Người làm:
Zalo: - số đt zalo:
Email:

CĐ11: ĐỒNG DƯ THỨC

Dạng 1. Sử dụng đồng dư thức chứng minh chia hết

Câu 1. **(HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)**

Chứng minh rằng : Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$; $11^2 = 121 \equiv -12 \pmod{133}$

Do đó: $12^{2n+1} = 12.(12^2)^n \equiv 12.11^n \pmod{133}$

$11^{n+2} = 11^2.11^n \equiv -12.11^n \pmod{133}$

$\Rightarrow (11^{n+2} + 12^{2n+1}) \equiv (12.11^n - 12.11^n) \equiv 0 \pmod{133}$

Vậy số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Dạng 2. Sử dụng đồng dư thức tìm số dư

Câu 1. **(HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)**

Tìm số dư khi chia 2^{2011} cho 31.

Lời giải

Ta có: $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{402} \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow 2^{2011} \equiv 2 \pmod{31}$.

Vậy số dư khi chia 2^{2011} cho 31 là 2.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Tìm số dư khi chia 3^{41} cho 11.

Lời giải

Ta có : $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 3^{41} = 3.(3^{10})^4 \equiv 3.1^4 = 3 \pmod{11}$

Vậy số dư khi chia 3^{41} cho 11 là 3.

Câu 3.

a) Tìm số dư trong phép chia của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11.

b) Tìm số dư trong phép chia của số $B = 2016^{2018} + 2$ khi chia cho 5.

Lời giải

a) Ta có: $3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow (3^5)^{401} = 3^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$ (1)

Mặt khác: $4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow (4^5)^{401} = 4^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (3^{2005} + 4^{2005}) \equiv (1+1) \pmod{11}$

Vậy số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 là 2.

b) Ta có: $2016 \equiv 1 \pmod 5$ do đó $2016^{2018} \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 2016^{2018} + 2 \equiv 1 + 2 \pmod 5$ hay $2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod 5$

Vậy số dư trong phép chia của số $B = 2016^{2018} + 2$ khi chia cho 5 là 3.

Dạng 3. Tìm điều kiện của biến để chia hết

Câu 1. Tìm số tự nhiên n sao cho: $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) \vdots 19$

Lời giải

Ta có: $2^{3n+4} + 3^{2n+1} = 16.8^n + 3.9^n$

Vì $16 \equiv -3 \pmod{19} \Rightarrow 16.8^n \equiv -3.8^n \pmod{19}$

Mà $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) \vdots 19$

$\Rightarrow (-3.8^n + 3.9^n) \equiv 0 \pmod{19}$

$\Rightarrow (9^n - 8^n) \equiv 0 \pmod{19}$

$\Rightarrow 9^n \equiv 8^n \pmod{19}$

$\Rightarrow n = 0$ do $8 \equiv 9 \pmod{19}$ là vô lý.

Vậy $n = 0$.

Câu 2.

Tìm số tự nhiên n có bốn chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98.

Lời giải

Ta có: $n \equiv 98 \pmod{132} \Rightarrow n = 132k + 98$ với $k \in \mathbb{N}$ (1)

$\Rightarrow 132k + 98 \equiv 112 \pmod{131}$

$\Rightarrow k + 98 + 33 \equiv 112 + 33 \pmod{131}$

$\Rightarrow k+131\equiv 145 \pmod{131}$

$\Rightarrow k\equiv 14 \pmod{131}$ $\Rightarrow k=131m+14$ với $m\in\mathbb{N}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n=132(131m+14)+98=131.132m+1946$

$\Rightarrow n=1946$

Dạng 4. Sử dụng đồng dư tìm chữ số tận cùng

Câu 1. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$.

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}.

c) Hãy tìm ba chữ số tận cùng của 2^{512}.

Lời giải

a) Ta có $9^{2n+1}=9.81^n\equiv 9 \pmod{10}$

mà 9^{10} là số lẻ

Nên $9^{9^{10}}\equiv 9 \pmod{10}$

Vậy chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$ là 9.

b) Ta có: $3^4=81\equiv -19 \pmod{100}\Rightarrow 3^8\equiv(-19)^2 \pmod{100}$

Mà $(-19)^2=361\equiv 61 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3^8\equiv 61 \pmod{100}$

Do đó $3^{10}=3^8.9\equiv 61.9=549\equiv 49 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3^{20}\equiv 49^2\equiv 01 \pmod{100}$ do $49^2=2401$

$\Rightarrow 3^{1000}=(3^{20})^{50}\equiv 01 \pmod{100}$

Vậy hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01.

c) + Ta có: $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Nếu $a\,\vdots\,25$ thì $(a+b)^5\equiv b^5 \pmod{125}$

+ Ta có: $2^{10}=1024\equiv -1 \pmod{25}$ nên $2^{10}=25k-1$ với $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^{50}=(2^{10})^5=(25k-1)^5\equiv -1 \pmod{125}$

$\Rightarrow 2^{512}=(2^{50})^{10}.2^{12}\equiv(-1)^{10}.2^{12}\equiv 2^{12} \pmod{125}$

Do $2^{12}=2^{10}.2^2=1024.4\equiv 96 \pmod{25}$

$\Rightarrow 2^{512}\equiv 96 \pmod{125}$ hay $2^{512}=125m+96$ với $m\in\mathbb{N}$

Lại có : $2^{512}=(2^4)^{123}=16^{123}\,\vdots\,8$; $96\,\vdots\,8$

$\Rightarrow m\,\vdots\,8$ nên $m=8n$ với $n\in\mathbb{N}$

Khi đó $2^{512}=125.8n+96=1000n+96$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{512} là 096.

Dạng 5. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số chính phương

Câu 1. Chứng minh rằng: $A=19^k+5^k+1995^k+1996^k$ (với k chẵn) không thể là số chính phương.

Lời giải

Với k chẵn ta có:

$19^k\equiv(-1)^k\pmod 4\Rightarrow 19^k\equiv1\pmod 4$

$5^k\equiv1^k\pmod 4\Rightarrow 5^k\equiv1\pmod 4$

$1995^k\equiv(-1)^k\pmod 4\Rightarrow 1995^k\equiv1\pmod 4$

$1996^k\equiv0\pmod 4$

$\Rightarrow A=19^k+5^k+1995^k+1996^k\equiv3\pmod 4$ hay A chia 3 dư 4.

Vậy $A=19^k+5^k+1995^k+1996^k$ (với k chẵn) không thể là số chính phương.

Câu 2. Tìm tất cả các số tự nhiên $x,\ y$ để 2^x+5^y là số chính phương.

Lời giải

Giả sử ($k\in\mathbb{N}$)

Nếu $x=0$ thì $1+5^y=k^2$ do đó k chẵn $\Rightarrow k^2\,\vdots\,4$; $1+5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy $x\neq0$

Ta có $2^x+5^y=k^2\Rightarrow k$ lẻ và k không chia hết cho 5.

+ TH1: với $y=0$ thì $2^x+1=k^2=(2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k=2n+1$, $n\in\mathbb{N}$)

$\Rightarrow 2^x=4n(n+1)\Rightarrow n=1$. Khi đó $x=3;y=0$ (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x+5^y=2^3+5^0=9$ là số chính phương.

+ TH2: với $y\neq0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2\equiv\pm1\pmod 5$

Mà $2^x+5^y=k^2$

$\Rightarrow 2^x\equiv\pm1\pmod 5\Rightarrow x$ chẵn.

Đặt $x=2x_1$ ($x_1\in\mathbb{N}$), ta có: $5^y=(k+2^{x_1})(k-2^{x_1})$

$\Rightarrow\begin{cases}k+2^{x_1}=5^{y_1}\\k-2^{x_1}=5^{y_2}\end{cases}$ với $y_1+y_2=y$; $y_1>y_2$; $y_1,y_2\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^{y_1} - 5^{y_2} = 5^{y_2}(5^{y_1-y_2} - 1)$

$\Rightarrow 5^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y$

Khi đó: $2^{x_1+1} = 5^y - 1$

Nếu $y = 2t$ ($t \in \mathbb{N}$) thì $2^{x_1+1} = 5^{2t} - 1 = 25^t - 1$ chia hết cho 3 (vô lý). Do đó y lẻ.

$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^y - 1 = 4(5^{y-1} + 5^{y-2} + ... + 5 + 1)$

Nếu $y > 1$ thì $5^{y-1} + 5^{y-2} + ... + 5 + 1$ lẻ (vô lý)

Nếu $y = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ khi đó $x = 2; y = 1$

Thử lại: $2^x + 5^y = 2^2 + 5^1 = 9$ là số chính phương.

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc $x = 3; y = 0$

Dạng 6. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số nguyên tố, hợp số

Câu 1. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho là số nguyên tố.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp sau:

+ TH1: Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 14 = 3^2 + 14 = 23$ là số nguyên tố.

+ TH2: Với $p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$ mà $14 \equiv 2 \pmod 3$

$\Rightarrow (p^2 + 14) \vdots 3$ và có $p^2 + 14 > 3$

$\Rightarrow p^2 + 14$ không là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$.

Câu 2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ chứng minh rằng: $19.8^n + 17$ là hợp số.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau :

+ TH1: $n = 2k \Rightarrow 19.8^n + 17 \equiv 1.(-1)^{2k} + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow (19.8^n + 17) \vdots 3$

Mà $19.8^n + 17 > 3$ nên $19.8^n + 17$ là hợp số

+ TH2: $n = 4k + 1$

Khi đó: $19.8^n + 17 = 19.8^{4k+1} + 17 = 19.8.64^{2k} + 17$

$19 \equiv 6 \pmod{13}$; $64^{2k} = 4096^k \equiv 1^k \pmod{13}$; $17 \equiv 4 \pmod{13}$

$\Rightarrow 19.8^n + 17 \equiv 6.8.1 + 4 \equiv 52 \equiv 0 \pmod{13}$

Mà $19.8^n + 17 > 13$ nên $19.8^n + 17$ là hợp số

+ TH3: $n = 4k + 3$

Khi đó: $19.8^n+17=19.8^{4k+3}+17=19.8.64^{2k+1}+17$

$19\equiv -1\pmod 5$; $64^{2k+1}=(-1)^{2k+1}\equiv -1\pmod 5$; $17\equiv 2\pmod 5$; $8\equiv 3\pmod 5$

$\Rightarrow 19.8^n+17\equiv(-1).3.(-1)+2\equiv 5\equiv 0\pmod 5$

Mà $19.8^n+17>5$ nên 19.8^n+17 là hợp số

Vậy với $n\in\mathbb{N}^*$, 19.8^n+17 là hợp số.

Dạng 7. Sử dụng đồng dư trong bài toán tìm nghiệm nguyên

Câu 1. **(HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)**

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1+2+3+....+n=\overline{aaa}$

Lời giải

Ta có: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $\overline{aaa}=a.111=a.3.37$

Do đó, từ $1+2+3+....+n=\overline{aaa}\Rightarrow n(n+1)=2.3.37a$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

Mặt khác: $\dfrac{n(n+1)}{2}=\overline{aaa}\le 999\Rightarrow n(n+1)\le 1998\Rightarrow n<45 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n=37$ hoặc $n+1=37$

+ Với $n=37$ $\Rightarrow \overline{aaa}=\dfrac{37.38}{2}=703$ (không thỏa mãn)

+ Với $n+1=37$ $\Rightarrow \overline{aaa}=\dfrac{36.37}{2}=666$ (thỏa mãn)

Vậy $n=36$ và $a=6$.

Câu 2. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2-y^2=1998$

b) $x^2+y^2=1999$

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1.

a) Ta có: $x^2\equiv 0\pmod 4$ hoặc $x^2\equiv 1\pmod 4$

$y^2\equiv 0\pmod 4$ hoặc $y^2\equiv 1\pmod 4$

$\Rightarrow x^2-y^2\equiv 0\pmod 4$ hoặc $x^2-y^2\equiv 1\pmod 4$ hoặc $x^2-y^2\equiv 3\pmod 4$

Mà $1998 \equiv 2 \pmod 4$

Nên phương trình $x^2 - y^2 = 1998$ không có nghiệm nguyên.

b) Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 4$

$y^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $y^2 \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 4$ hoặc $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$

Mà $1999 \equiv 3 \pmod 4$

Nên phương trình $x^2 + y^2 = 1998$ không có nghiệm nguyên.

Câu 3. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$.

Lời giải

$x^2 = 2y^2 - 8y + 3 \Leftrightarrow x^2 = 2(y-2)^2 - 5$

Nhận xét: Số chính phương chia cho 8 chỉ có số dư 0 hoặc 1 hoặc 4.

Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ hoặc $x^2 \equiv 4 \pmod 8$

$(y-2)^2 \equiv 0 \pmod 8$ hoặc $(y-2)^2 \equiv 1 \pmod 8$ hoặc $(y-2)^2 \equiv 4 \pmod 8$

$\Rightarrow 2(y-2)^2 \equiv 0 \pmod 8$ hoặc $2(y-2)^2 \equiv 2 \pmod 8$

$\Rightarrow 2(y-2)^2 - 5 \equiv 3 \pmod 8$ hoặc $2(y-2)^2 - 5 \equiv 5 \pmod 8$

Do đó phương trình $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$ không có nghiệm nguyên.