung sáng kiến

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến

Trình bày một số kết quả của hàm số như: Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn..., mà tôi gọi đó là kết quả “đẹp” vào tính một số bài toán tích phân là rất cần thiết, sở dĩ trong chương trình Giải tích 12 không trình bày những kết quả nêu trên vào việc tính tích phân, đôi khi ta gặp những bài toán tích phân mà hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ và cận lấy tích phân trên một đoạn là tập đối xứng, hay khi gặp hàm tuần hoàn mà cận lấy tích phân quá sức tưởng tượng (cận quá lớn) và bạn giải quyết tích phân đó cũng phải mất vài trang giấy, lời giải cồng kềnh chắc gì đã thành công. Hơn nữa việc trình bày những kết quả nêu trên

là việc rất cần thiết trong lúc này nó giúp chúng ta tiết kiệm được thời gian để có thể giải những bài toán đó một cách nhanh chóng và ngắn gọn

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến

Khi dạy bài Nguyên hàm tích phân tôi thấy phần lớn học sinh nắm bài chưa sâu, lí do ở đây các em học phần đạo hàm ở lớp dưới chưa thành thạo. Hơn nữa đề tài này có rất ít tài liệu viết về nó và tôi đã quan tâm với hy vọng không những có thêm tài liệu tham khảo cho học sinh mà còn được giảng dạy ở Trường THPT

Trong quá trình dạy và học tôi luôn quan tâm dạy làm sao cho học sinh hiểu bài tốt nhất, với sự đam mê và nỗ lực của mình đề tài này đã được các em học sinh khá giỏi nồng nhiệt hưởng ứng, đó cũng là bước đầu thành công của tôi.

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

2.3.1. Sử dụng một số kết quả “đẹp” của hàm số để tính tích phân

Kết quả 1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên $[-a, a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Chứng minh: Ta có $I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ (1)

Với tích phân $\int_{-a}^0 f(x) dx$, ta đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Khi đó $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = - \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(x) dx$ (2) (do $f(x)$ là hàm lẻ)

Thay (2) vào (1) ta được $I = \int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$.

Chú ý: Hàm số $f(x)$ xác định trên $[-a, a]$ và là hàm số lẻ trên $[-a, a]$ nếu như với mọi $x \in [-a, a]$ ta có $f(-x) = -f(x)$

Ví dụ 1.1: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2016$, nếu $f(x)$ là hàm lẻ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính

$$\int_{-1}^0 f(x) dx$$

Giải: Vì $f(x)$ là hàm lẻ trên $[-1; 1]$ nên $\forall x \in [-1; 1]$ ta có: $f(-x) = -f(x)$

Bằng phép đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Khi đó $\int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_1^0 f(-t) dt = \int_0^1 f(-t) dt = - \int_0^1 f(t) dt = - \int_0^1 f(x) dx = -2016$

Ví dụ 1.2: Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

Giải: Ta có $I = \int_{-1}^0 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx + \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ (1)

Với tích phân $J = \int_{-1}^0 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$, ta đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó } J &= - \int_1^0 \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt = \int_0^1 \ln \frac{t^2 + 1 - t^2}{\sqrt{t^2 + 1} + t} dt \\
&= \int_0^1 \ln \frac{t^2 + 1 - t^2}{\sqrt{t^2 + 1} + t} dt = \int_0^1 \ln \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + t} dt \\
&= - \int_0^1 \ln(\sqrt{t^2 + 1} + t) dt = - \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) dx \quad (2)
\end{aligned}$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = 0$.

Chú ý: $\int_0^1 \ln(\sqrt{t^2 + 1} + t) dt = \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) dx$

Nghĩa là tích phân không phụ thuộc vào cách kí hiệu biến là x hay t ...

Nhận xét: Hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ xác định trên R

$$\forall x \in R, \text{ ta có } f(-x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x)$$

Do đó $f(x)$ là hàm lẻ trên R nói riêng là lẻ trên đoạn $[-1; 1]$.

Theo Kết quả 1, suy ra $I = 0$.

Ví dụ 1.3: Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \cos x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$

Giải: Ta có $I = \int_{-1}^0 \cos x \ln \frac{2+x}{2-x} dx + \int_0^1 \cos x \ln \frac{2+x}{2-x} dx \quad (1)$

Với tích phân $J = \int_{-1}^0 \cos x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$, ta đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

$$\text{Khi đó } J = - \int_1^0 \cos(-t) \ln \frac{2-t}{2+t} dt = - \int_0^1 \cos t \ln \frac{2+t}{2-t} dt = - \int_0^1 \cos x \ln \frac{2+x}{2-x} dx \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được $I = 0$.

Nhận xét: Hàm số $f(x) = \cos x \ln \frac{2+x}{2-x}$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $\forall x \in [-1; 1]$,

$$\text{ta có } f(-x) = \cos(-x) \ln \frac{2-x}{2+x} = -\cos x \ln \frac{2+x}{2-x} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ là hàm số lẻ trên } [-1; 1]$$

Theo Kết quả 1, suy ra $I = 0$.

Ví dụ 1.4: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^{2016} \sin(2016x) dx$

Giải: Đặt $f(x) = x^{2016} \sin(2016x)$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, ta có

$$f(-x) = (-x)^{2016} \sin(-2016x) = -x^{2016} \sin(2016x) = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ là hàm số lẻ trên } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

Theo Kết quả 1, ta được $I = 0$

Nhận xét: Với bài toán trên nếu ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần thì đây quả là một bài toán rất khó chịu.

Ví dụ 1.5: Chứng minh rằng $I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Giải: Đổi biến $x = \pi + t \Rightarrow dx = dt$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt + n\pi) dt = (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt) dt$$

Hàm số $f(t) = \sin(-\sin t + nt)$ liên tục trên $[-\pi; \pi]$ và $f(-t) = \sin(-\sin(-t) - nt) = \sin(\sin t - nt) = -\sin(-\sin t + nt) = -f(t) \Rightarrow f(t)$ là hàm lẻ trên $[-\pi; \pi]$ nhờ

Kết quả 1 suy ra $I = 0$

Nhận xét: Rõ ràng sự tiện lợi của Kết quả 1 mà ta có thể áp dụng cho một số bài toán tích phân mà cận của nó không đối xứng.

Kết quả 2: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên $[-a, a]$ thì

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Chứng minh: Ta có $I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (1)$

Với tích phân $\int_{-a}^0 f(x) dx$, ta đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx \quad (2) \text{ (do } f(x) \text{ là hàm lẻ)}$$

$$\text{Thay (2) vào (1) } I = \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Chú ý: Hàm số $f(x)$ xác định trên $[-a, a]$ và là hàm số chẵn trên $[-a, a]$ nếu như với mọi $x \in [-a, a]$, ta có $f(-x) = f(x)$.

Ví dụ 2.1: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2016$ và $f(x)$ là hàm chẵn trên đoạn $[-1; 1]$. Tính

$$\int_{-1}^0 f(x) dx$$

Giải: Vì $f(x)$ là hàm chẵn trên $[-1; 1]$ nên $\forall x \in [-1; 1]$ ta có: $f(-x) = f(x)$.

Bằng phép đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_1^0 f(-t) dt = \int_0^1 f(-t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 2016$$

Ví dụ 2.2: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x dx$

Giải: Hàm số $f(x) = \cos^5 x$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ và $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, ta có

$$f(-x) = [\cos(-x)]^5 = \cos^5 x = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ là hàm chẵn trên } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\text{Theo Kết quả 2, ta có } I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 x)^2 \cos x dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\
&= 2 \left(\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \right) = \frac{17\sqrt{3}}{16}
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.3: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^5 + 3x^3 + x + 1}{\cos^2 x} dx$

Giải: Ta có $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^5 + 3x^3 + x}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

Đặt $f(x) = \frac{2x^5 + 3x^3 + x}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, ta có

$$f(-x) = \frac{-2x^5 - 3x^3 - x}{\cos^2 x} = -\frac{2x^5 + 3x^3 + x}{\cos^2 x} = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ là hàm số lẻ trên } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

Theo Kết quả 1, ta được $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^5 + 3x^3 + x}{\cos^2 x} dx = 0$

$$\text{Khi đó } I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$$

Nhận xét: Hàm $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow I = 2 \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$

Ví dụ 2.4: Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + \tan x}{x^2 + 1} dx$

Giải: Ta có $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + \tan x}{x^2 + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{\tan x}{x^2 + 1} dx$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^1 \frac{\tan x}{x^2 + 1} dx$$

Do hàm $f(x) = \frac{\tan x}{x^2 + 1}$ lẻ trên đoạn $[-1; 1]$ nên từ Kết quả 1 ta có $I_1 = 0$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

Do hàm $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$ chẵn trên đoạn $[-1; 1]$ nên từ Kết quả 2 ta có $I_2 = 2 \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó } I = I_2 &= 2 \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{(x^4 - 1) + 1}{x^2 + 1} dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\
&= 2 \int_0^1 (x^2 - 1) dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = -\frac{4}{3} + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx
\end{aligned}$$

Đổi biến $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$

Khi đó $I = -\frac{4}{3} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$

Nhận xét: Từ Kết quả 1 và Kết quả 2 dẫn đến một kết quả “chung” sau đây

Kết quả 3: Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx$

Chứng minh: Ta có $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$

Đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Khi đó $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$

Vậy $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$

Ví dụ 3.1: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$, nếu $f(x) + f(-x) = 2x + \tan x$

Giải: Ta có $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$

Đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x) dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-x) dx$

Vậy $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(x) + f(-x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x + \tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2x + \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \left(x^2 - \ln(\cos x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{9} + \ln 2$$

Ví dụ 3.2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$.

Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$ (ĐHSP Hà Nội 2, 1998)

Giải: Nhờ Kết quả 3, ta có $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$

Khi đó $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2(1 - \cos 2x)} dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx$

$$= 2 \left(\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \right) = 2 \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \right) = 6$$

Nhận xét: Nếu chúng ta không biết đến Kết quả 3 thì việc tính tích phân trên vô cùng khó khăn vì giả thiết chưa đủ để xác định được hàm số $f(x)$. Hơn nữa sự tiện lợi của nó là tính $\int_{-a}^a f(x) dx$ mà không cần biết đến hàm $f(x)$.

Kết quả 4: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên $[-a, a]$ thì

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx \quad k > 0$$

Chứng minh: Ta có $I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{k^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx$ (1)

Với tích phân $\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{k^x + 1} dx$, ta đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Khi đó $\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{k^x + 1} dx = - \int_a^0 \frac{f(-t)}{k^{-t} + 1} dt = \int_0^a \frac{f(-t)}{\frac{1}{k^t} + 1} dt = \int_0^a \frac{k^t f(t)}{k^t + 1} dt = \int_0^a \frac{k^x f(x)}{k^x + 1} dx$ (2) (do $f(x)$ là

hàm chẵn)

Thay (2) vào (1) $I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx = \int_0^a \frac{k^x f(x)}{k^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{k^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx$. (đpcm)

Ví dụ 4.1: Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{3^x + 1} dx$

Giải: Ta có $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{3^x + 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{3^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{3^x + 1} dx$ (1)

Với tích phân $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{3^x + 1} dx$, ta đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Khi đó $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{3^x + 1} dx = - \int_1^0 \frac{t^2}{3^{-t} + 1} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{\frac{1}{3^t} + 1} dt = \int_0^1 \frac{3^t t^2}{3^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{3^x x^2}{3^x + 1} dx$ (2) ($f(x)$ là hàm

chẵn)

Thay (2) vào (1), ta được $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{3^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{3^x x^2}{3^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{3^x + 1} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Nhận xét: Hàm $f(x) = x^2$ liên tục và là hàm số chẵn trên $[-1; 1]$ nên từ Kết quả

4 suy ra $I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Ví dụ 4.2: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 |\sin x|}{2016^x + 1} dx$

Giải: Hàm $f(x) = x^2 |\sin x|$ liên tục và là hàm chẵn trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên từ Kết quả 4

$$\text{suy ra } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 |\sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = 2x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \pi + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

Ví dụ 4.3: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx$

Giải: Hàm $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ liên tục và là hàm chẵn trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ nên từ Kết quả

$$\begin{aligned} 4 \text{ suy ra } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}\right) dx = \left(\frac{3}{32} \sin 4x + \frac{5}{8} x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi}{32} \end{aligned}$$

Nhật xét: Rõ ràng sự tiện lợi của Kết quả 4 làm cho bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn

Ví dụ 4.4: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin 2x \cos 5x}{e^x + 1} dx$ (ĐH Bách Khoa, 1999)

Giải: Hàm $f(x) = \sin x \sin 2x \cos 5x$ liên tục và là hàm chẵn trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên từ Kết

$$\text{quả 4 suy ra } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 3x) \cos 5x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cos 5x - \cos 3x \cos 5x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + \cos 6x - \cos 2x - \cos 8x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Kết quả 5: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thỏa mãn $f(x) = f(a + b - x)$ thì

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$$

Chứng minh: Đổi biến $x = a + b - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_a^b xf(x)dx &= - \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt \\ &= (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \\ &\Rightarrow 2 \int_a^b xf(x)dx = (a+b) \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Nhận xét: Nếu ta chọn $a = 0, b = \pi$ và $f(x)$ là $f(\sin x)$ thỏa mãn

$$f(\sin x) = f(\sin(0 + \pi - x)) \text{ thì ta nhận được kết quả } \int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \int_0^\pi f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)dx$$

Đổi biến $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \Rightarrow \int_0^\pi f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \quad (2)$$

$$\text{Bằng phép đổi biến } x = \frac{\pi}{2} - t, \text{ ta lại có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \quad (3)$$

Ví dụ 5.1: Tính tích phân $I = \int_0^\pi x \sin^3 x dx$

Giải: Hàm $f(x) = \sin^3 x$ liên tục trên đoạn $[0; \pi]$

Ta có $f(a + b - x) = f(\pi - x) = \sin^3(\pi - x) = \sin^3 x = f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Theo kết quả 5 suy ra } I &= \int_0^\pi x \sin^3 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\ &= - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = - \frac{\pi}{2} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \Big|_0^\pi = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Ví dụ 5.2: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2016} x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx$

Giải: Đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2016} \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}{\sin^{2016} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \cos^{2016} \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2016} t}{\sin^{2016} t + \cos^{2016} t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2016} x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x}{\sin^{2016} x + \cos^{2016} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Nhận xét: Nhờ đẳng thức (3) ta dễ dàng chứng minh bài toán tổng quát sau

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4} \quad (n \in \mathbb{R})$$

Ví dụ 5.3: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$ (Học viện Ngân hàng, 1998)

Giải: Ta có $I = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} x \sin x (1 - \sin^2 x) dx$

Xem hàm $f(\sin x) = \sin x (1 - \sin^2 x)$ nhờ đẳng thức (1) ta nhận được

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\pi}{6} \cos^3 x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}$$

Ví dụ 5.4: Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Giải: Đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

Kết quả 6: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

Chứng minh: Đổi biến $x = a+b-t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(a+b-t) dt = \int_a^b f(a+b-t) dt = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

Ví dụ 6.1: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x + 1) dx$

Giải: Đổi biến $x = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - t \right) + 1 \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} + 1 \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{2}{1 + \tan t} \right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan t + 1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - I \Rightarrow 2I = t \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \ln 2 \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Ví dụ 6.2: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x - 4 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$ (Đại học GTVT, 2001)

Giải: Đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{5 \cos t - 4 \sin t}{(\sin t + \cos t)^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos t - 4 \sin t}{(\sin t + \cos t)^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos x - 4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x - 4 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \cos x - 4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{2} \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nhận xét: Bằng phép đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ và làm tương tự Ví dụ trên ta dễ dàng

$$\text{chứng minh được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin x + b \cos x}{(\sin x + \cos x)^r} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos x + b \sin x}{(\sin x + \cos x)^r} dx$$

Ví dụ 6.3: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

Giải: Đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}}{\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right)} + \sqrt{\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Kết quả 7: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên R và tuần hoàn với chu kì T thì

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad (a \in R)$$

Chứng minh: Ta có $I = \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$ (1)

Đổi biến $x = t + T \Rightarrow dx = dt$

$$\text{Khi đó } \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t + T) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) suy ra } I = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Ví dụ 7.1: Tính tích phân $I = \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$

Giải: Ta có $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên

theo Kết quả 7 ta có: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{2\pi}^{4\pi} f(x) dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{4\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx \\ &= 2\sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) dx \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(-2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} + 2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right) = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 7.2: Tính tích phân $I = \int_0^{2016\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

Giải: Ta có $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$ là hàm số liên tục và tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ nên

theo kết quả 7 ta có: $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \dots = \int_{2014\pi}^{2015\pi} f(x) dx = \int_{2015\pi}^{2016\pi} f(x) dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{2016\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx + \dots + \int_{2014\pi}^{2015\pi} f(x) dx + \int_{2015\pi}^{2016\pi} f(x) dx = 2016 \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= 2016 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 2016 \int_0^{\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = 2016\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= -2016\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} = 4032\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 7.3: Chứng minh rằng $I = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin^9 x \cos^{10} x}{1 + \cos^8 16x} dx = 0$

Giải: Ta có $f(x) = \frac{\sin^9 x \cos^{10} x}{1 + \cos^8 16x}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên từ Kết quả

$$7 \text{ suy ra } I = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin^9 x \cos^{10} x}{1 + \cos^8 16x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^9 x \cos^{10} x}{1 + \cos^8 16x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^9 x \cos^{10} x}{1 + \cos^8 16x} dx$$

Ngoài ra $f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ nên từ Kết quả 1 suy ra $I = 0$.

Bài tập tương tự: Tính các tích phân sau

$$1) I = \int_{-1}^1 x^4 \ln \frac{2+x}{2-x} dx \quad \text{Đs: } I = 0$$

$$2) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(x^2 + \sqrt{x^2 + 1}) dx \quad (HVKT Mật mã, 1999)$$

Hướng dẫn: Dễ thấy $f(x) = \cos x$ là hàm chẵn trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là hàm lẻ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\cos x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là hàm lẻ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Theo Kết quả 1, ta được $I = 0$

$$3) I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\cos 2x + \sin x \sin \frac{x}{2} \right) \ln \frac{1+x}{1-x} dx \quad \text{Đs: } I = 0$$

$$4) I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{2015} 2x + \sin^{2017} x) dx \quad \text{Đs: } I = 0$$

$$5) I = \int_{-a}^a x^2 (\sin x + \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad (a > 0)$$

Hướng dẫn: Sử dụng Kết quả 1 và Kết quả 2 suy ra $I = \frac{\pi a^4}{8}$

$$6) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx \quad (ĐH Mỏ Địa Chất, 1999) \quad \text{Đs: } I = \frac{4}{5}$$

$$7) I = \int_{-3}^3 f(x) dx, \text{ nếu } f(-x) + f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{Đs: } I = \frac{9\pi}{2}$$

$$8) I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + e^{-2x})} \quad \text{Đs: } I = 1$$

$$9) I = \int_{-1}^1 \frac{|x|}{10^x + 1} dx \quad \text{Đs: } I = \frac{1}{2}$$

$$10) I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx \quad \text{Đs: } I = \frac{\pi \ln 3}{8}$$

$$11) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(\cos x)} - \tan^2(\sin x) \right) dx \quad (Toán học tuổi trẻ 1/2008) \quad \text{Đs: } I = \frac{\pi}{2}$$

$$12) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(1 + \cos x)^{+\sin x}}{1 + \sin x} dx \quad \text{Đs: } I = 2 \ln 2 - 1$$

$$13) I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sin x}{1 + 9^{x - \frac{\pi}{2}}} dx \quad \text{Đs: } I = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$14) I = \int_0^{2020\pi} \sin^{2019} x dx \quad \text{Đs: } I=0$$

2.3.2. Sử dụng tích phân liên kết để tính tích phân

Nhiều khi việc tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ gặp nhiều khó khăn, ta đi tìm một tích phân $J = \int_a^b g(x) dx$ sao cho việc tính hai tích phân $\alpha_1 I + \beta_1 J$ và $\alpha_2 I + \beta_2 J$ đơn giản. Khi đó việc tính I hoặc J bằng cách giải hệ $\begin{cases} \alpha_1 I + \beta_1 J = \gamma_1 \\ \alpha_2 I + \beta_2 J = \gamma_2 \end{cases}$. Người ta nói I và J là hai tích phân liên kết với nhau

Ví dụ 1: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Giải: Xét tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

Ta có $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4} \quad (1)$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = - \ln |\sin x + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ = - \ln \sqrt{2} = - \frac{\ln 2}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$

Nhận xét: Nếu bài toán yêu cầu tính tích phân J ta cũng có $J = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln 2}{4}$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$

Giải: Xét tích phân $J = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

Ta có $I + J = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 dx = 1 \quad (1)$

$$I - J = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{d(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \ln |e^x + e^{-x}| \Big|_0^1 = \ln \frac{e^2 + 1}{2e} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2}$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$

Giải: Xét tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$

Ta có $I - 3J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x)}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \sqrt{3}\cos x) dx = -(\cos x + \sqrt{3}\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -1 \quad (1)$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \ln 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{3 \ln 3}{8} - \frac{1}{4}$

Nhận xét: $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$ và $J = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$ là hai tích phân liên kết với nhau

Ví dụ 4: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos 2x dx$

Giải: Xét tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos 2x dx$

Ta có $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \cos^2 x) \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \quad (1)$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\pi + 4}{16}$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx$

Giải: Xét tích phân $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot x}{\tan x + \cot x} dx$

Ta có $I + J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x + \cot x}{\tan x + \cot x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \frac{\pi}{6}$ (1)

$$I - J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}}{1} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx = - \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\pi}{12}$

Ví dụ 6: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx$ (HSG Toán 12 Thanh Hóa, 2011)

Giải: Xét tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx$

Ta có $I + \sqrt{3}J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{4} \tan \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$J - \sqrt{3}I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3} dx$$

$$= - \frac{1}{2(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = - \frac{1}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Nhận xét: Sự tiện lợi của tích phân liên kết là ta có thể tính được hai tích phân cùng một lúc mặc dù đề bài không yêu cầu

Bài tập tương tự: Tính các tích phân sau

1) $I = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \sqrt{3} \cos x} dx$ Đs: $I = - \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx \quad \text{Đs: } I = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 3x \cos^2 6x dx \quad \text{Đs: } I = \frac{\pi}{8}$$

$$4) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \tan x} \quad (\text{ĐH Hồng Đức, 2000}) \quad \text{Đs: } I = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln 2}{4}$$

$$5) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{Đs: } I = \frac{\pi + 1}{4}$$

2.4. Hiệu quả sáng kiến

Hiệu quả thử nghiệm sáng kiến đầu năm học 2015 – 2016 tôi đã chọn nhóm 20 học sinh có học lực từ trung bình, khá đến giỏi Trường THPT Mường Lát, để thực hiện đề tài bước đầu học sinh chưa có hứng thú học và kết quả thu được như sau:

Nhóm	Giỏi		Khá		Trung bình	
20 học sinh	3	15%	7	35%	10	50%

Kết quả thử nghiệm đến cuối tháng 4 năm học 2015 – 2016, học sinh hiểu được bài và ham học tìm tòi một số bài toán có liên quan tới bài học. Qua đó tôi đã thu được kết quả như sau:

Nhóm	Giỏi		Khá		Trung bình	
20 học sinh	7	35%	9	45%	4	20%

Rõ ràng từ bảng kết quả thu được qua một năm thực hiện đề tài này, kết quả là học sinh học phân tích phân qua đề tài ***“Sử dụng một số kết quả “đẹp” của hàm số và tích phân liên kết để tính tích phân”*** có tiến bộ rõ rệt.

3. Kết luận

3.1. Kết luận

Nhu cầu cần thiết của người học toán là biết vận dụng và tiếp thu những nội dung và phương pháp giải toán hay, qua thời gian nghiên cứu và thực hiện đề tài tôi đã thu được những kết quả sau:

- +) Giải quyết được một số bài toán tích phân điển hình liên quan đến đề tài
- +) Trình bày một số bài toán tổng quát sau mỗi Ví dụ cụ thể
- +) Sử dụng tích phân liên kết để giải toán

Đối với các hàm số dưới dấu tích phân có các tính chất đặc biệt như đã trình bày ở trên thì việc lựa chọn phương pháp giải là rất quan trọng, chính vì vậy mà đề tài này tác giả đã dẫn dắt các em học sinh có cái nhìn sâu hơn về những bài tích phân kiểu này.

Đối với tích phân liên kết: Để lựa chọn một tích phân liên kết với một tích phân cho trước phụ thuộc vào đặc điểm của hàm dưới dấu tích phân và cận của chúng. Do đặc thù của các hàm số lượng giác nên ta thường dùng tích phân liên kết đối với các hàm lượng giác.

3.2. Kiến nghị

Đề tài này tôi mong rằng cần giới thiệu cho học sinh và giáo viên giảng dạy bộ môn Toán, đặc biệt là giáo viên ôn thi học sinh giỏi và học sinh thi Đại học cao đẳng, dù tôi đã cố gắng rất nhiều nhưng cũng không tránh khỏi những thiếu sót nhất định, rất mong quý đọc giả góp ý cho lần đề tài sau được hoàn chỉnh hơn. Tôi xin thành thật cảm ơn

Ý KIẾN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	Thanh Hóa, ngày 20 tháng 4 năm 2016 Tôi xin cam đoan đây là SKKN do tôi nghiên cứu và thực hiện, không copy của người khác. Đỗ Đình Bằng
---	---

Tài liệu tham khảo

- [1]. Sách giáo khoa Giải tích 12 cơ bản và nâng cao, NXB Giáo dục.
- [2]. Tạp chí toán học và tuổi trẻ, NXB Giáo dục.
- [3]. Các phương pháp cơ bản tìm Nguyên hàm, Tích phân và Số phức (Phan Huy Khải, NXB Hà Nội, 2008).
- [4]. Các đề thi tuyển sinh Đại học cao đẳng.
- [5]. Tuyển tập các chuyên đề và kỹ thuật tính Tích phân (Trần Phương, NXB Hà Nội, 2008).

