SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO Ba Đình	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024 MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi có một trang)

Bài I (5,0 điểm).

1. Giải phương trình $(4x+2)\sqrt{x^2+2x+5}=(x^2+2x+2)\sqrt{4x+5}$.

2. Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3d^3$, $b^5+c^5+d^5=3a^5$ và $c^7+d^7+a^7=3b^7$. Chứng minh rằng a=b=c=d.

Bài II (5.0 điểm).

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.
2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x; y; p) với p là số nguyên tố thỏa mãn:

$$x^2+p^2y^2=6(x+2p).$$

Bài III (3,0 điểm).

1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $5(x-y)^2\le(x^2+y^2)$. Chứng minh $\frac{1}{2}\le\frac{x}{y}\le2$.

2. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $5(x+y+z)^2\ge14(x^2+y^2+z^2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x+z}{x+2z}$.

Bài IV (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB<BC), ngoại tiếp đường tròn tâm I. Hình chiếu của điểm I lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là M, N và hình chiếu của B lên cạnh AC là Q. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Q, P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và R là giao điểm của hai đường thẳng MN, BQ.
1. Chứng minh các tam giác BMR và BIP đồng dạng.
2. Chứng minh đường thẳng PR song song với đường thẳng AC.
3. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP.

Bài V (1,0 điểm).

Có 15 hộp rỗng. Mỗi bước, người ta chọn một số hộp rồi bỏ vào mỗi hộp một số viên bi sao cho số viên bi bỏ vào mỗi hộp là một lũy thừa của 2 và trong mỗi bước không có hai hộp nào có số bi được bỏ vào giống nhau. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho sau khi thực hiện k bước tất cả các hộp đều có số bi giống nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I (5,0 điểm).

1. Giải phương trình $(4x+2)\sqrt{x^2+2x+5}=(x^2+2x+2)\sqrt{4x+5}$.

2. Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3d^3,\ b^5+c^5+d^5=3a^5$ và

$c^7+d^7+a^7=3b^7$. Chứng minh rằng a=b=c=d.

Lời giải

1. Điều kiện: $x\geq -\frac{5}{4}$. Đặt a=$\sqrt{4x+5};\ b=\sqrt{x^2+2x+5}\ \ (a, b\geq 0)$. Ta có

$$4x+2=a^2-3,\ x^2+2x+2=b^2-3.$$

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $(a^2-3)b=(b^2-3)a$, hay

$$(a-b)(ab+3)=0.$$

Do ab+3>0 nên từ đây, ta có a=b hay

$$x^2+2x+5=4x+2.$$

Giải phương trình này, ta được $x\in\{0;2\}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{0;2\}$.

2. Trong ba số b, d, a có một số hoặc là số lớn nhất, hoặc là số nhỏ nhất trong bốn số đã cho. Xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1: b là số lớn nhất hoặc là số nhỏ nhất trong a, b, c, d.

+ Nếu b là số lớn nhất trong a, b, c, d thì ta có $c^7,\ d^7,\ a^7\leq b^7$ nên

$$c^7+d^7+a^7\leq b^7+b^7+b^7=3b^7.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức phải xảy ra. Do đó c=d=a=b.

+ Nếu b là số nhỏ nhất trong a, b, c, d thì ta có $c^7,\ d^7,\ a^7\geq b^7$ nên

$$c^7+d^7+a^7\geq b^7+b^7+b^7=3b^7.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì dấu đẳng thức phải xảy ra. Do đó c=d=a=b.

- Trường hợp 2: d là số lớn nhất hoặc là số nhỏ nhất trong a, b, c, d. Chứng minh tương tự trường hợp 1, ta cũng có a=b=c=d.

- Trường hợp 3: a là số lớn nhất hoặc là số nhỏ nhất trong a, b, c, d. Chứng minh tương tự trường hợp 1, ta cũng có a=b=c=d.

Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có a=b=c=d.

Bài II (5.0 điểm).

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 3n + 11$ không chia hết cho 49.
2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x; y; p) với p là số nguyên tố thỏa mãn:

$$x^2 + p^2y^2 = 6(x + 2p).$$

Lời giải.

1. Giả sử tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + 3n + 11$ chia hết cho 49. Khi đó, ta có $4(n^2 + 3n + 11) = (2n + 3)^2 + 35 \vdots 49.$ (1)

Mà 35 và 49 cùng chia hết cho 7 nên ta có $(2n + 3)^2$ chia hết cho 7. Suy ra 2n+3 chia hết cho 7. Từ đó $(2n + 3)^2$ chia hết cho 49. Kết hợp với (1), ta được 35 chia hết cho 49, mâu thuẫn. Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 3n + 11$ không chia hết cho 49.

2. Do 6(x+2p) chia hết cho 3 nên từ phương trình đã cho, ta suy ra $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3.
Mặt khác, ta có để ý rằng, với mọi số nguyên a thì a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Do đó để $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3 thì ta phải có x^2 và p^2y^2 cùng chia hết cho 3. Suy ra x và py cùng chia hết cho 3.
Đặt x=3a, với a nguyên dương. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành.
$9a^2 + p^2y^2 = 18a + 12p.$

Do $9a^2, p^2y^2$ và 18a chia hết cho 9 nên từ phương trình trên, ta suy ra $12p \vdots 9$, tức $p \vdots 3$. Mà p là số nguyên tố nên p=3. Khi đó phương trình (1) có thể viết lại thành
$a^2 + y^2 = 2a + 4$

Hay $(a - 1)^2 + y^2 = 5$

Vì $(a - 1)^2 \geq 0$ nên từ phương trình trên, ta suy ra $y^2 \leq 5$. Do y là số nguyên dương nên ta có $y \in \{1; 2\}$. Bằng phép thử trực tiếp, ta tìm được các cặp số nguyên dương (a;y) thỏa mãn phương trình (2) là (3;1) và (2; 2). Từ đó suy ra có hai bộ số (x; y; p) thỏa mãn yêu cầu đề bài là (9;1;3) và (6; 2; 3).

Bài III (3,0 điểm).

1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $5(x - y)^2 \leq (x^2 + y^2)$. Chứng minh $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2$.

2. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $5(x+y+z)^2 \geq 14\left(x^2+y^2+z^2\right)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x+z}{x+2z}$.

Lời giải

1. Giả thiết đã cho có thể được viết lại thành $2(x-2y)(2x-y) \leq 0$

hay $\left(\dfrac{x}{y}-2\right)\left(\dfrac{2x}{y}-1\right) \leq 0$

từ đó, ta có

$\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x}{y} \leq 2$

2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$5(x+y+z)^2 \leq 5\left(\frac{9}{5}+1\right)\left[\frac{5}{9}(x+z)^2+y^2\right] = 14\left[\frac{5}{9}(x+z)^2+y^2\right]$$

kết hợp với giả thiết, ta suy ra $x^2+z^2 \leq \dfrac{5}{9}(x+z)^2$, hay

$(x-2z)(2x-z) \leq 0$

từ đây ta có

$\dfrac{z}{2} \leq x \leq 2z$

Suy ra

$$P = \frac{2x+z}{x+2z} = 2 - \frac{3z}{x+2z} \geq 2 - \frac{3z}{\frac{z}{2}+2z} = \frac{4}{5}$$

và

$$P = 2 - \frac{3z}{x+2z} \leq 2 - \frac{3z}{2z+2z} = \frac{5}{4}$$

Vậy $\dfrac{4}{5} \leq P \leq \dfrac{5}{4}$. Bất đẳng thức bên trái xảy ra dấu đẳng thức khi z= 2x và $y = \dfrac{5}{3}x$.

Bất đẳng thức bên phải đạt được dấu đẳng thức khi x= 2z và $y = \dfrac{5}{3}z$. Tóm lại, giá trị lớn nhất của biểu thức là $\dfrac{5}{4}$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{4}{5}$

Bình luận. Học sinh cần chứng minh lại bất đẳng thức Cauchy-Schwarz khi sử dụng.

Bài IV (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB<BC), ngoại tiếp đường tròn tâm I. Hình chiếu của điểm I lên các cạnh AB, AC theo thứ tự là M, N và hình chiếu của B lên cạnh AC là Q. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Q, P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và R là giao điểm của hai đường thẳng MN, BQ.

1. Chứng minh các tam giác BMR và BIP đồng dạng.
2. Chứng minh đường thẳng PR song song với đường thẳng AC.
3. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP.

Lời giải

1. Do AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên AM=AN, suy ra tam giác AMN cân tại A. Từ đó

$$\widehat{BMR}=180^0-\widehat{AMN}=180^0-\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{BAC}\right)=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\widehat{BIC}=180^0-\widehat{IBC}=180^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}-\widehat{BCA}\right)=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Do đó $\widehat{BMR}=\widehat{BIC}$ (1)

Do QA=QD và $BQ\perp AD$ nên tam giác ABD cân tại B. Từ đó

$\widehat{ABR}=\widehat{DBR}=90^0-\widehat{BAC}$

Suy ra

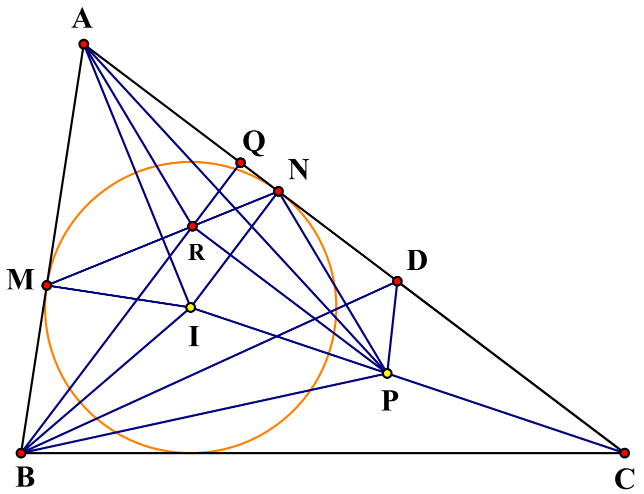
$$\widehat{BRM}=180^0-\widehat{BMR}-\widehat{MBR}=180^0-\left(90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right)-\left(90^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right)=\frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Mặt khác, ta cũng có (chú ý rằng C, P, I thẳng hàng)

$$\widehat{BPI}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}=\frac{1}{2}\widehat{DBC}+\widehat{DCB}=\frac{1}{2}\widehat{ADB}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Do đó: $\widehat{BRM}=\widehat{BPI}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\Delta BMR\sim\Delta BIP$ (g.g)



2. Do $\Delta BMR\sim\Delta BIP$ (theo câu 1.) nên ta có

$\dfrac{BM}{BR} = \dfrac{BI}{BP}$ (3) và $\widehat{MBR} = \widehat{IBP}$. (4)

Từ (4), ta suy ra $\widehat{MBR} + \widehat{RBI} = \widehat{IBP} + \widehat{RBI}$, hay $\widehat{MBI} = \widehat{RBP}$ (5)

Từ (3) và (5), ta suy ra $\Delta BMI \sim \Delta BRP$ (c.gc). Do đó

$\widehat{BRP} = \widehat{BMI} = 90^0$. Suy ra $RP \perp BQ$.

Mặt khác, ta cũng có $BQ \perp AC$ nên $PR // AC$.

3. Ta có

$$\widehat{RND} = 180^0 - \widehat{ANM} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Lại có

$$\widehat{PDN} = \widehat{ADB} + \widehat{BDP} = \widehat{ADB} + \frac{1}{2}\widehat{BDC}$$

$$= \widehat{ADB} + \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{ADB}\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{ADB} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Do đó $\widehat{RND} = \widehat{PDN}$.

Mặt khác, theo chứng minh câu 2. ta có $PR \geq DN$ nên tứ giác DNRP là hình thang. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tứ giác DNRP là hình thang cân. Từ đó

$\widehat{NPR} = \widehat{DRP} = \widehat{RDN}$ (6)

Tam giác RAD có RQ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên cân tại R. Suy ra

$\widehat{RDN} = \widehat{RAN}$ (7)

Từ (6) và (7), ta có $\widehat{RPN} = \widehat{RAN}$.

Lại có $\widehat{NRP} = \widehat{RNA}$ (so le trong). Do đó

$\widehat{RNP} = 180^0 - \widehat{NRP} - \widehat{RPN} = 180^0 - \widehat{RNA} - \widehat{RAN} = \widehat{NRA}$.

Mà hai góc $\widehat{RNP};\ \widehat{NRA}$ ở vị trí so le trong nên $RA // NP$ nên là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo RN và AP cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy MN đi qua trung điểm của AP.

Bài V (1,0 điểm).

Có 15 hộp rỗng. Mỗi bước, người ta chọn một số hộp rồi bỏ vào mỗi hộp một số viên bi sao cho số viên bi bỏ vào mỗi hộp là một lũy thừa của 2 và trong mỗi bước không có hai hộp nào có số bi được bỏ vào giống nhau. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho sau khi thực hiện k bước tất cả các hộp đều có số bi giống nhau.

Lời giải

Giả sử sau k bước, mỗi hộp đều có n viên bi. Khi đó, số bi trong tất cả các hộp là 15n.

Gọi 2^{m_i} là số viên bi nhiều nhất được bỏ vào một hộp nào đó ở bước thứ i ($1 \le i \le k$).
Gọi m là số lớn nhất trong các số m_1, m_2,.....,m_k. Khi đó, ở mỗi bước, số viên bi được bỏ vào tất cả các hộp không vượt quá $2^m + 2^{m-1} + ... + 2^1 + 2^0 = 2^{m+1} - 1$. Suy ra, sau k bước, số viên bi trong tất cả các hộp không vượt quá $k(2^{m+1} - 1)$. Do đó $15n \le k(2^{m+1} - 1) < k.2^{m+1}$

Mặt khác, dễ thấy $n \ge 2^m$ nên $15.2^m \le 15n < k.2^{m+1}$, suy ra k> 7.5. Vì k là số nguyên dương nên $k \ge 8$. Do đó, cần không ít hơn 8 bước bỏ bi vào các hộp như sau:

* Bước 1: $1,2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,0,0,0,0,0,0,0$

* Bước 2: $1,2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,0,2^7,0,0,0,0,0,0$. Khi đó, số bi trong mỗi hộp lần lượt là $2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^7,2^7,0,0,0,0,0,0$

* Bước 3: $2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,0,0,0,2^7,0,0,0,0,0$. Khi đó, số bi trong mỗi hộp lần lượt là $2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,0,0,0,0,0$

* ....

* Bước 8: $2^6,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2^7$. Khi đó, số bi trong mỗi hộp lần lượt là $2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7,2^7$

Vậy k_{min}= 8.