PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN LÂM THAO

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
Môn: Toán 9
Thời gian làm bài: 150 phút
Đề gồm 01 trang

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right):\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right);$

Với $x\geq 0; x\neq 4; x\neq 9$;

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm giá trị của A khi $x=6-2\sqrt{5}$.

c) Với giá trị nào của x thì $\frac{1}{A}$ đạt giá trị nhỏ nhất ? Tìm giá trị nhỏ nhất đó?

Bài 2: (3,0 điểm)

a) C/m : Với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

b) Giải phương trình: $\frac{\sqrt{x-2012}-1}{x-2012}+\frac{\sqrt{y-2013}-1}{y-2013}+\frac{\sqrt{z-2014}-1}{z-2014}=\frac{3}{4}$

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4x = 19 – 3y^2$.

b) T×m c¸c ch÷ sè a, b sao cho $\overline{a56b}$ chia hết cho 45

Bài 4: (7,0 điểm)

1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC=2R. Điểm A di động trện nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC. Gọi Dvà E lần lượt là hình chiếu của H lên AC và AB.

a. Chứng minh: AB . EB + AC . EH = AB^2

b.Xác định vị trí điểm A sao cho tứ giác AEHD có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó theo R.

2. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}$.

Bài 4: (2,0 điểm)

Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn xyz=1.

CMR $\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\leq 1$

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Môn: Toán 9

Câu 1 (4 điểm): Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right):\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right);$

Với $x\geq 0; x\neq 4; x\neq 9$ (*)

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị của A khi $x=6-2\sqrt{5}$;

c) Với giá trị nào của x thì $\frac{1}{A}$ đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó?

Lời giải sơ lược	Điểm
a) Với điều kiện (*) ta có: $A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$	0,50
$=\frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$	0,50
$=\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$	0,50
$=\frac{1}{\sqrt{x}-2}:\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.	0,50
b) Dễ thấy : $x=6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$ thoả mãn điều kiện. Khi đó: $\sqrt{x}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$.	0,50
Do vậy, giá trị của biểu thức A là: $\frac{\sqrt{5}-1+1}{\sqrt{5}-1-2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3}$	0,25
$=-\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$.	0,25
c) Viết lại, $\frac{1}{A}=1-\frac{3}{\sqrt{x}+1}$. Để $\frac{1}{A}$ có GTNN thì $\frac{3}{\sqrt{x}+1}$ có GTLN, hay $\sqrt{x}+1$ có GTNN.	0,25
Ta có: $\sqrt{x}+1\geq 1$, dấu "=" xảy ra khi x = 0. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{A}$ là $1-\frac{3}{\sqrt{0}+1}=1-3=-2$, xảy ra khi x = 0.	0,75

Câu 2(3 điểm):

a) Chứng minh : Với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

b) Giải phương trình: $\frac{\sqrt{x - 2012} - 1}{x - 2012} + \frac{\sqrt{y - 2013} - 1}{y - 2013} + \frac{\sqrt{z - 2014} - 1}{z - 2014} = \frac{3}{4}$

Câu	Ý	Lời giải sơ lược	Điểm
2			**4đ**
	a		**1,5đ**
		Ta có : $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$	0,5
		$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$	
		$= (n^2 + 3n + 1)^2$	0,5
		Với n là số tự nhiên thì $n^2 + 3n + 1$ cũng là số tự nhiên, theo định nghĩa, a_n là số chính phương.	0,5
	b		**1,5đ**
		Đặt $\sqrt{x - 2012} = a; \sqrt{y - 2013} = b; \sqrt{z - 2014} = c$	0,25
		(với a, b, c > 0). Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\frac{a - 1}{a^2} + \frac{b - 1}{b^2} + \frac{c - 1}{c^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 2$	0,5
		Suy ra: x = 2016, y = 2017, z = 2018.	0,25

Câu 3 (4 điểm):

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4x = 19 – 3y^2$.

b) T×m c¸c ch÷ sè a, b sao cho $\overline{a56b} \vdots 45$

Câu	Ý	Lời giải sơ lược	Điểm
3			**3đ**
	a		2đ

		Ta có: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x = 38 - 6y^2$ $\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 42 - 6y^2$ $\Leftrightarrow (2x+2)^2 = 42 - 6y^2 \Leftrightarrow (2x+2)^2 = 6(7 - y^2)$ (1)	0,5
		Vì $(2x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow 7 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 7$, mà $y \in Z$ nên: y = 0; ± 1; ± 2	0,5
		+ Với y = 1 , từ (1) $\Rightarrow (2x+2)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=6 \\ 2x+2=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$ Trường hợp này phương trình có 2 nghiệm nguyên là: (2;1) và (-4;1). + Với y = -1 Thì từ (1) $\Rightarrow (2x+2)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=6 \\ 2x+2=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$ Trường hợp này pt có 2 nghiệm nguyên là: (2;-1) và (-4;-1).	0,5
		+ Với $y = \pm 2 \Rightarrow (2x+2)^2 = 18 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 14 = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 7 \Rightarrow$ pt này không có nghiêm nguyên vì VT chia hết cho 2, VP không chia hết cho 2.	0,25
		$(2x+2)^2 = 42 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 38 = 0$ + Với y = 0, từ(1) $\Rightarrow \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 19$ PT này không có nghiệm nguyên vì VT chia hết cho 2; VP không chia hết cho 2. Vậy PT đã cho có các nghiệm nguyên là: (-4;1); (2;1);(-4;-1); (2;-1)	0,25
	b		2đ
		Ta thÊy 45 = 5.9 mµ (5 ; 9) = 1 ®Ó $\overline{a56b} \vdots 45 \Leftrightarrow \overline{a56b} \vdots 5$ vµ 9	0,5
		XÐt $\overline{a56b} \vdots 5 \Leftrightarrow b \in \{0 ; 5\}$	0,25

		NÕu b = 0 ta cã sè $\overline{a56b}$ ⋮ 9 ⇔ a + 5 + 6 + 0 ⋮ 9 ⇒ a + 11 ⋮ 9 ⇒ a = 7	0,5
		NÕu b = 5 ta cã sè $\overline{a56b}$ ⋮ 9 ⇔ a + 5 + 6 + 0 ⋮ 9 ⇒ a + 16 ⋮ 9 ⇒ a = 2	0,5
		VËy: a = 7 vµ b = 0 ta cã sè 7560 a = 2 vµ b = 5 ta cã sè 2560	0,25

<u>Câu 4</u>: (7 điểm)

1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC=2R. Điểm A di động trện nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC. Gọi Dvà E lần lượt là hình chiếu của H lên AC và AB.

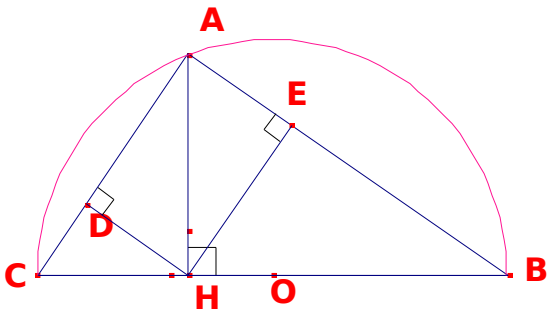
a. Chứng minh: AB **.** EB + AC **.** EH = AB^2

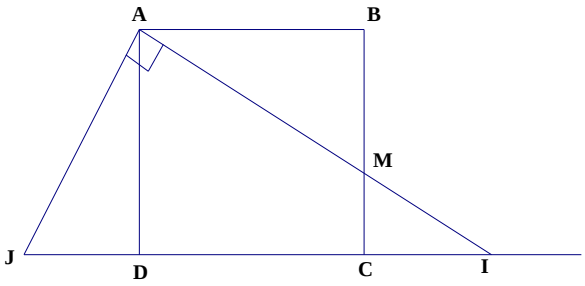
b.Xác định vị trí điểm A sao cho tứ giác AEHD có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó theo R.

2. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}$.

Câu	Ý	**Lời giải sơ lược**	**Điểm**
4			**7đ**

	1		***4đ***
		a) Chứng minh được tứ giác ADHE là hình chữ nhật Suy ra AB . EB = HB^2	1
		AC . EH = AC . AD = AH^2 => ĐPCM	1
		b) $S_{(ADHE)}$= AD.AE $\leq \frac{AD^2 + AE^2}{2} = \frac{DE^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$	1
		$\Rightarrow S_{(ADHE)} \leq \frac{AH^2}{2} \leq \frac{AO^2}{2} = \frac{R^2}{2}$	0,5
		Vậy Max $S_{(ADHE)}$= $\frac{R^2}{2}$ Khi AD = AE Hay A là điểm chính giữa của cung AB	0,5
	2		3đ

			
		Vẽ Ax $\perp$ AI cắt đường thẳng CD tại J. Ta có Δ AIJ vuông tại A, có AD là đường cao thuộc cạnh huyền IJ, nên: $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AJ^2}+\frac{1}{AI^2}$ (1)	1
		Xét hai tam giác vuông ADJ và ABM, ta có: AB = AD = a; $\widehat{DAJ}=\widehat{BAM}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)	***0,5***
		$\Rightarrow$ $\Delta ADJ = \Delta ABM$. Suy ra: AJ = AM	***1***
		Thay vào (1) ta được: $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}$ (đpcm)	***0,5***

<u>Câu 5</u> (2điểm): Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn xyz=1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1$

	Sơ lược lời giải	**Điểm**
	Đặt $x=a^3$ $y=b^3$ $z=c^3$,a,b,c >0 thì x, y, z >0 và abc=1.Ta có	0,25
	$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\ge(a+b)ab$, do a+b>0 và $a^2+b^2-ab\ge ab$ $\Rightarrow$ $a^3+b^3+1\ge(a+b)ab+abc=ab(a+b+c)>0$	0,5

	$\Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+1} \le \frac{1}{ab(a+b+c)}$ Tương tự ta có	0,25
	$\frac{1}{b^3+c^3+1} \le \frac{1}{bc(a+b+c)}$, $\frac{1}{c^3+a^3+1} \le \frac{1}{ca(a+b+c)}$ Cộng theo vế ta có	0,5
	$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1} = \frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}$ $\le \frac{1}{(a+b+c)}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = \frac{1}{(a+b+c)}(c+a+b)=1$ Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1	0,5