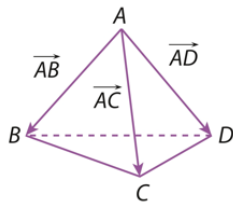


PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Khái niệm vectơ trong không gian

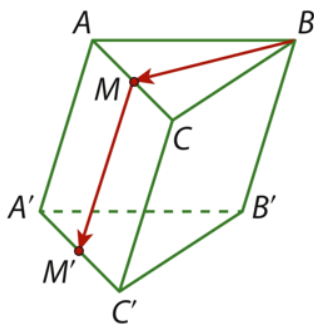
Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

Lời giải



Ngoài đỉnh A , tứ diện còn có 3 đỉnh B, C, D nên ta có 3 vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, A'C'$ (Hình).



a) Trong tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lăng trụ, hãy chỉ ra các vectơ:

- Khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$;
- Khác $\vec{0}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;
- Là vectơ đối của $\overrightarrow{AC}$;
- Bằng $\overrightarrow{MM'}$.

b) Tìm độ dài của $\overrightarrow{BM}$ trong trường hợp ABC là tam giác cân tại B , có cạnh bên bằng 5 cm và góc ở đỉnh bằng 30° (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Do $AC \parallel A'C'$ và $M \in AC$ nên:

- Vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$ là vectơ có giá AC hoặc $A'C'$. Đó là các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'A'}$;
- Trong những vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$, có hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;
- Các vectơ đối của $\overrightarrow{AC}$ là $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C'A'}$;

- Các vector bằng $\overrightarrow{MM'}$ là $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ (các vector này cùng hướng và cùng độ dài với $\overrightarrow{MM'}$).

b) Từ giả thiết, ta suy ra tam giác AMB vuông tại M . Từ đó ta có:

$$BM = BA \cdot \cos \angle ABM = 5 \cdot \cos 15^\circ \approx 4,83(\text{cm}).$$

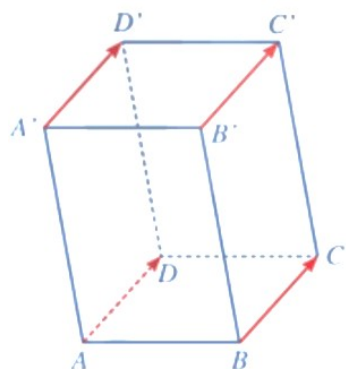
Vậy độ dài của $\overrightarrow{BM}$ là $|\overrightarrow{BM}| \approx 4,83$ (cm).

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vector có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vector đó:

a) Bằng vector $\overrightarrow{AD}$;

b) Là vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



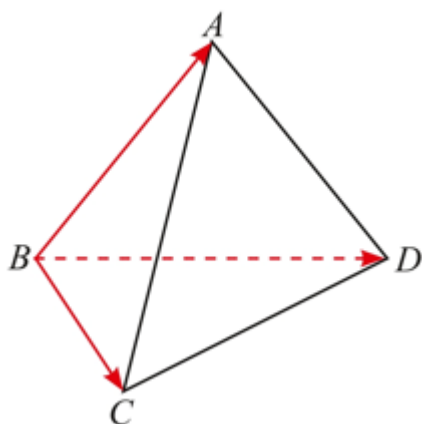
a) Do các vector $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{A'D'}$ cùng hướng với vector $\overrightarrow{AD}$ và $AD = BC = B'C' = A'D'$ (tính chất hình hộp) nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}$.

Vậy ba vector $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{A'D'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vector $\overrightarrow{AD}$.

Do các vector $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{D'A'}$ ngược hướng với vector $\overrightarrow{AD}$ và $AD = CB = C'B' = D'A'$ (tính chất hình hộp) nên ba vector $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{D'A'}$ là ba vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$.

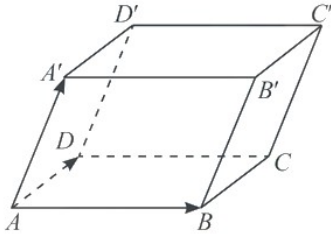
Câu 4. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vector có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Lời giải



Ta có ba vector $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.



- a) Giá của ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?
- b) Tìm các vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$.
- c) Tìm các vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) Giá của ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ lần lượt là ba đường thẳng AB, AD, AA' . Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, D, A' không đồng phẳng.

b) Do $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $AB \parallel A'B'$ và $AB = A'B'$. Ta có hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng và có độ dài bằng nhau, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.

c) Hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng, suy ra $\overrightarrow{DA}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$.

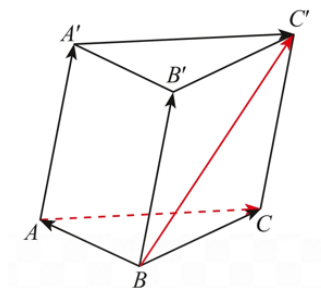
Ta có $ABCD$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AD}$ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$, suy ra $\overrightarrow{CB}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$.

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{C'B'}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$.

Dạng 2. Các phép toán của vectơ trong không gian

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Tìm các vector tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải



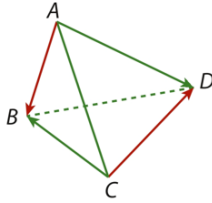
Ta có $ABC \cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'C'C$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Tương tự, ta cũng có $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 7. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Lời giải

Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

Áp dụng tính chất kết hợp và giao hoán của phép cộng vector, ta suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

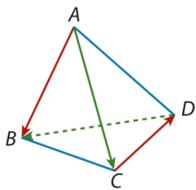
Câu 8. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình). Tìm vector $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$.

Lời giải

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$.

Suy ra $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'}$.

Câu 9. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.



Lời giải

Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Thực hiện các phép toán sau đây:
a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

Lời giải

a) Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CE}$.

b) Ta có $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.

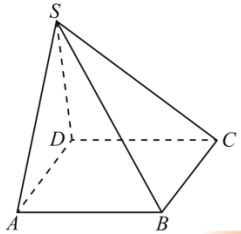
Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AG}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.

Tìm các vector hiệu $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD}$.

Lời giải



a) Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{AD}$.

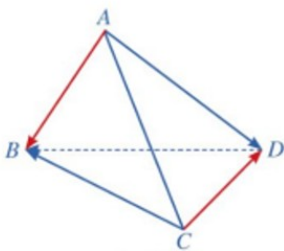
b) Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, suy ra $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BC}$.

Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CS}$.

Vậy $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CS}$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải



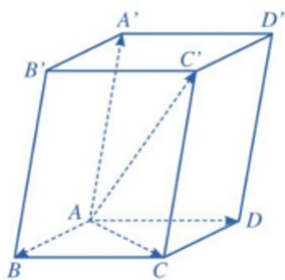
Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



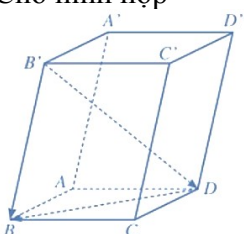
Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.



Lời giải

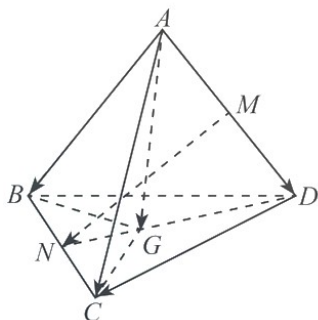
$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{B'B} + (-\overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D}. \end{aligned}$$

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$.

Do đó $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$.

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

Do đó

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

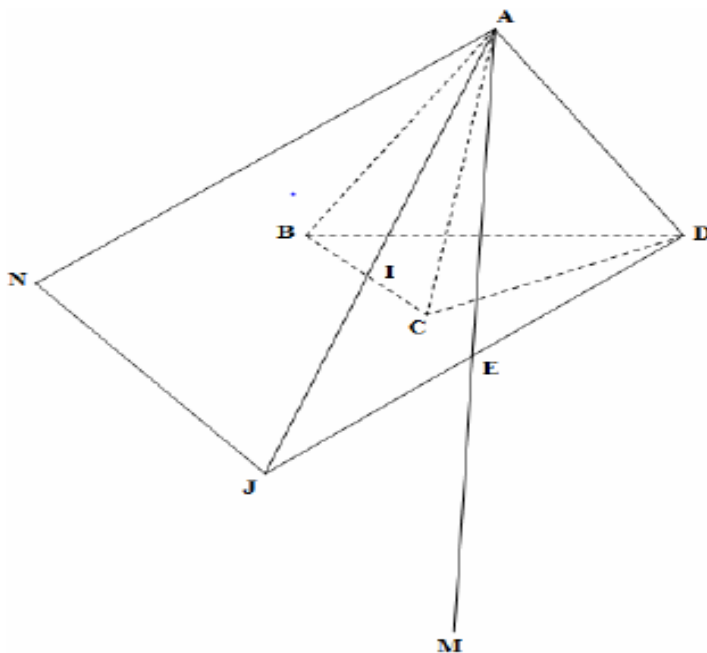
Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Xác định các điểm M, N thỏa mãn:

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

- Gọi I là trung điểm BC , khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

- Gọi J là điểm đối xứng của A qua I , khi đó ta có: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AJ}$ suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ}$.

Từ đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$. Vậy M là điểm đối xứng của A qua E .

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

- Theo a), ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AJ}$.

- Gọi J là điểm đối xứng của A qua I , khi đó ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DJ}$.

Vậy trong tam giác ADJ ta tạo ra hình bình hành $ADJN$ thì điểm N thỏa mãn yêu cầu này chính là điểm cần tìm.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của MN và G_1 là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

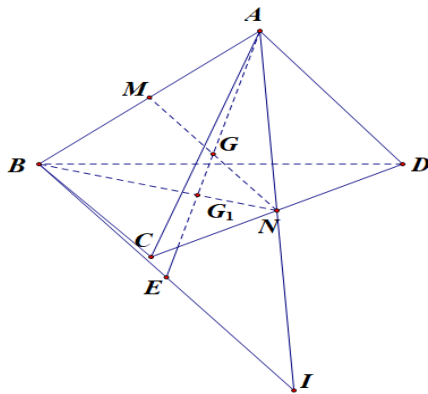
b. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

c. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

d. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 4\overrightarrow{NG}, \forall N.$

e. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG_1}$

Lời giải



a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Sử dụng quy tắc cộng vector ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

b. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Chứng minh $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = 2\overrightarrow{MN}$$

$$(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = \vec{0}; (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = \vec{0}.$$

Vì

Chứng minh $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Chứng minh tương tự hoặc sử dụng kết quả câu #a.

c. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

Theo quy tắc trung điểm trong $\Delta GAB; \Delta GCD$ ta có:

$$\begin{cases} \vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GM} \\ \vec{GC} + \vec{GD} = 2\vec{GN} \end{cases} \rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 2(\vec{GM} + \vec{GN}) = \vec{0}.$$

d. $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} + \vec{ND} = 4\vec{NG}, \forall N.$

$$\begin{cases} \vec{NA} = \vec{NG} + \vec{GA} \\ \vec{NB} = \vec{NG} + \vec{GB} \\ \vec{NC} = \vec{NG} + \vec{GC} \\ \vec{ND} = \vec{NG} + \vec{GD} \end{cases} \rightarrow \vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} + \vec{ND} = 4\vec{NG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 4\vec{NG}.$$

Ta có:

Vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

e. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}_1$

Sử dụng quy tắc trung điểm cho ΔACD ta được $\vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AN}$

Gọi I là điểm đối xứng của A qua N , khi đó $2\vec{AN} = \vec{AI} \rightarrow \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AI}$

$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AI} = 2\vec{AE}$, với E là trung điểm của BI .

Xét trong tam giác ABI có BN và AE là các đường trung tuyến, giả sử $BN \cap AE = G'$ thì G' là trọng tâm tam giác ABI .

$$\vec{BG}' = \frac{2}{3}\vec{BN} = \vec{BG}_1 \rightarrow G' \equiv G_1.$$

Khi đó,

$$\vec{AG}_1 = \frac{2}{3}\vec{AE} = \frac{2\vec{AE}}{3} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}}{3} \rightarrow \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}_1.$$

Mà

Câu 18. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

a) $\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AC} + \vec{DB}$.

b) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = \vec{AF} + \vec{ED} + \vec{CB}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{VT} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{DB} + \vec{BC} = (\vec{AC} + \vec{DB}) + (\vec{BC} + \vec{CB}) = \vec{AC} + \vec{DB} = \vec{VP}$ (ĐPCM)

b) Biến đổi $\vec{VT} = \vec{AF} + \vec{FB} + \vec{CB} + \vec{BD} + \vec{ED} + \vec{DF}$

$$= (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}) = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{VP}$$

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{A'C}$.

c) Gọi O là tâm hình hộp. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$

Lời giải

a)

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Lại có $AA'C'C$ là hình chữ nhật nên: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'D} = (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{VP}$

c)

Gọi I và I' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}) = \vec{0}$

Mặt khác: $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI'} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a. Chứng minh rằng có một điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$.

b. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta đều có $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'})$. Suy ra điểm O nói trên là duy nhất.

Lời giải

a. Tồn tại điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$ (1).

Đặt $\vec{v} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD'}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB'})$

Ta có thể chọn O là tâm của hình hộp, tức là trung điểm của các đường chéo AC', BD', CA' và DB' . Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}; \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}; \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} = \vec{0}; \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB'} = \vec{0}$.

Do đó $\vec{v} = \vec{0}$.

b. Chứng minh $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'})$ (2)

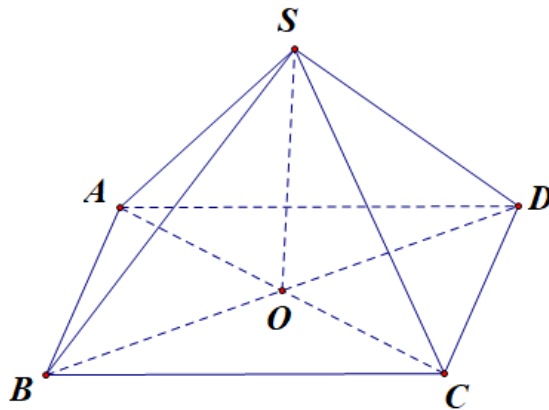
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left[(\vec{MO} + \vec{OA}) + (\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) + (\vec{MO} + \vec{OD}) \right. \\
&\quad \left. + (\vec{MO} + \vec{OA}') + (\vec{MO} + \vec{OB}') + (\vec{MO} + \vec{OC}') + (\vec{MO} + \vec{OD}') \right] \\
&= \frac{1}{8} \left[8\vec{MO} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA}' + \vec{OB}' + \vec{OC}' + \vec{OD}') \right] = \vec{MO}.
\end{aligned}$$

Chứng minh O là điểm duy nhất thỏa mãn (1). Vì (2) đúng với mọi điểm M nên khi (1) đúng với điểm O' thì (2) cho ta:

$$\vec{OO'} = \frac{1}{8} (\vec{O'A} + \vec{O'B} + \vec{O'C} + \vec{O'D} + \vec{O'A'} + \vec{O'B'} + \vec{O'C'} + \vec{O'D'})$$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Hãy phân tích các vectơ $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{SO}$.

Lời giải



Phân tích $\vec{SA}$:

$$\vec{SA} = \vec{SO} + \vec{OA} = \vec{SO} + \frac{1}{2} \vec{CA} = \vec{SO} - \frac{1}{2} \vec{AC}$$

Ta có

Phân tích $\vec{SB}$:

$$\vec{SB} = \vec{SO} + \vec{OB} = \vec{SO} + \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{SO} - \frac{1}{2} \vec{AC} + \vec{AB}$$

Ta có

Phân tích $\vec{SC}$:

$$\vec{SC} = \vec{SO} + \vec{OC} = \vec{SO} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

Ta có

Phân tích $\vec{SD}$:

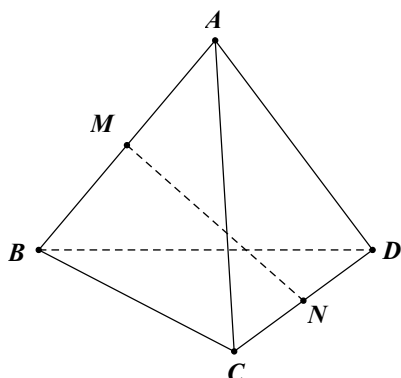
$$\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO} \rightarrow \vec{SD} = 2\vec{SO} - \vec{SB} = 2\vec{SO} - \left(\vec{SO} - \frac{1}{2} \vec{AC} + \vec{AB} \right)$$

Ta có

$$\vec{SD} = \vec{SO} + \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB})$$

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Chứng minh ba vector $\vec{MN}, \vec{BC}, \vec{AD}$ đồng phẳng.

Lời giải



Nhận xét:

Để chứng minh ba vector $\vec{MN}, \vec{BC}, \vec{AD}$ đồng phẳng ta đi kiểm tra xem có đẳng thức vector nào liên quan đến 3 vector trên hay không. Bằng trực quan hình học, ta thấy MN ở giữa BC và AD nên ta sẽ xuất phát từ vector $\vec{MN}$ theo hai hướng $\vec{BC}$ và $\vec{AD}$.

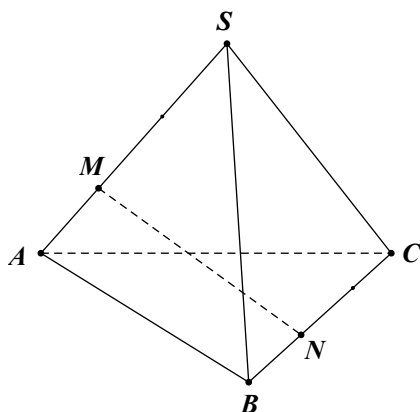
Ta có:
$$\begin{cases} \vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN} \\ \vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN} \end{cases}$$

$$2\vec{MN} = (\vec{MA} + \vec{MB}) + (\vec{BC} + \vec{AD}) + (\vec{DN} + \vec{CN})$$

Từ đó ta có:
$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AD})$$
, tức là $\vec{MN}, \vec{BC}, \vec{AD}$ đồng phẳng.

Câu 23. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Trên đoạn SA lấy M sao cho $\vec{MS} = -2\vec{MA}$ và trên đoạn BC lấy N sao cho $\vec{NB} = -\frac{1}{2}\vec{NC}$. Chứng minh rằng ba vector $\vec{AB}, \vec{MN}, \vec{SC}$ đồng phẳng.

Lời giải



Tương tự như ví dụ trên, chúng ta phân tích $\overrightarrow{MN}$ theo hai hướng

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1) \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} \quad (2) \end{cases}$$

Ta có:

Nhân cả hai vế của (1) với 2 rồi cộng với (2) ta được:

$$3\overrightarrow{MN} = (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MS}) + (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}) + (2\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN})$$

Từ giả thiết:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MS} = 0 \\ 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

a. Phân tích vector $\overrightarrow{SG}$ theo các vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

b. Gọi D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$. Phân tích vector $\overrightarrow{SD}$ theo ba vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA}) + (\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB}) + (\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SC}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \quad (1)$$

b) Ta có:
$$\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{DS} + (\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA}) + (\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SB}) + (\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SC}) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 4\overrightarrow{SD} \Rightarrow \overrightarrow{SD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$$

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{AC} = c$.

a. Phân tích các vector $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ theo các vector a, b, c .

b. Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Phân tích vector $\overrightarrow{AG'}$ theo ba vector a, b, c .

Lời giải

a)
$$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} = -a - b + c$$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} = a - b + c$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có trung tuyến qua đỉnh A của tam giác ABC và AN . Lấy điểm M trên AN sao cho $\frac{AM}{MN} = \frac{3}{7}$. Phân tích vector $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{MN} = \frac{3}{14}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \frac{3}{14}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{7}{10}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{20}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$, M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . P, Q là các điểm định bởi $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng.

Lời giải

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}); \overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = (1-k)\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MQ} = (1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = (1-k)(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + k(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = k(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \quad (\text{do } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \frac{2}{k}\overrightarrow{MP} + \frac{2}{k}\overrightarrow{MQ}$$

Câu 28. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Hai điểm M, N lần lượt chia đoạn AC và BD theo cùng tỉ số λ . Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. Hãy biểu thị vector $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết ta có } \overrightarrow{MA} = \lambda\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{NB} = \lambda\overrightarrow{ND}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}; \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} - \lambda\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \lambda\overrightarrow{MC} - \lambda\overrightarrow{CD} - \lambda\overrightarrow{DN} \\ &= (\overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{NB} - \lambda\overrightarrow{ND}) \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AB} - \frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

Hay:

Điều này chứng tỏ ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD ; P, Q lần lượt là các điểm chia đoạn AC và BD theo tỉ số $k \neq 1$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh tồn tại hai số thực h, k sao cho $\overrightarrow{MN} = h\overrightarrow{MP} + k\overrightarrow{MQ}$.

Đặt $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b, \overrightarrow{AD} = c$.

Ta có
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \frac{1}{2}(-a + b + c) \quad (1).$$

Từ giả thiết P chia đoạn thẳng AC theo tỉ số k ta có:
 $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{k}{k-1}b.$

Tương tự Q chia đoạn BD theo tỉ số k nên
$$\overrightarrow{BQ} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{BD} = \frac{k}{k-1}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{k}{k-1}(c - a).$$

Từ đó ta có

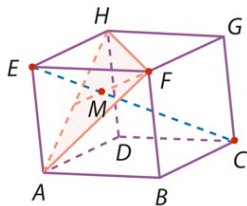
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}a + \frac{k}{k-1}b \\ \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}a + \frac{k}{k-1}(c - a) \end{aligned}$$

Suy ra
$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{k}{k-1}(-a + b + c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho ta
$$\overrightarrow{MN} = \frac{k}{2(k-1)}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ})$$
. Hệ thức này chứng tỏ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng nên bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Dạng 3. Tích vô hướng, góc của 2 vectơ

Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Điểm M là trọng tâm tam giác AFH (Hình).



a) Chứng minh rằng ba điểm E, M, C thẳng hàng.

b) Tính độ dài của $\overrightarrow{EM}$ trong trường hợp $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng có các cạnh $AB=5, AD=6, AE=10$ và $\angle ABC=120^\circ$.

Lời giải

a) Để chứng minh E, M, C thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{EC} = k\overrightarrow{EM}$ với k là một số thực nào đó.

Do M là trọng tâm của tam giác AFH nên ta có: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{EM}$

Mặt khác, theo quy tắc hình hộp thì: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC}.$

Suy ra $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EM}$. Vậy ba điểm E, M, C thẳng hàng.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 91.$$

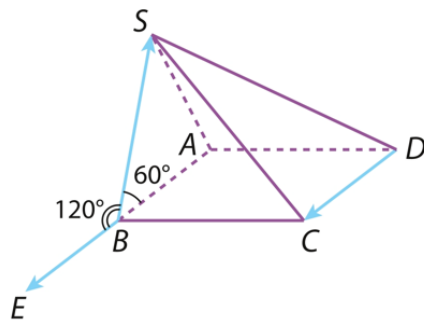
Khi $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng thì EAC là tam giác vuông tại A , do đó:

$$EC^2 = EA^2 + AC^2 = 100 + 91 = 191.$$

$$\text{Suy ra } EM = \frac{1}{3}\sqrt{191}.$$

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$.

Trên tia AB lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ (Hình). Ta có:

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \angle EBS = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Vậy $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$.

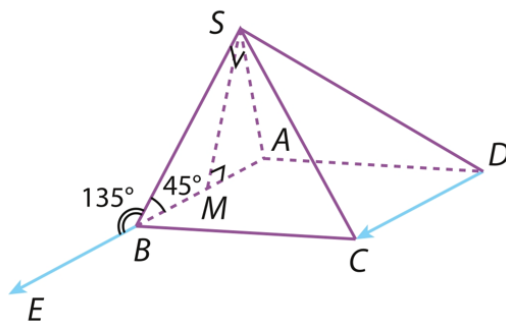
Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính:

a) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$;

b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$;

c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$.

Lời giải



a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

Gọi E là điểm thuộc tia AB sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$.

Ta có: $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \angle EBS$

$\triangle ASB$ vuông cân (tại S) nên $\angle BSA = 45^\circ$.

Suy ra $\angle EBS = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, hay $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 135^\circ$.

Mặt khác, do $AB = a$ nên $AS = BS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} &= |\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{BS}| \cdot \cos(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) \\ &= a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

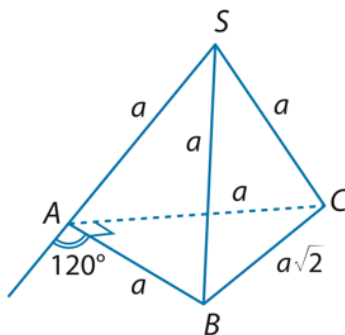
Vậy $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} = -\frac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Tam giác ASB cân tại S và M là trung điểm của cạnh AB nên $SM \perp AB$, hay $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$.
Suy ra $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải



Ta có:

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} \\ &= \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra SAB là tam giác đều và ABC là tam giác vuông cân tại A . Từ đó ta tính được:

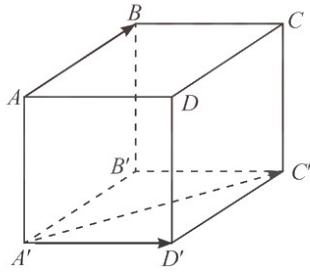
$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2} \text{ và } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$$

Suy ra

Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{DAB} = 90^\circ$.

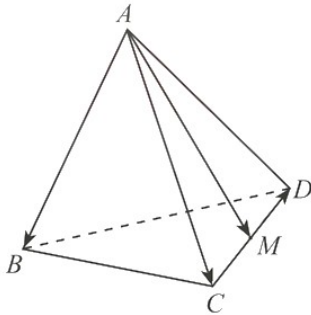
Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 45^\circ$.

Câu 35. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$$

Tương tự ta cũng có

Ta lại có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, suy ra:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

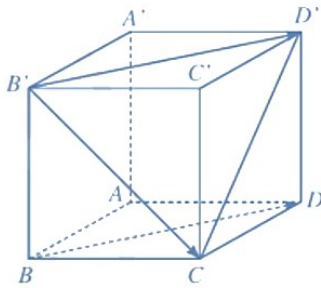
b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}$

Mà $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ là trung tuyến của các tam giác đều $\triangle ACD, \triangle BCD$ nên $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.
Lời giải



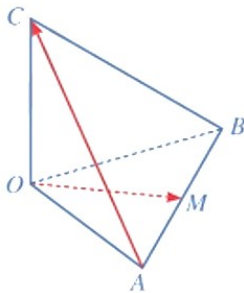
Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$. Do đó,

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}) = (\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'C}) = \angle B'CD'.$$

Vì $B'C = CD' = D'B'$ nên tam giác $B'CD'$ là tam giác đều. Suy ra $\angle B'CD' = 60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}) = 60^\circ$.

Câu 37. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.
Lời giải



Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Khi đó, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

$$\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{và} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$$

Mặt khác, do

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a}) = -\frac{1}{2}.$$

nên

Ta lại có: $|\vec{OM}| = OM = \frac{\sqrt{2}}{2}; |\vec{AC}| = AC = \sqrt{2}$

$$\cos(\vec{OM}, \vec{AC}) = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{AC}}{|\vec{OM}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$$

Do đó,

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$:

a. Chứng minh: $\vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{CA} \cdot \vec{DB} = 0$.

b. Suy ra rằng nếu 2 cặp cạnh đối trong tứ diện vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối thứ 3 cũng vuông góc với nhau.

Lời giải

a. Chứng minh: $\vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{CA} \cdot \vec{DB} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{CA} \cdot \vec{DB} &= \vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{CA} (\vec{AB} - \vec{AD}) \\ &= (\vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA}) + (\vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{CA} \cdot \vec{DA}) \\ &= \vec{AB} (\vec{DC} + \vec{CA}) + \vec{DA} (\vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{AD} \cdot \vec{DA} + \vec{DA} \cdot \vec{BA} = 0 \end{aligned}$$

b. Giả sử ta có $\vec{AB} \perp \vec{DC}, \vec{BC} \perp \vec{DA}$ ta suy ra $\vec{CA} \perp \vec{DB}$. Ta có, theo giả thiết:

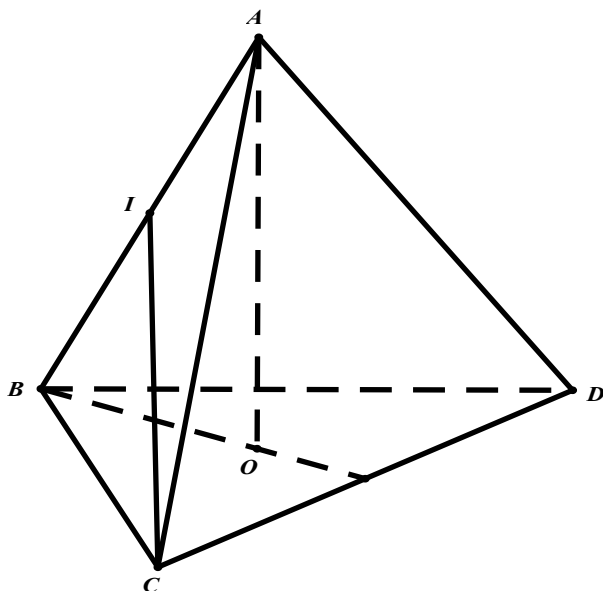
$$\vec{AB} \perp \vec{DC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0, \vec{BC} \perp \vec{DA} \Rightarrow \vec{BC} \cdot \vec{DA} = 0. \text{ Theo câu a. ta suy ra } \vec{CA} \cdot \vec{DB} = 0 \Rightarrow \vec{CA} \perp \vec{DB}.$$

Câu 39. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a .

a) Tính góc giữa hai vectơ $(\vec{AB}; \vec{BC})$.

b) Gọi I là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai vectơ $(\vec{CI}; \vec{AC})$.

Lời giải:



$$\cos(\vec{AB}; \vec{BC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{AB \cdot BC}$$

a) Sử dụng công thức tính góc giữa hai vectơ ta được:

$$= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{a^2} \quad (1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{BA} + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

Xét

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{BA} = AB \cdot BA \cdot \cos(\vec{AB}; \vec{BA}) = a \cdot a \cdot \cos 180^\circ = -a^2 \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \end{cases} \rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = -a^2 + \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

Mà

$$(1) \Leftrightarrow \cos(\vec{AB}; \vec{BC}) = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2} \rightarrow (\vec{AB}; \vec{BC}) = 120^\circ$$

$$\cos(\vec{CI}; \vec{AC}) = \frac{\vec{CI} \cdot \vec{AC}}{|\vec{CI}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\vec{CI} \cdot \vec{AC}}{CI \cdot AC}$$

b) Ta có

Tứ diện $ABCD$ đều cạnh a . CI là trung tuyến của tam giác đều ABC nên $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(\vec{CI}; \vec{AC}) = \frac{\vec{CI} \cdot \vec{AC}}{a^2 \sqrt{3}} \quad (2)$$

Suy ra

$$\vec{CI} \cdot \vec{AC} = \vec{CI} \cdot (\vec{AI} + \vec{IC}) = \vec{CI} \cdot \vec{AI} + \vec{CI} \cdot \vec{IC}$$

Ta có

$$\text{Do } \triangle ABC \text{ đều nên } CI \perp AI \Leftrightarrow \vec{CI} \cdot \vec{AI} = 0$$

$$\vec{CI} \cdot \vec{IC} = CI \cdot IC \cdot \cos(\vec{CI}; \vec{IC}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -\frac{3a^2}{4}$$

Đồng thời

$$\vec{CI} \cdot \vec{AC} = 0 - \frac{3a^2}{4} = -\frac{3a^2}{4}$$

Suy ra

$$(2) \Leftrightarrow \cos(\vec{CI}; \vec{AC}) = \frac{-\frac{3a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Thay vào (2) ta được

$$(\vec{CI}; \vec{AC}) = 150^\circ$$

Vậy

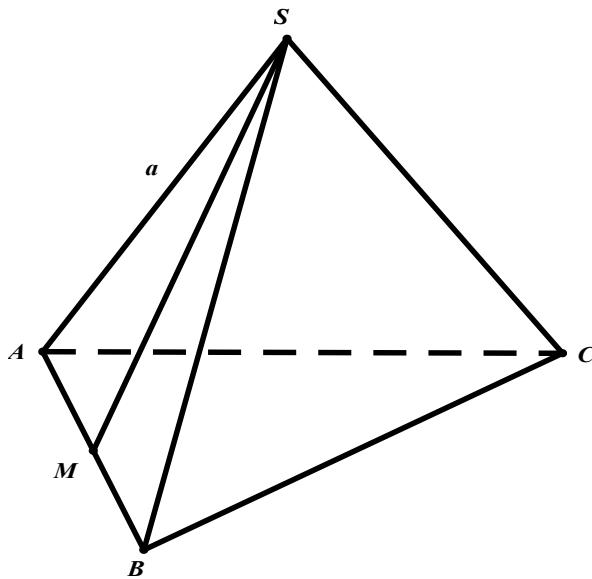
$$\text{suy ra } (\vec{CI}; \vec{AC}) = 150^\circ$$

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB .

a) Biểu diễn các vectơ $\vec{SM}$ và $\vec{BC}$ theo các vectơ $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$.

b) Tính $(\vec{SM}; \vec{BC})$.

Lời giải:



a) Sử dụng quy tắc trung điểm và quy tắc trừ hai vectơ ta được

$$\begin{cases} \vec{SM} = \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SB}) \\ \vec{BC} = \vec{SC} - \vec{SB} \end{cases}$$

$$\cos(\vec{SM}; \vec{BC}) = \frac{\vec{SM} \cdot \vec{BC}}{|\vec{SM}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\vec{SM} \cdot \vec{BC}}{SM \cdot BC} \quad (1)$$

b)

$$\begin{cases} \vec{SA} \cdot \vec{SB} = 0 \\ \vec{SA} \cdot \vec{SC} = 0 \\ \vec{SB} \cdot \vec{SC} = 0 \end{cases}$$

Mà SA, SB, SC đôi một vuông góc nên

Tam giác SAB và SBC vuông tại S nên theo định lý Pitago ta được $AB = BC = a\sqrt{2}$

$$\text{suy ra } SM = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

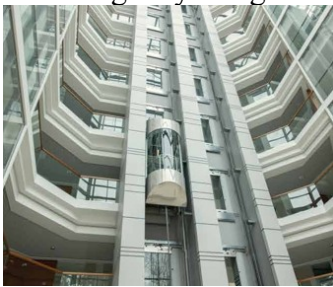
$$\begin{aligned} \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB}) \\ &= -\frac{1}{2} SB^2 \\ &= -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{BC}) = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \quad \text{suy ra } (\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$$

Thay vào (1) ta được

Dạng 4. Ứng dụng thực tế

- Câu 41.** Một toà nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của toà nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



Lời giải

Gọi vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 15 lên tầng 22 của toà nhà là $\vec{a}$. Gọi vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 22 lên tầng 29 của toà nhà là $\vec{b}$.

Vì hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều dịch chuyển từ tầng thấp lên tầng cao nên hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng hướng (1).

Độ dài vector $\vec{a}$ là: $|\vec{a}|=7$, độ dài vector $\vec{b}$ là: $|\vec{b}|=7$ nên $|\vec{a}|=|\vec{b}|=7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\vec{a} = \vec{b}$. Vậy các vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau.

- Câu 42.** Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy giải thích vì sao $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h máy bay giữ nguyên hướng bay nên vector $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng hướng. Do đó, $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó (1).

Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của của chiếc máy bay khi đạt 900 km/h và 920 km/h .

Suy ra $v_1 = 900 (\text{km/h}), v_2 = 920 (\text{km/h})$

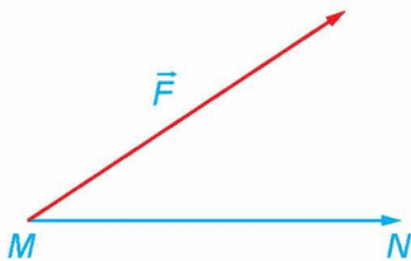
Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình

$$\left| \frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} \right| = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{900^2}{920^2} = \frac{2025}{2116} \Rightarrow \left| \vec{F}_1 \right| = \frac{2025}{2116} \left| \vec{F}_2 \right| \quad (2)$$

$$\left| \vec{F}_1 \right| = \frac{2025}{2116} \left| \vec{F}_2 \right| \Rightarrow k = \frac{2025}{2116} \approx 0,96$$

Từ (1) và (2) ta có:

Câu 43. Như đã biết, nếu có một lực F tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = F \cdot \vec{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun. Do đó, nếu dùng một lực F có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao.



Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?

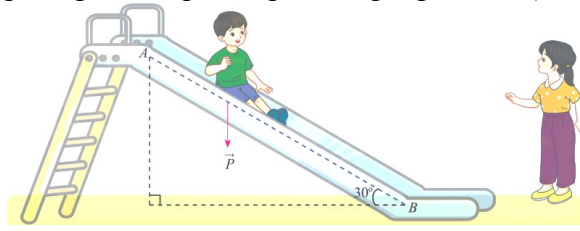
Lời giải

$$\text{Ta có: } A = F \cdot \vec{MN} = |F| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(F, \vec{MN})$$

Vì lực F có độ lớn không đổi và vật di chuyển một quãng đường không đổi nên A lớn nhất khi $\cos(F, \vec{MN})$ lớn nhất. Do đó, $\cos(F, \vec{MN}) = 1 \Leftrightarrow (F, \vec{MN}) = 0^\circ$. Khi đó, lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Vậy công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật.

Khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng, ta nên kéo (hoặc đẩy) cùng hướng với chuyển động của vật.

- Câu 44.** Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài $3,5 \text{ m}$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình).



- a)** Tính độ lớn của trọng lực $P = mg$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do g có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

- b)** Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực F có độ dịch chuyển d được tính bởi công thức $A = F \cdot d$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực P khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

Lời giải

$$P = mg \cos 60^\circ = 25 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} = 122,5 \text{ N}$$

- a)** Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là:

- b)** Công sinh bởi trọng lực P khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là:

$$A = F \cdot d = Pd \cos 60^\circ = 122,5 \cdot 3,5 \cdot \frac{1}{2} = 214,375 \text{ J}$$

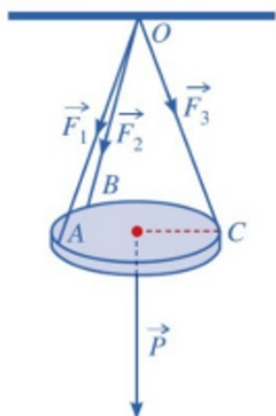
- Câu 45.** Trọng lực P là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $P = mg$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn g là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bưởi có khối lượng $2,5 \text{ kg}$.



Lời giải

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên quả bưởi: $P = mg = 2,5 \cdot 9,8 = 24,5 \text{ N}$

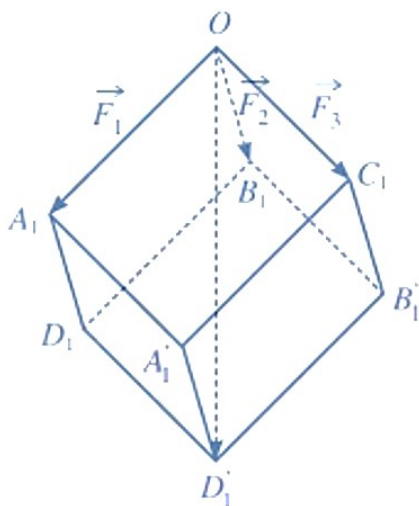
- Câu 46.** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N) (Hình).



Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 , sao cho $OA_1D_1B_1, C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (Hình).



Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1}$

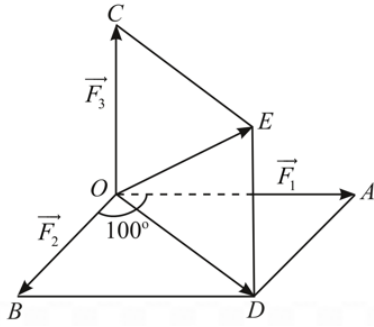
Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 15(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1, C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$, ở đó P là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là: $|\overrightarrow{P}| = |\overrightarrow{OD_1}| = 15\sqrt{3}(N)$.

Câu 47. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N . Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N . Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Lời giải



Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $25\text{ N}, 12\text{ N}, 4\text{ N}$.

Vẽ $\vec{OA} = \vec{F}_1, \vec{OB} = \vec{F}_2, \vec{OC} = \vec{F}_3$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \angle OBD = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } OE &= \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ} \\ &= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092. \end{aligned}$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26\text{ N}$.

Câu 48. Theo định luật II Newton. Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$F = ma$ trong đó a là vectơ gia tốc (m/s^2), F là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, $m(kg)$ là khối lượng của vật.



Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5\text{ kg}$ một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Lời giải

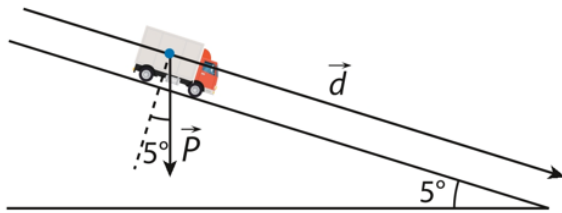
Ta có $F = ma$, suy ra $|F| = m|a| = 0,5 \cdot 50 = 25(N)$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5\text{ kg}$ một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là 25 N .

Câu 49. Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực F tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = F \cdot d$, trong đó d là vector biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|d|$ là m) khi chịu tác dụng của lực F .

Một chiếc xe có khối lượng $1,5$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực P khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực P được xác định bởi công thức $P = mg$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và g là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8\text{ m/s}^2$.

Lời giải



Ta có $1,5\text{ tấn} = 1500\text{ kg}$.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|P| = m \cdot g = 1500 \cdot 9,8 = 14700\text{ (N)}$.

Vector d biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|d| = 30\text{ (m)}$ và $(P, d) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực P khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là:

$$A = P \cdot d = |P| \cdot |d| \cdot \cos(P, d) = 14700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38436\text{ (J)}$$