Nguyễn Hữu Điển

OLYMPIC TOÁN NĂM 2000
49 ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
(Tập 2)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Để thử gói lệnh lamdethi.sty tôi biên soạn một số đề toán thi Olympic, mà các học trò của tôi đã làm bài tập khi học tập LATEX. Để phục vụ các bạn ham học toán tôi thu thập và gom lại thành các sách điện tử, các bạn có thể tham khảo. Mỗi tập tôi sẽ gom khoảng 50 bài với lời giải. Tập này có sự đóng góp của Trịnh Quang Anh, Nguyễn Thị Bình, Nguyễn Thị Thanh Bình, Đào thị Kim Cúc, Nguyễn Hoàng Cương, Giáp Thị Thùy Dung, Mai Xuân Đông, Hoàng Hà, Nguyễn Thị Thanh Hà.

Rất nhiều bài toán dịch không được chuẩn, nhiều điểm không hoàn toàn chính xác vậy mong bạn đọc tự ngẫm nghĩ và tìm hiểu lấy. Nhưng đây là nguồn tài liệu tiếng Việt về chủ đề này, tôi đã có xem qua và người dịch là chuyên về ngành Toán phổ thông. Bạn có thể tham khảo lại trong [1].

Rất nhiều đoạn vì mới học TeX nên cấu trúc và bố trí còn xấu, tôi không có thời gian sửa lại, mong các bạn thông cảm.

Hà Nội, ngày 2 tháng 1 năm 2010

Nguyễn Hữu Điển

$\frac{51}{\text{GD-05}}$89/176-05 Mã số: 8I092M5

Mục lục

Chương 1

Đề thi olympic Israel

▷**1.1**. *Định nghĩa $f(n) = n!$. Cho*

$$a = 0.f(1)f(2)f(3)....$$

Nói cách khác, để thu được sự biểu diễn phần thập phân của a viết các biểu diễn thập phân của $f(1)$, $f(2)$., ... trong một hàng, a có phải là số hữu tỷ không?

Lời giải: Nếu a là số hữu tỷ thì các con số trong phần thập phân phải xuất hiện một cách tuần hoàn. Vì f(n) luôn bao gồm một số khác không, nên phần tuần hoàn của phần thập phân không thể chỉ bao gồm toàn số không. Tuy nhiên, n đủ lớn, số các số 0 chưa trong f(n) tiến tới vô cùng, vì vậy phần tuần hoàn của phần thập phân phải chứa toàn số 0 – mâu thuẫn. Vì vậy a không là số hữu tỷ.

▷**1.2**. *. Δ ABC đỉnh là những điểm nguyên. Hai trong ba cạnh có độ dài thuộc tập $\sqrt{17}$, $\sqrt{1999}$, $\sqrt{2000}$. Tìm giá trị lớn nhất có thể của diện tích ΔABC.*

Lời giải: Không mất tổng quát, giả sử cạnh AB, BC có độ dài thuộc $\sqrt{17}$, $\sqrt{1999}$, $\sqrt{2000}$ thì
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC\sin\widehat{BCA}\leq\frac{1}{2}\sqrt{2000}\sqrt{2000}\sin\frac{\pi}{2} = 1000.$

Đẳng thức có thể xảy ra, chẳng hạn trong Δ mà đỉnh là (0,0); (44,8) và (-8, 44) chính xác 2 cạnh dài $\sqrt{2000}$ vì $44^2 + 8^2 = 2000$ và góc giữa 2 cạnh là $\frac{\pi}{2}$. Từ đó, diện tích lớn nhất của Δ là 1000.

▷**1.3**. **Bài toán 3.** *Các điểm A, B, C, D, E, F nằm trên 1 đường tròn và các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy. Lấy P, Q, R là các trung điểm cạnh AD, BC, CF tương ứng. 2 đoạn (dây cung) AG, AH được vẽ sao cho AG // BE và AH//CF chứng minh rằng Δ PQR và Δ DGH đồng dạng.*

Lời giải: Các góc định hướng môđun π. Giả sử đoạn thẳng AD, BE, CF đồng quy (cắt nhau) tại X và O là tâm đường tròn cho ở bài.
Hiển nhiên $\widehat{OPX} = \widehat{OQX} = \widehat{ORX} = \frac{\pi}{2}$, suy ra O, P, Q, R và X cùng thuộc 1 đường tròn.
Vì vậy $\widehat{DGH} = \widehat{DAH} = \widehat{DXC} = \pi - \widehat{CXP} = \pi - \widehat{RXP} = \widehat{PQR}$ Tương tự $\widehat{DGH} = \widehat{PRQ}$, từ đó suy ra ΔPQR $\sim$ ΔDGH.

▷**1.4**. *Một hình vuông ABCD cho trước, một phép đạc tam giác của hình vuông là 1 sự phân chia hình và thành các tam giác sao cho bất kỳ 2 tam giác đều được tách rời, chỉ chung 1 đỉnh hoặc chung nhau chỉ 1 cạnh cụ thể. Không đỉnh nào của 1 tam giác có thể nằm ở phần trong của cạnh tam giác khác). Một "phép đạc tam giác tốt" của 1 hình vuông là phép đạc trong đó mọi tam giác đều nhọn.*
a. Cho 1 ví dụ về phép đạc tam giác tốt của hình vuông.
b. Tìm số nhỏ nhất của các tam giác cần để có một phép đạc tam giác tốt?

Lời giải: Ta đưa ra 1 ví dụ về phép đạc tam giác tốt với 8 tam giác. Đặt hướng hình vuông sao cho đoạn AB đặt nằm ngang và A là đỉnh trên bên trái. Lấy M và N là các trung điểm cạnh AB và CD tương ứng, và P là 1 điểm trung đoạn MN khác trung điểm MN. Các góc $\widehat{MPA}$, $\widehat{APD}$ và $\widehat{DPN}$ và các góc phản xạ của chúng qua MN - tất cả đều là các góc nhọn. Ta chọn Q, R trên đường thẳng nằm ngang qua P sao cho Q, P, R nằm theo thứ tự từ trái qua phải và QP, PR có độ dài rất nhỏ (không đáng kể) chia hình vuông thành các Δ bằng cách vẽ đoạn QA, QM, QN, QD, RB, RM, RN, RC và QR. Nếu ta chọn Q sao cho PQ đủ nhỏ thì số đo các góc $\widehat{MQA}$, $\widehat{AQD}$, $\widehat{DQN}$ sẽ gần bằng số đo góc $\widehat{MPA}$,

$\widehat{APD}$, $\widehat{DPN}$, vì vậy những tam giác này sẽ nhọn.

Tương tự, nếu chọn R sao cho PR đủ nhỏ thì $\widehat{MRB}$, $\widehat{BRC}$, $\widehat{CRN}$ sẽ cùng nhọn. Dễ kiểm tra rằng các góc trong sự phân chia trên là nhọn như yêu cầu.

b.Ta sẽ chứng minh số nhỏ nhất là 8. Ta đã chỉ ra rằng 8 là giá trị có thể thực hiện được. Vì vậy, chỉ cần chỉ ra những phép đạc tam giác tốt nào với ít hơn 8 tam giác. Nhận xét rằng trong 1 phép đạc tam giác tốt, mỗi đỉnh của ABCD là đỉnh của ít nhất 2 tam giác bởi vì góc vuông đó phải được chia thành các góc nhọn. Như vậy, bất kỳ đỉnh nào nằm trên cạnh ABCD phải là đỉnh của ít nhất 3 tam giác và bất kỳ đỉnh nằm ở phần trong phải là đỉnh của ít nhất 5 tam giác.

Tóm lại, ta có thể chứng minh một kết quả mạnh hơn về mỗi góc của hình vuông ABCD. Phải có một tam giác mà cạnh bắt đầu từ đỉnh hình vuông và điểm cuối nằm trọn ở phần trong hình vuông ABCD. Không mất tổng quát, giả sử góc (đỉnh) đó là A. Cạnh AX nào đó của tam giác chia góc vuông tại A ra.Giả sử phản chứng rằng X không nằm ở phần trong hình vuông ABCD, không mất tổng quát, giả sử X thuộc đoạn BC (không trùng B). Bằng định nghĩa của phép đạc tam giác : không có đỉnh khác của một tam giác trong phép đạc tam giác nằm trên đoạn AX. Vì vậy, có 1 điểm Y trong ΔABX sao cho ΔAXY là một thành phần C phần tử của phép đạc tam giác tốt. Nhưng nếu vậy $\widehat{AYX} \geq \widehat{ABX} = \frac{\pi}{2}$: mâu thuẫn.

Ta xét 1 phép đạc tam giác tốt bất kỳ của ABCD. Lấy i là số của "các đỉnh trong" – các đỉnh trong phép đạc tam giác mà nằm bên trong hình vuông ABCD. Theo trên i ≥ 1. Trước tiên giả sử rằng có một đỉnh trong P. Kết quả của đoạn trước cho ta: đoạn PA, PB, PC, PD phải là các cạnh của các tam giác trong phép đạc tam giác. Một trong góc $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$, $\widehat{CPD}$, $\widehat{DPA}$ phải lớn hơn $\frac{\pi}{2}$ giả sử là $\widehat{APB}$. Góc này phải được chia ra trong phép đạc tam giác này bằng cạnh PQ nào đó, với Q là điểm thuộc đoạn AB. Nhưng cả $\widehat{AQP}$ và $\widehat{BQP}$ có số đo ít nhất là $\frac{\pi}{2}$ nên Q phải nằm trong cạnh của tam giác nào đó mà không nằm trong đoạn QA, QB hoặc QP. Tuy nhiên không thể tạo được một cạnh mà không cắt AP hoặc BP và cạnh đó không kết thúc ở một đỉnh trong thứ hai.

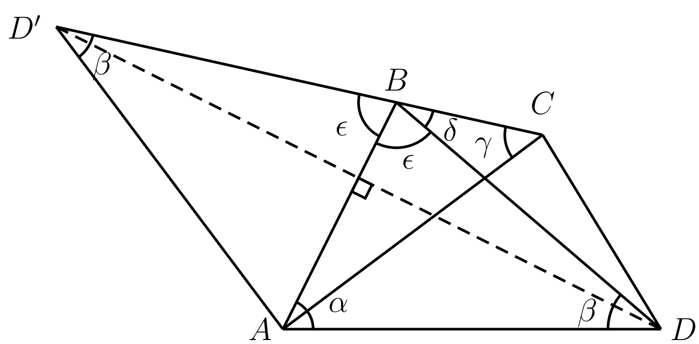
Giả sử tiếp $i \geq 2$. Với mỗi một n các tam giác, ta có thể đếm 3 cạnh để có tổng 3n; mỗi cạnh nằm trên biên hình vuông được đếm 1 lần, các cạnh khác được đếm hai lần. Nếu $i = 2$ thì với mỗi 2 điểm trong ít nhất 5 cạnh tam giác nhận điểm đó làm điểm cuối, nhiều nhất 1 cạnh tam giác chứa cả hai đỉnh trong, nên ít nhất 9 cạnh tam giác không nằm ở biên của hình vuông. Nếu $i \geq 3$, lấy bất kỳ 3 đỉnh trong. Mỗi đỉnh thuộc ít nhất 5 cạnh tam giác và nhiều nhất 3 cạnh tam giác chứa 2 trong 3 đỉnh đó. Vì vậy ít nhất $3 \times 5 - 3 = 12$ cạnh tam giác. Không thuộc biên hình vuông. Trong cả hai trường hợp đều có ít nhất 9 cạnh tam giác không thuộc biên hình vuông, và hơn nữa lại có 4 cạnh tam giác thuộc biên hình vuông. Vì vậy $3n \geq 9 \times 2 + 4 = 22$ hay $n \geq 8$. Vì vậy trong mọi trường hợp phải có ít nhất 8 tam giác thoả mãn yêu cầu.

Chương 2

Đề thi olympic Italy

▷**2.5**. *Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi, với $\alpha = \angle DAB; \beta = \angle ACB; \delta = \angle DBC$; và $\epsilon = \angle DBA$. Giả thiết rằng $\alpha < \pi/2, \beta + \gamma = \pi/2$ và $\delta + 2\epsilon = \pi$, chứng minh rằng*

$$(DB + BC)^2 = AD^2 + AC^2.$$



Lời giải: Giả sử D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng AB. Ta có $\angle D'BA = \angle DBA = \epsilon$, nên $\angle D'BC = \angle D'BA + \angle ABD + \angle DBC = 2\epsilon + \delta = \pi$. Vậy, D', B, C là thẳng hàng. Cũng có $\angle AD'C + \angle ACD' = \angle ADB + \angle ACB = \beta + \gamma = \pi/2$, nên $\angle D'AC = \pi/2$ và tam giác $A'AC$ vuông. Theo định lí Pythagorean, $D'C = AD'^2 + AC^2$, kéo theo

$$\begin{aligned}(DB + BC)^2 = (D'B + BC)^2 = D'C^2 &= AD'^2 + AC^2 \\ &= AD^2 + AC^2,\end{aligned}$$

được điều phải chứng minh.

▷**2.6**. *Cho số nguyên cố định $n > 1$, Alberto và Barbara chơi trò chơi sau, bắt đầu với bước đầu tiên và sau đó xen kẽ giữa lần thứ hai và lần thứ ba :*

- *Alberto chọn một số nguyên dương.*
- *Barbara chọn một số nguyên lớn hơn 1 là một bội hoặc ước của số nguyên của Alberto, có thể chọn đúng là số nguyên của Alberto.*
- *Alberto cộng hoặc trừ 1 từ số của Barbara.*

Barbara chiến thắng nếu cô ấy chọn ra n với 50 lần chơi. Với giá trị nào của n cô ấy là người thắng cuộc.

Lời giải: Mục đích của chúng ta là Barbara là người thắng cuộc nếu và chỉ nếu ít nhất là một điều kiện sau được thỏa mãn :

- $n = 2$;
- $4|\ n$;
- có số nguyên $m > 1$, sao cho $(m^2 - 1)|\ n$.

Đầu tiên chúng ta chỉ ra rằng khi và chỉ khi ba điều kiện này là đúng, thì Barbara là người chiến thắng. Nếu Barbara chọn lần đầu tiên a là một số chẵn thì Barbara có thể chọn 2 trong lần đàu tiên. Nếu thay a bằng một số lẻ, thì Barbara có thể chọn chính là số a là tốt nhất. Nếu $a = n$, cô ấy chiến thắng; nói cách khác, lần chọn thứ hai của Alberto phải là số chẵn, và Barbara có thể chọn số 2 trong lần chọn thứ hai. Giả sử $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ là các số được chọn sau khi Barbara chọn 2 cho lần chọn đầu tiên.

Trường hợp 1 :

(a) $n = 2$, trong trường hợp này Barbara thực sự chiến thắng.

(b) $4|\ n$. Nếu $a_1 = 1$, thì Barbara có thể chọn $b_1 = n$ và chiến thắng. Nói cách khác, $a_1 = 3$, Barbara có thể chọn $b_1 = 3$, a_2 bằng 2 hoặc 4, và Barbara có thể chọn $b_2 = n$.

(c) Có số nguyên $m > 1$, $(m^2 - 1)|\ n$. Như trường hợp 2, Alberto phải chọn $a_1 = 3$ để ngăn Barbara thắng cuộc. Thực tế, có đúng một số nguyên trong các số $m - 1, m$ và $m + 1$ chia hết cho 3, nghĩa là hoặc 3 chia hết m hoặc 3 chia hết $m^2 - 1$và vì vị 3 chia hết n. Trong trường hợp đầu tiên, Barbara có thể chọn $b_1 = m$, bắt buộc $a_2 = m \pm 1$ và kéo theo Barbara chọn $b_2 = n$. trong trường hợp sau, Barbara có thể chọn $b_1 = n$.

Bây giờ chúng ta thấy rằng Barbara có một chiến thuật chiến thắng nếu ít nhất một trong các điều kiện là đúng. Bây giờ chúng ta giả thiết rằng không điều kiện nào là đúng với $n > 1$ và chứng minh rằng Alberto có thể luôn luôn ngăn cản Barbara tiến đến chiến thắng. Bởi vì điều kiện thứ nhất và thứ hai là không đúng và bởi vì điều kiện thứ hai là sai với $m = 2$, chúng ta có $n \neq 2, 3, 4,$. Vậy $n > 4$.

Gọi một số nguyên dương n là *số hy vọng* nếu $a|n$ và $n|a$. Chúng ta chứng minh rằng với số nguyên $b > 1$, tồn tại $a \in \{b-1, b+1\}$ sao cho a là số hy vọng. Đêìu này kéo theo rằng Alberto có thể bắt đầu chọn một vài số hy vọng và cũng chọn một vài số hy vọng theo sau để ngăn cản Barbara tiến đến chiến thắng sau 50 lần.

Giả sử vì điều kiện là mục đích trên là sai với số nguyên $b > 1$. Nếu $b > n$, thì $b-1$ và $b+1$ phải là bội của n. Do đó n chia hết hiệu, tức là 2, mâu thuẫn.

Nói cách khác, $b \leq n$. Bởi vì n không chia hết $n+1$ hoặc $n+2$ với $n > 2$, chúng ta phải có $(b-1)|n$ và $(b+1)|n$. Nếu $b-1$ và $b+1$ là chẵn, thì một trong chúng phải chia hết cho 4 - nhưng $4|\ n$, mâu thuẫn. Vậy, $b-1$ và $b+1$ là lẻ. Điều này kéo theo chúng nguyên tố cùng nhau và tích của chúng $b^2 - 1$ chia hết n, mâu thuẫn với giả thiết điều kiện thứ ba là sai.

▷**2.7**. *Giả sử $p(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên sao cho $p(0) = 0$ và $0 \leq p(1) \leq 10^7$, và sao cho tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $p(a) = 1999$ và $p(b) = 2001$. Xác định các giá trị có thể của $p(1)$.*

Lời giải: Nếu $p(x) = 2000x^2 - x$, thì $p(0) = 0, p(1) = 1999$, và $p(-1) = 2001$. Nếu $p(x) = 2000x^2 + x$, thì $p(0) = 0, p(1) = 2001$, và $p(-1) = 1999$. Do đó, có thể $p(1) = 1999$ hoặc 2001.

Bây giờ giả sử rằng $p(1) \neq 1999, 2001$. Thì $a, b \neq 1$. Bởi vì $p(0) = 0$, chúng ta viết được $p(x) = xq(x)$ với đa thức $q(x)$ có hệ số nguyên. Bởi vì q có hệ số nguyên, $q(a)$ là một số nguyên, và có thể viết $q(x) - q(a) = (x-a)r(x)$ với đa thức $r(x)$ có hệ số nguyên. Và bởi vì r có hệ số nguyên, $r(b)$ là một số nguyên, và chúng ta có thể viết $r(x) - r(b) = (x-b)s(x)$

với đa thức s có hệ số nguyên. Do đó :

$$\begin{aligned} p(x) = xq(x) &= xq(a) + x(x-a)r(x) \qquad (*) \\ &= xq(a) + x(x-a)r(b) + x(x-a)(x-b)s(x). \end{aligned}$$

Đặc biệt, khi cho $x = a$ và $x = b$, chúng ta tìm được

$$\begin{aligned} 1999 &= aq(a) \\ 2001 &= bq(a) + b(b-a)r(b). \end{aligned}$$

Bởi vì $p(0), p(a)$ và $p(b)$ là các số phân biệt, vì vậy $0, a$ và b cũng phân biệt. Do đó, chúng ta có thể giải hai phương trình trên để tìm được

$$\begin{aligned} q(a) &= \frac{1999}{a} \qquad (*) \\ r(b) &= \frac{2001 - bq(a)}{b(b-a)}. \end{aligned}$$

Bởi vì $a \neq b$, chúng ta có $|a-b|$ chi hết $p(a) - p(b)$. Vì vậy $|a-b|$ bằng 1 hoặc 2. Cũng vậy, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, chúng ta có $p(x) = xq(x)$ và vì vậy $x|\ p(x)$. Đặc biệt, $a|$ 1999, cho nên

$$|a| \in \{1, 1999\}.$$

Với hạn chế này, kết hợp với điều kiện $|a-b| \in \{1,2\}, b|2001, a \neq 1$, và $b \neq 1$, kéo theo rằng (a,b) bằng một trong các cặp sau :

$$(-1999, -2001), (-1, -3), (1999, 2001).$$

Cố định (a,b) là chung cho ba cặp trên. Từ (*) chúng ta biết rằng $q(a)$ phải bằng $\tilde{q} = \dfrac{1999}{a}$ và $r(b)$ phải bằng $\tilde{r} = \dfrac{2001 - b\tilde{q}}{b(b-a)}$. Cho $x = 1$ và (*) để tìm $p(1)$:

(a,b)	$q(a)$	$r(a)$	$p(1)$
$(-1999, -2001)$	-1	0	$-1 + (2000.2002)s(1)$
$(-1, -3)$	-1999	-666	$-3331 + 8s(1)$
$(1999, 2001)$	1	0	$1 + (1998.2000)s(1).$

Vì vậy, $p(1)$ có dạng $m + ns(1)$ với số nguyên cố định m, n. Thật vậy, giả sử rằng có một số dạng $m + n\tilde{s}$ giữa 0 và 10^7, ở đât s là số nguyên. Chúng ta có

$$p(x) = \tilde{q}x + \tilde{r}x(x-a) + \tilde{s}x(x-a)(x-b),$$

chúng ta có $p(0) = 0, p(a) = 1999, p(b) = 2001$, và $p(1) = m + n\tilde{s}$.
Do đó, các giá trị có thể của $p(1)$ là 1999 và 2001, và các số giữa 0 và 10^7 đồng dư với $-1 \pmod{2000.2002}$, $-3331 \equiv 5 \pmod 8$, hoặc $1 \pmod{1998.2000}$.

Chương 3

Đề thi olympic Nhật Bản

▷**3.8**. *Ta tráo một loạt các lá bài đánh số* $a_1, a_2, \ldots, a_3n$ *từ trái qua phải bằng việc sắp xếp các lá bài theo thứ tự mới:*

$$a_3, a_6, \ldots, a_3n, a_2, a_5, \ldots a_{3n-1}, a_1, a_4, \ldots, a_{3n-2}$$

Ví dụ nếu 6 lá bài được đánh số $1, 2, \ldots, 6$ *từ trái qua phải thì việc tráo chúng 2 lần sẽ thay đổi trật tự của chúng như sau:*

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \longrightarrow 3, 6, 2, 5, 1, 4 \longrightarrow 2, 4, 6, 1, 3, 5$$

Bắt đầu với 192 quân bài dánh số $1, 2, \ldots, 192$ *từ trái qua phải, liệu ta có được trật tự 192, 191, ..., 1 sau số lần tráo hữu hạn?*

Lời giải: Với mỗi n, cho $f(n)$ là vị trí trong chuỗi các quân bài ở đó quân bài đi vị trí thứ n sau mỗi lần tráo. Ta thấy rằng sau k lần tráo, $f^k(n)$ ở vị trí thứ n. Ta đã được biết rằng $f(1), \ldots, f(192)$ bằng 3, 6, ..., 192, 2, 5, ..., 191, 1, 4, ..., 190. Trong trật tự này, sự khác biệt giữa bất kỳ số hạng nào với số hạng đứng trước nó là đồng dư từ 3 tới modul 193. Vì $f(1) \equiv 3 \pmod{193}$ ta có $f(n) \equiv 3n \pmod{193}$ với mỗi n.

Trong trật tự $(3^3)^{20}, (3^3)^{21}, \ldots, (3^3)^{26}$, với mỗi số hạng là bình phương của số hạng trước nó. Ít nhất một số hạng trước nó (số hạng đầu tiên 2t) không đồng dư với một modul 193; giả sử $N = 3^d$ (ở đó d là số nguyên

dương) là giá trị lớn nhất với thuộc tính của nó, vì 193 là số nguyên tố, theo định lý Fermat có: $(3^3)^{26} \equiv (3^3)^{192} \equiv 1 \pmod{193}$, do vậy 3^d không phải là số hạng cuối cùng trong trật tự này. Do vậy, N^2 số hạng tiếp theo của N trong trật tự là đồng dư với 1 modul 193. Vì 193 chia được cho $N^2 - 1$ nhưng không chia được cho N - 1, nó phải chia hết cho $(N^2-1)(N-1) = N+1 = 3^d+1$, có nghĩa là $3^d \equiv -1 \pmod{193}$.
Với$n = 1, 2, \ldots, 193$ ta có $f^d(n) \equiv 3^d n \equiv -n \pmod{193}$. Do vậy $f^d(n) = 193 - n$, có nghĩa là trật tự $192, 191, \ldots, 1$ xuất hiện sau d lần tráo.
Chú ý: Giá trị d tìm thấy ở trên thực tế là bằng 24. Số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn $3^k \equiv -1 \pmod{193}$ là 8, có nghĩa là trật tự $192, 191, \ldots, 1$ xuất hiện lần đầu tiên sau 8 lần tráo bài.

▷**3.9**. *Trong mặt phẳng cho các điểm phân biệt A, B, C, P, Q, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng:*

$$AB + BC + CA + PQ < AP + AQ + BP + BQ + CP + CQ.$$

Lời giải: Trong bài giải này, khi gọi một đa giác $V_1 \ldots V_n$ là lồi nếu $V_1, \ldots, V_n$ tạo thành một đa giác lồi trong trật tự đó. (Ví dụ nếu ta nói hình vuông ABCD là lồi thì ta không nói rằng ACBD là lồi.)
Ta nói rằng điều kiện (a) cố định nếu tứ giác XYPQ là lồi với $X, Y \in \{A, B, C\}$. Trong trường hợp này ta chứng minh bất đẳng thức cần chứng minh là cố định. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng tứ giác ABPQ là lồi. Nếu $\overline{AP}$ giao với $\overline{BQ}$ tại O, thì bất đẳng thức tam giác cho ta $AB \leq AO + BO$ và $PQ \leq PO + QO$. Cộng 2 bất đẳng thức này ta có:

$$AB \leq AO + BO + OP + OQ = AP + BQ$$

Vì không có 3 trong số các điểm đã cho nào thẳng hàng nên bất đẳng thức tam giác cũng chỉ ra rằng $BC < BP + PC$ và $CA < CQ + QA$ Cộng 3 bất đẳng thức cuối cùng này ta có kết quả cần chứng minh.
Tiếp đến ta nói tới điều kiện (b) cố định, nếu xem X nằm trong tam giác YZM với sự hoán vị (X, Y, Z) của (A, B, C) và với $M \in \{P, Q\}$. Ta chứng

minh rằng bất đẳng thức cần chứng minh cố định trong trường hợp này. Không mất tính tổng quát, giả sử A nằm trong tam giác BCQ. Sơ đồ chuyển điểm P tùy ý tới mỗi cạnh PB, PC là các hàm lồi ngặt, có nghĩa là $P \longrightarrow PB+PC$ cũng là một hàm lồi ngặt. Do vậy, trên tất cả các điểm P hoặc trong tam giác BCQ hàm này chỉ đạt cực đại khi P trùng với B, C hoặc Q. Vậy nên: $AB+AC < \max\{BB+BC, CB+CC, QB+QC\} = QB+QC$ cộng bất đẳng thức này với bất đẳng thức BC < BP + PC và PQ < PA + QA, đã có ở bất đẳng thức tam giác ta được kết quả cần chứng minh.

Do việc đổi tên các điểm, bao lồi của 5 điểm đã cho hoặc phải là tam giácBC, hoặc ABP, hoặc APQ, hoặc tứ giác lồi ABCD, hoặc ABPQ, hoặc APBQ, hoặc ngũ giác lồi ABCPQ hoặc ABPCQ.

Nếu tam giác ABC là bao lồi thì Q phải nằm phía trong một trong các tam giác APB, BPC, CPA. Không mất đi tính khái quát giả thiết rằng Q nằm trong tam giác APB. Vì C không nằm bên trong tam giác APB nhưng nằm cùng phía đường $\overline{AB}$ so với Q, do vậy $\overline{QC}$ phải giao với một trong 2 đoạn thẳng $\overline{AP}$ và $\overline{PB}$. Nếu $\overline{QC}$ giao với $\overline{AP}$, thì tứ giác ACPQ là lồi và điều kiện (a) cố định; tương tự điều kiện (a) cố định nếu $\overline{QC}$ giao với $\overline{PB}$.

Nếu tam giác ABP là bao lồi thì C phải nằm trong tam giác ABP và điều kiện (b) cố định.

Nếu tam giác APQ là bao lồi thì ta có thể giả thiết C không gần hơn PQ so với B mà không mất di tính tổng quát. Vậy nên điều kiện (b) cố định.

Nếu tứ giác ABCP là bao lồi thì Q nằm trong tam giác APB hoặc trong CPB. Trong trường hợp đầu tứ giác BCPQ là lồi và trong trường hợp thứ hai tứ giác BAPQ là lồi. Vậy nên điều kiện (a) cố định.

Nếu tứ giác lồi ABPQ, ngũ giác lồi ABCPQ hay ngũ giác lồi ABPCQ là bao lồi thì tứ giác ABPQ là lồi và điều kiện (a) cố định.

Cuối cùng, nếu tứ giác lồi APBQ là bao lồi thì C hoặc nằm trong tam giác ABP hoặc ABQ; cả trong 2 trường hợp điều kiện (b) cố định.

Do vậy, trong tất cả các trường hợp, hoặc điều kiện (a) hoặc điều kiện (b) cố định, từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

▷**3.10**.*Cho 1 số tự nhiên $n \geq 3$, chứng minh rằng tồn tại 1 tập hợp A_n với 2 thuộc tính sau:*

(i) A_n bao gồm n số tự nhiên riêng biệt.

(j) Với bất kỳ $a \in A_n$, tích số của tất cả các phần tử khác trong A_n có số dư là 1 khi được chia bởi a.

Lời giải:

Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_k (vik \geq 2)$ là các số nguyên riêng biệt lớn hơn 1 thỏa mãn $a_1a_2 \ldots a_k \equiv \pmod{a_i}$ khi $1 \leq i \leq k$. Giả sử $\epsilon \in \{-1, 1\}$ và xác định $a_{a+1} = a_1a_2 \ldots a_{k-\epsilon}$. Vì $a_{k+1} \geq 2a_k - 1 > a_k$ với tất cả các k, các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ vẫn là các số nguyên riêng biệt lớn hơn 1.

Xem xét biểu thức

$$a_1a_2 \ldots a_{i-1}a_{i+1} \ldots a_{k+1} \equiv \epsilon \pmod{a_i}$$

rõ ràng nó không đổi với $i = k + 1$. Với $i < k$ nó không đổi vì

$$(a_1a_2 \ldots a_{i-1}a_{i+1} \ldots a_k)a_{k+1} \equiv (-1)(-\epsilon) \equiv \epsilon \pmod{a_i}$$

Bắt đầu với các số $a_1 = 2, a_2 = 3$, ta áp dụng cách này n-3 lần tập hợp $\epsilon = -1$ và một lần tập hợp $\epsilon = 1$. Tập hợp A_n bao gồm các số kết quả là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ do đó thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Chương 4

Đề thi olympic Korea

▷**4.11**.*Chỉ ra rằng với mọi số nguyên tố cho trước p thì tồn tại những số tự nhiên x, y, z, ω thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 - \omega.p = 0$ và $0 < \omega < p$.*

Lời giải: Với trường hợp $p = 2$, ta có thể lấy $x = 0, y = z = \omega = 1$.
Bây giờ ta xét trường hợp $p > 2$. Trước tiên ta xét trường hợp -1 là đồng dư bình phương modun p, khi đó tồn tại một số tự nhiên a, $0 < a < p-1$ sao cho $a^2 \equiv -1(modp)$. Bộ $(x, y, z) = (0, 1, a)$. Vì $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 1$ chia hết cho p nhưng $1 + (p-1)^2 < p^2$ nên tồn tại $\omega \in \{1, 2, ..., p-1\}$ sao cho $x^2 + y^2 + z^2 - \omega.p = 0$.
Tiếp theo, giả sử (-1) không là đồng dư bình phương modun$p$. Ta phải tìm một số k nào đó để cả k và $p - k - 1$ đều là đồng dư bình phương. Nếu $\frac{p-1}{2}$ là đồng dư bình phương thì chọn $k = \frac{p-1}{2}$. Nếu ngược lại, thì mỗi đồng dư trong số $\frac{p-1}{2}$ các đồng dư bình phương khác không sẽ rơi vào trong các cặp $\{1, p-2\}, \{2, p-3\}, ..., \left\{\frac{p-3}{2}\right\}, \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$. Theo nguyên lý Pigeonhole Principle sẽ có một cặp $(k, p-k-1)$ mà cả hai số k và $(p-k-1)$ đều là đồng dư bình phương như ta đã định tìm.
Vì vậy, ta có thể chọn $x, y \in \left\{0, 1, ..., \frac{p-1}{2}\right\}$ sao cho $x^2 \equiv k(modp)$ và $y^2 \equiv p - k - 1(modp)$. Cho $z = -1$, ta có $x^2 + y^2 + z^2$ chia hết cho p và $x^2 + y^2 + z^2 < p^2$. Giá trị ω sẽ được xác định như ở trường hợp trước.

▷**4.12**.*Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thoả mãn*

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\left[f(x) + f(y)\right]$$

với mọi $x, y \in R$.

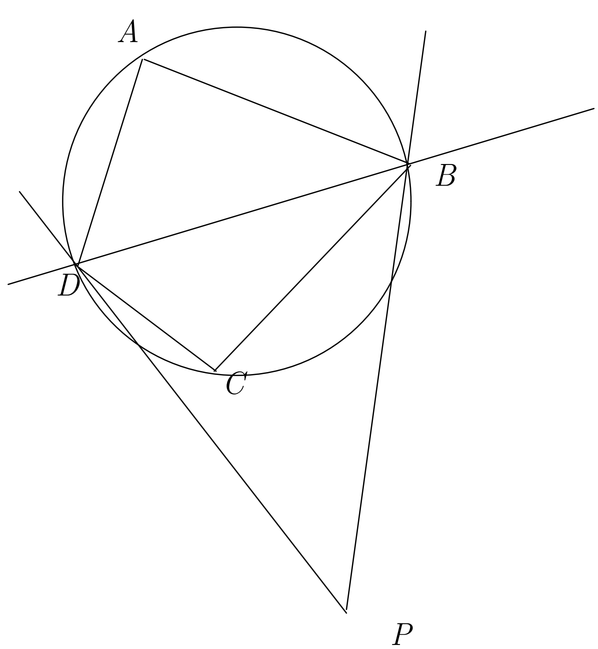
Lời giải: Cho $x = y$, ta được $f(0) = 0$.
Cho $x = -1, y = 0$ ta được $f(1) = -f(-1)$.
Cho $x = a, y = 1$, sau đó cho $x = a, y = -1$ ta có:

$$f(a^2 - 1) = (a - 1)\left[f(a) + f(1)\right]$$

$$f(a^2 - 1) = (a + 1)\left[f(a) - f(1)\right]$$

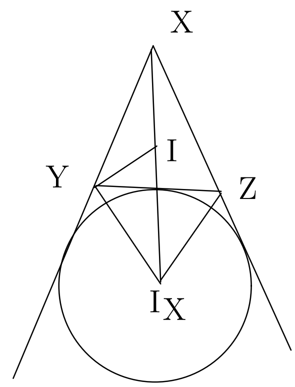
Cho các vế phải của các phương trình đó bằng nhau và giải phương trình đối với $f(a)$ ta được $f(a) = f(1).a$ với mọi a.
Như vậy, mọi hàm số nào thoả mãn ràng buộc đã cho phải có dạng $f(x) = kx$ với hằng số k nào đó. Ngược lại, bất kỳ hàm số nào có dạng $f(x) = kx$ với hằng số k nào đó rõ ràng đều thoả mãn yêu cầu bài toán.

▷**4.13**.*Cho tứ giác lồi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R, S lần lượt là các giao điểm của hai đường phân giác ngoài các góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ADB}$, $\widehat{DAB}$ và $\widehat{DBA}$, $\widehat{ACD}$ và $\widehat{ADC}$, $\widehat{DAC}$ và $\widehat{DCA}$ tương ứng. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.*



Lời giải: Các góc xét đến đều là các góc định hướng ngoại trừ các trường hợp nói khác đi.

Giả sử chúng ta có một tam giác tuỳ ý XYZ với tâm đường tròn nội tiếp là điểm I và tâm đường tròn bàng tiếp I_X đối diện với góc X. Suy ra X, I, I_X thẳng hàng. Ta có $\widehat{IYI_X}=\frac{\pi}{2}=\widehat{IZI_X}$ vì vậy tứ giác IYI_XZ là nội tiếp được và $\widehat{XI_XY}=\widehat{II_XY}=\widehat{IZY}$ hay $\widehat{YI_XX}=\widehat{YZI}$.



Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và tam giác ACD.

Từ giả thiết ta suy ra P, Q là các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABD đối diện với góc A và góc D, tương tự R, S là các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ACD đối diện với góc A và góc D.

Áp dụng kết quả của phần trên với (X, Y, Z, I_X) là (A, D, B, P), (D, A, B, Q), (A, D, C, R) và (D, A, C, S) ta được, $\widehat{APD}=\widehat{I_1BD}$, $\widehat{AQD}=\widehat{ABI_1}$, $\widehat{ARD}=\widehat{I_2CD}$, và $\widehat{ASD}=\widehat{ACI_2}$.

Khi coi các góc sau là không định hướng, ta thấy $\widehat{I_1BD}$, $\widehat{ABI_1}$, $\widehat{I_2CD}$ và $\widehat{ACI_2}$ đều bằng $\frac{\widehat{AQD}}{2} = \frac{\widehat{ACD}}{2}$.

Hơn nữa, các góc trên đều cùng một hướng, nên nếu coi chúng là những góc định hướng, chúng sẽ bằng nhau. Như vậy (trở lại với những góc định hướng) ta có: $\widehat{APD} = \widehat{AQD} = \widehat{ARD} = \widehat{ASD}$ và bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên cung tròn trương bởi A, D.

▷**4.14.***Cho p là một số nguyên tố sao cho $p \equiv 1 \ (mod 4)$. Hãy tính*

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)$$

Lời giải: Với mỗi số thực x, đặt

$$\{x\} = x - [x] \in [0, 1).$$

Ta có

$$\left[\frac{2k^2}{p}\right] = \frac{2k^2}{p} - \left\{\frac{2k^2}{p}\right\}$$

và

$$\left[\frac{k^2}{p}\right] = \frac{k^2}{p} - \left\{\frac{k^2}{p}\right\}$$

Ta được

$$\left[\frac{2k^2}{p}\right] - 2\left[\frac{k^2}{p}\right] = 2\left\{\frac{k^2}{p}\right\} - \left\{\frac{2k^2}{p}\right\}$$

Nếu $\{x\} < \frac{1}{2}$ thì $2\{x\} - \{2x\} = \{x\} - 2\{x\} = 0$

Nếu $\{x\} \geq \frac{1}{2}$ thì $2\{x\} - \{2x\} = 2\{x\} - (2\{x\} - 1) = 1$

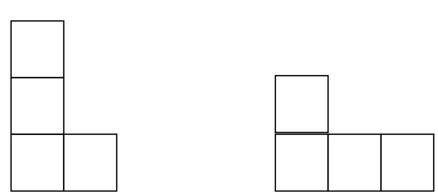
Như vậy, tổng cần tính trong bài ra sẽ bằng α là số các phần tử k trong $[1, p-1]$ sao cho $\left\{\frac{k^2}{p}\right\} \geq \frac{1}{2}$, hay bằng với số đồng dư k khác không mà k^2 là đồng dư mô đun p với một số nào đó trong $\left[\frac{p+1}{2}, p-1\right]$.

Vì p là số nguyên tố đồng dư với 1 mô đun p, ta đã biết $-1 \equiv d^2(modp)$, với d là một số nào đó. Phân chia các đồng dư mô đun p khác không thành $\frac{p-1}{2}$ cặp dạng $\{a, da\}$ sao cho $a^2 \equiv -(da)^2(modp)$.

Vì vậy, có đúng một đồng dư trong mỗi cặp mà bình phương của nó đồng dư với một số nào đó trong $\left[\frac{p-1}{2}, p-1\right]$, và có tất cả $\frac{p-1}{2}$ đồng dư như thế.

Từ đó suy ra tổng đã cho bằng $\frac{p-1}{2}$.

$\triangleright$**4.15**.*Xét những hình L sau đây, mỗi hình được tạo bởi bốn hình vuông đơn vị ghép lại.*

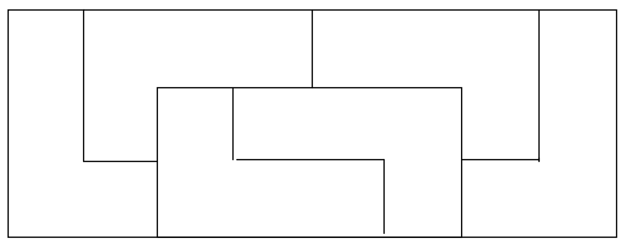


Cho m và n là các số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng một hình chữ nhật kích thước mxn sẽ được xếp bởi các hình đã cho khi và chỉ khi $m.n$ là bội số của 8.

Lời giải: Trước tiên ta chứng minh rằng nếu $8\backslash mn$, thì hình chữ nhật mxn có thể được xếp bởi các hình đã cho.

Trường hợp 1: Cả m và n đều là số chẵn. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $4\backslash m$, $2\backslash n$. Hai hình đã cho có thể ghép được một hình chữ nhật kích thước 4x2, và $m.n/8$ hình chữ nhật như vậy sẽ ghép thành một hình chữ nhật kích thước mxn (gồm $n/2$ hàng và $m/4$ cột).

Trường hợp 2: Hoặc m hoặc n lẻ. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng m là số lẻ. Khi đó $8\backslash n$. Vì $m > 1$ nên $m \geq 3$. Ta có thể ghép được một hình kích thước 3x8 như hình vẽ sau:



Những hình 3x8 như vậy có thể ghép thành hình chữ nhật (3xn).

Nếu $m = 3$, ta đã ghép xong. Trong trường hợp ngược lại, $m > 3$, thì phần còn lại $(m-3)$xn có thể ghép như trong trường hợp 1 vì $2\backslash(m-3)$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng: nếu hình chữ nhật có kích thước (mxn) được ghép bởi các hình trên thì $8\backslash m.n$. Vì mỗi một hình L có diện tích là 4 nên $4\backslash(m.n)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $2\backslash n$, và tô m hàng trong hình chữ nhật mxn thành hai màu đen trắng cạnh nhau. Mỗi mảnh hình chữ L trong hình chữ nhật được ghép sẽ gồm một số lẻ ô đen hình vuông. Vì có tất cả 1 số chẵn (nx$\left[\frac{m}{2}\right]$) ô vuông màu đen, nên hình chữ nhật được ghép chứa 1 số chẵn các hình chữ L, mà ta đặt số đó là $2k$. Như vậy $m.n = 8k$, hay $8\backslash mn$.

▷**4.16**.*Cho những số thực a, b, c, x, y, z thoả mãn $a \geq b \geq c > 0$ và $x \geq y \geq z > 0$.*

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}$$

Lời giải: Đặt vế trái của bất đẳng thức là S. Vì $a \geq b \geq c > 0$ và $x \geq y \geq z > 0$ nên ta có $bz + cy \geq by + cz$ suy ra

$$(by + cz)(bz + cy) \leq (by + cz)^2 \leq 2\left[(by)^2 + (cz)^2\right]$$

Đặt $\alpha = (ax)^2$; $\beta = (by)^2$; $\gamma = (cz)^2$, khi đó ta có:

$$\frac{a^2x^2}{(by + cz)(bz + cy)} \geq \frac{a^2x^2}{2\left[(by)^2 + (cz)^2\right]} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$$

Áp dụng tương tự cho hai bất đẳng thức, ta có

$$S \geq \frac{1}{2}(\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta})$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta})(\alpha(\beta + \gamma) + \beta(\alpha + \gamma) + \gamma(\alpha + \beta)) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$$

mà vế phải bằng

$$\frac{1}{2}\left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + 3(\alpha\beta + \alpha\beta + \gamma\alpha)\right] \geq \frac{3}{2}(2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha)$$

Do đó,

$$S \geq \frac{1}{2}(\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}) \geq \frac{1}{2}\frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{(2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha)} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bài toán đã được chứng minh.

Chương 5

Đề thi olympic Mông cổ

▷**5.17.***Đặt* $rad\,(1) = 1$*, với* $k > 1$*, đặt* $rad\,(k)$ *là tích các số nguyên tố của* k*. Một dãy các số tự nhiên* a_1*,* a_2*, ... với số hạng đầu* a_1 *được xác định bởi mối quan hệ:* $a_{n+1} = a_n + rad\,(a_n)$*. Hãy chỉ ra với mỗi nguyên dương* N*, dãy* $a_{n+1} = a_n + rad\,(a_n)$ *gồm* N *số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.*

Lời giải: *) **Bổ đề 1:** Trong dãy $rad\,(a_1)\,,\,rad\,(a_2)\,,\,...$ mỗi số hạng là ước của số hạng tiếp sau nó.
Chứng minh:
Vì $rad\,(a_n)$ là ước của cả a_n và $rad\,(a_n)$
nên $rad\,(a_n)$ là ước của $a_n + rad\,(a_n) = a_{n+1}$
$\Rightarrow$ mọi thừa số nguyên tố của $rad\,(a_n)$ là ước của a_{n+1}
Vì $rad\,(a_n)$ và $rad\,(a_{n+1})$ là tích của các ước số nguyên tố
Từ đó cho ta kết quả $rad\,(a_n)$ là ước của $rad\,(a_{n+1})$
*) Với mỗi số nguyên dương n đặt $b_n = \frac{a_n}{rad(a_n)}$ và $z_n = \frac{rad(a_{n+1})}{rad(a_n)}$
Vì $rad\,(a_n)$ là ước của $rad\,(a_{n+1})$ nên b_n là một số nguyên dương $\forall n$
Do bổ đề 1, ta cũng có kết quả tương tự với z_n
Mặt khác z_n và $rad\,(a_n)$ là nguyên tố cùng nhau do $rad\,(a_{n+1})$ là tích của các ước số nguyên tố.

Vì vậy ta có:

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{rad\left(a_{n+1}\right)} = \frac{\frac{a_n + rad(a_n)}{rad(a_n)}}{\frac{rad(a_{n+1})}{rad(a_n)}} = \frac{b_{n+1}+1}{z_n}$$

*) **Bổ đề 2:** Với mỗi N, tồn tại một số nguyên dương M thỏa mãn:

$$z_M = z_{M+1} = ... = z_{M+N-2} = 1$$

Chứng minh:

Có vài số nguyên tố p nhỏ hơn $2N$ thỏa mãn điều kiện tồn tại một số n sao cho p là ước của a_n

Áp dụng bổ đề 1, tồn tại một số nguyên m đủ lớn sao cho a_m chia hết cho mọi số nguyên tố.

Gọi M là số lớn hơn m sao cho b_M là nhỏ nhất. Ta cần chứng minh M thỏa mãn điều kiện của bổ đề này.

Thật vậy, giả sử kết quả trên là không đúng, khi đó ta cần chỉ ra số k dương nhỏ nhất thỏa mãn $z_{M+k-1} \neq 1$

Mặt khác $k \leq N-1$ và $z_M = z_{M+1} = ... = z_{M+N-2} = 1$

do đó $b_{M+k-1} = b_M + k - 1$

Ta cần chỉ ra không có số nguyên tố nào nhỏ hơn $2N$ có thể chia hết cho z_{M+k-1}. Điều này là đúng vì z_{M+k-1} là tích các số nguyên tố chia hết cho a_{M+k} nhưng không chia hết cho a_{M+k-1} và do a_{M+k-1} chia hết cho $rad\left(a_M\right)$ và $rad\left(a_M\right)$ chia hết cho mọi số nguyên tố nhỏ hơn $2N$. Do đó chia hết cho mọi a_n. Từ đó suy ra $z_{M+k-1} \geq 2N$.

Vì vậy:

$$b_{M+k} = \frac{b_{M+k-1}+1}{z_{M+k-1}} = \frac{b_M + k}{z_{M+k-1}} \leq \frac{b_M + k}{2N} \leq \frac{b_M + N - 1}{2N} < b_M$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết M là số tự nhiên lớn hơn m và b_M là số tự nhiên nhỏ nhất. Vậy bổ đề 2 được chứng minh.

*) Áp dụng bổ đề 2, với mỗi N, tồn tại một số tự nhiên M thỏa mãn:

$$rad\left(a_M\right) = rad\left(a_{M+1}\right) = ... = rad\left(a_{M+N-1}\right)$$

Vậy a_M, a_{M+1}, ..., a_{M+N-1} là các số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

▷**5.18**.*Trong mặt phẳng, cho ba đường tròn ω_1, ω_2, ω_3 đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Gọi P_1 là tiếp điểm của ω_1, ω_3, P_2 là tiếp điểm của ω_2, ω_3. A, B là hai điểm trên đường tròn ω_3 khác P_1, P_2 sao cho AB là đường kính của đường tròn ω_3. Đường thẳng AP_1 cắt lại đường tròn ω_1 tại X, đường thẳng BP_2 cắt lại đường tròn ω_2 tại Y. Các đường thẳng AP_2, BP_1 cắt nhau tại Z. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.*

Lời giải: Xét các góc là có hướng theo modulo π
Gọi P_3 là tiếp điểm của hai đường tròn ω_1, ω_2 và O_1, O_2, O_3 là tâm của ba đường tròn ω_1, ω_2, ω_3 tương ứng.
Gọi ω_4 là đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$ và O_4 là tâm đẳng phương của ba đường tròn ω_1, ω_2, ω_3 thì ta có: $O_4P_1 = O_4P_2 = O_4P_3$. Do đó O_4 là tâm của đường tròn ω_4.
Vì $O_4O_1 \perp O_1O_3$ nên O_1O_3 là tiếp tuyến của ω_4.
Chứng minh tương tự ta cũng có O_1O_2, O_2O_3 là tiếp tuyến của ω_4.
Vì $O_3 \in AB$ nên ta có: $\widehat{P_2P_1Z} = \widehat{P_2AO_3} = \widehat{O_3P_2A}$.
Nếu gọi Z' là giao điểm thứ hai của AP_2 và ω_4 thì do O_3P_2 là tiếp tuyến của ω_4 nên ta có:

$$\widehat{O_3P_2A} = \widehat{O_3P_2Z'} = \widehat{P_2P_1Z'}$$

Do đó $\widehat{P_2P_1Z} = \widehat{P_2P_1Z'}$ và Z' thuộc đường thẳng BZ
Vì Z và Z' cùng thuộc AP_2, $AP_2 \neq BZ$ nên suy ra $Z \equiv Z'$. Do đó $Z \in \omega_4$.
Vì $\widehat{O_4P_1O_3}$ và $\widehat{XP_1Z}$ cùng vuông (do AB là đường kính) nên ta có:

$$\widehat{ZP_1O_3} = \widehat{ZP_1O_4} + \widehat{O_4P_1O_3} = \widehat{XP_1Z} + \widehat{ZP_1O_4} = \widehat{XP_1O_4}$$

(1) Vì P_1O_4 là tiếp tuyến của ω_1 nên ta có: $\widehat{XP_1O_4} = \widehat{XP_3P_1}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ZP_1O_3} = \widehat{XP_3P_1}$
Gọi l là đường thẳng ZP_3 nếu $Z \equiv P_3$ hoặc đường thẳng tiếp xúc với ω_4 tại P. Khi đó: $(\widehat{l, P_3P_1}) = \widehat{ZP_1O_3}$ (vì O_3P_1 là tiếp tuyến của ω_4.
Kết hợp điều này với kết quả ở trên, ta suy ra: $(\widehat{l, P_3P_1}) = \widehat{XP_3P_1} \Rightarrow X \in l$
Chứng minh tương tự ta có $Y \in l$.
Vì $Z \in l$ nên ta suy ra ba điểm X, Y, Z thẳng hàng.

▷**5.19**.*Một hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

1) $|f(a) - f(b)| \leqslant |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

2) $f(f(f(0))) = 0$

Chứng minh rằng $f(0) = 0$.

Lời giải: Ta sử dụng nhận xét sau: $f^k(x) = \underbrace{f(f(...f(x)}_{k \text{ lần } f}...))$

Từ (1) ta có:

$$|f(0)| = |f(0) - 0| \geqslant \left|f^2(0) - f(0)\right| \geqslant \left|f^3(0) - f^2(0)\right| = \left|f^2(0)\right|$$

và $|f^2(0)| = |f^2(0) - 0| \geqslant |f^3(0) - f(0)| = |f(0)|$
ta suy ra $|f(0)| = |f^2(0)|$
*) Trường hợp 1: $f(0) = f^2(0)$
Khi đó: $f(0) = f^2(0) = f^3(0) = 0$
*) Trường hợp 2: $f(0) = -f^2(0)$
Ta có: $|f(0)| = |f(0) - 0| \geqslant |f^2(0) - f(0)| = 2|f(0)|$
$\Rightarrow |f(0)| \leqslant 0 \Rightarrow f(0) = 0$
Vậy $f(0) = 0$.

▷**5.20**.*Đường phân giác của các góc A, B, C của tam giác ABC cắt các cạnh của tam giác tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{BC}{AC + AB} = \frac{AC}{BA + BC} = \frac{AB}{CA + CB}$$

Lời giải: Giả sử đường tròn ω ngoại tiếp tứ giác $BA_1B_1C_1$ cắt lại đường thẳng AC tại X. Ta cần chứng minh X phải thuộc đoạn AC.
Trước hết, do A nằm trên đường BC_1 nhưng không thuộc đoạn BC_1 nên A phải nằm ngoài đường tròn ω.
Tương tự, C nằm ngoài đường tròn ω.
Ta có mọi điểm nằm trong đoạn B_1X đều nằm trong đường tròn ω, do đó B_1X không chứa A cũng không chứa C.
Vì B_1 nằm trên cạnh AC do đó X nằm trên cạnh AC.
Đặt $BC = a;\ CA = b;\ AB = c$. Áp dụng phương tích của điểm A đối với đường tròn ω ta có: $AB.AC_1 = AX.AB_1$

Từ định lý về đường phân giác trong tam giác ta có:

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b};\ AB_1 = \frac{bc}{a+c}$$

Do đó ta có:

$$AX = \frac{AC_1.AB}{AB_1} = \frac{bc}{a+b}.c.\frac{a+c}{bc} = \frac{(a+c)\,c}{a+b}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $CX = \frac{(a+c)a}{b+c}$
Hơn nữa, do X thuộc cạnh AC nên:

$$b = AC = AX + CX = (a+c)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c}\ \ \Leftrightarrow\ \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} - \frac{c}{a+b}$$

hay

$$\frac{BC}{AC+AB} = \frac{AC}{BA+BC} = \frac{AB}{CA+CB}$$

▷**5.21**.*Những số nguyên nào có thể biểu diễn được dưới dạng*

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz}$$

với x, y, z là các số nguyên dương.

Lời giải: *) Nhận xét: Ta có các số sau thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$1 = \frac{(9+9+9)^2}{9.9.9}\ \ ;\ \ 2 = \frac{(4+4+8)^2}{4.4.8}\ ;\ 3 = \frac{(3+3+3)^2}{3.3.3}$$

$$4 = \frac{(2+2+4)^2}{2.2.4}\ ;\ 5 = \frac{(1+4+5)^2}{1.4.5}\ ;\ 6 = \frac{(1+2+3)^2}{1.2.3}$$

$$8 = \frac{(1+1+2)^2}{1.1.2}\ ;\ 9 = \frac{(1+1+1)^2}{1.1.1}$$

Ta sẽ chứng minh không có các kết quả khác thỏa mãn bổ đề sau:
<u>Bổ đề:</u> Nếu n có thể biểu diễn được dưới dạng

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz}$$

thì n có thể viết dưới dạng:

$$\frac{(x'+y'+z')^2}{x'y'z'}$$

với $x' \leqslant y'+z'$; $y' \leqslant x'+z'$; $z' \leqslant x'+y'$

Chứng minh bổ đề:

Gọi x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $n = \frac{(x+y+z)^2}{xyz}$ và $x+y+z$ là nhỏ nhất.

Vì n là một số nguyên nên x là ước của $(x+y+z)^2$ do đó x là ước của $(y+z)^2$

Đặt $x' = \frac{(y+z)^2}{x}$, khi đó ta có

$$\frac{(x'+y+z)^2}{x'yz} = \frac{(y+z)^2\left(\frac{y+z}{x}+1\right)^2}{\frac{(y+z)^2}{x}yz} = \frac{x\left(\frac{y+z}{x}+1\right)^2}{yz} = \frac{(x+y+z)^2}{xyz} = n$$

Do $x+y+z$ là nhỏ nhất nên $x+y+z \leqslant x'+y+z$ Suy ra $x \leqslant x' = \frac{(y+z)^2}{x} \Rightarrow x \leqslant y+z$ Chứng minh tương tự thì ta cũng có: $y \leqslant x+z$; $z \leqslant x+y$ (Bổ đề được chứng minh)

Giả sử $n = \frac{(x+y+z)^2}{xyz}$. Áp dụng bổ đề, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $y+z \geqslant x \geqslant y \geqslant z$

Ta xét các trường hợp sau:

*) Trường hợp 1: $x = y \geqslant z = 1$

Khi đó $n = \frac{(2x+1)^2}{x^2} \Rightarrow x$ là ước của $2x+1 \Rightarrow x = 1$ và $n = 9$

*) Trường hợp 2: $x = y+1 > z = 1$

Khi đó $n = \frac{(2x)^2}{x(x-1)} = \frac{4x}{x-1} \Rightarrow x-1$ là ước của $4x \Rightarrow x-1$ là ước của 4 $\Rightarrow x \in \{2; 3; 5\} \Rightarrow n \in \{8; 6; 5\}$

*) Trường hợp 3: $y+z \geqslant x \geqslant y \geqslant z > 1$

Khi đó: $yz - (y+z) = (y-1)(z-1) - 1 \geqslant 0$

$\Rightarrow yz \geqslant y+z \geqslant x$

Do $x \geqslant y \geqslant z$ ta có: $xy \geqslant z$; $xz \geqslant y$

Do đó

$$n = \frac{(x+y+z)^2}{xyz} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy} \leqslant 2.\frac{3}{2}+1+1+1 = 6$$

$\Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Vậy các kết quả của n cần tìm là $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$

▹**5.22.** *Một đất nước có n thành phố. Tổng chi phí của chuyến đi từ thành phố i đến thành phố j là x_{ij}. Giả sử rằng tổng chi phí của tuyến đường qua mỗi thành phố đúng một lần và kết thúc tại điểm bắt đầu không phụ thuộc vào việc chọn tuyến đường. Chứng minh rằng tồn tại các số a_1, a_2, ..., a_n và b_1, b_2, ..., b_n sao cho $x_{ij} = a_i + b_j$ với mọi số nguyên dương i, j thỏa mãn $1 \leqslant i < j \leqslant n$.*

Lời giải: Đặt $f(a, b) = x_{a1} + x_{1b} - x_{ab}$ với a, b và 1 là ba số phân biệt

***) Bổ đề:** $f(a, b)$ không phụ thuộc vào a, b

Chứng minh bổ đề:

+) Với $n \leqslant 2$, điều này là tầm thường vì khi đó f được xác định không có a và b

+) Với $n = 3$ ta cần chỉ ra $f(2, 3) = f(3, 2)$

hay $x_{21} + x_{13} + x_{32} = x_{31} + x_{12} + x_{23}$

Nhưng những đẳng thức này là tổng các chi phí của 2 tuyến đường mà mỗi tuyến đều đi qua mọi thành phố đúng 1 lần, do đó chúng bằng nhau.

+) Với $n \geqslant 4$, tuyến đường:

$$a,\ 1,\ b,\ c,\ 2,\ 3,\ ...,\ a-1,\ a+1,\ ...,\ b-1,\ b+1,\ ...,\ c-1,\ c+1,\ ...,\ n$$

và tuyến đường

$$a,\ b,\ 1,\ c,\ 2,\ 3,\ ...,\ a-1,\ a+1,\ ...,\ b-1,\ b+1,\ ...,\ c-1,\ c+1,\ ...,\ n$$

phải có tổng toàn bộ chi phí bằng nhau. Các tuyến đường này gần đồng nhất, cho phép tađễ dàng tìm được sự khác nhau của tổng chi phí của 2 tuyến đường đó là:

$$(x_{a1} + x_{1b} + x_{bc}) - (x_{ab} + x_{b1} + x_{1c})$$

Do đó, $f(a, b) = f(b, c)$ với mọi a, b, c đôi một khác nhau và khác 1

Hơn nữa, tổng của toàn bộ chi phí của 3 tuyến đường:

$$1,\ a,\ b,\ 2,\ ..., n \quad ; \quad b,\ 1,\ a,\ 2,\ ..., n \quad ; \quad a,\ 1,\ b,\ 2,\ ..., n$$

phải bằng tổng của toàn bộ chi phí của 3 tuyến đường:

$$1,\ b,\ a,\ 2,\ ..., n \quad ; \quad a,\ 1,\ b,\ 2,\ ..., n \quad ; \quad b,\ 1,\ a,\ 2,\ ..., n$$

Do đó $2\left(x_{1a}+x_{ab}+x_{b1}\right)=2\left(x_{1b}+x_{ba}+x_{a1}\right)$

Từ đó suy ra $f\left(a,\, b\right)=f\left(b,\, a\right)$

Với c,d không bằng a,b ta có: $f\left(a,\, b\right)=f\left(b,c\right)=f\left(c,d\right)$;

$f\left(a,b\right)=f\left(b,c\right)=f\left(c,b\right)$;

$f\left(a,b\right)=f\left(b,a\right)=f\left(a,c\right)=f\left(c,a\right)$

Điều này đã chứng minh được kết quả của bổ đề.

*) Với mọi a,b phân biệt và khác 1 ta có: $f\left(a,\, b\right)=F$ với F là hằng số

Cho $a_1=0$; $b_1=F$ và đặt $b_k=x_{1k}$; $a_k=x_{k1}-F$

Với mọi i,j không đồng thời bằng 1 ta có:

$$x_{ij}=x_{i1}-x_{i1}-x_{1j}+x_{ij}+x_{1j}=x_{i1}-F+x_{ij}=a_i+b_j$$

tức là tồn tại các số $a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n$ và $b_1,\, b_2,\, ...,\, b_n$ sao cho $x_{ij}=a_i+b_j$ với mọi số nguyên dương i,j thỏa mãn $1\leqslant i<j\leqslant n$

Chương 6

Đề thi olympic Rumani

▷**6.23.***Hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là olympic nếu nó thỏa mãn tính chất: với $n \geq 3$ các điểm rời rạc $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathbb{R}^n$, nếu $f(A_1) = f(A_2) = \cdots = f(A_n)$ thì các điểm $A_1, A_2, \cdots, A_n$ được gọi là các đỉnh của đa giác lồi. Cho $P \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ khác đa thức hằng. Chứng minh rằng hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được cho bởi $f(x, y) = |P(x + iy)|$, là olympic khi và chỉ khi tất cả các nghiệm của P là bằng nhau.*

Lời giải: Trước hết ta giả sử rằng tất cả các nghiệm của P là bằng nhau, khi đó ta viết được dưới dạng:
$P(x) = a(z - z_0)^n$ với $a, z_0 \in \mathbb{C}$ và $n \in \mathbb{N}$. Nếu $A_1, A_2, \cdots, A_n$ là các điểm rời rạc trong $\mathbb{R}^2$ sao cho $f(A_1) = f(A_2) = \cdots = f(A_n)$ thì $A_1, A_2, \cdots, A_n$ nằm trên đường tròn với tâm là $(Re(z_0), Im(z_0))$ và bán kính là $\sqrt[n]{\frac{\alpha}{|f(A_1)|}}$, suy ra các điểm đó là các đỉnh của một đa giác lồi.
Ngược lại, ta giả sử rằng không phải tất cả các nghiệm của P là bằng nhau, khi đó $P(x)$ có dạng:
$P(x) = (z - z_1)(z - z_2)Q(z)$ với z_1 và z_2 là 2 nghiệm phân biệt của $P(x)$ sao cho $|z_1 - z_2|$ là nhỏ nhất. Gọi l là đường thẳng đi qua hai điểm Z_1 và Z_2 với $Z_1 = (Re(z_1), Im(z_2))$,$Z_2 = (Re(z_2), Im(z_2))$, và đặt $z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ sao cho $Z_3 = (Re(z_3), Im(z_3))$ là trung điểm của $\overline{Z_1 Z_2}$. Ký hiệu s_1, s_2 lần lượt là các tia Z_3Z_1, Z_3Z_2, và $r = f(Z_3) \geq 0$. Ta phải có $r \geq 0$, bởi vì nếu ngược lại ta có z_3 là một nghiệm của P sao cho:

$|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2|$, điều này là mâu thẫu với $|z_1 - z_2|$ là nhỏ nhất.
Do

$$\lim_{\substack{ZZ_3 \to \infty \\ Z \in s_1}} f(Z) = \lim_{\substack{ZZ_3 \to \infty \\ Z \in s_1}} f(Z) = +\infty.$$

và f liên tục, tồn tại $Z_4 \in s_1$ và $Z_5 \in s_2$ sao cho $f(Z_4) = f(Z_5) = r$. Do vậy $f(Z_3) = f(Z_4) = f(Z_5)$ và Z_3, Z_4, Z_5 không phải là các đỉnh của đa giác lồi. Do vậy, f không phải là *olympic*.

$\triangleright$**6.24**.*Với $n \geq 2$ là số nguyên dương. Tìm số các hàm $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thỏa mãn tính chất: $|f(k+1) - f(k)| \geq 3$ với $k = 1, 2, \cdots, n-1$*

Lời giải: Ta có $n \geq 2$ bất kỳ và tìm số các hàm tương ứng. Nếu $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ phải thỏa mãn đã cho thì $f(n) \neq 3$ bởi nếu ngược lại thì $f(n-1) \leq 0$ hoặc $f(n-1) \geq 6$, vô lý. Ký hiệu a_n, b_n, d_n, e_n là số các hàm $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thỏa mãn tính chất đã cho sao cho $f(n)$ tương ứng bằng $1, 2, 4, 5$. Khi đó $a_2 = e_2 = 2$ và $b_1 = d_2 = 1$, và do vậy với $n \geq 2$:

$$a_{n+1} = e_n + d_n, b_{n+1} = e_n$$

$$e_{n+1} = a_n + b_n, d_{n+1} = a_n$$

Ta cần tìm $a_n + b_n + d_n + e_n$ với $\forall n \geq 2$. Ta có: $a_2 = e_2$ và $b_2 = d_2$; bằng quy nạp ta có $a_n = e_n$ và $b_n = d_n$ $\forall n \geq 2$. Do vậy với $\forall n$, ta có:

$$a_{n+2} = e_{n+1} + d_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + e_n = a_{n+1} + a_n$$

do vậy, $\{a_n\}_{n \geq 2}$ thỏa mãn như dãy Fibonaci $\{F_n\}_{n \geq 0}$, với các chỉ số được chọn sao cho: $F_1 = 0$ và $F_1 = 1$. Bởi vì $a_2 = 2 = F_2$ và $a_3 = e_2 + d_2 = 3 = F_3$, vậy suy ra $a_n = F_n$ với $\forall n$. Do đó,$a_n + b_n + d_n + e_n = 2(a_n + b_n) = 2e_{n+1} = 2a_{n+1} = 2F_{n+1}$ với $\forall n \geq 2$ và $2F_{n+1}$ thỏa mãn tính chất đã cho.

$\triangleright$**6.25**.*Cho $n \geq 1$ là một số nguyên dương và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thực sao cho: $|x_{k+1} - x_k| leq1$ với $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| - \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \frac{n^2 - 1}{4}$$

Lời giải: Nếu số các số x_k âm lớn hơn số các số x_k dương thì $(a_1, \cdots, a_n)$ là một hoán vì của $(-x_1, \cdots, -x_n)$(tương ứng là $(x_1, \cdots, x_n)$) sao cho $a_1, \cdots, a_n$ là một dãy không giảm. Do cách xây dựng, lực lượng P các số dương a_k không nhiều phần tử hơn lực lượng N các số âma_k, và do vậy $|P| \leq \dfrac{n-1}{2}$. Vì N là khác rỗng và $a_1, \cdots, a_n$ là không giảm, các phần tử của P là $a_{k_0+1} < a_{k_0+2} < \cdots < a_{k_0+l}$ với $k_0 > 0$

Giả sử rằng $1 \leq i \leq n-1$. Trong dãy $x_1, \cdots, x_n$ phải có hai phần tử kề nhau x_j và x_k sao cho $x_j \leq a_i$ và $x_k \geq a_{i+1}$ suy ra $0 \leq a_{i+1} - a_i \leq x_k - x_j \leq 1$. Do vậy, $a_{k_0+1} \leq a_{k_0} + 1 \leq 1$,$a_{k_0+2} \leq a_{k_0+1} + 1 \leq 2$.

Ký hiệu σ_P và σ_N lần lượt là tổng của các số trong P và N. Mặt khác ta có:

$$|\sigma_P - \sigma_N| - |-\sigma_P - \sigma_N| \leq |2\sigma_P|$$

$$\leq 2(1 + 2 + \cdots + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor)$$

$$\leq \frac{n-1}{2}.(\frac{n-1}{2} + 1) = \frac{n^2-1}{4}$$

▷**6.26**.*Cho n, k là các số nguyên dương tùy ý.Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > k$sao cho:*

$$n = \pm C_{a_1}^3 \pm C_{a_2}^3 \pm C_{a_3}^3 \pm C_{a_4}^3 \pm C_{a_5}^3$$

ở đó $\dbinom{a}{3} = \dfrac{a(a-1)(a-2)}{6}$

Lời giải: Ta thấy rằng: $n + C_m^3 > 2m + 1$ với $\forall m$ lớn hơn giá trị N, bởi vì vế trái là bậc 3 với hệ số cao nhất dương trong khi vế phải là tuyến tính với m.

Nếu $m \equiv 0(mod4)$, thì $C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ là chẵn bởi vì tử số chia hết cho 4 còn mẫu số thì không.Nếu $m \equiv 3(mod4)$ thì $C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ là lẻ bởi vì cả tử số và mẫu số đều chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4. Do vậy ta chọn $m > maxk, N$ sao cho $n + C_m^3$ là số lẻ.

Ta viết: $2a+1 = n+C_m^3 > 2m+1$. Ta thấy rằng:$(C_{a+3}^3 - C_{a+2}^3) - (C_{a+1}^3 - C_a^3) = C_{a+2}^2 - C_a^2 = 2a+1$. Do vậy

$$n = (2a+1) - \binom{m}{3} = \binom{a+3}{3} - \binom{a+2}{3} - \binom{a+1}{3} + \binom{a}{3} = \binom{m}{3}$$

thỏa mãn yêu cầu bài toán vì $a+3 > a+2 > a+1 > a > m > k$

▷**6.27**.*Cho $P_1P_2\cdots P_n$ là một đa giác lồi trong mặt phẳng. Giả sử rằng với cặp đỉnh P_i, P_j, tồn tại đỉnh V của đa giác sao cho $\angle P_iVP_j = \frac{\pi}{3}$. Chứng minh rằng $n = 3$*

Lời giải: Trong lời giải này ta sử dụng kết quả sau:
Cho tam giác XYZ sao cho $\angle XYZ \leq \frac{\pi}{3}$ thì tam giác đó là đều hoặc $max\{YX, YZ\} > XZ$. Tương tự nếu $\angle XYZ \geq \frac{\pi}{3}$ thì tam giác XYZ đều hoặc $min\{YX, YZ\} < XZ$
Chúng ta chỉ ra rằng tồn tại các đỉnh A, B, C và A_1, B_1, C_1 sao cho:(i) tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ là tam giác đều và (ii) AB(tướng ứng là A_1B_1) là khoảng cách nhỏ nhất (lớn nhất) khác 0 giữa 2 đỉnh. Hơn nữa, A, B là 2 đỉnh phân biệt sao cho $\overline{AB}$ có độ dài nhỏ nhất, và C là đỉnh sao cho $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$. Khi đó $max\{AC, CB\} \leq AC$, để tam giác ABC phải là tam giác đều. Tương tự, ta chọn A_1, B_1 sao cho $\overline{A_1B_1}$ có độ dài lớn nhất, và đỉnh C_1 sao cho $\angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{3}$, khi đó tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác đều.
Ta chỉ ra rằng $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Các đường thẳng AB,BC, CA chia mặt phẳng thành 7 phần. Gọi D_A gồm các phần do tam giác chia mà nhận $\overline{BC}$ làm biên và các phần được tạo ra tại phần tạo ra ở các đỉnh B và C. Tương tự ta định nghĩa cho D_B và D_C. Bởi vì đa giác đã cho là lồi, nên mỗi hoặc nằm trong 1 phần hoặc trùng với A, B, C.
Nếu 2 điểm bất kỳ trong A_1, B_1, C_1 , giả sử là A_1, B_1 nằm trong miền D_X , thì $\angle A_1XB_1 < \frac{\pi}{3}$. Do vậy, $max\{A_1X, XB_1\} > A_1B_1$, mâu thuẫn với A_1B_1 là lớn nhất.
Hơn nữa, không có hai điểm trong A_1, B_1, C_1 ở trong cùng 1 phần. Bây giờ ta giả sử rằng một trong các điểm A_1, B_1, C_1 (giả sử là A_1) nằm trên 1 phần(giả sử đó là D_A). Bởi vì $min\{A_1B, A_1C\} \geq BC$, ta có $\angle BA_1C \leq \frac{\pi}{3}$. Ta có B_1 không nằm trong D_A. Bởi vì đa giác đã cho là

lồi, B không nằm trong tam giác AA_1B_1, và tương tự C không nằm trong tam giác AA_1B_1. Từ đó có B_1nằm trên miền đóng có biên là các tia A_1B và A_1C. Tương tự, với C_1. Hơn nữa, $\frac{\pi}{3} = \angle B_1A_1C_1 \leq \angle BA_1C = \frac{\pi}{3}$, dấu bằng xảy ra khi B_1 và C_1 lần lượt nằm trên tia A_1B và A_1C . Bởi vì đa giác đã cho là lồi,nên điều này chỉ xảy ra khi B_1 và C_1 lần lượt bằng B và C -trong trường hợp $BC = B_1C_1$, ta có tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ là bằng nhau.

Mặt khác, không có điểm nào trong A_1, B_1, C_1 nằm trên $D_A \cup D_B \cup D_C$, do đó chúng lần lượt trùng với A, B, C. Trong trường hợp này, tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ là trùng nhau.

Do vậy hai đỉnh bất kỳ của đa giác có khoảng cách giống nhau, như $AB = A_1B_1$. Điều này là không thể xảy ra nếu có hơn 3 điểm trong mặt phẳng thì hoàn toàn không có tính chất này. Do vậy n=3

▷**6.28**.*Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ gồm 4 số nguyên dương*(x, y, z, t) *sao cho ước chung lớn nhất của 4 số là 1.và thỏa mãn:*

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4$$

Lời giải: Đặt $a = k^3$ với k là số chẵn và $k > 0$ ta có:

$$(a + 1)^4 - (a - 1)^4 = 8a^3 + 8a$$

tức là

$$(2k^3)^3 + (2k^3)^3 + [(k^3 - 1)^2]^2 = (k^3 + 1)^4$$

Bởi vì $k^3 + 1$ là số lẻ,nên $(2k^3, k^3 + 1) = (k^3, k^3 + 1) = 1$. Do vậy, ta có vô hạn bộ bốn số dạng $(x, y, z, t) = (2k^3, 2k, (k^3 - 1)^2, k^3 + 1)$ với $k > 0$ là số chẵn, thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

▷**6.29**.*Biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương lẻ a, được xác định bằng thuật toán đơn giản sau: xác định một số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho* 2^{2000} *là ước của* $a^n - 1$

Lời giải: Bởi vì a là số lẻ nên $(a, 2^k) = 1$ với $\forall k \geq 0$. Do vậy, theo định lý Euler, ta có $a^{2^{k-1}} \equiv a^{\varphi(2^k)} \equiv 1(mod 2^k)$ với $\forall k$. Do vậy bậc n của a modulo 2^{2000} chia cho $2^{2000} - 1 = 2^{1999}$

Nếu $a \equiv 1(mod 2^{2000})$ suy ra n=1. Ta giả sử rằng $a \neq 1(mod 2^{2000})$. Với mọi $m \geq 1$, ta viết:

$$a^{2^m} - 1 = (a-1)(a+1)\underbrace{(a^2+1)(a^{2^2}+1)\cdots(a^{2^{m-1}}+1)}_{\dagger} \qquad (*).$$

Biểu diễn nhị phân của a có kết thúc là 2 chữ số 01 hoặc 11. Ta có $a \equiv \pm 1(mod 4)$ và do vậy $a^{2^k} \equiv 1(mod 4)$ với $\forall k \geq 1$. Do vậy phân tích (*)với m cố định $(m \geq 1)$, 2^1 là số mũ cao nhất của 2 mà chia hết cho $m-1$ biểu thức ở mỗi ngoặc đơn phía trên †.

Nếu $a \equiv 1(mod 4)$, khi đó $a \neq 1$, biểu diễn nhị phân của a kết thúc là:

$$1\underbrace{00\cdots01}_{s \quad \text{chữ số}}$$

với s là số nguyên lớn nhất sao cho $2^s|(a-1)$. Trong trường hợp này, số mũ cao nhất của 2 chia cho $a-1$ là 2^s trong khi số mũ cao nhất của 2 chia hết cho $a+1$ là 2

Nếu thay thế là $a \equiv -1(mod 4)$, khi đó bởi vì $a \neq 1$, biểu diễn nhị phân của a kết thúc là:

$$1\underbrace{011\cdots1}_{s \quad \text{chữ số}}$$

với s là số ngueyen lớn nhất sao cho $2^s|(a+1)$. Trong trường hợp này, số mũ cao nhất của 2 chia cho $(a+1)$ được 2^s trong khi đó số mũ cao nhất của 2 chia cho $(a-1)$ được 2.

Trong mỗi trường hợp, ta sử dụng (*) và kết quả số mũ cao nhát của 2 chia cho $(a^{2^m}-1$ được 2^{s+m}. Từ đó có $m \geq 1$ nhỏ nhất sao cho $a^{2^m}-1$ chia hết cho 2^{2000} là $2000-s$ (nếu s<2000) hoặc 1 (nếu $s \geq 2000$). Trong các trường hợp tương ứng ta có $n = 2^{1999-s}$ hoặc $n = 2$. Bởi vì ta có thể dễ dàng sử dụng biểu diễn nhị phân của a để suy ra hai trường hợp và giá trị của s là gì, ta có thể sử dụng biểu diễn nhị phân của a để tìm n.

▷**6.30**.*Cho tam giác nhọn ABC và điểm M là trung điểm của* $\overline{BC}$. *Tồn tại duy nhất một điểm trong N sao cho* $\angle ABN = \angle BAM$ *và* $\angle ACN = \angle CAM$. *Chứng minh rằng* $\angle BAN = \angle CAM$.

Lời giải: Cho B' là điểm nằm trên tia AC sao cho $\angle ABB' = \angle BAM$, cho C' là điểm nằm trên tia AB sao cho $\angle ACC' = \angle CAM$. Khi đó N là giao điểm của hai đường thẳng BB' và CC'

Đường thẳng đối xứng với AM qua đường phân giác của góc BAC, cắt BB' tại P. Gọi D là điểm đối xứng của A qua M, để tứ giác ABCD là hình bình hành. Bởi vì $\angle PAB = \angle CAM = \angle CAD$ và $\angle ABP = \angle MAB = \angle DAB = \angle ADC$, tam giác ABP và ADC là đồng dạng. Do vậy, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AP}{AC}$. Bởi vì $\angle BAD = \angle PAC$, nên tam giác BAD và tam giác PAC đồng dạng. Hơn nữa, $\angle ACP = \angle ADB = \angle CAM$. Từ đó suy ra P nằm trên đường thẳng CC' cũng như nằm trên BB' , và do vậy $N \equiv P$. Hơn nữa có $\angle BAN = \angle BAP = \angle CAM$ như yêu cầu bài toán.

Chương 7

Đề thi olympic Nước Nga

▷**7.31.** *Sasha thử xác định vài số nguyên dương $x \leqslant 100$. Anh ta chọn hai số nguyên dương bất kì M và N mà nhỏ hơn 100 và có câu hỏi "Số nào lớn nhất trong các ước số chung của $x + M$ và N?" Chứng minh rằng Sasha có thể xác định được giá trị của x sau 7 câu hỏi.*

Lời giải: +) Với $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 6$, đặt a_n là số nguyên duy nhất trong $[0;\ 2^n)$ thỏa mãn $2^n\,|(x - a_n)$. Rõ ràng $a_0 = 0$.
+) Với $n \leqslant 5$, a_{n+1} bằng a_n hoặc $a_n + 2^n$ mà khi đó kết quả cũ vẫn có nếu và chỉ nếu $\gcd(x + 2^n - a_n\,,\ 2^{n+1}) = 2^n$
Vì $2^n - a_n < 2^{n+1} < 100$ ta suy ra nếu Sasha biết được giá trị của a_n, anh ta có thể xác định được a_{n+1} với một câu hỏi điều kiện bằng cách đặt $(M,\ N) = (2^n - a_n\,,\ 2^{n+1})$. Do đó sau 6 câu hỏi, Sasha có thể xác định được $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_6$ và kết luận x bằng a_6 hoặc $a_6 + 64$
Bởi vì $a_6 \neq a_6 + 64 \pmod 3$, Sasha có thể xác định được x nếu anh ta phát hiện ra liệu có hay không $x \equiv a_6 \pmod 3$ với các câu hỏi của anh ta.
Thật vậy, anh ta có thể nếu đặt $N = 3$ và $M \in \{1,\ 2,\ 3\}$ nên $3\,|(a_6 + M)$, anh ta sẽ thu được câu trả lời "3" nếu và chỉ nếu $x \equiv a_6 \pmod 3$.

▷**7.32.** *Cho O là tâm đường tròn ω ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Đường tròn ω_1 với tâm K đi qua các điểm A, O, C mà cắt các cạnh bên AB và BC tại M và N. Đặt L là điểm đối xứng với K qua đường thẳng MN.*

Chứng minh rằng $BL \perp AC$.

Lời giải: Gọi α, β, γ là các góc A, B, C của tam giác ABC. Vì tứ giác $ACNM$ nội tiếp, $\widehat{BNM} = \alpha$, $\widehat{BMN} = \gamma$ nên $\widehat{MKC} = 2\alpha$; $\widehat{NKA} = 2\gamma$
Vì đường thẳng AC là trục đẳng phương của đường tròn ω và ω_1 nên nó vuông góc với OK. Khi đó ta có:

$$\widehat{AOK} = \widehat{COK} = \widehat{OAK} = \widehat{OCK} = \beta$$

Do đó $\widehat{AKC} = 2\pi - 4\beta$
Kết hợp các điều trên, ta có:

$$\widehat{MKN} = 2\alpha + 2\gamma - (2\pi - 4\beta) = 2\beta$$

Vì L là điểm đối xứng của K qua đường thẳng MN nên ta có: $\widehat{MLN} = 2\beta$ và $LM = LN$. Do đó $\Delta LMN \sim \Delta OCA$
Mặt khác ta cũng có: $\Delta MBN \sim \Delta CBA$ bởi vì tứ giác $ACNM$ nội tiếp. Do đó vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBN nên ta suy ra $\widehat{MLB} = \alpha$
Và khi đó: $\widehat{MBL} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Bởi vì $\widehat{BAC} = \alpha$, ta dễ dàng suy ra $BL \perp AC$.

▷**7.33**.*Có vài thành phố trong một quốc gia và một cách đặt tên đường. Nơi mà mỗi con đường nối hai thành phố và không có hai con đường nào nối hai thành phố có tên giống nhau. Nó được hiểu rằng trong mọi thành phố đều có tối thiểu 3 con đường để đi ra. Chứng minh rằng tồn tại một con đường tuần hoàn (có nghĩa là nơi kết thúc là nơi bắt đầu) như thế số con đường trong những con đường đó không thể chia hết cho 3.*

Lời giải: Ta sử dụng sự dịch chuyển trong lý thuyết đồ thị. Trong một đồ thị, tất cả mọi đỉnh đều có bậc ít nhất là 3. Ta chứng minh tồn tại một chu trình mà độ dài của mó không chia hết cho 3.
Thực hiện thuật toán sau:
+) Cố định một điểm đầu v_1 sau đó cho v_1, v_2, ..., v_i nếu tồn tại một điểm riêng từ i đỉnh và tới đỉnh gần kề thì v_{i+1} là một đỉnh. Bởi vì đồ thị được giới hạn và tất cả các đỉnh đạt được bằng thuật toán này là rõ ràng.
Quá trình này kết thúc tại vài đỉnh v_n. Ta biết mọi đỉnh có ít nhất bậc

3 và bởi sự thừa nhận mọi đỉnh gần kề với v_n lập thành một dãy. Như vậy, v_n là đỉnh kề với v_a, v_b, v_{n-1} với $a < b < n-1$.
Ta có 3 chu trình:

$$v_a \to v_{a+1} \to v_{a+2} \to ... \to v_{n-1} \to v_n \to v_a$$

$$v_b \to v_{b+1} \to v_{b+2} \to ... \to v_{n-1} \to v_n \to v_b$$

$$v_a \to v_{a+1} \to v_{a+2} \to ... \to v_{b-1} \to v_b \to v_n \to v_a$$

Những chu trình trên có độ dài $n-a+1$; $n-b+1$; $b-a+2$ theo thứ tự. Bởi vì $(n-a+1)-(n-b+1)-(b-a+2) = -2$ không thể chia hết cho 3
Do đó tồn tại 1 trong 3 chu trình trên có độ dài không chia hết cho 3.

▷**7.34.** *Cho x_1, x_2, ..., x_n là các số thực $(n \geqslant 2)$ thỏa mãn điều kiện $-1 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ và $x_1^{13} + x_2^{13} + ... + x_n^{13} = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Chứng minh rằng: $x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + ... + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ với mọi số $y_1 < y_2 < ... < y_n$.*

Lời giải: Với $-1 < x < 1$, đặt $f(x) = x - x^{13}$
Ta phải có $x_1 < 0$ vì nếu không $f(x_1) \geqslant 0$ và $f(x_2) > 0$, $f(x_3) > 0$, ..., $f(x_n) > 0$.
Điều này vô lý vì $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) = 0$ được cho bởi phương trình trên.
Chứng minh tương tự ta cũng suy ra $x_n > 0$
Giả sử rằng $2 \leqslant i \leqslant n$
+) Nếu $x_i \leqslant 0$ thì khi đó ta có
$x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i \leqslant 0$ và $\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j) = -\sum\limits_{j=1}^{i-1} f(x_j) > 0$
+) Nếu thay thế $x_i > 0$ thì khi đó ta có: $0 < x_i < x_{i+1} < ... < x_n$ và ta cũng chứng minh được $\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j) > 0$
+) Sử dụng công thức lấy tổng Abel và kết quả trên ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^{13} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i f\left(x_i\right)$$

$= y_1 \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) + \sum\limits_{i=2}^{n} \left(y_i - y_{i-1}\right)\left(f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right) + ... + f\left(x_n\right)\right)$

$= \sum\limits_{i=2}^{n} \left(y_i - y_{i-1}\right)\left(f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right) + ... + f\left(x_n\right)\right) > 0$

Từ đó ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

▷**7.35**.*Gọi AA_1, CC_1 là các đường cao của tam giác nhọn ABC. Đường phân giác của góc nhọn giữa hai đường thẳng AA_1, CC_1 cắt các cạnh AB và BC tại P, Q tương ứng. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và M là trung điểm của cạnh AC, đường phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt đoạn HM tại R. Chứng minh rằng tứ giác $PBQR$ nội tiếp được một đường tròn.*

Lời giải: Hạ đường vuông góc với cạnh AB và BC tại P, Q tương ứng, chúng cắt nhau tại R''. Gọi S là giao điểm của $R'P$ và HA, T là giao điểm của $R'Q$ và HC.

Hạ đường vuông góc từ M tới AB, cắt HA tại U và hạ đường vuông góc từ M tới BC cắt HC tại V.

Vì ΔPSH, ΔHTQ có các cạnh tương ứng song song và $\widehat{PSH} = \widehat{HTQ}$

Do PQ là đường phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AA_1, CC_1 nên $\widehat{PHS} = \widehat{QHT}$.

Do đó $\Delta PHS \sim \Delta QHT$

Mặt khác, vì $\widehat{HAP} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC} = \widehat{QCH}$ và $\widehat{PHA} = \widehat{QHC}$ nên $\Delta PHA \sim \Delta QHC$

Do đó:

$$\frac{HT}{HS} = \frac{HP}{HQ} = \frac{HC}{HA} = \frac{2MU}{2MV} = \frac{MU}{MV} = \frac{HV}{HU}$$

Khi đó, phép vị tự tâm H biến đường thẳng PS thành đường thẳng MU và cũng biến đường thẳng QT thành đường thẳng MV. Do đó nó biến $R' = PS \cap QT$ thành $M = MU \cap MV$. Vì thế 3 điểm H, R', M thẳng hàng

Ta lại sử dụng giả thiết $\Delta PHA \sim \Delta QHC$, ta có $\widehat{HPB}$, $\widehat{HQB}$ là đồng dư vì chúng cùng phụ với hai góc $\widehat{HPA}$, $\widehat{HQC}$.

Như vậy, $BP = BQ$ và $\Delta BR'P \sim \Delta BR'Q$ nên $\widehat{PBR'} = \widehat{QBR'}$.

Do đó R' nằm trên cả hai đường thẳng HM và đường phân giác của $\widehat{ABC}$, suy ra $R' \equiv R$

Từ đó dễ dàng suy ra tứ giác $PBQR$ nội tiếp vì $\widehat{BPR} = \frac{\pi}{2} = \widehat{BQR}$

▷**7.36**.*Có 5 viên ngọc có trọng lượng khác nhau. Oleg biết được trọng lượng của từng viên. Với mỗi viên ngọc x kí hiệu $m(x)$ là trọng lượng của nó. Dmitrii cố gắng xác định trọng lượng lớn nhất của các viên ngọc đó. Anh ta được phép chọn 3 viên A, B, C và hỏi Oleg rằng: "Có phải $m(A) < m(B) < m(C)$ không?". Oleg chỉ trả lời "Đúng" hoặc "Sai". Hỏi Dimitrii có thể xác định được trọng lượng lớn nhất sau 9 câu hỏi hay không?*

Lời giải: Chúng ta sẽ chỉ ra rằng Dimitrii sẽ không thể xác định được khối lượng viên ngọc lớn nhất sau 9 câu hỏi.

Giả sử Dimitrii có một phương pháp để xác định được viên ngọc có khối lượng lớn nhất sau 9 câu hỏi hoặc ít hơn. Giả sử rằng sau khi Oleg trả lời câu hỏi thứ i của Dimitrii có chính xác x_i viên ngọc có trọng lượng lớn nhất thỏa mãn câu hỏi thứ i. Ta chỉ ra rằng $x_{i+1} \geqslant \max\left\{x_i - 20,\ \frac{1}{2}x_i\right\}$ với $i = 1,\ 2,\ ...,\ 8$

Để ý rằng có $5! = 120$ cách để lấy được viên ngọc có trọng lượng lớn nhất. Sau đó với 3 viên ngọc A, B, C bất kì, đúng $\frac{1}{6}$ viên ngọc có thể có $m(A) < m(B) < m(C)$.

Như vậy, nếu Dimitrii hỏi liệu $m(A) < m(B) < m(C)$ và Oleg trả lời "Sai" thì Dimitrii có thể loại bỏ tối đa 20 trong số 120 khả năng có thể.

Trong trường hợp $x_{i+1} \geqslant x_i - 20$ với mỗi i. Với mỗi x_i mà phù hợp i câu hỏi đầu tiên, một phần s_1 của những khả năng được loại bỏ nếu Oleg trả lời "Đúng" tới câu hỏi thứ $i+1$; trong khi phần bù của một phần của s_2 sẽ được loại bỏ nếu Oleg trả lời "Sai".

Nếu $|S_1| \leqslant \frac{x_i}{2}$ và Oleg trả lời "Đúng" thì ta có:

$$x_{i+1} = x_i - |S_1| \geqslant \frac{x_i}{2}$$

Mặt khác ta có: $|S_2| \leqslant \frac{x_i}{2}$

Nếu Oleg trả lời "Sai" ta lại có $x_{i+1} \geqslant \frac{x_i}{2}$

Do đó, nếu $x_1 = 120$; $x_2 \geqslant 80$; $x_3 \geqslant 60$; $x_4 \geqslant 40$; $x_5 \geqslant 20$; $x_6 \geqslant 10$; $x_7 \geqslant 5$; $x_8 \geqslant 3$; $x_9 \geqslant 2$

Từ đó, Dimitrii không thể chắc chắn rằng anh ta tìm thấy được kết quả sau 9 câu hỏi.

Chương 8

Đề thi olympic Đài Loan

▷**8.37**.*Cho tam giác nhọn $ABC, AC > BC$ và M là trung điểm AB. Các đường cao AP và BQ gặp nhau ở H, đường thẳng AB và BQ cắt nhau ở R. CMR: RH $\perp$ CM.*

Lời giải: Gọi S là chân đường cao hạ từ C xuống AB và X là chân đường vuông góc từ H xuống CM.
Vì $\widehat{HPC} = \widehat{HQC} = \widehat{HXC} = \frac{\pi}{2}$ nên H, P, Q, X và C cùng nằm trên một đường tròn.
Tương tự, vì $\widehat{HXM} = \widehat{HSM} = \frac{\pi}{2}$ nên các điểm H, X, S và M cùng thuộc một đường tròn.
Hơn nữa, P, Q, S và M thuộc cùng một đường tròn vì chúng nằm trên đường tròn 9 điểm của tam giác ABC. Theo tính chất đối xứng, hai trong các trục đối xứng của 3 đường tròn này là AB, PQ, HX phải trùng nhau. Vì R = AB $\cap$ PQ nếu R phải thẳng hàng với H và X.
Do đó: RH $\perp$ CM.

▷**8.38**.*Gọi $\phi(h)$ là số các số nguyên dương n thoả mãn UCLN (n, k) = 1 và $n \leq k$. Giả sử $\phi(5^m - 1) = 5^n - 1$ với m, n nguyên dương nào đó. CMR: UCLN $(m, n) > 1$.*

Lời giải: Trong lời giải này, chúng ta sử dụng những lý thuyết về hàm ϕ sau:

$$\begin{cases} \phi(ab) = \phi(a)\cdot\phi(b)(1) \\ \phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}(2) \end{cases}$$

(1) Với a, b nguyên tố cùng nhau

(2)Nếu p nguyên tố và α là số nguyên dương

Giả sử phản chứng rằng UCLN (m, n) = 1

Đầu tiên ta chỉ ra m là số lẻ

Ta có: $5^n \equiv 1(\text{mod} 8)$ nếu x là chẵn

Nếu m là chẵn thì $5^m - 1 \vdots 8$ nhưng $5^m - 1 \neq 8$

Vì $5^m - 1 \neq 8, 5^n - 1 = \phi(5^m - 1) \vdots \phi(16) = 8$

hoặc $\phi(8).\phi(P^\alpha) = 8\phi(P^\alpha) \equiv 0(\text{mod} 8)$

Với $P^\alpha > 1$ là luỹ thừa của số nguyên tố lẻ P Do đó n phải chẵn, UCLN (m,n) = 1 theo như giả thiết phản chứng. Tiếp theo ta giả sử rằng $P^2/(5^m - 1)$ với P nguyên tố lẻ Rõ ràng PX5, vì 5 có............... modulop, gọi d là .... nên ta có d/m

Lại có :$d/\phi(p^2)$ và $\phi(5^m - 1) = 5^n - 1$ do đó d/n.

Nhưng d>1 vì $5 \neq 1(\text{mod} p)$ vàUCLN(m,n)≠1-a (theo giả thiết phản chứng)

Do đó ,$5^m - 1 = 4\prod\limits_{p\in S} p$ với S là tập các số nguyên tố lẻ.

Cho P là phần tử bất kỳ thuộc S. Vì $1 = (\frac{p}{)} = (\frac{5^m}{p}) = (\frac{5}{m})^n$ và m là lẻ, $(\frac{5}{p}) = 1$

Lại có, theo luật tương hỗ : $(\frac{5}{p})(\frac{p}{5}) = (-1)^{\frac{(5-1)(p-1)}{4}} = 1$

dẫn đến$(\frac{p}{5}) = 1$mà $\text{P} \equiv 1$ hoặc 4 (mod5).

Hơn nữa, ta không thể có P≡ 1(mod5) vì 5 chia hết $\varphi(5^m - 1) = 5^{n-1}$và $P - 1 = \phi(p)$, điều này không xảy ra. Do đó P≡ 4 (mod 5)

Suy ra $-1 \equiv 5^m - 1 = 4\prod\limits_{p\in S} p \equiv 4\cdot 4^{|s|}(\text{mod} 5)$ và$-1 = 5^n - 1 =$

$\varphi(4).\prod\limits_{p\in S}\varphi(p) = 2\prod\limits_{p\in S}(p-1) = 2\cdot 3^{|s|}(\text{mod} 5)$

Từ phương trình đầu này ta có $|S|$ phải chẵn. Nhưng từ phương trình thứ hai ta có:$|S| \equiv 3(\text{mod} 4)$điều này mâu thuẫn

Do đó gt của ta là sai, vậy UCLN $(m, n) > 1$.

▷**8.39**.*Cho A* $=\{1, 2, ..., \text{n}\}$. *Với* $n \in \mathbb{N}$. *Một tập hợp con của A được gọi là "đã kết nối" nếu nó là số nguyên lớn nhất sao cho A chứa k tập đôi một* *khác nhau: Sao cho giao của hai tập bất kỳ A_i và A_j là một tập đã kết nối"*

Lời giải: Gọi $A_1, A_2, ...A_k$ là các tập con khác nhau của A trong giả thiết
Đặt

$$m = \max_{1 \leq i \leq n} (\min A_i)$$

và giả thiết rằng $\min A_{i_0} = m$
Mọi tập A_i có phần tử bé nhất nhỏ hoặc bằng m, do cách xác định m và mọi tập A_i có phần tử lớn nhất lớn hơn hoặc bằng m hoặc$A_i \cap A_{i_0} = \varnothing$ là tập không "kết nối".

Do đó, mọi cặp $k(\min A_i, \max A_i)$ bằng một trong $m(n+1-m)$cặp (r,s) mà $1 \leq n \leq m \leq s \leq n$ với mỗi cặp (r,s) ta chỉ ra rằng ít nhất một tập A_i có $(MinA_i, \mathrm{Max}A_i) = (r, s)$
Nếu có hai tập khác nhau thì giao của chúng là một tập kết nối chứa r và s và chứa cả r, r+1,. . . ,s
Điều đó chỉ ra rằng cả hai tập đều bằng $\{r, r+1, ..., s\}$ điều này mâu thuẫn.
Do đó k lớn nhất là bằng $k = m(n+1-m) \leq (n+1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 = \left\lfloor \frac{n^2+2n}{4} \right\rfloor$ .Giá trị lớn nhất này đạt được nếu A_i là tập con kết nối của A chứa m_0 mà $m_0 = \left[\begin{array}{l} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \end{array} \right.$

▷**8.40**.*Cho hàm $F : N \to N^*$ thoả mãn*

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(n) = \max\limits_{0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \{f(j) + f(n-j) + j\} \, \forall n \geq 2 \end{cases}$$ *Tính f(2000).*

Lời giải: Với mỗi $n \in Z^+$ ta chú ý đến biểu diễn của n trong hệ nhị phân Chú ý rằng cơ sở của biểu diễn là sự thay đổi ít nhất 1 ký tự bên trái của biểu diễn đó, vì thế cơ sở được bắt đầu bởi a_1
Chúng ta gọi giá trị thập phân của cơ sở này là giá trị "đuôi" của n với mỗi một xuất hiện trong biểu diễn nhị phân của n, nếu nó đại diện cho số 2^k, $2^k - \frac{k}{2}$ là một giá trị "place" của n.

Đặt g(n) là tổng giá trị "tail" và "place" của n

Ta CMR: F(n) = g(n)

Đặt g(0) = 0 rõ ràng g(1) =0...

Đầu tiên ta CMR: $g(n) \geq g(j) + g(n-j) + j \forall n, j$ thoả mãn $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Điều này là hiển nhiên với j=0 vì g(0) =0

Bây giờ ta bổ sung số kí tự của n-j

Với trường hợp cơ bản (khi n-j có ký tự 1) ta chỉ có thê thay n-j. Trong trường hợp (n,j) = (2,1) hoặc (n, j) = (1;0)

Trường hợp (1) dễ có là đúng.

TH1: n-j và j có cùng số các ký tự là k +1

Đặt a và b lần lượt là số các chữ số 1 ở ngoài cùng bên trái của n-j và j. ta sẽ chỉ ra rằng $g(n) = g(a+b) - 2^{k+1} \geq g(2^k + a) + g(2^k + b) + (2^k + b)$

Để ý rằng: $g(a+b) \geq g(a) + g(b) + b($ điều này đúng do giả thiết)

Do đó đủ để ta có: $g(a+b+2^{k+1}) - g(a+b) \geq g(2^k + a) - g(a) + g(2^k + b) - g(b) + 2^k$ (2)

Ở vế phải ta có $\begin{cases} g(2^k + a) = g(a) + 2^k \cdot \frac{k}{2} + a \\ g(2^k + b) = g(b) + 2^k \cdot \frac{k}{2} + b \end{cases}$

Do đó vế phải bằng: $2^k \cdot \frac{k}{2} + a + 2^k \cdot \frac{k}{2} + b + 2^k = 2^{k+1} \cdot \frac{k+1}{2} + a + b$

Còn đối với vế trái: vì $a < 2^k, b < 2^k$

Biểu diễn nhị phân của $a + b + 2^{k+1}$ giống như biểu diễn nhị phâncủa a+b với việc thêm 1 vào 2^{k+1} vị trí

Do đó $g(a + b + 2^{k+1})$bằng g(a+b)cộngvới giá trị "đuôi" của a+b và cộng$2^{k+1} \cdot \frac{k+1}{2}$.

Vì thế $g(a+b+2^{k+1}) - g(a+b)$ bằng vế phải, ta đã chứng minh được (2)

TH2: n-j có số ký tự nhiều hơn j

Giả sử n-j có k +1 kí tự vì $a = n - j - 2^k$. Ta cần CM rằng: $g(a + j + 2^k) \geq g(a + 2^k) + g(j) + j$. Ta đã biết theo giả thiết:$g(a + j) \geq g(a) + g(j) + \min\{a, j\}$.

Do đó ta cần chứng minh điều kiện đủ là:$g?(a + j + 2^k) - g(a + j) \geq g(a + 2^k) - g(a) + j - \min\{a, i\}$ (3)

Theo TH1 vế phải: $g(a + 2^k) - g(a) = 2^k \cdot \frac{k}{2} + a$

Do đó ,vế phải bằng: $2^k \cdot \frac{k}{2} + a + j - \min\{a, j\} = 2^k \cdot \frac{k}{2} + max\{a, j\}$

Với vế trái của (3): nếu $a+j<2^k$
chẳng hạn như 2^k ký tự không có trong tổng $a+j+2^k$
thì $g=(a+j+2^k)=g(a+j)+2^k\cdot\frac{k}{2}+a+j$
do đó VT(3)$\geq$ VP(3)

Mặt khác nếu có2^k kí tự không có trong tổng $a+j+2^k$ thì $g(a+j+2^k)=g(a+j)+2^{k+1}\cdot\frac{k+1}{2}-2^k\cdot\frac{k}{2}$
Vì thế, vế trái $=2^{k+1}\cdot\frac{k+1}{2}-2^k\cdot\frac{k}{2}=2^k\cdot\frac{k}{2}+2^k>2^k\cdot\frac{k}{2}+max\left\{a,j\right\}$

Do đó(3) đúng.

Giả thiết được CM hoàn toàn

Ta CMR: Dấu bằng xảy ra khi $g(n)=g(j)+g(n-j)+j$với 1 số giá trị j
Đặt 2^k là luỹ thừa lớn nhất của 2 nhỏ hơn n và đặt $j=n-2^k$ thì $g(n)=g(n-2^{k)}+g(2^k)=g(n-j)+n-2^k=j$
Điều đó cho thấy $f(n)=g(n)\forall n$
Vậy với việc tìm giá trị "place" và giá trị "đuôi" của 2000 (với biểu diễn nhị phân 11111010000) ta có:f (2000) = 10864.

Chương 9

Đề thi olympic Thổ Nhĩ Kỳ

▷**9.41**.*Tìm các bộ 4 số xếp theo thứ tự (x, y, z, w) của các số nguyên với* $0 \leq x$, *y, z,* $w \leq 36$ *để*

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$$

Lời giải: Tất cả các đồng dư sẽ là mod 37. Với mỗi k trong khoảng 0 đến 36 ta tìm được các cặp số nguyên (x, y) với $0 \leq x$, y ≤ 36 thỏa mãn $x^2 + y^2 \equiv k$. Chú ý rằng điều này tương đương với $(x - 6y)(x + 6y) \equiv k$. Trước hết ta xem xét trường hợp k = 0. Với mỗi $y \in \{0, 1, \ldots, 36\}$ ta có $(x - 6y)(x + 6y) \equiv 0$ nếu và chỉ nếu $x \equiv \pm 6y$.. Vì vậy có một cặp (x, y) với y = 0 để $x^2 + y^2 \equiv 0$ (đó là (x, y) = (0, 0)), và với bất kỳ y nào khác có 2 cặp (x, y) như vậy. Do vậy có tổng cộng 2.36 + 1 = 73 cặp (x, y) để $x^2 + y^2 \equiv 0$.

Giờ ta xét trường hợp $k \neq 0$. Để $a \equiv x + 6y, b \equiv x - 6y$. Với bất kỳ giá trị $a \in \{1, 2, \ldots, 36\}$ có chính xác một giá trị $b \in \{1, 2, \ldots, 36\}$ để $ab \equiv k$. Với mỗi cặp (a, b) trong 36 cặp tương ứng với một nghiệm (x, y) duy nhất vì ta phải có $x \equiv (a + b)2^{-1}, y \equiv (a + b)12^{-1}$. Do vậy phương trình $(x - 6y)(x + 6y) \equiv k$ có chính xác là 36 nghiệm (x, y) khi $k \neq 0$.

Ta xem xét số cặp 4 (x, y, z, w) để $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \equiv 0$. Có 3 căn bậc 3 r_1, r_2, r_3 của 1 mod 37, đó là: Nếu ta để g là một phần tử nguyên thủy mod 37 thì căn bậc 3 là 1, g^{12}, g^{24}. Với bất kỳ z nào, ta có $z^3 + w^3 \equiv 0$ nếu và chỉ nếu w bằng $-r_1z, -r_2z$ hay $-r_3z$. Do vậy có 109 cặp (z, w) để $z^3 + w^3 \equiv 0$, mỗi cặp để z = 0 và 3 cặp để $z = z_0$ đối với mỗi$z_0 \in \{1, 2, \ldots, 36\}$. Ở trên ta đã tỉm ra rằng có chính xác 73 cặp (x, y) để $x^2 + y^2 \equiv 0$.. Do vậy có 109.73 bộ 4 (x, y, z, w)để $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \equiv 0$.

Với mỗi cặp trong $37^2 - 109$ cặp (z, w) để $z^3 + w^3 \equiv 0$ có chính xác 36 cặp (x, y) để $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3$. Vậy nên có $(37^2 - 109).36$ bộ 4 (x, y, z, w) để $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \equiv 0$. Vì vậy, có $109.73 + (37^2 - 109).36 = 53317$ bộ 4 (x, y, z, w) để $x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3$.

▷**9.42**.*Cho một vòng tròn tâm O, 2 đường tiệm cận xuất phát từ điểm S nằm bên ngoài đường tròn có tiếp điểm là P, Q. Đường thẳng SO giao với đường tròn tại A, B với B gần S hơn A. Cho X là một điểm nằm trong cung nhỏ PB và đường SO giao với các đường QX và PX lần lượt tại C, D. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

Lời giải: Kéo dài tia PC cho cắt với cung QB tại Y. Bằng phép đối xứng cung BX và BY, nó chỉ ra rằng $\widehat{CPB} = \widehat{YPB} = \widehat{BPX} = \widehat{BPD}$. Do vậy, $\overline{PB}$ là phân giác bên trong của CPD. Áp dụng định lý đường phân giác trong và phân giác ngoài ta tìm ra được:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{AD}$$

Thay BC = AB - AC, BD = AD - AB và chia nửa bên trái, bên phải bởi đường AB, ta có

$$\frac{AB - AC}{AB.AC} = \frac{AD - AB}{AD.AB}$$

Điều này có nghĩa là

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$$

Điều này tương đương với đẳng thức cần chứng minh.

▷**9.43**.*Với 2 số nguyên dương bất kỳ n, p. Hãy chứng minh rằng có chính xác $(p+1)^{n+1} - p^{n+1}$ hàm số*

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{-p, -p+1, \ldots, p\}$$

để $|f(i) - f(j)| \leq p$ với tất cả $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Lời giải: Với $m \in \{-p, -p+1, \ldots, p\}$, có $(min\{p+1, p-m+1\})^n$ là hàm số thỏa mãn điều kiện đã cho bao gồm những giá trị chỉ nằm trong $\{m, \ldots, m+p\}$. Dĩ nhiên, $(min\{p+1, p-m+1\})^n$ là hàm số có các giá trị chỉ nằm trong $\{m+1, \ldots, m+p\}$. Do vậy, chính xác

$$(min\{p+1, p-m+1\})^n - (min\{p, p-m\})^n$$

là hàm số thỏa mãn điều kiện đã cho với giá trị m nhỏ nhất.
Biểu thức này bằng với $(p+1)^n - p^n$ đối với mỗi giá trị của p+1, $m \leq 0$ và bằng $(p+1-m)^n - (p-m)^n$ khi $m > 0$. Do đó, tổng của biểu thức khi $m \leq 0$ là

$$(p+1)((p+1)^n - p)^n$$

trong khi tổng biểu thức khi m $>$ 0 là tổng

$$\sum_{m=1}^{p}((p+1-m)^n - (p-m)^n) = p^n$$

Cộng 2 tổng này lại ta được tổng các hàm số thỏa mãn điều kiện đã cho là $(p+1)^{n+1} - p^{n+1}$.

▷**9.44**.*Trong tam giác nhọn ABC có bán kính đường trong ngoại tiếp R. Đường cao $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ lần lượt có độ dài là h_1, h_2, h_3. Nếu t_1, t_2, t_3 lần lượt là chiều dài các tiếp tuyến từ A, B, C tới đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF. Hãy chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^{3}(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}})^2 \leq \frac{3}{2}R$$

.

Lời giải: Cho H là trực tâm của tam giác ABC và X, Y, Z lần lượt là trung điểm của $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$. Bởi đường tròn ngoại tiếp của tam giác

DEF là đường tròn 9 điểm của tam giác ABC, nó qua các điểm X, Y và Z. Do đó $t_1^2 = AX.AD = AX.h_1$ hoặc $(\frac{t_1}{\sqrt{h_1}})^2 = AX$. Ta có thể tìm được các biểu thức tương tự với BX và CX. Vậy nên bất dăbgr thức cần chứng minh tương đương với

$$AX + BX + CX \leq \frac{3}{2}R$$

(nhân mỗi vế với 2):

$$AH + BH + CH \leq 3R.$$

Cho $\hat{A} = \alpha, \hat{B} = \beta, \hat{C} = \varphi$ ta có:

$$AH = \frac{AF}{\sin\beta} = \frac{AC.\cos\alpha}{\sin\beta} = 2R\cos\alpha$$

Tương tự, $BH = 2R\cos\beta$ và $CH = 2R\cos\varphi$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\varphi \leq \frac{3}{2}.$$

Nhớ rằng tam giác ABC là tam giác nhọn và hàm $t \longrightarrow \cos t$ là lõm trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$. Do đó, theo bất đẳng thức Jensen ta có vế trái của bất đẳng thức cuối cùng này đạt cực đại khi 3 góc đều bằng $\frac{\pi}{3}$, trong trường hợp vế trái bằng $\frac{3}{2}$. Vậy bất dẳng thức cuối cùng này là đúng đồng thời bất đẳng thức cần chứng minh cũng là đúng.

▷**9.45**.*(a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, số cặp của số nguyên xếp theo thứ tự thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = n$ là hữu hạn và chia hết cho 6.] [(b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) xếp theo thứ tự thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 727$.*

Lời giải: (a) Bất kỳ nghiệm (x, y) đều phải thỏa mãn bất đẳng thức:

$$n = x^2 - xy + y^2 = \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{x^2+y^2}{2}$$

và rất nhiều cặp hữu hạn (x, y) thỏa mãn được điều kiện này. Do vậy có rất nhiều nghiệm hữu hạn.

Tiếp đến ta chứng minh rằng số nghiệm chia hết cho 6. Nếu (x, y) là nghiệm thì $(y, y-x)$ cũng là nghiệm. Phép biến đổi tuyến tính này là khả nghịch, do đó nó hoán vị tất cả các nghiệm và ta có thể chia các nghiệm ra thành các lớp với mỗi lớp đó ở dưới dạng:

$$(x, y), (y, y-x), (y-x, -x), (-x, -y), (-y, x-y), (x-y, x)$$

đối với một số nghiệm(x, y) ban đầu. Rõ ràng để chứng minh không có 2 trong 6 nghiệm ở mỗi lớp bằng nhau trừ khi $x = y = 0$ là không thể. Do vậy mỗi lớp có 6 phần tử riêng biệt và kết quả là được chứng minh.
(b) Bất kỳ nghiệm nào với $x^2 - xy + y^2 = 727$ ta có thể áp dụng được phép biến đổi $(x, y) \longrightarrow (y, y-x)$ như ở phần (a) và có thể $(x, y) \longmapsto (y, x)$, để có được nghiệm (x, y) khác với $y \leq 0 \leq x \leq |y|$. Giờ ta tìm tất cả các nghiệm như vậy với $y \leq 0 \leq x \leq |y|$. Sắp xếp lại đẳng thức cần tìm ta được $x^2 - xy + y^2 - 727 = 0$. Xem xét đẳng thức này là một toàn phương trong y, ta có thể áp dụng phương trình bậc 2 để tìm ra rằng:

$$y = \frac{x \pm \sqrt{2908 - 3x^2}}{2}$$

Do vậy, $2908 - 3x^2$ phải là số chính phương, và nó không thể chia hết cho 3. Do $3x^2 \leq x^2 - xy + y^2 = 727$ ta biết được thêm rằng $2181 \leq 2908 - 3x^2 \leq 2908$ với $46 < \sqrt{2908 - 3x^2} < 54$. Kiểm chứng những khả năng ta thấy rằng chỉ $\sqrt{2908 - 3x^2} = 49$ có nghiệm nguyên x, kết quả là ta có nghiệm duy nhất$(13, -18)$ của phương trình.
Do đó bất kỳ nghiệm nào cũng có thể biến đổi thành $(13, -18)$ bằng việc áp dụng 2 sơ đồ mô tả ở trên. Như vậy bất kỳ nghiệm nào trong $(13, -18)$ hoặc $(-18, 13)$ dưới biến đổi $(x, y) \longmapsto (y, y-x)$, có nghĩa tất cả các nghiệm tới $x^2 - xy + y^2 = 727$ là:

$$(13, -18), (-18, -31), (-31, -13), (-13, 18), (18, 31), (31, 13),$$

$$(-18, 13), (13, 31), (31, 18), (18, -13), (-13, -31), (-31, -18).$$

▷**9.46**.*Cho tam giác ABC, các đường phân giác trong và ngoài của góc A lần lượt cắt đường thẳng BC tại D và E. Cho F là một điểm (khác điểm A) ở đó đường thẳng AC tiếp xúc với đường tròn ω có đương kính $\overline{DE}$.*

Vẽ tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABF và giao với đường tròn ω tại A và G. Chứng minh rằng $AF = AG$.

Lời giải: Ta chứng minh cho trường hợp C, B và E thẳng hàng. Theo thứ tự đó ta chứng minh cho các trường hợp khác tương tự. Gọi O là tâm của ω. Theo định lý về đường phân giác trong và ngoài của tam giác, ta có:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB} = \frac{CE}{BE}$$

Do vậy $CD(CE - CB) = CD.BE = CE.DB = CE(CB - CD)$ hoặc (cộng CD (CE + CB) cho cả 2 vế).

$$2CD.CE = CB(CD + CE)$$

Bởi vì $CD + CE = 2CO$, ta có: $CD.CE = CB.CO$ Mặt khác, theo định lý tích điểm áp dụng với C và ω ta có: $CD.CE = CA.CF$, suy ra $CB.CO = CA.CF$. Do vậy, theo định lý tích điểm với các điểm A, B, O, F nằm trên đường tròn ω_1 nào đó. Ta thực hiện phép nghịch đảo A với tia AO. ω là một vòng tròn qua A, điểm trực giao với AO và bao gồm 1 điểm P nằm trên AO vowis AP = 2AO. Do vậy, ảnh của nó dưới phép nghịch đảo là một đường trực giao với AO và bao gồm 1 điểm P' trên tia AO với $AP' = AO/2$. Nói cách khác, ảnh l_1 của ω là đường trung trực của $\overline{AO}$. Kế tiếp, phép nghịch đảo đưa ω_1 (vòng tròn đi qua A, qua O và tiếp xúc với AG) tới l_2 không đi qua A, qua O và song song với AG. Suy ra phép nghịch đảo đưa F, giao giữa ω và ω_1, tới giao F' của l_1 và l_2; hơn nữa phép nghịch đảo (phép biến đổi ngược) đưa G, giao của ω_1 và AG, tới giao của l_1 và AG. Phép dối xứng qua trung điểm của $\overline{AO}$ đưa l_1 tới chính nó và l_2 tới AG; Do vậy, sự phản chiếu này đưa $\overline{OF'}$ tới $\overline{AG'}$, có nghĩa là OF' = AG'. Bởi F' nằm trên trung trực của $\overline{AO}$, ta cũng có OF' = AG'. Vậy nên AF' = AG', điều này đòng nghĩa với AF = AG. Kết quả được chứng minh.

▷**9.47**.*Hãy chỉ ra rằng có thể cắt bất kỳ lăng trụ tam giác có chiều dài vô hạn bởi 1 mặt phẳng cho ra kết quả thiết diện là một tam giác đều.*

Lời giải: Giả sử rằng một mặt phẳng trực giao với các cạnh của lăng trụ tại A, B, C và đặt a = BC, b = CA, c = AB và không mất tính tổng quát giả sử $a \le b \le c$. Với $t \ge 0$, xác định:

$$f(t) = \sqrt{a^2 + (t + \sqrt{c^2 - b^2 + t^2})^2} - \sqrt{c^2 + t^2}$$

Khi đó:

$$f(0) = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2} - \sqrt{c^2} \le 0$$

Mặt khác, ta có $f(b) = \sqrt{a^2 + (b + c)^2} - \sqrt{c^2 + b^2} > 0$. Bởi f là liên tục nên tồn tại t_0 sao cho $f(t_0) = 0$. Bây giờ ta cho B' nằm trên 1 cạnh với B, cách B 1 khoảng là t. C' nằm cùng cạnh với C và cách C 1 khoảng là $\sqrt{c^2 - b^2 + t_0^2}$ và nằm trên giá đối diện của mặt phẳng (ABC) tính từ B'. Theo định lý Pitago ta có:

$$AB' = \sqrt{c^2 + t_0^2}; AC' = \sqrt{b^2 + (c^2 - b^2 + t_0^2)} = \sqrt{c^2 + t_0^2};$$

$$B'C' = \sqrt{a^2 + (t_0 + \sqrt{c^2 - b^2 + t_0^2})^2} = \sqrt{c^2 + t_0^2}$$

Vì vậy mặt phẳng (AB'C') đáp ứng được yêu cầu đề bài.

▷**9.48**.*Cho hình vuông ABCD, các điểm M, N, K, L lần lượt nằm trên các cạnh* $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ *sao cho MN song song với LK và khoảng cách giữa MN và LK bằng AB. Hãy chỉ ra rằng các đường tròn ngoại tiếp của tam giác ALM và NCK là giao nhau còn các đường tròn ngoại tiếp của tam giác LDK và MBN thì không giao nhau.*

Lời giải: Hướng tứ giác sao cho $\overline{AB}$ nằm ngang và nằm phía trên CD, ở đó A nằm phía tây so với B. Trước hết ta cho là AL > BN, nói cách khác N nằm phía bắc (mặc dù không nhất thiết phải chính bắc) so với L. Giả sử ngược lại thì có 1 đoạn nằm ngang với điểm cuối trái L và điểm cuối phải trên $\overline{MN}$ với độ dài $\le AB$. Mặt khác, độ dài của đoạn này lớn hơn khoảng cách giữa $\overline{LK}$ và $\overline{MN}$, điều này đã được giả thiết là AB. Do vậy ta có sự trái ngược nhau và AL > BN. Tương tự ta cũng có thể rút ra được AM > DK.

Dựng P và Q sao cho các tứ giác BMPN và DKQL là các hình chữ nhật. Ta biết từ phần trên rằng P nằm ở đông bắc so với Q. Dựng R và S sao

cho R ở phía đông nam so với Q và sao cho tứ giác PRQS là hình chữ nhật có các cạch song song với các cạch của hình vuông ABCD.
Để chỉ ra rằng các đường tròn ngoại tiếp của tam giác ALM và NCK là giao nhau, ta thấy rằng các đường tròn bị chặn bởi các đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM và NCK lần lượt bao hàm các hình chữ nhật ALRM và CKSN. Vì vậy các đường tròn này đều chứa hình chữ nhật PRQS. Do các miền trong của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM và NCK là giao nhau vậy nên các đường tròn ngoại tiếp cũng phải giao nhau. Giờ ta chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ω_1 của tam giác MBN và đường tròn ngoại tiếp ω_2 của tam giác LDK là không giao nhau. Chú ý rằng chúng cũng lần lượt là đường tròn ngoại tiếp của hình chữ nhật BMPN và DKQL. Cho l_1 là tiếp tuyến với ω_1 tại P, l_2 là tiếp tuyến với ω_2 tại Q. Vì $\overline{MN}$ song song với $\overline{LK}$ do vậy $\overline{BP}$ song song với $\overline{QD}$. Do l_1 vuông góc với $\overline{BP}$ và l_2 vuông góc với $\overline{QD}$ nên ta có l_1 song song với l_2. Vậy nên mỗi điểm của ω_1 nằm trên hoặc giá bên phải của l_1 cũng nằm phía bên phải của l_2; mặt khác mỗi điểm trên ω_2 nằm trên hoặc bên trái của l_2. Vậy nên ω_1 và ω_2 không thể giao nhau.

▷**9.49**.*Cho* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *là một hàm thỏa mãn :*

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq 1$$

vittc$x, y \in \mathbb{R}$. *Chứng minh rằng tồn tại một hàm* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $|f(x) - g(x)| \leq 1$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$, *và* $g(x+y) = g(x) + g(y)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải: Ta cho hàm

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

thỏa mãn điều kiện đầu bài. Việc trước tiên cần làm là chỉ ra rằng tồn tại với mọi x. Thực tế ta có thể chứng minh được điều này và đồng thời cũng chứng minh được

$$|f(x) - g(x)| \leq 1$$

đối với tất cả x. Trước hết thấy rằng đặt $x = y = 2^m x_0$ trong bất đẳng thức đã cho của f ta có:

$$\left| f(2^{m+1}x_0) - 2f(2^m x_0) \right| \le 1$$

Chia cho 2^{m+1} ta có:

$$\left| \frac{f(2^{m+1}x_0)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x_0)}{2^m} \right| \le \frac{1}{2^{m+1}}$$

Với bất kỳ x xác định nào, xem xét tổng vô hạn:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right)$$

Vì các trị tuyệt đối của các số hạng bị chặn bởi một dãy $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$, tổng của chúng tiến tới 1, tổng này hội tụ tuyệt đối và cũng bị chặn bởi 1. Mặt khác, theo định nghĩa tổng vô hạn bằng

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{f(2^{m+1}x)}{2^{m+1}} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right)$$

Tổng vô hạn trong giới hạn bằng $(\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - f(x))$, có nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - f(x) \right)$$

Giờ ta có thể lấy ra hằng số f(x) để đạt

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} \right) - f(x)$$

Suy ra giới hạn trong biểu thức cuối cùng này hội tụ và ngẫu nhiên nó cũng chính là giới hạn ta muốn dùng để xác định g(x). Hơn nữa, ta thấy ở phần trên rằng lượng cuối cùng lớn nhất bằng 1, vì vậy ta có:

$$|g(x) - f(x)| \le 1$$

Tiếp tục thấy rằng $g(x+y) = g(x) + g(y)$với mọi x, y. Thấy rằng:

$$\begin{aligned} g(x+y) - g(x) - g(y) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2^n y}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)}{2^n} \end{aligned}$$

Theo điều kiện đã cho,

$$|f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)| \leq 1$$

với n bất kỳ, hằng số trong gới hạn của biểu thức cuối cùng nằm trong khoảng $-\frac{1}{2^n}$ và $\frac{1}{2^n}$. Vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

suy ra giới hạn trong biểu thức cuối là bằng 0. Do vậy $g(x+y) = g(x) + g(y)$.