

Bài 2. Nhị thức Newton

Từ khoá: Nhị thức Newton; Tam giác Pascal.

Ta đã có công thức

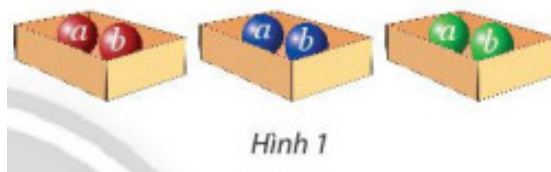
$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

trong trường hợp $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Công thức này có đúng với mọi số tự nhiên n không? Làm thế nào để kiểm tra?

1. Công thức nhị thức Newton

Có ba hộp, mỗi hộp đựng hai quả cầu được dán nhãn a và b (xem Hình 1). Lấy từ mỗi hộp một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để trong ba quả cầu lấy ra:



- có 3 quả cầu dán nhãn b ?
- có 2 quả cầu dán nhãn b ?
- có 1 quả cầu dán nhãn b ?
- không có quả cầu nào dán nhãn b ?

Bằng lập luận tương tự như , ta có thể sử dụng tổ hợp để tìm các hệ số của công thức khai triển

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Thật vậy, ta có khai triển

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$= (aaa + ab + ba + bb)(a+b)$$

$$= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

$$aaa + (aab + aba + baa) + (abb + bab + bba)$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Trong khai triển trên, đề nhân được số hạng b^3 , ta lấy số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ nhất nhân với số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ hai, rồi nhân với số hạng b trong thừa số $(a+b)$ thứ ba, Do đó, hệ số của b^3 bằng số cách chọn ba chữ b từ ba chữ b có trong ba thừa số $(a+b)$, tức bằng $C_3^3=1$.

Tiếp theo, xét số hạng $3ab^2$ hay tổng $abb+bab+bba$. Để nhận được mỗi số hạng của tổng này, ta lấy tích của hai số hạng b từ hai thừa số $(a+b)$, rồi nhân với số hạng a của thừa số $(a+b)$ còn lại. Do đó, hệ số của ab^2 bằng số cách chọn hai chữ b từ ba chữ b có trong ba thừa số $(a+b)$, tức bằng $C_3^2=3$.

Lập luận tương tự, ta được hệ số của a^2b bằng $C_3^1=3$, hệ số của a^3 bằng $C_3^0=1$.

Từ đó, ta nhận được

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3.$$

Một cách tổng quát, với số tự nhiên bất kì $n \geq 1$, ta có thể mở rộng lập luận ở trên để tìm các hệ số trong khai triển biểu thức

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ thừa số}}.$$

Khai triển biểu thức này, ta nhận được các số hạng dạng $a_k a^{n-k} b^k$ với a_k là hệ số $k=0, 1, \dots, n$. Hệ số a_k bằng số cách chọn k chữ b từ n chữ b có trong n thừa số $(a+b)$.

Nghĩa là, $a_k = C_n^k (0 \leq k \leq n)$.

Từ đó, ta nhận được kết quả



Với mỗi số tự nhiên n , ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Chú ý

a) Trong cách viết về phải của (1), số hạng $C_n^k a^{n-k} b^k$ ($0 \leq k \leq n$) được gọi là **số hạng**

tổng quát.

b) Về phải của (1) gồm $n+1$ số hạng. Đi qua các số hạng từ trái sang phải, số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần, nhưng tổng của chúng không đổi và bằng n (quy ước

$$a^0 = b^0 = 1).$$

Ví dụ 1

Hãy khai trên $(x+2)^6$

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$$(x+2)^6 = C_6^0 \cdot x^6 + C_6^1 \cdot x^5 \cdot 2 + C_6^2 \cdot x^4 \cdot 2^2 + C_6^3 \cdot x^3 \cdot 2^3 + C_6^4 \cdot x^2 \cdot 2^4 + C_6^5 \cdot x \cdot 2^5 + C_6^6 \cdot 2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$$



Hãy khai triển:

a) $(x-y)^6;$

b) $(1+x)^7.$

2. Tam giác Pascal



Từ các công thức khai triển:

$$(a+b)^0 = 1;$$

$$(a+b)^1 = a+b;$$

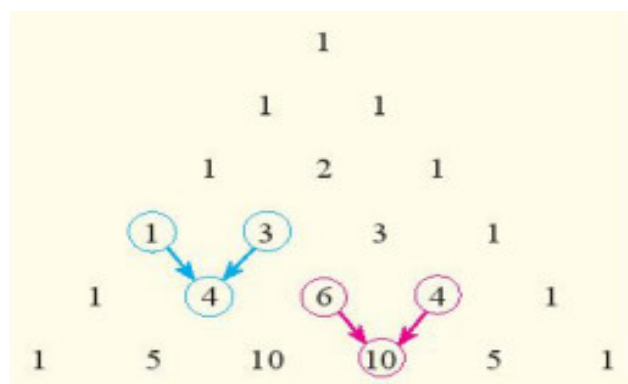
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

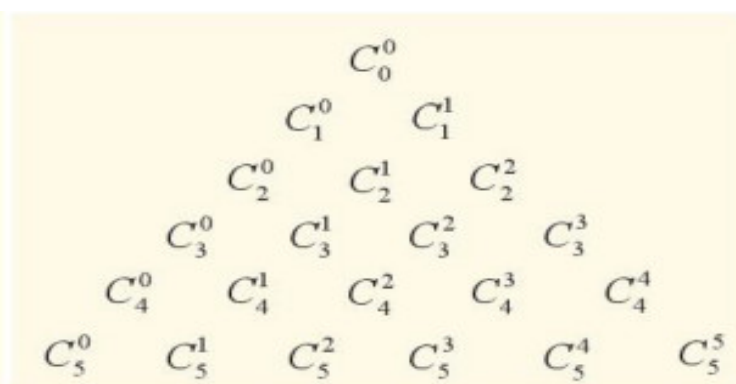
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5;$$

các hệ số được viết thành bảng số như Hình 2 sau đây. Nếu sử dụng kí hiệu tổ hợp thì nhận được bảng như Hình 3.



Hình 2



Hình 3

Từ các đẳng thức như

$$C_3^0 = C_3^3 = 1,$$

$$C_4^1 = C_4^3 = 4,$$

$$C_3^0 + C_3^1 = C_4^1,$$

$$C_4^2 + C_4^3 = C_5^3,$$

có thể dự đoán rằng, với mỗi $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n). \quad (2)$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \quad (1 \leq k \leq n). \quad (3)$$

Hãy chứng minh các công thức trên.

Gợi ý: Sử dụng công thức $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, từ bảng số, $0 \leq k \leq$

3. Vận dụng công thức nhị thức Newton

Công thức nhị thức Newton với các dạng mở rộng của nó có nhiều ứng dụng quan trọng trong toán học. Dưới đây, ta xét thêm vài ví dụ đơn giản

Ví dụ 3

Xác định hệ số của $x^4 y^6$ trong khai triển $(2y - y)^{10}$

Giải

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(2y - y)^{10} &= C_{10}^0 (2x)^{10} + C_{10}^1 (2x)^9 (-y) + \dots + C_{10}^k (2x)^{10-k} + \dots + C_{10}^{10} (-y)^{10} \\ &= 2^{10} C_{10}^0 (x)^{10} - 2^9 C_{10}^1 x^9 y + \dots + (-1)^k 2^{10-k} C_{10}^k x^{10-k} y^k + \dots + C_{10}^{10} y^{10}\end{aligned}$$

Số hạng chứa $x^4 y^6$ ứng với giá trị $k = 6$. Do đó, hệ số của $x^4 y^6$ là

$$(-1)^6 \cdot 2^4 \cdot C_{10}^6 = 3360$$

Ví dụ 4

Cho a là một số thực dương, Biết rằng trong khai triển $(3x + a)^8$, hệ số của x là 70. Hãy tìm giá trị của a .

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$(3x + a)^8 = C_8^0 (3x)^8 + C_8^1 (3x)^7 \cdot a + \dots + C_8^k (3x)^{8-k} \cdot a^k + \dots + C_8^8 (a)^8$$

Số hạng chứa x^4 ứng với giá trị $k = 4$. Hệ số của số hạng này là $3^4 \cdot C_8^4 \cdot a^4 = 70 \cdot 3^4 \cdot a^4$

Theo giả thiết, ta có $70 \cdot 3^4 \cdot a^4 = 70$ hay $a^4 = \frac{1}{3^4}$, suy ra $a = \frac{1}{3}$ (vì $a > 0$)

Vậy $a = \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm

Ví dụ 5

Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Giải

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$(x+1)^n = C_n^0(x)^n + C_n^1(x)^{n-1} + C_n^2(x)^{n-2} + \dots + C_n^{n-1}x + C_n^n$$

Thay $x = 1$ vào công thức trên, ta nhận được

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Đây là điều phải chứng minh

Nhận xét: Từ công thức khai triển

$$(x+a)^n = C_n^0(x)^n + C_n^1(x)^{n-1}a + C_n^2(x)^{n-2}a^2 + \dots + C_n^{n-1}xa^{n-1} + C_n^na^n$$

với mỗi cách chọn giá trị của x và a , ta nhận được một hệ thức liên quan đến các hệ số tổ hợp $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$

Ví dụ 6

Cho tập hợp $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ có n phần tử. Tập hợp A có bao nhiêu tập con?

Giải

Mỗi tập con của A có k ($1 \leq k \leq n$) phần tử là một tổ hợp chập k của A . Do đó, số tập con như vậy bằng C_n^k . Mặt khác, có một tập con của A không có phần tử nào (tập rỗng), tức có $C_n^0 = 1$ tập con như vậy. Do đó, số tập con của A bằng

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Vậy tập hợp 4 có 2^n tập con.

 3 Xác định hệ số của x^2 trong khai triển $(3x+2)^9$

 4 Biết rằng trong khai triển $(x+a)^6$ với a là một số thực, hệ số của x^6 là 60. Tìm giá trị của a .

 5 Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$



Trong hộp A có 10 quả cầu được đánh số từ 1 đến 10. Người ta lấy một số quả cầu từ hộp A rồi cho vào hộp B. Có tất cả bao nhiêu cách lấy, tính cả trường hợp lấy không quả (tức không lấy quả nào)?

BÀI TẬP

1. Khai triển biểu thức:

a) $(x-2y)^6 b)(3x-1)^5$

2. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức $(2-x)^{12}$

3. Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của $(ax+1)^6$ hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2 . Tìm giá trị của a .

4. Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1+3x)^n$ là 90. Tìm giá trị của n

5. Chứng minh công thức nhị thức Newton (công thức (1), trang 35) bằng phương pháp quy nạp toán học.

6. Biết rằng $(3x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7$. Hãy tính

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

b) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$

7. Một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

8. Từ 15 bút chì màu có màu khác nhau đôi một,

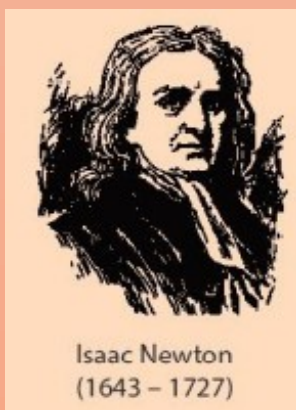
a) Có bao nhiêu cách chọn ra một số bút chì màu, tính cả trường hợp không chọn cái nào?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu?

Bạn có biết?

Tên gọi Tam giác Pascal và Nhị thức Newton

Tam giác Pascal được đặt theo tên của nhà toán học, nhà vật lý học, nhà triết học tài ba người Pháp Blaise Pascal, sau công trình của ông công bố vào năm 1653, Thực ra, tam giác này cùng với công thức khai triển biểu thức $(a+b)^n$ với n là số tự nhiên đã được nghiên cứu trước đó bởi các nhà toán học Ấn Độ và Ba Tư ở thế kỉ X, hay bởi các nhà toán học Trung Hoa ở thế kỉ XI. Pascal có công lớn trong việc nghiên cứu một cách hệ thống các tính chất của tam giác này, cũng như phát hiện ra các mối liên hệ giữa chúng với lý thuyết xác suất.



Công thức nhị thức Newton được đặt theo tên nhà toán học, nhà vật lý học vĩ đại người Anh Isaac Newton. Như trên đã nói, thực ra công thức này (trường hợp số mũ là số tự nhiên) đã được biết đến trước thời Newton hàng thế kỉ. Newton là người có công mở rộng công thức cho trường hợp số mũ n là số thực bất kì. Ông khám phá ra công thức đó vào năm 1664, nhưng đến năm 1676 mới công bố

Công thức nhị thức Newton có nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều ngành toán học khác nhau như đại số, giải tích, lý thuyết xác suất,

(Theo Britannica)