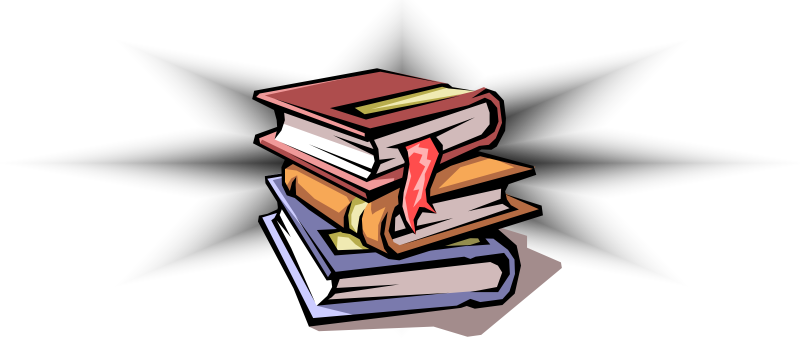
Tailieumontoan.com

Sưu tầm và tổng hợp



TUYỂN TẬP ĐỀ HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 NĂM 2019-2020

Thanh Hóa, ngày 6 tháng 5 năm 2020

Đề số 1: ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN TRIỆU PHONG NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1: *(4,0 điểm)*

1) Cho $A = n^4 - 10n^2 + 9$

Với mọi số nguyên n lẻ , chứng minh A chia hết cho 384

2) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn: $\dfrac{5}{a + b\sqrt{2}} - \dfrac{4}{a - b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $B = \dfrac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \cdot \left(\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \dfrac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}\right)$

a) Rút gọn B.

b) So sánh B và $\sqrt{B}$.

Câu 3: *(6,0 điểm)*

1) Biết $x^2 + y^2 = x + y$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $C = x - y$

2) Cho biểu thức $D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}}\right)$

Chứng minh D là nghiệm của phương trình $D^2 - 14D + 44 = 0$

3) Cho x, y, z là ba số dương . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a .Gọi I là trung điểm của cạnh AB . Điểm H thuộc cạnh DI sao cho AH vuông góc với DI

1) Chứng minh rằng ΔCHD cân

2) Tính diện tích ΔCHD.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Xác định M nằm trong tam giác ABC sao cho tích các khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác đạt giá trị lớn nhất.

……………….HẾT…………….

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

Câu 1: 1) Ta có $A = n^4 - 10n^2 + 9 = n^4 - n^2 - 9n^2 + 9 = n^2(n^2 - 1) - 9(n^2 - 9)$

$= \left(n^2 - 1\right)\left(n^2 - 9\right) = \left(n - 1\right)\left(n + 1\right)\left(n - 3\right)\left(n + 3\right)$

Theo giả thiết n số nguyên lẻ , nên đặt: $n = 2k+1 (k \in N)$, ta viết lại:

$A = (2k+2).2k.(2k+4).(2k-2) = 16(k+1).k(k+2).(k-1)$

Ta nhận thấy rằng: $(k+1), k, (k+2), (k-1)$ là 4 số nguyên liên tiếp nên sẽ chia hết cho $2.3.4 = 24$

$\Rightarrow A \vdots (16.24) = 384$ Với mọi số nguyên n lẻ.

2) ĐK: $a \in Z$, $b \in Z$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $a \neq b\sqrt{2}$

Ta có: $\dfrac{5}{a+b\sqrt{2}} - \dfrac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$, với

$$\Leftrightarrow \frac{5\left(a-b\sqrt{2}\right)-4\left(a+b\sqrt{2}\right)}{a^2-2b^2} + 18\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow a - 9b\sqrt{2} = \left(3-18\sqrt{2}\right)\left(a^2-2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a - 9b\sqrt{2} = \left(3a^2-6b^2\right) - 18\sqrt{2}\left(a^2-2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(18a^2-36b^2-9b\right)\sqrt{2} = 3a^2-6b^2-a$$

Nếu $18a^2-36b^2-9b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{3a^2-6b^2-a}{18a^2-36b^2-9b}$

Vì a,b nguyên nên $\dfrac{3a^2-6b^2-a}{18a^2-36b^2-9b} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$

$\Rightarrow$ Vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ

Vì thế ta có:

$$18a^2-36b^2-9b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 18a^2-36b^2-9b=0 \\ 3a^2-6b^2-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-6b^2 = \dfrac{3}{2}b \\ 3a^2-6b^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2}b \\ 3a^2-6b^2 = a \end{cases}$$

thay $a = \dfrac{3b}{2}$ vào $3a^2 - 6b^2 - a = 0$, ta có:

$$3.\frac{9}{4}b^2 - 6b^2 - \frac{3}{2}b = 0 \Leftrightarrow 27b^2 - 24b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow 3b(b-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \quad (loai) \\ b = 2 \quad (thoa\ man) \end{cases}.$$

Khi $b = 2 \Rightarrow a = 3$ $(thoa\ man)$

Vậy $a=3$, $b=2$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 2:

a) $x, y > 0, x \neq y$.

Ta có : $B=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}.\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\right)$

$$B=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$$

$$B=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\frac{x+2\sqrt{xy}+y-x-\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$B=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}.\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$B=\frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$$

b) Vì $x,y>0\Rightarrow\sqrt{xy}>0$ và $x-\sqrt{xy}+y=\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2+\frac{3y}{4}>0\ ,\forall x,y>0$

Nên $B>0$ với mọi x,y thỏa mãn điều kiện đã cho

Lại có: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow x+y-\sqrt{xy}\geq\sqrt{xy}$

$$\Rightarrow\frac{1}{x+y-\sqrt{xy}}\leq\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{xy}}{x+y-\sqrt{xy}}\leq\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=1$$

Dấu " = " không xảy ra vì $x\neq y$

Vậy $0<B<1$, nên $\sqrt{B}>B$

Câu 3:

1) Ta có:

$$C=x-y=x+y-2y$$
$$=x^2+y^2-2y$$
$$=x^2+\left(y-1\right)^2-1\geq -1$$

Dấu " = " xảy ra $x=0\ ,\ y=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $C=-1\Leftrightarrow x=0\,;y=-1$

Lại có:

$C = x - y = 2x - (x + y)$

$= 2x - \left(x^2 + y^2\right)$

$= -\left(x^2 - 2x + 1\right) - y^2 + 1$

$= -\left(x - 1\right)^2 - y^2 + 1 \le 1$

Dấu " = " xảy ra $x = 1,\ y = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của $C = 1 \Leftrightarrow x = 1; y = 0$

2) Ta có: $D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{14 - 5\sqrt{3}}\right)$

$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$

$D = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} + \sqrt{3} + 1 + 5 - \sqrt{3}$

$D - 6 = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$, với $\left(D - 6 < 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(D - 6\right)^2 = 8 - 2\sqrt{16 - 10 + 2\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \left(D - 6\right)^2 = 8 - 2\left(\sqrt{5} + 1\right) = 6 - 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \left(D - 6\right)^2 = \left(\sqrt{5} - 1\right)^2$

$\Rightarrow D - 6 = 1 - \sqrt{5}\ hay\ D = 7 - \sqrt{5}$

Ta có: $D^2 - 14D + 44 = 0$

$\Leftrightarrow \left(7 - \sqrt{5}\right)^2 - 14\left(7 - \sqrt{5}\right) + 44 = 0$

$\Leftrightarrow 54 - 14\sqrt{5} - 98 + 14\sqrt{5} + 44 = 0$

Vậy bài toán được chứng minh

3) Ta có: $x^2 + yz \ge 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2 + yz} \le \dfrac{1}{2x\sqrt{yz}} = \dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}$

Tương tự, ta cũng có: $\dfrac{1}{y^2 + zx} \le \dfrac{1}{2y\sqrt{zx}} = \dfrac{\sqrt{zx}}{2xyz}$; $\dfrac{1}{z^2 + xy} \le \dfrac{1}{2z\sqrt{xy}} = \dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz}$

Mà: $\sqrt{yz} \le \dfrac{y + z}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz} \le \dfrac{\frac{y + z}{2}}{2xyz} = \dfrac{y + z}{4xyz}$

Tương tự, ta có: $\dfrac{\sqrt{zx}}{2xyz} \le \dfrac{z + x}{4xyz}$; $\dfrac{\sqrt{xy}}{2xyz} \le \dfrac{x + y}{4xyz}$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{y+z}{4xyz}+\frac{z+x}{4xyz}+\frac{x+y}{4xyz}=\frac{1}{4xyz}(2x+2y+2z)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\ (dpcm)$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Câu 4 :

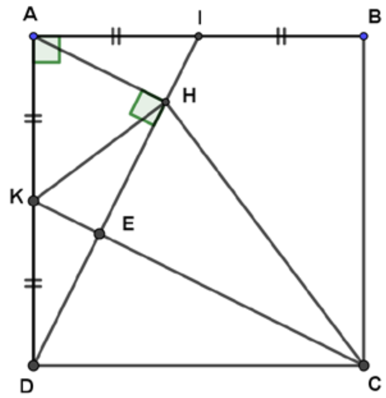
1) Gọi K trung điểm của AD ; E là giao điểm của CK và DI .

Xét ΔADI và ΔDCK có:

$\widehat{CDK}=\widehat{DAI}=90^0\ (gt)$; $CD=AD\ (gt)$; $AI=DK\left(=\frac{AB}{2}=\frac{CD}{2}\right)$

Suy ra: $\Delta ADI=\Delta DCK$ (c.g.c)

$\Rightarrow\widehat{ADI}=\widehat{DCK}$; mà $\widehat{DCK}+\widehat{DKC}=90^0$



Suy ra: $\widehat{ADI}+\widehat{DKC}=90^0$

$\Rightarrow KC\perp DI$ (1)

- Lại có: HK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AD

$\Rightarrow HK=KD$ (2)

Từ (1) va (2) suy ra : KC là đường trung trực của DH

$\Rightarrow CH=CD\Rightarrow\Delta CHD$ cân tại C

2) Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ADI , ta tính được : $DI=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADI, đường cao AH ta có:

$$DH.DI=AD^2\Rightarrow DH=\frac{AD^2}{DI}=\frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$AH.DI=AI.AD\Rightarrow AH=\frac{AI.AD}{DI}=\frac{a^2}{2}:\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a}{\sqrt{5}}$$

Mà EK là đường trung bình của ΔAHD $\Rightarrow EK=\frac{1}{2}AH=\frac{a}{2\sqrt{5}}$

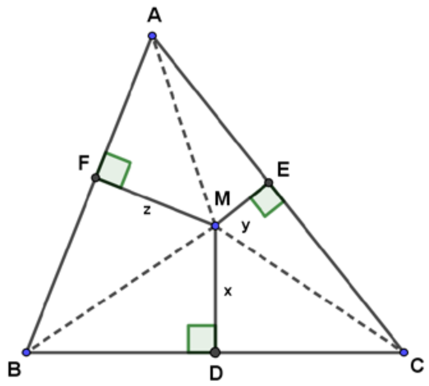
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DKC, đường cao DE ta có:

$$KE.CK=KD^2\Rightarrow CK=\frac{KD^2}{KE}=\frac{a^2}{4}:\frac{a}{2\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra: $CE = CK - KE = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Diện tích ΔCHD là: $S_{CHD} = \frac{1}{2}CE.DH = \frac{1}{2}.\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a^2}{5}$ (đvdt)

Câu 5:



Đặt $AB = c, BC = a$, $AC = b$.

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB và đặt MD, ME, MF lần lượt là x, y, z .

Ta có: $S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC} = \frac{xa + yb + zc}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xa.yb.zc}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{2S_{ABC}}{3\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow xyz \leq \frac{8S^3{}_{ABC}}{27abc}$ (luôn là hằng số không đổi)

Vậy tích các khoảng cách từ M đến 3 cạnh của ΔABC đạt GTLN bằng $\frac{8S^3{}_{ABC}}{27abc}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow xa = by = cz \Leftrightarrow S_{MAB} = S_{MBC} = S_{MAC}$

Hay : M là trọng tâm của ΔABC

ĐỀ SỐ 2: CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN CHƯƠNG MỸ VÒNG 2 - NĂM 2020

Câu 1: *(3,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng: $\left(2019^{2019} + 2021^{2020}\right) \vdots 2020$.

2. Tìm các số tự nhiên n để $n + 24$ và $n - 65$ là số chính phương.

Câu 2: *(4,0 điểm)* Cho $H = \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} - y} - \frac{y}{x + \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{xy}{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{xy} - \sqrt{y}}$.

Tìm x, y nguyên để $H = 20$.

Câu 3: *(3,0 điểm)*

1. Cho các số a,b,c,x,y,z dương thỏa mãn: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}=1$ và $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+2019$.

2. Giải phương trình: $2x^2+16x-6=4\sqrt{x(x+8)}$

Câu 4: *(4,0 điểm)*

1. Tìm a,b để $f(x)=x^4+2x^3-x^2+x(a-4)+b+2$ viết thành bình phương của một đa thức.

2. Cho a,b là các số dương thỏa mãn $(1+a)(1+b)=4,5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{a^4+1}+\sqrt{b^4+1}$.

3. Cho a,b,c dương sao cho $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=1$. Chứng minh: $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}\le 1$.

Câu 5: *(7,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$, đường cao AH (H thuộc BC). Kẻ HD,HE lần lượt vuông góc với AB,AC (D thuộc AB, E thuộc AC). Đường thẳng qua A vuông góc với DE cắt BC tại I.

a) Chứng minh: I là trung điểm của BC.

b) Kẻ đường thẳng vuông góc với AI tại A cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh AB là tia phân giác của góc KAH.

c) Chứng minh: $AD.BD+AE.EC\le AI^2$.

2. Cho tam giác ABC, kẻ các đường phân giác trong AD,BE,CF của tam giác ABC.

a) Chứng minh $AB.BD-BD.DC=AD^2$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}<\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}$.

HƯỚNG DẪN ĐỀ SỐ 2

Câu 1: 1. Ta có: $\left(2019^{2019}+1\right)+\left(2021^{2020}-1\right)=2019^{2019}+2021^{2020}$

Mà $2019^{2019}+1=(2019+1)\left(2019^{2018}-2019^{2017}+2019^{2016}-\ldots-1\right)$ (1)

$2021^{2020}-1=(2021-1)\left(2021^{2019}+2021^{2018}+2021^{2017}+\ldots+1\right)$ (2)

Cộng vế (1) và (2) ta được:

$2020.\left[\left(2019^{2018}-2019^{2017}+2019^{2016}-\ldots-1\right)+\left(2021^{2019}+2021^{2018}+2021^{2017}+\ldots+1\right)\right]\vdots 2020$

.

2. Đặt $\begin{cases} n+24=k^2 \\ n-65=h^2 \end{cases}$

$\Rightarrow k^2-24=h^2+65$.

Với $k,h>0$ ta có: $(k-h)(k+h)=89=1.89=89.1$

+) TH1: $\begin{cases} k-h=1 \\ k+h=89 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=45 \\ h=44 \end{cases}$

Khi $k=45 \Rightarrow n+24=45^2 \Rightarrow n=2001$

+) TH2: $\begin{cases} k-h=89 \\ k+h=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=45 \\ h=-44(KTM) \end{cases}$

Vậy với $n=2001$ thì $n+24$ và $n-65$ là số chính phương.

Câu 2: ĐKXĐ: $x,y\neq 1; x,y>0$.

Ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{xy}-y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)$

$$x+\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$\sqrt{x}+1-\sqrt{xy}-\sqrt{y}=\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{y}\right)$$

Khi đó $H=\dfrac{x\left(\sqrt{x}+1\right)-y\left(1-\sqrt{y}\right)-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$H=\frac{x\sqrt{x}+x-y+y\sqrt{y}-xy\sqrt{x}-xy\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left[\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right]}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy}{\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{y}+\sqrt{xy}\right)+y\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right)+y\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y\left(1-\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y-y\sqrt{x}}{1-\sqrt{y}}$$

$$H=\frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{1-\sqrt{y}}$$

$$H=\sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}$$

Ta có $H=20\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}=20\Rightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+1\right)-\left(\sqrt{y}+1\right)=19$

$\Rightarrow\left(\sqrt{y}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=19=19.1=1.19=(-1).(-19)=(-19).(-1)$

TH1: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=1\\ \sqrt{x}-1=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=400\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=19\\ \sqrt{x}-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=324\\ x=4\end{cases}$

TH3: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=-1\\ \sqrt{x}-1=-19\end{cases}\Rightarrow$ loại

TH4: $\begin{cases}\sqrt{y}+1=-19\\ \sqrt{x}-1=-1\end{cases}\Rightarrow$ loại

Vậy với $x=400; y=0$ hoặc $x=4, y=324$ thì $H=20$.

Câu 3: 1. Từ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}=1\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{ab}}+\frac{2\sqrt{yz}}{\sqrt{bc}}+\frac{2\sqrt{xz}}{\sqrt{ac}}=1$

$$\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+2.\frac{\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}}{\sqrt{abc}}=1 \qquad (1)$$

Mà $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}}=0\Rightarrow\frac{\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}}{\sqrt{xyz}}=0$

$\Rightarrow\sqrt{ayz}+\sqrt{bxz}+\sqrt{cxy}=0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do đó $M=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+2019=1+2019=2020$.

2. Đk: $x\ge 0$ hoặc $x\le -8$

$2x^2+16x-6=4\sqrt{x(x+8)}$

$\Leftrightarrow x^2+8x-3=2\sqrt{x(x+8)} \qquad (1)$

Đặt $t=\sqrt{x(x+8)}\ (t\ge 0)\ \Rightarrow t^2=x^2+8x$

(1) $\Leftrightarrow t^2-3=2t\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=3\end{array}\right.$

Ta thấy $t=-1$ không thỏa mãn đk.

Với $t=3\Rightarrow x^2+8x=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-9\end{array}\right.$ (tmđk)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;-9\}$.

Câu 4: 1. Biến đổi

$$f(x)=x^4+x^2+1+2x^3-2x-2x^2-ax-2x+b+1$$

$$=\left(x^2+x-1\right)^2+(a-2)x+(b+1)$$

Để $f(x)$ trở thành bình phương của một đa thức thì $\begin{cases}a-2=0\\b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$

Vậy với $a=2,b=-1$ thì $f(x)$ trở thành bình phương của một đa thức.

2. Ta có: $(1+a)(1+b)=4,5\ \Leftrightarrow\ a+b+ab=\frac{7}{2}$.

Ta xét 4 số thực a,b,x,y ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=a^2+b^2+x^2+y^2+2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\geq a^2+b^2+x^2+y^2+2|ax+by|\geq a^2+b^2+x^2+y^2+2ax+2by=(a+x)^2+(b+y)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$Q=\sqrt{\left(a^2\right)^2+1^2}+\sqrt{\left(b^2\right)^2+1^2}\geq\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2+(1+1)^2}$$

Mà $a^2+\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2\geq 2a.\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\left(3\sqrt{2}-2\right)a$ (1)

$b^2+\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2\geq\left(3\sqrt{2}-2\right)b$ (2)

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\left(a^2+b^2\right)\geq\left(3\sqrt{2}-2\right)ab$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) lại ta được:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(a^2+b^2\right)+2\left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2\geq\left(3\sqrt{2}-2\right)(ab+a+b)$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(a^2+b^2\right)+11-6\sqrt{2}\geq\left(3\sqrt{2}-2\right).\frac{7}{2}$$

Hay $a^2+b^2\geq 11-6\sqrt{2}$

(Cách khác: $\frac{9}{2}=(1+a)(1+b)\leq\left(\frac{1+a+1+b}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{2+a+b}{2}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow a+b\geq 3\sqrt{2}-2$

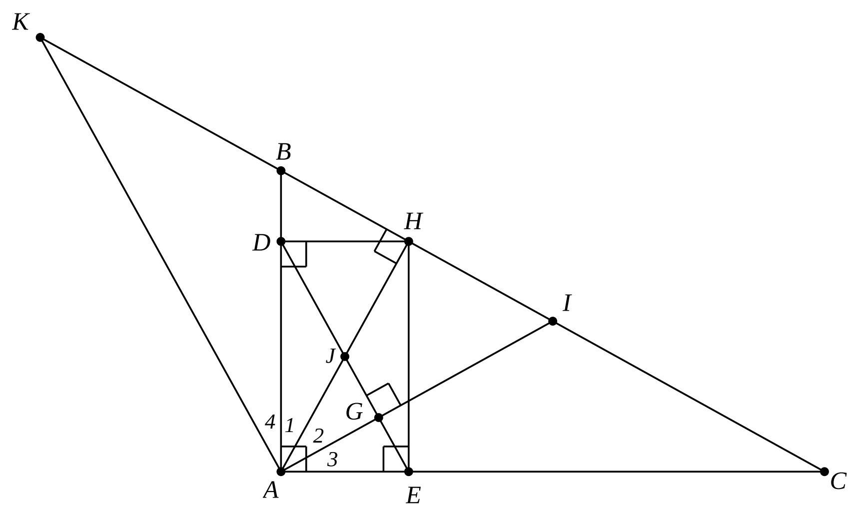
Mặt khác: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \Rightarrow a^2+b^2 \ge \frac{(3\sqrt{2}-2)^2}{2} = 11-6\sqrt{2}$)

Do đó $Q \ge \sqrt{(11-6\sqrt{2})^2+4} = \sqrt{87-12\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$

Vậy $\text{Min}\, Q = \sqrt{87-12\sqrt{2}}$ khi $a=b=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$

Câu 5: 1.



a) Gọi giao điểm của DE với AH, AI lần lượt tại $J;G$

Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật $\widehat{HAE} = \widehat{JAE}$?

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{HAE} = 90°$ (hai góc phụ nhau)

$\widehat{A_3} + \widehat{JEA} = 90°$ (ΔAGE vuông)

Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

Vì $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$) $\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta AIC$ cân tại I $\Rightarrow AI = IC$

Tương tự: $AI = BI$

Vậy $IB = IC(=IA)$.

b) Ta có ΔAIB cân tại I $\Rightarrow \widehat{IBA} = \widehat{IAB}$

mà $\begin{cases} \widehat{A_4} + \widehat{IAB} = 90° \\ \widehat{A_1} + \widehat{HAC} = 90° \end{cases}$ và $\widehat{HAC} = \widehat{IBA}$ (cùng phụ $\widehat{A_1}$)

Do đó: $\widehat{A_1} = \widehat{A_4}$

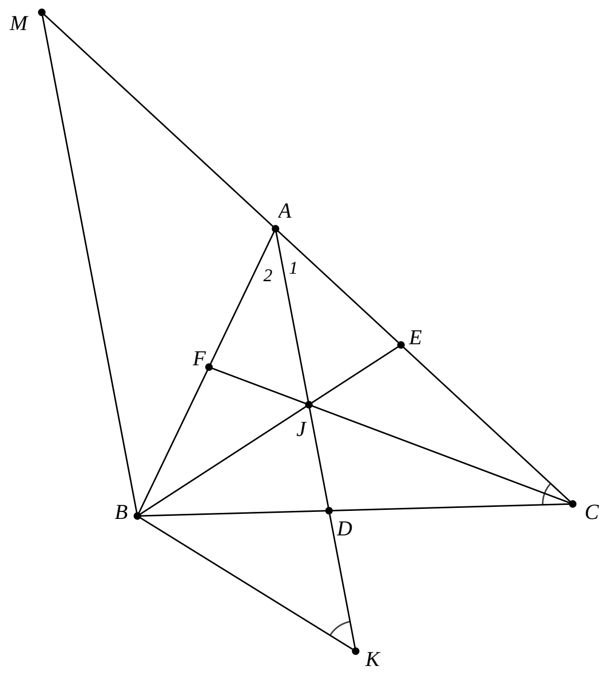
$\Rightarrow AB$ là phân giác của $\widehat{HAK}$

c) Ta có: $\left.\begin{matrix} AD.DB = HD^2 \\ AE.EC = HE^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD.DB + AE.EC = HD^2 + HE^2 = DE^2 = AH^2$

Xét ΔAHI vuông tại H, ta có $AH^2 \le AI^2$

Do đó $AD.DB + AE.EC \le AI^2$.

2.



a) Lấy K thuộc tia đối của tia DA sao cho $\widehat{AKB} = \widehat{ACB}$

Vì $\Delta ACD \backsim \Delta AKB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AK} \Rightarrow AB.AC = AD.AK$ (1)

Vì $\Delta DAC \backsim \Delta DBK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DC}{DK} = \dfrac{AC}{BK} = \dfrac{AD}{BD} \Rightarrow DC.BD = DK.AD$ (2)

Trừ (1), (2) suy ra $AB.AC - DC.BD = AD.(AK - KD) = AD.AD = AD^2$

b) Kẻ $BM // AD$, cắt đường thẳng AC tại M

$\Rightarrow \Delta ABM$ cân tại A $\Rightarrow AM = AB$

Theo BĐT tam giác: $MB < AM + AB \Rightarrow MB < 2AB$

Do $AD//BM$ $\Rightarrow \dfrac{AD}{BM} = \dfrac{CA}{CM} = \dfrac{AC}{AC + AM} = \dfrac{AC}{AC + AB}$ (do $CM = AC + AM; AM = AB$)

$$\Rightarrow \frac{AD}{BM} = \frac{AC}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AC}{AC + AB}.BM < \frac{AC.2AB}{AC + AB} = \frac{2AB.AC}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} > \frac{AC + AB}{2AB.AC} = \frac{1}{2AC} + \frac{1}{2AB} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{BE} > \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}\right)$

$\frac{1}{CF} > \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}\right)$

Cộng vế với vế, ta được: $\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF} > \frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}$.

ĐỀ SỐ 3: CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 HUYỆN ĐỨC CƠ - NĂM 2019

Câu 1. (*4,0 điểm*)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}} - \frac{x+y}{y-x}$ với $x,\ y>0,\ x\neq y$

2. Cho $A=\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$; $B=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+2x+2}{\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $A=B$.

Câu 2. (*4,0 điểm*)

1. Tìm $x,\ y \in Z$ biết $x-y+2xy=6$

2. Tìm n để n^5+1 chia hết cho n^3+1 với $n\in N^*$

Câu 3. (*4,0 điểm*) Giải phương trình

1. $\sqrt{x^2-9}-2\sqrt{x-3}=0$

2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

Câu 6: (*2,0 điểm*)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4. (*6,0 điểm*)

Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên cạnh Ox lấy điểm A sao cho $OA=4cm$, trên tia đối của tia Ox lấy điểm B sao cho $OB=2cm$. Đường trung trực của AB cắt AB ở H, M là một điểm nằm trên đường trung trực đó. Các tia AM, MB cắt Oy lần lượt ở C và D. Gọi E là trung điểm của AC, F là trung điểm của BD.

1. Chứng minh $OE.OF=AE.BF$.
2. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh 3 điểm O, I, M thẳng hàng.
3. Xác định vị trí của điểm M để cho $OM=EF$. Khi đó S_1 là diện tích tứ giác $OBME$, S_2 là diện tích tứ giác $ABFE$. Tính tỉ số $\frac{S_1+S_2}{S_1.S_2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: 1. $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}-\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\dfrac{x+y}{x-y}$

$=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\dfrac{x+y}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+2(x+y)}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}$

$=\dfrac{4\sqrt{xy}+2x+2y}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

2. + Ta có: $A=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ xác định khi $x\ge 0;\ x\ne 4.$

$A=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2}=2\sqrt{x}+1$

+ Ta có: $B=\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+2x+2}{\sqrt{x}+2}$ xác định khi $x\ge 0.$

$B=\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+2x+2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)(x+1)}{\sqrt{x}+2}=x+1$

Ta có $A=B$ nên $2\sqrt{x}+1=x+1 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ 2-\sqrt{x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x=0$

Vậy $x=0$ khi $A=B$.

Câu 2: 1.Ta có $x-y+2xy=6 \Leftrightarrow 2x-2y+4xy=12 \Leftrightarrow 2x+4xy-1-2y=11$

$\Leftrightarrow (2x-1)(1+2y)=11=1.11=(-1).(-11)$

Ta có bảng sau:

$2x-1$	1	11	-1	-11
$1+2y$	11	1	-11	-1
x	1	6	0	-5

y	5	0	-6	-1

Vậy cặp nghiệm (x,y) nguyên là: $(1,5)$; $(6,0)$; $(0,-6)$; $(-5,-1)$

2. Ta có $n^5+1=n^5+n^2-n^2+1=\left(n^5+n^2\right)-\left(n^2-1\right)=n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right)$

Vì n^5+1 chia hết cho n^3+1 nên cần chứng minh n^2-1 chia hết cho n^3+1

Ta có: $n^2-1=(n-1)(n+1)$ và $n^3+1=(n+1)\left(n^2-n+1\right)$

Khi đó $n-1$ chia hết cho n^2-n+1

Vì $n\in\mathbb{N}^*$ nên ta xét các trường hợp sau:

Nếu $n=1$ thì $n-1$ chia hết cho n^2-n+1 suy ra n^5+1 chia hết cho n^3+1

Nếu $n>1$ thì $n-1<n(n-1)+1$ nên $n-1$ không chia hết cho n^2-n+1

Vậy $n=1$ thì $n^5+1\,\vdots\,n^3+1$.

Câu 3: 1. Điều kiện $x\geq 3$

Ta có: $\sqrt{x^2-9}-2\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-3}\right)-2\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=0\\ \sqrt{x+3}-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\ (TMDK)\\ x=1\ (KTMDK)\end{array}\right.$$

Vậy $x=3$ là nghiệm của phương trình.

2. ĐKXĐ: $x\geq 1$.

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}-\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}-\sqrt{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}\left(1-\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(1-\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-1=0\\ 1-\sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=1\\ \sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x-1}=1 & (1)\\ \sqrt{\left(x^2+1\right)(x+1)}=1 & (2)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2\ (TMDK)$

$(2)\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(x+1)=1\Leftrightarrow x^3+x^2+x=0$ (vô nghiệm vì $x\geq 1$.)

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Câu 4:

Vì $a,b,c>0$ nên $\dfrac{bc}{a}>0$; $\dfrac{ac}{b}>0$; $\dfrac{ab}{c}>0$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số không âm, ta có:

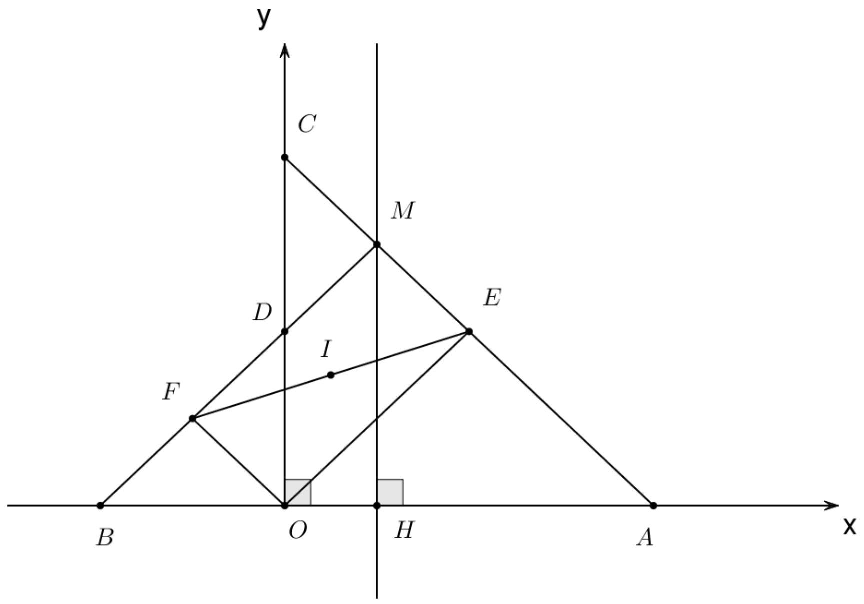
+ $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ac}{b}}=2c\ (1)$

+ $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2\sqrt{\frac{ac}{b}.\frac{ab}{c}}=2a\ (2)$

+ $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b\ (3)$

Lấy (1) cộng (2) cộng (3) vế theo vế ta được $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$ (ĐPCM)

Câu 5:



1. + ΔBOD có OF là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BD nên $FO=FB$

$\Rightarrow \Delta BFO$ cân tại F $\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{FOB}$. (1)

+ ΔEAO vuông tại ? có OE là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền MA nên

$\mathrm{OE}=EA\Rightarrow \Delta EAO$ cân tại E $\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{AOE}$. (2)

+ ΔMAB có $MA=MB$ $\Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{\mathrm{B}}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\Delta BFO \backsim \Delta OEA$ (góc – góc)

$\Rightarrow \frac{FO}{EA}=\frac{BF}{OE}\Rightarrow OE.\mathrm{FO}=EA.BF$.

2. Ta có: $\widehat{MAB}=\widehat{FOB}$ nên $OF//MA$

$\widehat{MBA}=\widehat{EOA}$ nên $OE//MB$

Suy ra tứ giác $MEOF$ là hình bình hành. Suy ra đường chéo OM đi qua trung điểm I của EF.

Vậy 3 điểm O, I, M thẳng hàng.

3. $OEMF$ là hình bình hành có hai đường chéo $OM = \text{EF}$ nên $OEMF$ là hình chữ nhật $\Delta BFO \backsim \Delta BMA$ mà $MA = MB \Rightarrow \Delta AMB$ vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAB} = 45^0$.
Khi đó ΔAHM vuông cân tại H. Mặt khác H là trung điểm của AB
$\Rightarrow HM = HA = 3cm.$

Vậy M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB và cách AB một đoạn $MH = 3cm$.

ΔMAH vuông ở H, ta có: $MA^2 = MH^2 + HA^2 = 3^3 + 3^2 = 18 \Rightarrow MA = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm)

+ ΔBFO và ΔBMA có $\widehat{M} = \widehat{F}; \widehat{A} = \widehat{B};$ suy ra $\Delta BFO \backsim \Delta BMA$ (g - g) nên

$$\frac{FO}{MA} = \frac{BO}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow FO = \frac{MA}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\frac{OE}{FO} = \frac{OA}{OB} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow OE = 2.\text{FO} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow S_{OEMF} = OE.FO = 2\sqrt{2}.\sqrt{2} = 4(cm^2) \Rightarrow \text{S}_{\Delta FEO} = 4:2 = 2\left(cm^2\right)$$

Ta có: $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}.MH.AB = \frac{1}{2}.3.6 = 9(cm^2)$

Ta cũng có $\Delta BFO \backsim \Delta OEA$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$ nên $\frac{S_{\Delta BFO}}{S_{\Delta OEA}} = k^2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow S_{\Delta BFO} = 1\left(cm^2\right); S_{\Delta OEA} = 4\left(cm^2\right)$$

$$S_1 = S_{OBME} = S_{BFO} + S_{OEMF} = 1 + 4 = 5\left(cm^2\right)$$

$$S_2 = S_{ABFE} = S_{BFO} + S_{FEO} + S_{OEA} = 1 + 2 + 4 = 7\left(cm^2\right).$$

Vậy $\frac{S_1 + S_2}{S_1.S_2} = \frac{5+7}{5.7} = \frac{12}{35}.$

ĐỀ SỐ 4. CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN THƯỜNG TÍN NĂM HỌC 2019-2020

Bài 1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right).$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh: $P > 1$.

Bài 2. Giải phương trình:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3} + \sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8} = 1.$$

Bài 3.

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $6x^2y^3+3x^2-10y^3=-2$.

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

Bài 4:

1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';\ R/2)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Trên đường tròn (O) lấy điểm B sao cho $AB = R$ và điểm M trên cung lớn AB. Tia MA cắt đường tròn (O') tại điểm thứ 2 là N. Qua N kẻ đường thẳng song song với AB .cắt đường thẳng MB tại Q và cắt đường tròn (O') ở P.

a) Chứng minh tam giác OAM đồng dạng tam giác $O'AN$.

b) Tính NQ theo R.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $ABQN$ đạt giá trị lớn nhất tính giá trị lớn nhất theo R.

2. Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác đó. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng:
$\dfrac{OA}{AM}+\dfrac{OB}{BN}+\dfrac{OC}{CP}=2$.

Bài 5: Cho hai số dương x,y thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3=x-y$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2\le 1$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LỚP 9 CẤP HUYỆN THƯỜNG TÍN

Bài 1.

a) Điều kiện: P có nghĩa: $x>0; x\neq 1$

$$P=\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}+x\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}+x}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}:\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}+x\right)}$$

$$=\frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}.$$

b) $P=\frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}-1\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}}-1=1$ (BĐT Cauchy)

Vì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$ không thỏa mãn điều kiện xác định nên $P>1$.

Bài 2.

ĐKXĐ: $x\geq 1$

Phương trình được viết lại là:

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1. \qquad (1)$$

* Nếu $1\leq x<5$ ta có $(1)\Leftrightarrow 2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$ không thuộc khoảng đang xét.

* Nếu $5\leq x\leq 10$ ta có $0x=0$ phương trình có vô số nghiệm.

* Nếu $x>10$ thì $(1)\Leftrightarrow -5=1$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có vô số nghiệm: $5\leq x\leq 10$.

Bài 3.

1)

$$6x^2y^3+3x^2-10y^3=-2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2(2y^3+1)-5(2y^3+1)=-7$$

$$\Leftrightarrow (3x^2-5)(2y^3+1)=-7.$$

Nên suy ra $3x^2-5;\ 2y^3+1$ là ước của -7

* $\begin{cases}3x^2-5=7\\2y^3+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 2\\y=-1\end{cases}$ (thỏa mãn).

* $\begin{cases}3x^2-5=-7\\2y^3+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{-2}{3}\\y=0\end{cases}$ (loại).

* $\begin{cases}3x^2-5=-1\\2y^3+1=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\\y^3=3\end{cases}$ (loại).

* $\begin{cases}3x^2-5=1\\2y^3+1=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\y^3=-4\end{cases}$ (loại).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(2;-1);(-2;-1)\}$.

2) Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge x;\quad \frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\ge y;\quad \frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge z.$$

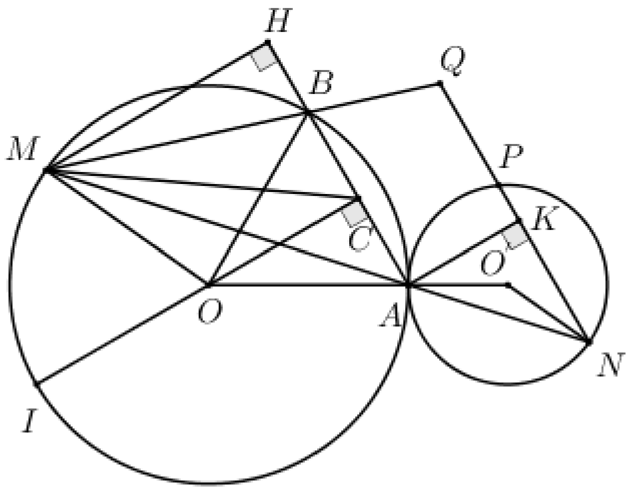
Cộng từng vế ta được

$$P+\frac{x+y+z}{2}\ge x+y+z\Rightarrow P\ge\frac{x+y+z}{2}=1.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{2}{3}$.

Bài 4:

1)



a) Ta thấy $\Delta OAM \backsim \Delta O'AN$ (g.g) vì $\widehat{OAM}=\widehat{O'AN};\ \widehat{AOM}=\widehat{AO'N}$.

b) Vì $AB//NQ$, áp dụng hệ quả định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AB}{NQ}=\frac{MA}{MN}=\frac{OA}{OO'}=\frac{R}{\frac{3R}{2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow NQ=\frac{3}{2}R.$$

c) Kẻ $AK\perp NQ,\ MH\perp AB,\ OC\perp AB$, gọi $OC\cap(O)=\{I\}$.

$S_{ABNQ}=\frac{1}{2}(AB+NQ).AK=\frac{1}{2}.\left(R+\frac{3}{2}R\right).AK=\frac{5R}{4}.AK\Rightarrow S_{max}\Leftrightarrow AK$ có giá trị lớn nhất.

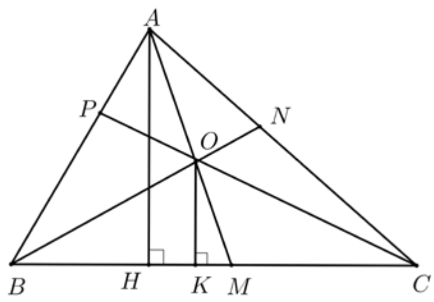
Ta có $\Delta MAH\backsim\Delta ANK(g.g)\Rightarrow\frac{MH}{AK}=\frac{MA}{AN}=\frac{OA}{AO'}=2\Rightarrow MH=2AK$.

Để AK có giá trị lớn nhất thì MH lớn nhất.

Ta có $MH\le MC\le OM+OC=R+\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{R\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. Nên suy ra $AK\le\frac{R\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}$.

Khi đó, tứ giác $ABQN$ có diện tích lớn nhất là $S_{max} = \dfrac{5R^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{16}$ khi $M \equiv I$ là giao điểm của đường trung trực của AB với (O).

2)



Gọi $S_1; S_2; S_3; S$ lần lượt là diện tích các tam giác $OBC,\ OCA,\ OAB,\ ABC$.

Dựng $AH \perp BC\ (H \in BC), AK \perp BC\ (K \in BC)\ \Rightarrow AH // OK$

Áp dụng đính lý Talets và tỉ số diện tích tam giác, ta có

$\dfrac{OM}{AM} = \dfrac{OK}{AH} = \dfrac{S_1}{S}$, tương tự $\dfrac{ON}{BN} = \dfrac{S_2}{S}; \dfrac{OP}{CP} = \dfrac{S_2}{S}$.

Cộng các đẳng thức trên theo vế

$$\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM - OA}{AM} + \frac{BN - OB}{BN} + \frac{CP - OC}{CP} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - \left(\frac{OA}{AM} + \frac{OB}{BN} + \frac{OC}{CP}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA}{AM} + \frac{OB}{BN} + \frac{OC}{CP} = 2.$$

Bài 5:

Từ giải thiết $x > y > 0$. Giả sử $x^2 + y^2 \geq 1$

Ta có

$$x^3 + y^3 = x - y \leq (x-y)(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 + xy^2 - x^2y - y^3$$

$$\Leftrightarrow xy^2 - x^2y - 2y^3 \geq 0 \Leftrightarrow xy(y-x) + \left(-2y^3\right) \geq 0$$

Vô lý vì $y - x < 0;\ -2y^2 < 0$.

Điều vô lý này chứng tỏ giải sử ban đầu là sai.

Vậy $x^2 + y^2 \leq 1$.

ĐỀ SỐ 5: CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN YÊN THÀNH - NĂM 2019-2020

Câu 1. (3.0đ)

1. Tồn tại hay không các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b + 2011 = c$
2. Tìm giá trị nguyên của x, y thỏa mãn $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x-y)$.

Câu 2. (6.0đ)

1. Giải phương trình: $10x^2 + 3x + 1 = (6x+1)\sqrt{x^2+3}$
2. Cho a, b, c thỏa mãn $2a + b + c = 0$. Chứng minh $2a^3 + b^3 + c^3 = 3a(a+b)(c-b)$.

Câu 3. (3.0đ) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\geq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

Câu 4. (6.0đ)

Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$, Ba đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm EF và AH. Đường thẳng qua I và song song với BC cắt AB, BE lần lượt tại B và Q.

1. Chứng minh: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$.
2. Chứng minh: $IP = IQ$.
3. Gọi M là trung điểm của AH chứng minh I là trực tâm của tam giác BMC.

Câu 5. (2.0đ)

Trong mặt phẳng cho 6 điểm $A_1;A_2;A_3;A_4;A_5;A_6$ trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Với ba điểm bất kỳ trong số 6 điểm này luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng trong sáu điểm đã cho luôn tìm được ba điểm là ba đỉnh một tam giác có chu vi nhỏ hơn 2019.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN YÊN THÀNH - NĂM 2019-2020

Câu 1: 1. Giả sử tồn tại 3 số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a^b+2011=c$

Khi đó ta có: $c>2011 \Rightarrow c$ là số nguyên tố lẽ.

$\Rightarrow a^b$ chẵn

$\Rightarrow a=2$

Nếu $b=2$ thì $c=2^2+2011=2015 \vdots 5 \Rightarrow c$ là hợp số (trái với giả thiết)

Nếu $b\geq 3$ thì là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow b=2k+3$ (với $k\in N$)

$$\Rightarrow a^b=2^{2k+3}=2^{2k}.2^3$$

Vì $2^{2k}\equiv 1(\bmod 3)$ và $2^3\equiv -1(\bmod 3)$

$$\Rightarrow a^b=2^{2k}.2^3\equiv -1(\bmod 3)$$

Lại có: $2011\equiv 1(\bmod 3)$

$\Rightarrow c=a^b+2011\equiv 0(\bmod 3)\Rightarrow c$ là hợp số (trái với giả thiết)

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$

2. Ta có : $x^2-4xy+5y^2=2(x-y)$

$\Leftrightarrow (4y^2+x^2+1-4xy-2x+4y)+(y^2-2y+1)=2$

$\Leftrightarrow (2y-x+1)^2+(y-1)^2=1^2+1^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2y-x+1)^2=1^2\\(y-1)^2=1^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y-x+1=\pm 1\\ y-1=\pm 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-x+1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-x+1=-1 \\ y-1=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-x+1=-1 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-x+1=1 \\ y-1=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $(x;y)\in\{(4;2);(2;0);(6;2);(0;0);\}$

Câu 2: 1. ĐKXĐ của phương trình là: $x\in\mathbb{R}$

Ta có: $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$

$$\Leftrightarrow 40x^2+12x+4=4(6x+1)\sqrt{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow (36x^2+12x+1)-4(6x+1)\sqrt{x^2+3}+4(x^2+3)-9=0$$

$$\Leftrightarrow (6x+1)^2-2.(6x+1).2\sqrt{x^2+3}+\left(2\sqrt{x^2+3}\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow \left(6x+1-2\sqrt{x^2+3}\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+1-2\sqrt{x^2+3}=3 \\ 6x+1-2\sqrt{x^2+3}=-3 \end{cases}$$

* Trường hợp 1: $6x+1-2\sqrt{x^2+3}=3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}=6x-2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=3x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ x^2+3=9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3} \\ 4x^2-3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 4x+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

* Trường hợp 2: $6x+1-2\sqrt{x^2+3}=-3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3}=6x+4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=3x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2+3=9x^2+12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{-2}{3} \\ 8x^2+12x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{-2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4} \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{7}}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x=1$ và $x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}$.

2. Ta có: $2a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-(a+c)$

$$\Rightarrow (a+b)^3=-(a+c)^3$$

+

$\Rightarrow 2a^3 + b^3 + c^3 = -3a(ac + c^2 + ab + b^2)$

$\Rightarrow 2a^3 + b^3 + c^3 = -3a\left[c(a+c) + b(a+b)\right]$

$\Rightarrow 2a^3 + b^3 + c^3 = -3a\left[-c(a+b) + b(a+b)\right]$ (Vì $a+b = -(a+c)$)

$\Rightarrow 2a^3 + b^3 + c^3 = -3a(a+b)(b-c)$

$\Rightarrow 2a^3 + b^3 + c^3 = 3a(a+b)(c-b)$.

3. Áp dụng bất đẳng thức Cô-Sy cho hai số dương ta có:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} \ge 2\sqrt{\frac{bc}{a^2(b+c)}.\frac{b+c}{4bc}} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{a^2(b+c)} \ge \frac{1}{a} - \frac{1}{4b} - \frac{1}{4c} \qquad (1)$$

Tương tự: $\dfrac{ca}{b^2(c+a)} \ge \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{4c} - \dfrac{1}{4a}$ (2)

$$\frac{ab}{c^2(a+b)} \ge \frac{1}{c} - \frac{1}{4a} - \frac{1}{4b} \qquad (3)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\Rightarrow \frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} \ge \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}\right)$$

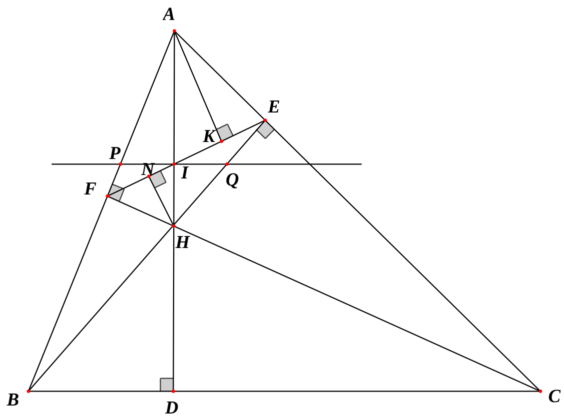
$$\Rightarrow \frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} \ge \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Câu 4: 1. Chứng minh: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

Ta có: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)

Xét ΔAEF và ΔABC có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{EAF} = \widehat{BAC}\,(\text{góc chung}) \\ \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC\ (c-g-c)$$



2. Kẻ AK và HN vuông góc với EF ($K; N \in$ EF)

Ta có: $AK // HN$ (cùng vuông góc với EF)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IH} = \frac{AK}{HN} = \frac{\frac{1}{2}AK.EF}{\frac{1}{2}HN.EF} = \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta HEF}} \qquad (1)$$

Lại có: $\dfrac{AD}{HD} = \dfrac{\frac{1}{2}AD.BC}{\frac{1}{2}HD.BC} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}}$ (2)

Mặt khác: $\Delta EHC \backsim \Delta FHB\,(g-g) \Rightarrow \frac{HE}{HC}=\frac{HF}{HB} \Rightarrow \frac{HE}{HF}=\frac{HC}{HB}$

$\Rightarrow \Delta HEF \backsim \Delta HCB\,(c-g-c) \Rightarrow \frac{S_{\Delta HEF}}{S_{\Delta HCB}}=\left(\frac{EF}{BC}\right)^2$

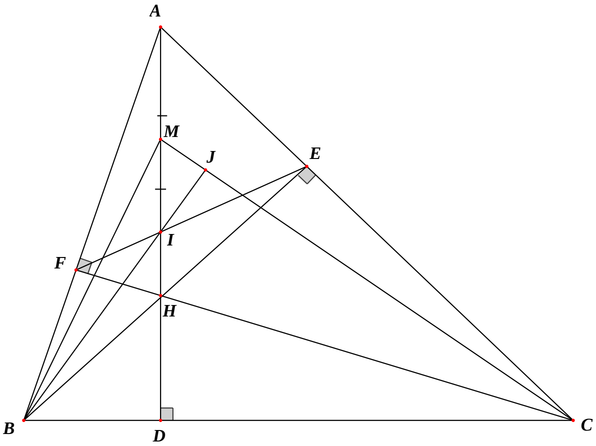
Và $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (câu a) $\Rightarrow \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{EF}{BC}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta HEF}}{S_{\Delta HCB}}=\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{EF}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta HEF}}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta HBC}}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{IA}{IH}=\frac{AD}{HD} \Rightarrow \frac{AI}{AD}=\frac{HI}{HD}$ (*)

Vì $PQ//BC$ nên áp dụng quan hệ định lý Ta-Lét ta có: $\frac{IP}{DB}=\frac{AI}{AD}$ và $\frac{IQ}{DB}=\frac{HI}{HD}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \frac{IP}{DB}=\frac{IQ}{DB} \Rightarrow IP=IQ$



3. Ta có: $\frac{AI}{AD}=\frac{HI}{HD}$ (câu b) $\Rightarrow \frac{HI}{HD}=\frac{HI+AI}{HD+AD}$

Vì M là trung điểm của $AH \Rightarrow HI+AI=AH=2MA$

Và $HD+AD=AH+2HD=2MH+2HD=2MD$

$\Rightarrow \frac{HI}{HD}=\frac{2MA}{2MD}=\frac{MA}{MD} \Rightarrow \frac{HI}{HD}+1=\frac{MA}{MD}+1$

$\Rightarrow \frac{ID}{HD}=\frac{AD}{MD} \Rightarrow ID.MD=AD.HD$ (1)

Lại có:

$\Delta DHB \backsim \Delta DCA\,(g-g) \Rightarrow \frac{DH}{DC}=\frac{DB}{DA} \Rightarrow DB.CD=AD.HD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ID.MD=BD.CD \Rightarrow \frac{ID}{BD}=\frac{CD}{MD}$

$\Rightarrow \Delta DIB \backsim \Delta DCM\,(c-g-c) \Rightarrow \widehat{DIB}=\widehat{DCM}=\widehat{BCJ}$

$\Rightarrow \widehat{BCJ}+\widehat{CBJ}=\widehat{DIB}+\widehat{DBI}=90^0 \Rightarrow BJ\perp MC$

Mặt khác: $MD\perp BC$

Mà BJ cắt MD tại I suy ra I là trực tâm của ΔBMC.

Câu 5:

-Tổng số đoạn thẳng được sinh ra từ 6 điểm đã cho là: $5+4+3+2+1=15$ (đoạn thẳng)

- Trong 15 đoạn thẳng trên các đoạn thẳng A_mA_n (với $m;n \in \{1;2;3;4;5;6\}$; 6}) có độ dài nhỏ hơn 673 được tô bởi mà đỏ. Các đoạn thẳng còn lại được tô bởi màu xanh.

- Khi đó, trong một tam giác bất kì luôn tồn tại một cạnh màu đỏ và các tam giác có 3 cạnh được tô cùng màu đỏ có chu vi nhỏ hơn 2019.

- Vì thế, ta chỉ cần chứng minh luôn tồn tại một tam giác có 3 cạnh đều là màu đỏ.

- Thật vậy: Nối điểm A_1 với 5 điểm còn lại ta được 5 đoạn thẳng gồm

A_1A_2 ; A_1A_3 ; A_1A_4 ; A_1A_5 ; A_1A_6

- Theo nguyên lí Dirichlet trong 5 đoạn thẳng này luôn tồn tại 3 đoạn thẳng được tô cùng màu.

- Không mất tính tổng quát, Giả sử A_1A_2; A_1A_3; A_1A_4 có cùng màu xanh, khi đó tam giác $A_2A_3A_4$ có 3 cạnh được tô cùng màu đỏ (vì trong một tam giác bất kì luôn tồn tại một cạnh màu đỏ)

- Nếu 3 đoạn thẳng A_1A_2; A_1A_3; A_1A_4 có cùng màu đỏ, khi đó tam giác $A_2A_3A_4$ có một cạnh được tô bởi màu đỏ (trong một tam giác bất kì luôn tồn tại một cạnh màu đỏ). Giả sử cạnh A_2A_4 được tô bởi màu đỏ, Ta có tam giác $A_1A_2A_3$ có 3 cạnh được tô cùng màu đỏ.

- Bài toán được chứng minh.

ĐỀ SỐ 6. CHỌN HSG HUYỆN TAM DƯƠNG NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1. *(2,0 điểm)* Tính giá trị của biểu thức sau: $A=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

Câu 2. *(2,0 điểm)* Tìm các số thực a, b để đa thức $f(x)=x^4+ax^3+bx-1$ chia hết cho đa thức x^2-3x+2.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x-2y=\sqrt{xy}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x-y}{x+y}$.

Câu 4. *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\dfrac{2m-1}{x-2} = m-3$ vô nghiệm.

Câu 6. *(2,0 điểm)* Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca+\dfrac{1}{abc} \ge abc+3$.

Câu 7. *(2,0 điểm)* Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^5 - 5n^3 + 4n$ luôn chia hết cho 120.

Câu 8. *(2,0 điểm)* Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}$

Câu 9. *(2,0 điểm)* Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D.

a) Chứng minh $AB^2 = 4AC.BD$

b) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên CD. Chứng minh rằng M thuộc đường tròn đường kính AB.

c) Kẻ đường cao MH của tam giác MAB. Chứng minh rằng MH, AD, BC đồng quy.

Câu 10. *(2,0 điểm)* Cho sáu đường tròn có bán kính bằng nhau và cùng có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong những đường tròn này chứa tâm của một đường tròn khác.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN TAM DƯƠNG NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1: $A = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} > 0$

$$A^2 = 4+\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}} - 2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}$$

$$A^2 = 8 + 2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$A^2 = 8 + 2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$$

$$A^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$A^2 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

$A = \sqrt{5}+1$ (Do A > 0)

Câu 2: Ta có: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Theo bài ra: $f(x) \vdots (x-1)(x-2)$.

$f(x)$ chia hết cho $x-1 \Rightarrow f(1) = 0$

$\Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a$ (1)

$f(x)$ chia hết cho $x-2 \Rightarrow f(2)=0$

$\Rightarrow 8a+2b = -15$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 8a+2(-a)=-15$

$\Rightarrow\ a=-\dfrac{5}{2}$; $b=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $a=-\dfrac{5}{2}$; $b=\dfrac{5}{2}$.

Câu 3: $x-2y=\sqrt{xy}\ \Leftrightarrow\ x-\sqrt{xy}-2y=0 \Leftrightarrow x-2\sqrt{xy}+\sqrt{xy}-2y=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=0$

Vì $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$ nên $\sqrt{x}-2\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow x=4y$.

Khi đó P=$\dfrac{4y-y}{4y+y}=\dfrac{3}{5}$

Câu 4: ĐKXĐ: $x\geq -1$

$4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14 \Leftrightarrow x^2-5x-4\sqrt{x+1}+14=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+x+1-4\sqrt{x+1}+4=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ (TM)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=3$.

Câu 5: ĐKXĐ: $x\neq 2$.

$\dfrac{2m-1}{x-2}=m-3 \Rightarrow 2m-1=(x-2)(m-3)$

$\Leftrightarrow (m-3)x=4m-7$ (*)

+ Xét $m=3$ Phương trình (*) trở thành 0x = 5 (Vô lý)

$\Rightarrow m=3$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

+ $m\neq 3$, phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{4m-7}{m-3}$

Để phương trình đã cho vô nghiệm thì $\dfrac{4m-7}{m-3}=2 \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$

Vậy với $m=3$, $m=\dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 6: Áp dụng BĐT cauchy ta có $(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ =9abc$

$\Rightarrow abc\leq \dfrac{ab+bc+ca}{3}$.

Ta chứng minh $ab+bc+ca+\dfrac{1}{abc}\geq \dfrac{ab+bc+ca}{3}+3$

$\Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{3}+\frac{ab+bc+ca}{3}+\frac{1}{abc}\geq 3$. Thật vậy:

$VT\geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{9abc}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{9abc}}$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Câu 7: Ta có: $n^5-5n^3+4n=n(n^2-1)(n^2-4)$

$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

Và $120=2^3.3.5$

Trong 5 số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số chia hết cho 5, một số chia hết cho 3 và ít nhất hai số chẵn liên tiếp nên tích của 2 số này chia hết cho 8

Mà 3, 5, 8 đôi một nguyên tố cùng nhau nên tích 5 số đó chia hết cho 120.

Câu 8: $x^3+8=7\sqrt{8x+1}$

ĐK xác định: $8x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{8}\Leftrightarrow x\geq 0$ (vì $x\in\mathbb{Z}$)

PT tương đương với:

$5x^3+40=7\sqrt{25(8x+1)}\leq 7.\frac{25+(8x+1)}{2}=7.(4x+13)=28x+91$

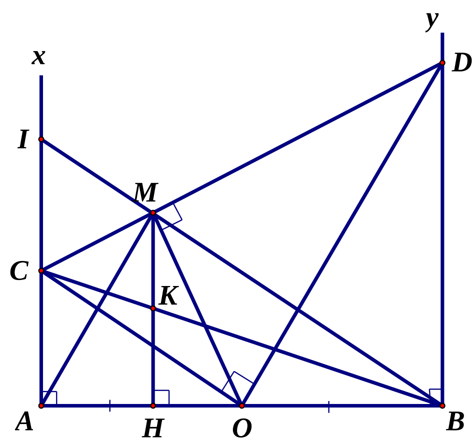
$\Leftrightarrow 5x^3-28x-51\leq 0\Leftrightarrow (x-3)(5x^2+15x+17)\leq 0$

Vì với $x\geq 0$ thì $5x^2+15x+17>0$ nên suy ra $x-3=0\Leftrightarrow x=3$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=3$

Lưu ý: HS có thể giải theo cách thử trực tiếp x = 1,2,..,5. Với x > 5 chứng minh vế trái lớn hơn vế phải.

Câu 9:



a) Chứng minh $\Delta OAC\sim\Delta DBO$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OA}{DB}=\frac{AC}{OB}\Rightarrow OA.OB=AC.BD$

$\Rightarrow \frac{AB}{2}.\frac{AB}{2}=AC.BD\ \Rightarrow AB^2=4AC.BD$ (đpcm)

b) Theo câu a ta có: $\Delta OAC\sim\Delta DBO$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OC}{OD}=\frac{AC}{OB}$ mà $OA=OB\ \Rightarrow \frac{OC}{OD}=\frac{AC}{OA}$

+) Chứng minh: $\Delta OAC\backsim\Delta DOC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ACO}=\widehat{OCM}$

+) Chứng minh: $\Delta OAC=\Delta OMC$ (ch.gn)$\Rightarrow AO=MO$

$\Rightarrow M$ nằm trên đường tròn (O, OA) hay đường tròn đường kính AB.

c) Gọi K là giao của MH với BC, I là giao của BM với Ax

Ta có $\Delta OAC = \Delta OMC$ $\Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực của AM

$\Rightarrow OC \perp AM$.

Mặc khác $OA = OM = OB$ $\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$OC // BM$ (vì cùng vuông góc AM) hay $OC // BI$

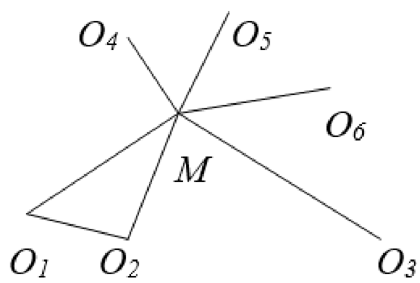
+) Xét ΔABI có OM đi qua trung điểm AB, song song BI suy ra OM đi qua trung điểm AI $\Rightarrow IC = AC$

+) $MH // AI$ theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$

Mà $IC = AC$ $\Rightarrow MK = HK$ $\Rightarrow BC$ đi qua trung điểm MH

Tương tự AD cũng đi qua trung điểm MH. Suy ra AD, BC, MH đồng quy.

Câu 10:



Giả sử có sáu đường tròn tâm O_i (i = 1, 2, .., 6) có bán kính r và M là điểm chung của các đường tròn này. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh ít nhất có hai tâm có khoảng cách không lớn hơn r.

Nối M với các tâm. Nếu hai trong những đoạn thẳng vừa nối nằm trên cùng một tia có điểm đầu mút là M thì bài toán được chứng minh.

Trong trường hợp ngược lại, xét góc nhỏ nhất trong các góc nhận được đỉnh M, giả sử đó là góc O_1MO_2.

Do tổng các góc này là 360^0 nên góc $O_1MO_2 \le 60^0$. Khi đó trong tam giác O_1MO_2 có một góc không nhỏ hơn góc O_1MO_2 (nếu ngược lại thì tổng các góc trong tam giác nhỏ hơn 180^0).

Từ đó suy ra trong những cạnh MO_1 và MO_2 trong tam giác O_1MO_2 tồn tại cạnh không nhỏ hơn O_1O_2 tức ta có $O_1O_2 \le r$ vì $MO_1 \le r$, $MO_2 \le r$.

ĐỀ SỐ 7. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN CHƯ SÊ - NĂM HỌC 2019 – 2020

Câu 1. (*6,0 điểm*)

a) Rút gọn biểu thức: $M = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$.

b) Giải phương trình: $6\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}-(x+1)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x^3+1}}=5$.

Câu 2. (*3,0 điểm*) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\left(d\right)$ có phương trình $(m-4)x+(m-3)y=1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng $\left(d\right)$ là lớn nhất.

Câu 3. (*3,0 điểm*) Cho hình vuông $ABCD$ và điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BPC}=135^\circ$. Chứng minh rằng: $2PB^2+PC^2=PA^2$

Câu 4. (*5,0 điểm*) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. M là điểm di động trên đoạn thẳng AB, kẻ $CM\perp AB$ tại M (C thuộc nửa đường tròn tâm O). Gọi D và E là hình chiếu vuông góc của M trên CA và CB. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AM và MB. Xác định vị trí của điểm M để diện tích của tứ giác $DEQP$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. (*3,0 điểm*)

a) Giả sử x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x+y+z+xy+yz+zx=6$. Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2\ge 3$.

b) Chứng minh trong 8 số tự nhiên có 3 chữ số bao giờ cũng chọn hai số mà khi viết liền nhau ta được một số có 6 chữ số chia hết cho 7.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN CHƯ SÊ - NĂM HỌC 2019 – 2020

Câu 1: a)

$$M=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\left(2+\sqrt{3}\right)}}}$$

$$=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\left(5-\sqrt{3}\right)}}$$

$$=\sqrt{4+\sqrt{25}}=\sqrt{9}=3.$$

b) Điều kiện: $x>-1$.

$$6\cdot\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}-(x+1)\cdot\sqrt{\frac{1}{x^3+1}}=5\Leftrightarrow 6\cdot\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}=5.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}\left(t>0\right)$. Phương trình trở thành: $6t-\dfrac{1}{t}=5$.

$$\Rightarrow 6t^2-5t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=1 & \left(n\right)\\ t=\dfrac{-1}{6} & \left(l\right)\end{array}\right..$$

Với $t=1 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x+1}=1 \Rightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (n) \\ x=2\ (n) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0; x=2$.

Câu 2: Với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) không đi qua gốc tọa độ.

- Với $m=4$, ta có đường thẳng $(d): y=1$. Do đó khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1. (1)
- Với $m=3$, ta có đường thẳng $x=-1$. Do đó khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1. (2)
- Với $m \neq 4; m \neq 3$ thì đường thẳng (d) cắt trục $Oy; Ox$ lần lượt tại $A\left(0;\dfrac{1}{m-3}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{m-4};0\right)$, suy ra $OA=\dfrac{1}{|m-4|}; OB=\dfrac{1}{|m-3|}$. Kẻ đường cao $OH \perp AB\,(H \in AB)$.

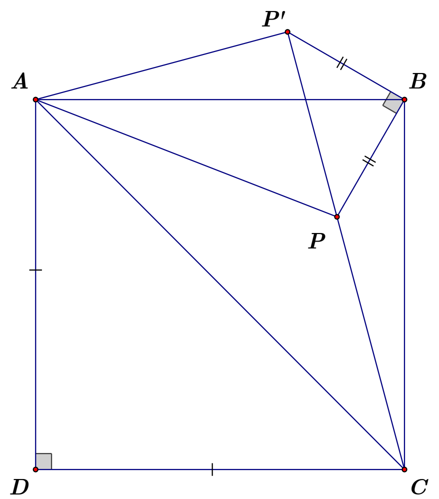
Ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=(m-3)^2+(m-4)^2=2m^2-14m+25$

$$=2\left(m^2-2.m.\frac{7}{2}+\frac{49}{4}\right)+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow OH^2 \leq 2 \Leftrightarrow OH \leq \sqrt{2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $m=\dfrac{7}{2}$.

Câu 3: Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB không chứa điểm P, vẽ điểm P' sao cho $\Delta PBP'$ vuông cân tại B. Khi đó



Xét $\Delta AP'B$ và ΔCPB có

- $AB=BC$ (giả thiết);
- $\widehat{ABP'}=\widehat{CBP}$ (cùng phụ với $\widehat{ABP}$;
- $BP'=BP$ (theo cách vẽ).

Suy ra $\Delta AP'B=\Delta CPB$ (cạnh – góc – cạnh).

$\Rightarrow \widehat{AP'B}=\widehat{CPB}$.

Mà $\widehat{CPB}+\widehat{BPP'}=180^\circ \Rightarrow \widehat{AP'B}+\widehat{BPP'}=180^\circ$

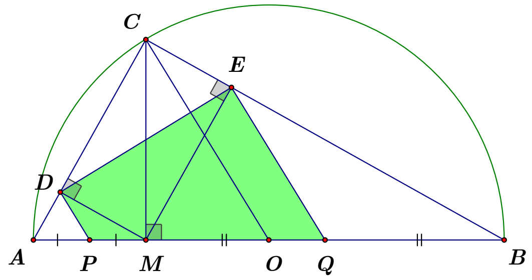
$\Leftrightarrow \widehat{AP'P}+\widehat{BP'P}+\widehat{BPP'}=180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AP'P}=90^\circ$.

Do đó $\Delta AP'P$ vuông tại P'. Theo định lý Py-ta-go, ta có

$AP^2 = AP'^2 + P'P^2 = PC^2 + \left(BP'^2 + BP^2\right) = PC^2 + 2BP^2$ (do $\triangle AP'B = \triangle CPB$)

Vậy $AP^2 = PC^2 + 2BP^2$.

Câu 4:



Tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính AB nên vuông tại C. Từ đó tứ giác $MDCE$ là hình chữ nhật $DE = CM$. Do đó

$S_{\Delta DME} = \frac{1}{2} S_{MDCE}$. (1)

Tam giác ADM có DP là trung tuyến nên

$S_{\Delta DPM} = \frac{1}{2} S_{\Delta ADM}$. (2)

Tương tự, EQ là trung tuyến của ΔMEB nên $S_{\Delta MEQ} = \frac{1}{2} S_{\Delta MEB}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$S_{PDEQ} = S_{\Delta DPM} + S_{\Delta DME} + S_{\Delta MEQ} = \frac{1}{2}\left(S_{MDCE} + S_{\Delta ADM} + S_{\Delta MEB}\right) = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}.$$

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CM \cdot AB \le \frac{1}{2} CO \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R = R^2$ (khổng đổi).

Suy ra $S_{PDEQ} \le \frac{1}{2} R^2$.

Dấu " = " xảy ra khi $M \equiv O$.

Vậy S_{PDEQ} lớn nhất bằng $\frac{1}{2} R^2$ khi $M \equiv O$.

Câu 5: a) Ta có $x^2 + 1 \ge 2x$; $y^2 + 1 \ge 2y$; $z^2 + 1 \ge 2z$ và $2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge 2\left(xy + yz + zx\right)$

Cộng vế theo vế 4 bất đẳng thức trên, ta được

$$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3 \ge 2\left(x + y + z + xy + yz + zx\right).$$

Theo đề bài, ta có $x + y + z + xy + yz + zx = 6$ nên

$$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3 \ge 2.6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 3.$$ (điều phải chứng minh)

b) Lấy 8 số chia cho 7, ta nhận được 8 số dư nhận được 7 trong 7 số sau: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Theo nguyên lý Di-rich-le thì có ít nhất 2 số có cùng số dư.

Giả sử hai số $\overline{abc}$ và $\overline{def}$ là hai số khi chia cho 7 có cùng số dư là r. Suy ra

$$\overline{abc} = 7k + r \text{ và } \overline{def} = 7m + r.$$

Khi đó

$\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1000\left(7k + r\right) + 7m + r = 7\left(1000k + m\right) + 1001r \vdots 7$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

ĐỀ SỐ 8. CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 HUYỆN BA VÌ
NĂM HỌC: 2019 - 2020

Câu 1: 1) Cho biểu thức $P=1+\frac{x+3}{x^2+5x+6}:\left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\frac{3x}{3x^2-12}-\frac{1}{x+2}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P=0;\ P=1$

c) Tìm các giá trị của x để $P>0$

2) Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $A=n^3-6n^2+9n-2$ là một số nguyên tố.

Câu 2: 1) Giải các phương trình: $\sqrt{2-x^2+2x}+\sqrt{-x^2-6x-8}=1+\sqrt{3}$

2) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

Tính giá trị của biểu thức $Q=\left(a^{27}+b^{27}\right)\left(b^{41}+c^{41}\right)\left(c^{2019}+a^{2019}\right)$

Câu 3: 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

2) Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng: $A=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\le\frac{1}{2}$

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH , lấy điểm E bất kì trên AB , kẻ HF vuông góc với HE (F thuộc AC).

a) Chứng minh $HE.BC=EF.AB$

b) Cho $AB=6cm, AC=8cm$, diện tích tam giác HEF bằng $6\,cm^2$. Tính các cạnh của tam giác HEF .

c) Khi điểm E chạy trên AB thì trung điểm I của EF chạy trên đường nào?

Câu 5: Cho ΔABC nhọn. Phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau ở O . Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AO^2=AE.AC$. Trên tia BC lấy F sao cho $CO^2=CF.AC$. Chứng minh E,O,F thẳng hàng.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BÌNH GIANG - NĂM 2019

Câu 1: 1) Cho biểu thức $P=1+\frac{x+3}{x^2+5x+6}:\left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\frac{3x}{3x^2-12}-\frac{1}{x+2}\right)$

a) Sau khi biến đổi thu gọn ta được $P=\frac{x+4}{6}$

b) Với $P=0\Leftrightarrow x=-4(t/m)$ với $P=1\Leftrightarrow x=-2$ (không thỏa mãn đkxđ)

c) $P>0\Leftrightarrow x+4>0\Rightarrow x>-4$ và $x\ne 0;2;-2;-3$

2) Ta có : $A=n^3-6n^2+9n-2=(n-2)(n^2-4n+1)$ để A là số nguyên tố thì

-Nếu $n-2=1\Rightarrow A=-2$ (loại)

-Nếu $n^2-4n+1=1\Rightarrow n=0,n=4$ với n=0 thì A=-2 (loại) với n=4 thì A=2 (nhận)

-Thử tương tự cho các trường hợp n-2=-1 và $n^2-4n+1=-1$ cho ra n=1 là thỏa

Vậy với n=4 hoặc n=1 là giá trị cần tìm

Câu 2: 1) Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2+2x}+\sqrt{-x^2-6x-8}=1+\sqrt{3}$ (1)

ĐKXĐ: $\begin{cases}2-x^2+2x\geq 0\\ -x^2-6x-8\geq 0\end{cases}$

Ta có: $2-x^2+2x=-(x^2-2x-2)=3-(x-1)^2\leq 3$

$-x^2-6x-8=-(x^2+6x+8)=1-(x+3)^2\leq 1$

Do đó: Vế trái (1) $\leq\sqrt{3}+1$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}(x-1)^2=0\\ (x+3)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-3\end{cases}$ (vô lí)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Điều kiện: $a,b,c\neq 0$. Khi đó, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{c(a+b+c)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(ca+cb+c^2+ab)=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\ b=-c\\ c=-a\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a^{27}=-b^{27}\\ b^{41}=-c^{41}\\ c^{2019}=-a^{2019}\end{array}\right.$$

Do đó: $Q=(a^{27}+b^{27})(b^{41}+c^{41})(c^{2019}+a^{2019})=0$

Câu 3: 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

Ta có: $x(x+1)=n(n+2) \Leftrightarrow x^2+x+1=(n+1)^2$ (1)

Với $x \in N^*$ thì: $x^2 < x^2+x+1 < (x+1)^2$ nên x^2+x+1 không phải là số chính phương mà $(n+1)^2$ là số chính phương với $\forall n \in Z$, do đó (1) không xảy ra.

Vậy với mọi số nguyên n cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=n(n+2)$

2) Với $a,b,c>0$, ta có:

$$A=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}$$

$$=\frac{1}{(a^2+b^2)+(b^2+1)+2}+\frac{1}{(b^2+c^2)+(c^2+1)+2}+\frac{1}{(c^2+a^2)+(a^2+1)+2}$$

$$\le \frac{1}{2ab+2b+2}+\frac{1}{2bc+2c+2}+\frac{1}{2ca+2a+2}$$

$$\Rightarrow 2A \le \frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}$$

$$=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{abc}{bc+c+abc}+\frac{b}{abc+ab+b} \quad (\text{do } abc=1)$$

$$=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{b+1+ab}+\frac{b}{1+ab+b}=1$$

$$\Rightarrow A \le \frac{1}{2} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 4:

a) $\Delta AHE" \ \Delta HCF(g-g) \Rightarrow \frac{HE}{HF}=\frac{HA}{HC}(1)$

$\Delta HAB" \ \Delta HCA(g-g) \Rightarrow \frac{HA}{HC}=\frac{AB}{CA}(2)$

Từ (1) và (2) : $\frac{HE}{HF}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \Delta HEF" \ \Delta ABC(c-g-c)$

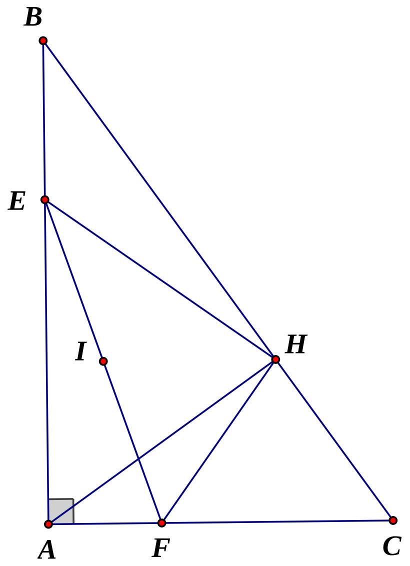
$\Rightarrow \frac{HE}{AB}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow EF.AB=HE.BC$

b) ΔHEF" $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{S_{HEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{EF^2}{BC^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow EF = 5; HE = 3; HF = 4$

c) Ta có : $IH = \dfrac{1}{2}EF$ (đường trung tuyến trong tam giác vuông)

$IA = \dfrac{1}{2}EF$ (đường trung tuyến trong tam giác vuông)

$\Rightarrow IH = IA$ vậy I di chuyển trên đường trung trực của AH khi E chạy trên AB



Câu 5:

Lấy M thuộc AC sao cho $AE = AM$; lấy N thuộc AC sao cho $CF = CN$

Ta có : $AO^2 = AM.AC \Rightarrow \Delta AOM$" $\Delta ACO(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{ACO}(1)$

$CO^2 = CN.CA \Rightarrow \Delta CON$" $\Delta CAO(c-g-c)$

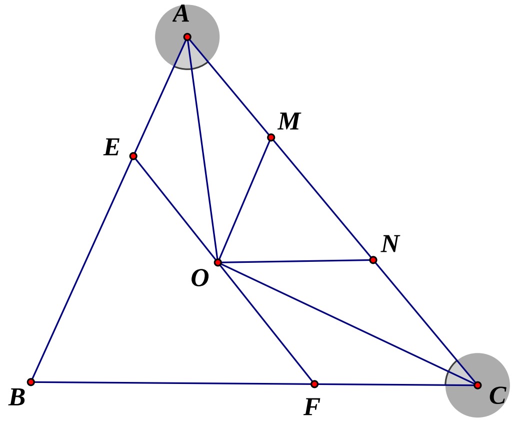
$\Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{CON}(2)$

Mặt khác : $\Delta AOE = \Delta AOM\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{AOE}$

$\Delta CON = \Delta COF\ (c-g-c) \Rightarrow \widehat{CON} = \widehat{COF}$

Mà $\widehat{AOC} + \widehat{CAO} + \widehat{OCA} = 180°$ (Tam giác AOC)

$\Rightarrow \widehat{AOC} + \widehat{COF} + \widehat{AOE} = 180°$ vậy $O,\ E,\ F$ thẳng hàng



ĐỀ SỐ 9. CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 HUYỆN CẨM XUYÊN

NĂM HỌC: 2019 - 2020

Mã đề 01

I. PHẦN ĐIỀN KẾT QUẢ ***(thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)***

Câu 1: Với giá trị nào của x thì $\sqrt{x^2-9}$ có nghĩa?

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Câu 3: Cho các số dương a,b thỏa mãn $2a - 3\sqrt{ab} - 2b = 0$. Tính tỉ số $\dfrac{a}{b}$

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \sqrt{-x^2 + x + \dfrac{1}{2}}$

Câu 5: Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm, AC = 4cm$. Tính khoảng cách từ A đến cạnh BC.

Câu 6: Cho ΔABC nhọn có $AB = 8cm, AC = 10cm$ và $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính độ dài cạnh BC.

Câu 7: Cho ΔABC có $AB = 4cm, AC = 6cm$ và $\widehat{BAC} = 30^0$. Tính diện tích ΔABC

Câu 8: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 10cm$. Tính độ dài cạnh HC.

Câu 9: Cho góc nhọn α. Tính $\tan\alpha$ biết $\cos\alpha = \frac{3}{4}$

Câu 10: Tứ giác $ABCD$ có $AB//CD, AC \perp BD, BH \perp CD$ tại H. Biết $BD = 6cm, BH = 4,8cm$. Tính độ dài đường chéo AC.

II. PHẦN TỰ LUẬN ***(thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)***

Câu 11: Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - \sqrt{x^2 - 4}}$ với $x \ge 2\sqrt{2}$

Câu 12: Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 12x + 13} + \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 3$

Câu 13: Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{a(4a + 5b)} + \sqrt{b(4b + 5a)} \le 3(a + b)$ với a, b là các số không âm. Dấu "=" xảy ra khi nào?

Câu 14: Tìm các số nguyên dương x, y để A, B đồng thời là các số chính phương biết $A = x^2 + y + 1$ và $B = y^2 + x + 4$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Để biểu thức $\sqrt{x^2 - 9}$ có nghĩa thì $x^2 - 9 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -3 \end{array}\right.$

Câu 2: Ta có $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

$A = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}$

$A = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1$

$A = 3$

Câu 3:

$2a - 3\sqrt{ab} - 2b = 0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - 2\sqrt{b}) = 0$ (Vì $2\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$)

$\Rightarrow \sqrt{a} - 2\sqrt{b} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 4$

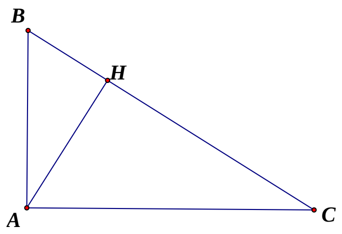
Câu 4:

Ta có $B=\sqrt{-x^2+x+\dfrac{1}{2}}$

$B=\sqrt{-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$

$\Rightarrow MaxB=\dfrac{3}{4}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Câu 5:

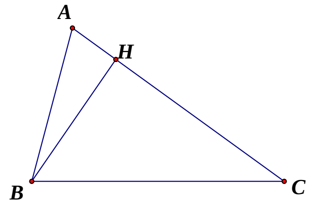


Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}$

$\Leftrightarrow AH^2=\dfrac{144}{25} \Leftrightarrow AH=2,4(cm)$

Vậy khoảng cách từ A đến cạnh BC là 2,4cm

Câu 6:



Kẻ $BH \perp AC$

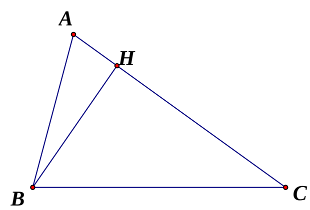
Ta có $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{BH}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH=\dfrac{8.\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}cm$

Có $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{64-48}=\sqrt{16}=4cm$

$\Rightarrow HC=AC-AH=10-4=6cm$

$\Rightarrow BC=\sqrt{HC^2+BH^2}=\sqrt{48+36}=2\sqrt{21}cm$

Câu 7:

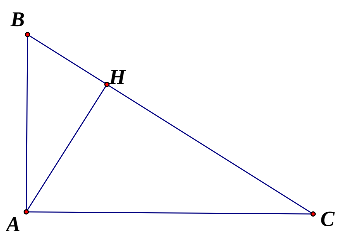


Kẻ $BH \perp AC$

$\sin A=\dfrac{BH}{BA} \Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{BH}{4} \Rightarrow BH=2cm$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BH.AC=\dfrac{1}{2}.2.6=6cm^2$

Câu 8:



Ta có $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow AB=\dfrac{3AC}{4}$

$\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2+AC^2} \Leftrightarrow 10=\sqrt{\dfrac{9AC^2}{16}+AC^2}$

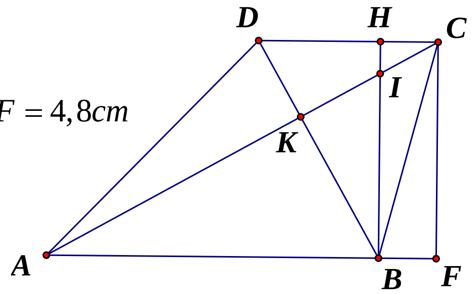
$\Leftrightarrow 100=\dfrac{25AC^2}{16} \Leftrightarrow AC^2=64$

Lại có $AC^2 = HC.BC \Rightarrow 64 = HC.10 \Rightarrow HC = 6,4cm$

Câu 9:

$\cos\alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 41,41^o \Rightarrow \tan\alpha \approx 0,882$

Câu 10:



Gọi giao điểm của BH và AC là I.

Kẻ CH vuông với AB tại F $\Rightarrow HCFB$ là hình chữ nhật $HB = CF = 4,8cm$

$DH = \sqrt{BD^2 - HB^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = \sqrt{12,96} = 3,6cm$

$\Delta IKB \backsim \Delta IHC$ (g-g)

$\Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{ICH}$ hay $\widehat{DBH} = \widehat{ICH}$

Mà $DC // AB \Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{CAB}$

$\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{CAF}$

$\Rightarrow \sin\widehat{DBH} = \sin\widehat{CAF} \Rightarrow \dfrac{DH}{BD} = \dfrac{CF}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{3,6}{6} = \dfrac{4,8}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{6.4,8}{3,6} = 8cm$

II. PHẦN TỰ LUẬN ***(thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)***

Câu 11:

$P = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 4}} - \sqrt{\dfrac{x^2}{4} - \sqrt{x^2 - 4}}$

$P = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{4} + \sqrt{x^2 - 4} + 1} - \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{4} - \sqrt{x^2 - 4} + 1}$

$P = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 1\right)^2}$

$P = \left|\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1\right| - \left|\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 1\right|$

$P = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1 - \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 1$ (Vì $x \ge 2\sqrt{2}$)

$P = 2$

Câu 12:

Ta có

$\sqrt{3x^2 - 12x + 13} = \sqrt{3(x^2 - 4x + 4) + 1} = \sqrt{3(x-2)^2 + 1} \ge 1$

$\sqrt{2x^2-8x+12}=\sqrt{2(x^2-4x+4)+4}=\sqrt{2(x-2)^2+4}\geq\sqrt{4}=2$

$\Rightarrow VT\geq 1+2=3$

Dấu "=" xảy ra $\left(x-2\right)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Câu 13:

Ta có $\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}$

$=\sqrt{a}.\sqrt{(4a+5b)}+\sqrt{b}.\sqrt{(4b+5a)}$

$\leq\sqrt{(a+b)(4a+5b+4b+5a)}$ (Bất đẳng thức Bunhia)

$=\sqrt{9(a+b)^2}$

$=3(a+b)$

Dấu "=" xảy ra $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{4a+5b}}{\sqrt{4b+5a}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{4a+5b}{4b+5a}$

$\Leftrightarrow 4ab+5a^2=4ab+5b^2$

$\Leftrightarrow a=b$ (Vì $a,b>0$)

Câu 14:

Ta có $A=x^2+y+1$

$B=y^2+x+4$

- Với $x\geq y$ thì $x^2\leq x^2+y+1\leq x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$

$\Rightarrow x^2<B<(x+1)^2$

Không tồn tại x,y

- Với $x<y\Rightarrow y^2<y^2+x+4<y^2+y+4<y^2+4y+4=(y+2)^2$

$\Rightarrow y^2<B<(y+2)^2$

$\Rightarrow B=(y+1)^2=y^2+x+4$

$\Rightarrow x=2y-3$

$A=x^2+y+1=(2y-3)^2+y+1=4y^2-11y+10$

Vì A là số chính phương nên $A=k^2$

$\Rightarrow k^2=4y^2-11y+10$

$\Rightarrow 4y^2-11y+10-k^2=0$

$\Rightarrow\Delta=16k^2-39$

Để A là số chính phương $\Rightarrow\Delta$ là số chính phương

$\Rightarrow 16k^2-39=a^2$

$\Rightarrow (4k-a)(ak+a)=39=1.39=3.13$

$\Rightarrow \begin{cases}4k-a=1\\4k+a=39\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=19\\k=5\end{cases}$ và $\Rightarrow \begin{cases}4k-a=3\\4k+a=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5\\k=2\end{cases}$

Với $k=5 \Rightarrow y=-1$ (loại)

Với $k=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$

Vậy cặp số $(1;2)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

ĐỀ SỐ 10. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HƯƠNG KHÊ - NĂM 2019

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ *(Thí sinh chỉ ghi kết quả vào tờ giấy thi)*

Câu 1. Tính giá trị biểu thức: $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Câu 2. Tìm số thực a, b sao cho:

Đa thức $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức x^2-x^2-2.

Câu 3. Viết hai số tiếp theo của dãy 1; 2; 3; 5; 7; 10; 13; 17; 21;…

Câu 4. Tính giá trị của biểu thức: $M=\sqrt{1+2019^2+\left(\frac{2019}{2020}\right)^2}+\frac{2019}{2020}$

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=5x^2+2y^2+4xy-2x+4y+2020$

Câu 6. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $\left(x^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)=4x^2y$

Câu 7. Giả sử x và y là hai số thỏa mãn $x>y$ và $xy=1$. Tìm GTNN của biểu thức $A=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Câu 8. Tìm A là số nguyên dương, biết trong ba mệnh đề P, Q, R dưới đây chỉ có duy nhất một mệnh đề sai:

$P=$ "$A+45$ là bình phương của một số tự nhiên"

$Q=$ "A có chữ số tận cùng là số 7"

1. $R=$ "$A-44$ là bình phương của một số tự nhiên"

Câu 9. Cho tam giác ABC có góc A bằng 120^0, AD là phân giác của góc A $(D\in BC)$. Tính độ dài AD biết $AB=4cm$, $AC=6cm$.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có các đường trung tuyến AE và BD vuông góc với nhau, biết $AB=1cm$. Tính cạnh BC.

II. PHẦN TỰ LUẬN *(Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)*

Câu 11. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{5}{3}$;   b) $x^2-5x+8=2\sqrt{x-2}$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE=CM$.

a) Chứng minh ΔOEM vuông cân.

b) Chứng minh $ME//BN$.

c) Từ C kẻ $CH\perp BN\left(H\in BN\right)$. Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 13. Cho hình vuông có cạnh bằng 1, có chứa 29 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\frac{1}{7}$. Chứng minh rằng tồn tại 1 đường thẳng giao với ít nhất 5 đường tròn.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HƯƠNG KHÊ - NĂM 2019

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ

Câu 1: Tính giá trị biểu thức: $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Hướng dẫn

$$A^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}-2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+2-\sqrt{3}$$

$$A^2=4-2\sqrt{4-3}=4-2=2$$

Vậy $A=1$.

Câu 2: Tìm số thực a, b sao cho:

Đa thức $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức x^2-x^2-2.

Hướng dẫn

Ta thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{l|l} x^4-9x^3+21x^2+ax+b & x^2-x-2 \\ \hline \underline{x^4-\ x^3-2x^2} & x^2-8x+15 \\ \quad -8x^3+23x^2+ax\ +b & \\ \quad \underline{-8x^3+8x^2+16x} & \\ \qquad -15x^2+\left(a-16\right)x+b & \\ \qquad \underline{15x^2-\qquad 15x-30} & \\ \qquad\qquad \left(a-1\right)x+b-30 & \end{array}$$

Vì đa thức $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức x^2-x^2-2,

Nên $\left(a-1\right)x+b-30=0\Rightarrow\begin{cases}a-1=0\\b-30=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=30\end{cases}$.

Vậy $a=1$ và $b=30$.

Câu 3: Viết hai số tiếp theo của dãy $1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 10;\ 13;\ 17;\ 21;\ldots$

Hướng dẫn

Ta thấy:

$$\begin{array}{ll} 1+1=2 & 7+3=10 \\ 2+1=3 & 10+3=13 \\ 3+2=5 & 13+4=17 \\ 5+2=7 & 17+4=21 \end{array}$$

Do đó số tiếp theo là $21+5=26$ và $26+5=31$.

Vậy số cần tìm là 26, 31.

Câu 4: Tính giá trị của biểu thức: $M=\sqrt{1+2019^2+\left(\dfrac{2019}{2020}\right)^2}+\dfrac{2019}{2020}$

Hướng dẫn

Ta có: $2020^2=(2019+1)^2=2019^2+2.2019.1+1$

$\Rightarrow 1+2019^2=2020^2-2.2019$

$$M=\sqrt{1+2019^2+\left(\frac{2019}{2020}\right)^2}+\frac{2019}{2020}=\sqrt{2020^2-2.2019+\frac{2019^2}{2020^2}}+\frac{2019}{2020}$$

$$=\sqrt{\left(2020-\frac{2019}{2020}\right)^2}+\frac{2019}{2020}=2020-\frac{2019}{2020}+\frac{2019}{2020}=2020$$

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=5x^2+2y^2+4xy-2x+4y+2020$

Hướng dẫn

$F=\left[(2x)^2+2.2x.y+y^2\right]+\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+2.y.2+4\right)+2015$

$=(2x+y)^2+(x-1)^2+(y+2)^2+2015$

Vì $(2x+y)^2\ge 0$, $(x-1)^2\ge 0$, $(y+2)^2\ge 0$, với $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Do đó $F\ge 2015$

Vậy F đạt GTNN bằng 2015 khi $\begin{cases}(2x+y)^2=0\\(x-1)^2=0\\(y+2)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

Câu 6: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $\left(x^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)=4x^2y$

Hướng dẫn

PT $\Leftrightarrow x^4+x^2y^2+x^2+y^2=4x^2y$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-y\right)+x^2y(y-1)+x^2(1-y)+y\left(y-x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-y)(x^2-y^2)+(y-1)(x^2y-x^2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-y)^2+(y-1)(y-1).x^2=0$

$\Leftrightarrow (x^2-y)^2+(y-1)^2.x^2=0 \ (*)$

Vì $x,\ y\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} x^2-y\in\mathbb{Z} \\ y-1 \ \in\mathbb{Z} \end{cases}$ hay $\begin{cases} (x^2-y)^2\geq 0 \\ (y-1)^2.x^2\geq 0 \end{cases}$

Kết hợp với $(*)$ suy ra $\begin{cases} x^2-y=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ (x^2-1).x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm1 \end{array}\right. \end{cases}$

- Nếu $x=0$ thì $y=0^2=0$ (Thỏa mãn $x,\ y\in\mathbb{Z}$)

- Nếu $x=1$ thì $y=1^2=1$ (Thỏa mãn $x,\ y\in\mathbb{Z}$)

- Nếu $x=-1$ thì $y=(-1)^2=1$ (Thỏa mãn $x,\ y\in\mathbb{Z}$)

Vậy các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$.

Câu 7: Giả sử x và y là hai số thỏa mãn $x>y$ và $xy=1$. Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Hướng dẫn

Ta có: $A=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{x-y}$

Mà $xy=1$ thay vào A, ta có: $A=\dfrac{(x-y)^2+2}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2}{x-y}+\dfrac{2}{x-y}=x-y+\dfrac{2}{x-y}$

Vì $x>y$ nên $x-y>0$. Áp dụng BĐT Cô-si:

$$A=x-y+\frac{2}{x-y}\geq 2\sqrt{(x-y).\frac{2}{x-y}}$$

hay $A\geq 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow A_{\min}=2\sqrt{2}$ khi $x-y=\dfrac{2}{x-y} \Leftrightarrow (x-y)^2=2$, kết hợp $x-y>0$

$\Rightarrow x-y=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}+y$

Mà $xy=1$, khi đó $(\sqrt{2}+y)y=1 \Leftrightarrow y^2+\sqrt{2}y-1=0$

Ta có $\Delta_y=(\sqrt{2})^2-4.1.(-1)=6>0$

$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}(\text{TM}) \\ y=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}(\text{L}) \end{array}\right.$$. khi đó $x=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

Vậy A đạt GTNN bằng $2\sqrt{2}$ khi $x=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, $y=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Câu 8: Tìm A là số nguyên dương, biết trong ba mệnh đề P, Q, R dưới đây chỉ có duy nhất một mệnh đề sai:

$P=$ " $A+45$ là bình phương của một số tự nhiên"

$Q=$ " A có chữ số tận cùng là số 7"

2. $R=$ " $A-44$ là bình phương của một số tự nhiên"

Hướng dẫn

- Nếu P, Q đúng thì $A+45$ có tận cùng bằng 2. Không là số chính phương, trái với P. Suy ra P hoặc Q sai. (1)

- Nếu Q và R đúng thì $A-44$ có tận cùng bằng 3. Không là số chính phương, trái với R. Suy ra Q hoặc R sai. (2)

Từ (1) và (2) suy ra Q sai.

Mà $A+45$ là bình phương của một số tự nhiên nên $A+45$ có dạng a^2

$A-44$ là bình phương của một số tự nhiên nên $A-44$ có dạng b^2.

$\Rightarrow A+45-(A-44)=a^2-b^2$

$\Rightarrow 89=(a-b)(a+b)$

Mà 89 là số nguyên tố $\Rightarrow a-b=1;\ \ a+b=89$.

$\Rightarrow a=45,\ b=44.$

$\Rightarrow A+45=45^2=2025$

Vậy $A=1980$.

Câu 9: Cho tam giác ABC có góc A bằng 120^0, AD là phân giác của góc A $(D\in BC)$. Tính độ dài AD biết $AB=4\,cm$, $AC=6\,cm$.

Hướng dẫn

Qua D kẻ $DE//AB\,(E\in AB)$

Vì AD là phân giác góc A của ΔABC

$\Rightarrow \dfrac{DC}{DB}=\dfrac{AC}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{DC}{DB+DC}=\dfrac{AC}{AB+AC}$ hay $\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{6}{3+6}\Leftrightarrow \dfrac{DC}{BC}=\dfrac{2}{3}(1)$

Ta có: AB là phân giác góc $A \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{120^0}{2} = 60^0$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{D_1} = 60^0$ ($DE//AB$)

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D_1} = 60^0 \Rightarrow \Delta ADE$ đều

$\Rightarrow AD = DE$

Vì $DE//AB$ (cách dựng)

Xét ΔABC theo hệ quả định lý Ta-lét: $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC}(2)$

Thế (1) vào (2) ta được: $\frac{DE}{AB} = \frac{2}{3}$ hay $\frac{DE}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow DE = \frac{2.3}{3} = 2(cm)$

$\Rightarrow AD = DE = 2cm$.

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, có các đường trung tuyến AE và BD vuông góc với nhau, biết $AB = 1cm$. Tính cạnh BC.

Hướng dẫn

Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{DAB} = \widehat{DBA}$

$\Rightarrow \Delta BAE \backsim \Delta CAB$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AE}$

$\Rightarrow AC.AE = 6 \Leftrightarrow AC^2 = 12 \quad AE = \frac{1}{2}AC$

Áp dụng định lý pytago: $BC = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}$

II. PHẦN TỰ LUẬN *(Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)*

Câu 11: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x}{x^2 - x + 1} - \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}$; b) $x^2 - 5x + 8 = 2\sqrt{x - 2}$.

Lời giải

a) $PT \Leftrightarrow \frac{2x(x^2 + x + 1) - x(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - x^3 + x^2 - x}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 + 3x = 5x^4 + 5x^2 + 5$

$\Leftrightarrow -5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(-5x^3 - 2x^2 + 2x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(1) \\ -5x^2 - 7x - 5 = 0(2) \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow -5x^2 - 7x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 7x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{5}x\right)^2 + 2\sqrt{5}x\frac{7}{2\sqrt{5}} + \left(\frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2\right] + \frac{51}{20} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5}x + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{51}{20} = 0$$

Vì $\left(\sqrt{5}x + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{5}x + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{51}{20} > 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của PT.

b) $x^2 - 5x + 8 = 2\sqrt{x-2}$. ĐK: $x \geq 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 + 2 - 2\sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) + 2 - 2\sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) - 2\left(\sqrt{x-2} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) - \frac{2(x-2-1)}{\sqrt{x-2}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x - 2 - \frac{2}{\sqrt{x-2}+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x - 2 - \dfrac{2}{\sqrt{x-2}+1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3(TM)$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của PT.

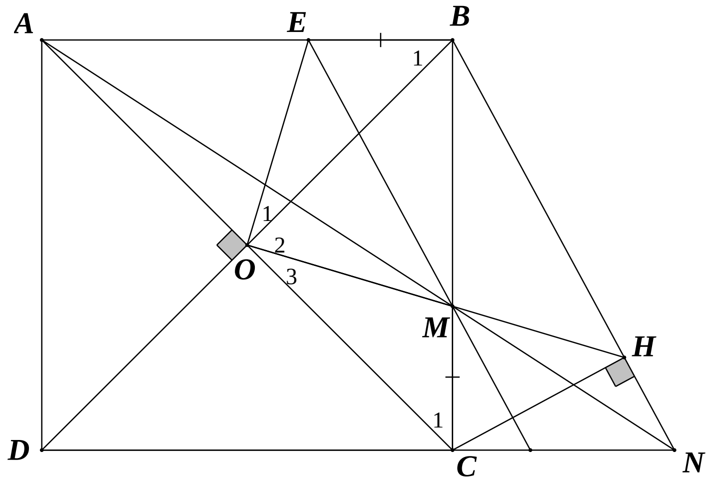
Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

a) Chứng minh ΔOEM vuông cân.

b) Chứng minh $ME // BN$.

c) Từ C kẻ $CH \perp BN\,(H \in BN)$. Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 45^0$ và $OB = OC$.

Xét ΔOEB và ΔOMC có:

$EB = MC$ (GT)

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (CMT)

$OB = OC$ (CMT)

$\Rightarrow \Delta OEB = \Delta OMC\,(c-c-c)$

$\Rightarrow OE = OM$ (2 cặp cạnh t.ư)(1)

$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (2 cặp góc t.ư)

Ta có $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_1} = 90^0$ hay $\widehat{OEM} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra OEM vuông cân.

b) Xét ΔABM và ΔNCM có:

$\widehat{ABM} = \widehat{NCM} = 90^0$

$\widehat{AMB} = \widehat{NMC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta NCM\,(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{BM} = \dfrac{MN}{AM}$ (cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow \dfrac{CM}{BM+CM} = \dfrac{MN}{AM+MN} \Rightarrow \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{MN}{AN}$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{MN}{AN} \Rightarrow \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{MN}{AN}$

$\Rightarrow ME // BN$ (ĐL đảo của ĐL Ta-let)

c) Gọi giao điểm của OM và BN là H'.

Ta có $\widehat{MHB} = \widehat{EMD} = 45^0$

Xét $\Delta BMH'$ và ΔOCM có:

$\widehat{H} = \widehat{C} = 45^0$

$\widehat{BMH'} = \widehat{CMO}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BMH' \backsim \Delta OMC\left(g-g\right)$

Ta có tỉ số: $\dfrac{BM}{MH'}=\dfrac{OM}{MC}$

$\widehat{BMO}=\widehat{H'MC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BMO \backsim \Delta H'MC\left(c-g-c\right)$

$\Rightarrow \widehat{OBM}=\widehat{CH'M}=45^0$

$\Rightarrow \widehat{BH'C}=90^0$

$\Rightarrow H'$ trùng với H

Vậy O, M, H thẳng hàng.

Câu 13: Cho hình vuông có cạnh bằng 1, có chứa 29 đường tròn, mỗi đường tròn có đường kính $\dfrac{1}{7}$. Chứng minh rằng tồn tại 1 đường thẳng giao với ít nhất 5 đường tròn.

Lời giải

Kẻ 9 đường thẳng song song cách đều chia hình vuông thành 10 hình chữ nhật có chiều rộng là $0,1$.

Vì đường kính của mỗi hình tròn lớn hơn $0,1$ nên mỗi đường tròn bị ít nhất một trong 9 đường thẳng vừa kẻ cắt.

Nếu mỗi đường thẳng chỉ cắt không quá 6 đường tròn thì số đường tròn không quá $9.6=54$

Mà có 55 đường tròn nên ít nhất phải có một đường thẳng cắt 7 đường tròn.

ĐỀ SỐ 11. HỌC SINH GIỎI HUYỆN HƯƠNG SƠN 2019-2020

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}$.

Câu 2. Rút gọn biểu thức: $B=\dfrac{1-2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{1}{2}\left(x+y+z\right)$

Câu 4. Cho $a=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$; $b=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Tính a^4+b^4

Câu 5. Cho số tự nhiên $n=999\ldots9$ *(có 2019 chữ số 9)*. Tính tổng các chữ số của n^2.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x}$.

Câu 7. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$), hai đường chéo vuông góc với nhau, biết $AC=16cm$, $BD=12cm$. Tính chiều cao của hình thang.

Câu 8. Một bài thi gồm 20 câu hỏi, mỗi câu hỏi trả lời đúng được cộng 5 điểm; mỗi câu hỏi trả lời sai bị trừ 2 điểm; câu hỏi nào bỏ qua không trả lời nhận được 0 điểm. Khi làm bài thi trên bạn An có câu hỏi trả lời sai và tổng số điểm đạt được là 60 điểm. Hỏi bạn An đã bỏ qua mấy câu hỏi?

Câu 9. Tìm thương của phép chia $x^3+y^3-z^3+3xyz$ cho $x+y-z$.

Câu 10. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $3x^2+10xy+8y^2=96$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 11. a) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$.

b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn: $2a^2+a=3b^2+b$. Chứng minh rằng: $2a+2b-1$ là số chính phương.

Câu 12. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, có trực tâm là H. Qua H vẽ một đường thẳng cắt AB, AC lần lượt tại D và E sao cho $HD=HE$. Qua H vẽ đường thẳng khác vuông góc với DE và cắt BC tại M.

a) Chứng minh $\dfrac{BM}{AH}=\dfrac{HM}{HE}$.

b) Chứng minh M là trung điểm của BC.

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}$, trong đó a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông (c là độ dài cạnh huyền).

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN HƯƠNG SƠN

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}$.

Lời giải

$$A=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+2\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}-2\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}}-\sqrt{2}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2-\sqrt{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{10}.\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{10}-1\right).$$

Câu 2. Rút gọn biểu thức: $B=\dfrac{1-2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

Lời giải

Gọi độ dài của cạnh đối diện với góc có số đo α là a, cạnh góc vuông còn lại và cạnh huyền của tam giác vuông lần lượt là b và c.

Khi đó $B=\dfrac{1-2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}-2\dfrac{ab}{c^2}}{\dfrac{b^2}{c^2}-\dfrac{a^2}{c^2}}=\dfrac{(a-b)^2}{b^2-a^2}=\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\dfrac{a}{b}-1}{\dfrac{a}{b}+1}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$.

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$

Lời giải

$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$

ĐK: $\begin{cases} x\ge 0\\ y\ge 1\\ z\ge 2\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\ge\sqrt{x}\\ \dfrac{y-1}{2}+\dfrac{1}{2}\ge\sqrt{y-1}\\ \dfrac{z-2}{2}+\dfrac{1}{2}\ge\sqrt{z-2}\end{cases}\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}\le\frac{1}{2}(x+y+z)$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$.

Câu 4. Cho $a=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$; $b=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Tính a^4+b^4

Lời giải

$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=\left(\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2-2\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}+1}{4}\right)^2-2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}=\frac{17}{8}.$$

Câu 5. Cho số tự nhiên $n=999\ldots9$ *(có 2019 chữ số 9)*. Tính tổng các chữ số của n^2.

Lời giải

$n=999\ldots9=1000\ldots0-1$ (trong đó có 2019 chữ số 0).

Suy ra $n^2=(1000\ldots0-1)^2=1000\ldots0^2-2000\ldots0+1=999\ldots98000\ldots01$ (trong đó có 2018 chữ số 9 và 2018 chữ số 0).

Vậy tổng các chữ số của n^2 là: $2018.9+8+1=18171$.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x}$.

Lời giải

$C=\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x}$

ĐK: $-3\le x\le 1$ (1)

Vì $C\ge 0$ nên C nhỏ nhất khi C^2 nhỏ nhất.

Ta có: $C^2=4+2\sqrt{(1-x)(3+x)}$.

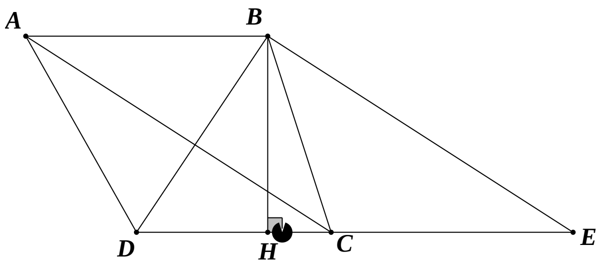
C^2 nhỏ nhất khi $(1-x)(3+x)=3-2x-x^2=-(x^2+2x+1)+4=4-(x+1)^2$ nhỏ nhất, tức là khi $(x+1)^2$ nhỏ nhất. Bởi điều kiện (1) nên $(x+1)^2$ nhỏ nhất khi $x=-3$ hoặc $x=1$.

Khi đó $C^2=4\Rightarrow C=2$.

Câu 7. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$), hai đường chéo vuông góc với nhau, biết $AC=16cm$, $BD=12cm$. Tính chiều cao của hình thang.

Lời giải

Gọi E là giao điểm của đường thẳng song song với AC đi qua B và DC, H là chân đường cao hạ từ B xuống DC.



Vì $\begin{cases}AB//CE\\AC//BE\end{cases}$ nên tứ giác $ABEC$ là hình bình hành. Do đó $AC=BE$.

Vì $\begin{cases}AC//BE\\BD\perp AC\end{cases}$ nên $BDE=90^\circ$.

Xét tam giác vuông DBE có

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{DB^2}+\frac{1}{BE^2}=\frac{1}{12^2}+\frac{1}{16^2}\Rightarrow AH=9,6(cm)$.

Câu 8. Một bài thi gồm 20 câu hỏi, mỗi câu hỏi trả lời đúng được cộng 5 điểm; mỗi câu hỏi trả lời sai bị trừ 2 điểm; câu hỏi nào bỏ qua không trả lời nhận được 0 điểm. Khi làm bài thi trên bạn An có câu hỏi trả lời sai và tổng số điểm đạt được là 60 điểm. Hỏi bạn An đã bỏ qua mấy câu hỏi?

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số câu trả lời đúng, sai, và bỏ qua của An. Vì số điểm của An là 60 nên $x>0$.

Khi đó ta có: $\begin{cases}x+y+z=20\\5x-2y=60\end{cases}$ (1) .

Từ (1) ta có: $x=12+\frac{2y}{5}$ mà x là số tự nhiên nên $y\,\vdots\,5$. Hơn nữa theo giả thiết thì $20>y>0$.

Vậy y có thể bằng 5, 10, 15.

Vì $x+y\le 20$ nên $12+\frac{7y}{5}\le 20\Rightarrow y\le\frac{40}{7}$. Vậy $y=5$, suy ra $x=14$.

Do đó $z=1$.

An đã bỏ qua 1 câu hỏi.

Câu 9. Tìm thương của phép chia $x^3+y^3-z^3+3xyz$ cho $x+y-z$.

Lời giải

Ta có: $x^3+y^3-z^3+3xyz=(x+y-z)\left(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz\right)$.

Vậy thương của phép chia $x^3+y^3-z^3+3xyz$ cho $x+y-z$ là $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz$.

Câu 10. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $3x^2+10xy+8y^2=96$.

Lời giải

Ta có $3x^2+10xy+8y^2=(3x+4y)(x+2y)=96=2^5.3$.

Vì $3x+4y>x+2y$ nên ta có bảng giá trị như sau:

$3x+4y$	$2^5.3$	$2^4.3$	$2^3.3$	$2^2.3$	2^4	2^5
$x+2y$	1	2	2^2	2^3	2.3	3

Dễ dàng nhận thấy chỉ với $\begin{cases}3x+4=2^4\\x+2y=2.3\end{cases}$ thì $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 11. a) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$.

b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn: $2a^2+a=3b^2+b$. Chứng minh rằng: $2a+2b-1$ là số chính phương.

Lời giải

a) $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

Đặt $t=\sqrt{2x+3}, t\ge 0$.

Khi đó (1) trở thành: $(x+1)^2+(t-1)^2=0$. Do đó $\begin{cases}x+1=0\\t-1=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-1\\\sqrt{2x+3}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$.

b) Ta có: $2a^2+a=3b^2+b\Leftrightarrow b^2=(a-b)(2a+2b+1)$ (1).

Đặt $d=\text{UCLN}(2a+2b+1,a-b)$.

$\Rightarrow 2a+2b+1-2(a-b)=(4b+1)\,\vdots\, d$.

Mặt khác, $b^2\,\vdots\, d^2\Leftrightarrow b\,\vdots\, d\Rightarrow 4b\,\vdots\, d$ và bởi $(4b+1)\,\vdots\, d$ nên $1\,\vdots\, d$.

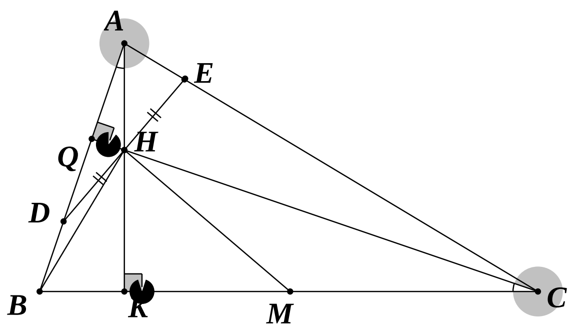
Vậy $(a-b)$ và $(2a+2b+1)$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Kết hợp với (1) cho ta được $(a-b)$ và $(2a+2b+1)$ là hai số chính phương.

Câu 12. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, có trực tâm là H. Qua H vẽ một đường thẳng cắt AB, AC lần lượt tại D và E sao cho $HD = HE$. Qua H vẽ đường thẳng khác vuông góc với DE và cắt BC tại M.

a) Chứng minh $\dfrac{BM}{AH} = \dfrac{HM}{HE}$.

b) Chứng minh M là trung điểm của BC.

Lời giải



a) Gọi AK và CQ là đường cao của ΔABC.

Vì $\widehat{HMB} = \widehat{KHD}$ (cùng phụ với góc KHM) và $\widehat{KHD} = \widehat{AHE}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{HMB} = \widehat{AHE}$. (1)

Ta có $\widehat{HAE} = \widehat{HBM}$ (cùng phụ với góc ACB). (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Delta BHM \sim \Delta AEH$.

Suy ra $\dfrac{BM}{AH} = \dfrac{HM}{HE}$.

b) Ta có: $\begin{cases} \widehat{QHD} = \widehat{EHC} \\ \widehat{QDH} + \widehat{QHD} = \widehat{EHC} + \widehat{MHC} = 90^o \end{cases} \Rightarrow \widehat{QDH} = \widehat{MHC}$ (3)

Lại có $\widehat{DAH} = \widehat{HCM}$ (cùng phụ với góc ABC). (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\Delta DHA \sim \Delta HMC$.

Vậy $\dfrac{HA}{MC} = \dfrac{HD}{HM} \Rightarrow HA.HM = HD.MC$. (5)

Từ câu a : $HA.HM = BM.HE$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $BM.HE = HD.MC \Rightarrow BM = MC$.

Do đó M là trung điểm của BC.

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}$, trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông (c là độ dài cạnh huyền).

Lời giải

Vì $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên $c \geq \sqrt{2ab}$.

$$P = \frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc} = \frac{ab(a+b)+c(a^2+b^2)}{abc} = \frac{a+b}{c} + \frac{c^2}{ab} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{c} + \frac{\sqrt{2ab}.c}{ab}$$

Ta có:

$$\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{\sqrt{2ab}.c}{ab}=\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{ab}}{c}+\frac{c}{\sqrt{ab}}+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)c}{\sqrt{ab}}\ge 2\sqrt{\frac{2\sqrt{ab}}{c}.\frac{c}{\sqrt{ab}}}+\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2ab}}{\sqrt{ab}}$$

$=\sqrt{2}+2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P=\sqrt{2}+2$.

ĐỀ SỐ 12. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HOẰNG HÓA NĂM 2019-2020

Câu 1 (4,0 điểm):

1/ Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

2/ Cho $b>a>0$ và $3a^2+b^2=4ab$. Tính $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Câu 2 (4,0 điểm):

1/ Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

2/ Giải phương trình $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

Câu 3 (4,0 điểm):

1/ Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

2/ Cho $x,\ y,\ z$ là các số nguyên thoả mãn : $\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)=x+y+z$

Chứng minh: $x+y+z$ chia hết cho 27.

Câu 4 (6,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao $AD,\ BE,\ CF$ cắt nhau tại H.

1/ Chứng minh rằng: ΔAEF □ ΔABC

2/ Chứng minh rằng: $AE.BF.CD=AB.BC.CA.cosA.cosB.cosC$.

3/ Chứng minh rằng: $S_{DEF}=\left(1-cos^2A-cos^2B-cos^2C\right).S_{ABC}$.

4/ Cho biết $AH=k.HD$. Chứng minh rằng: $tanB.tanC=k+1$

5/ Chứng minh rằng: $\dfrac{HA}{BC}+\dfrac{BH}{AC}+\dfrac{HC}{AB}\ge\sqrt{3}$.

Câu 5 (2,0 điểm): Cho các số thực $a,\ b,\ c$ dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$

....................HẾT.................

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN HOẰNG HÓA NĂM 2019

Câu 1 (4,0 điểm):

1/ Cho biểu thức $P=\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

2/ Cho $b>a>0$ và $3a^2+b^2=4ab$. Tính $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Lời giải

1/ a/ ĐKXĐ: $x\geq 0$, $x\neq 1$

Ta có $P=\dfrac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$

$=\dfrac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

b) Rút gọn P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Ta có $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x^3=40+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$

$\Leftrightarrow x^3=40+6x \Leftrightarrow x^3-6x-40=0$

$\Leftrightarrow \left(x-4\right)\left(x^2+4x+10\right)=0 \Leftrightarrow x=4$ (vì $x^2+4x+10=\left(x+2\right)^2+6>0$)

Thay $x=4$ vào biểu thức thu gọn ta được $P=3$

2/ Cho $b>a>0$ và $3a^2+b^2=4ab$. Tính $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Ta có $3a^2+b^2=4ab \Leftrightarrow 3a^2-3ab+b^2-ab=0 \Leftrightarrow (a-b)(3a-b)=0$

Vì $b>a>0 \Leftrightarrow a-b<0$. Suy ra $b-3a=0 \Rightarrow b=3a$.

Vì vậy $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a-3a}{a+3a}=\dfrac{-2a}{4a}=-\dfrac{1}{2}$ (vì $a>0$)

Câu 2 (4,0 điểm):

1/ Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

2/ Giải phương trình $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Lời giải

1/ HD: Đặt $\sqrt{x^2+1}=y$, với $y\geq 1$.

Khi đó ta được $y^2+3x=(x+3)y \Leftrightarrow (y-3)(y-x)=0$.

Dẫn đến $y=3$ hoặc $y=x$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\pm 2\sqrt{2}$.

2) Giải phương trình $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Vì: $4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R},\ 4x^2-10x+7=\left(2x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$,

nên ĐKXĐ của phương trình là $\forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của (1).

Chia cả tử và mẫu của (1) cho $x\neq 0$, ta được:

$$\frac{4}{4x+\frac{7}{x}-8}+\frac{3}{4x+\frac{7}{x}-10}=1$$

Đặt $y=4x+\dfrac{7}{x}$, phương trình trở thành: $\dfrac{4}{y-8}+\dfrac{3}{y-10}=1$

$\Leftrightarrow 4(y-10)+3(y-8)=(y-8)(y-10) \Leftrightarrow y^2-25y+144=0$

$\Leftrightarrow y=9$ hoặc $y=16$

+) Với $y=9$, ta được $4x+\dfrac{7}{x}=9 \Leftrightarrow 4x^2-9x+7=0 \Leftrightarrow \left(2x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{31}{16}=0$:

vô nghiệm

+) Với $y=16$, ta được $4x+\dfrac{7}{x}=16 \Leftrightarrow 4x^2-16x+7=0 \Leftrightarrow (2x-4)^2-9=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{7}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{7}{2}$

Câu 3 (4,0 điểm):

1/ Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

2/ Cho $x,\ y,\ z$ là các số nguyên thoả mãn : $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$

Chứng minh: $x+y+z$ chia hết cho 27.

Lời giải

1/ Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$\Leftrightarrow n+18=p^2$ và $n-41=q^2\left(p,q\in\mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow p^2-q^2=\left(n+18\right)-\left(n-41\right)=59\Leftrightarrow\left(p-q\right)\left(p+q\right)=59$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên: $\begin{cases}p-q=\ \ 1\\p+q=59\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=30\\q=29\end{cases}$

Từ $n+18=p^2=30^2=900$ suy ra $n=882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41=841=29^2=q^2$.

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

2/ Khi chia $x,\ y,\ z$ cho 3 ta được một trong các số dư là 0, 1, 2.

* Nếu 3 số dư khác nhau thì $x-y,\ y-z,\ z-x$ đều không chia hết cho 3 nên $\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$ không chia hết cho 3, còn $x+y+z$ chia hết cho 3 (loại).

* Nếu chỉ có 2 số dư giống nhau. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $\left(x-y\right)\vdots 3$ khi đó $x+y+z$ không chia hết cho 3 (loại)

* Nếu 3 số khi chia cho 3 có cùng số dư thì $\left(x-y\right),\ \left(y-z\right),\ \left(z-x\right)$ đều chia hết cho 3 nên $x+y+z=\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\vdots 27$.

Câu 4 (6,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với các đường cao $AD,\ BE,\ CF$ cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng: $\Delta AEF\backsim\Delta ABC$

2) Chứng minh rằng: $AE.BF.CD=AB.BC.CA.cosA.cosB.cosC$.

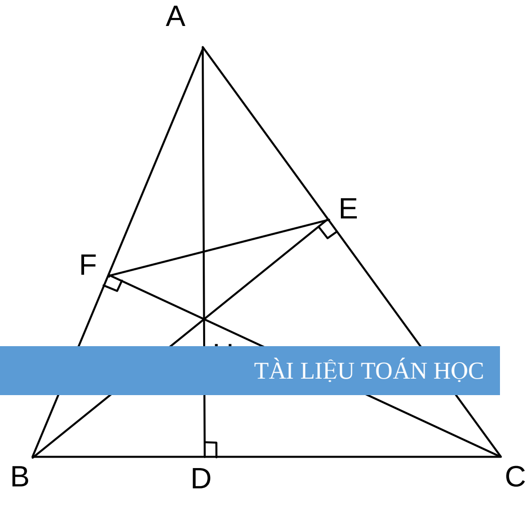
3) Chứng minh rằng: $S_{DEF}=\left(1-cos^2A-cos^2B-cos^2C\right).S_{ABC}$.

4) Cho biết $AH=k.HD$. Chứng minh rằng:

$tanB.tanC=k+1$

5) Chứng minh rằng: $\dfrac{HA}{BC}+\dfrac{BH}{AC}+\dfrac{HC}{AB}\ge\sqrt{3}$.

Lời giải



1) ΔABE vuông tại E nên $cosA=\dfrac{AE}{AB}$

ΔACF vuông tại F nên $cosA=\dfrac{AF}{AC}$. Suy ra

$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}\Rightarrow\Delta AEF\backsim\Delta ABC\left(c.g.c\right)$

2) Ta có: $AE = AB.cosA$; $BF = BC.cosB$;

$CD = AC.cosC$. Từ đó suy ra

$AE.BF.CD = AB.BC.CA.cosA.cosB.cosC$.

3) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC\,(c.g.c) \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = cos^2 A$ (*)

Tương tự (*) có $\dfrac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = cos^2 B$; $\dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = cos^2 C$. Từ đó suy ra:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - cos^2 A - cos^2 B - cos^2 C$$

Suy ra $S_{DEF} = \left(1 - cos^2 A - cos^2 B - cos^2 C\right).S_{ABC}$.

4) Ta có $tanB = \dfrac{AD}{BD}$; $tanC = \dfrac{AD}{CD}$. Suy ra $tanB.tanC = \dfrac{AD^2}{BD.CD}$

Vì $AH = k.HD \Rightarrow AD = AH + HD = k.HD + HD = (k+1).HD$

$\Rightarrow AD = (k+1).HD$ (1) nên $AD^2 = HD^2.(k+1)^2$.

Do đó $tanB.tanC = \dfrac{HD^2(k+1)^2}{BD.CD}$ (2)

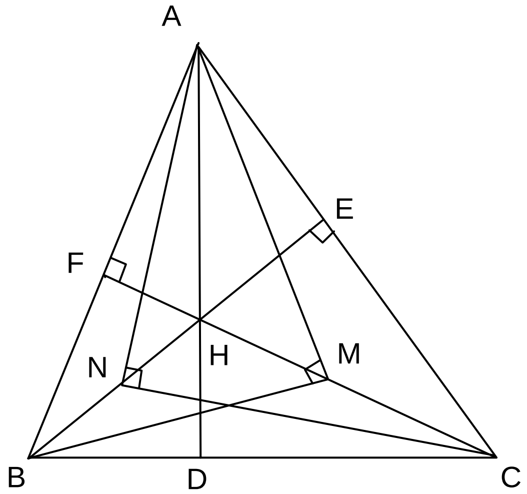
Lại có: $\Delta DHB \backsim \Delta DCA\ (g.g)$ nên $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{HD}{DC} \Rightarrow DB.DC = AD.HD$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có:

$tanB.tanC = \dfrac{HD^2(k+1)^2}{AD.HD} = \dfrac{HD(k+1)^2}{AD} =$

$\dfrac{HD(k+1)^2}{HD.(k+1)} = k+1$.

Vậy $tanB.tanC = k+1$ (đpcm)



5) Đặt

$BC = a,\ CA = b,\ AB = c,$

$AH = x,\ BH = y,\ CH = z$.

Từ $\Delta AFC \backsim \Delta HEC \Rightarrow \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{CE}{CF}$

$\Rightarrow \dfrac{HC.HB}{AC.AB} = \dfrac{CE.HB}{CF.AB} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\dfrac{HB.HA}{AC.BC} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$; $\dfrac{HA.HC}{AB.BC} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$. Do đó:

$$\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} = \frac{HA.HB}{AC.BC} + \frac{HB.HC}{AC.AB} + \frac{HC.HA}{AB.BC} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1$$

Lại có: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 \geq 3.\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ac}\right) = 3.1 = 3$

nên $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} \geq \sqrt{3}$ suy ra đpcm.

Câu 5 (2,0 điểm): Cho các số thực $a,\ b,\ c$ dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$.

Lời giải

$\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{abc}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a(a+b+c)+bc}+\sqrt{bc}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}\right)$

Theo BĐT cosi ta có: $\sqrt{a}=\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{3}.a} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)$

$\left(\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{bc}\right) \leq \frac{a+b+a+c}{2}+\frac{b+c}{2}=1$

Từ đó suy ra $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{abc} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)$

Tương tự ta có:

$\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{abc} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+b\right)$; $\sqrt{c^2+abc}+\sqrt{abc} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+c\right)$

Mà $\sqrt{abc} \leq \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Từ đó $P \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+a\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+b\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}+c\right)+\frac{6}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

ĐỀ SỐ 13. HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 HUYỆN NAM ĐÀN - NĂM 2020

Bài 1. *(4,0 điểm)*. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A=\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{2}$.

b) $B=\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{4(x-y)^2x^2}}{x(x-y)}-\frac{\sqrt{(x-y)^2y^2}}{y(x-y)}$ (Điều kiện: $x<y<0$).

Bài 2. *(5,0 điểm)*.

a) Tìm số tự nhiên n sao cho các số $2n+2017$ và $n+2019$ đều là các số chính phương.

b) Giải phương trình: $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33$.

c) Chứng minh rằng: $A=n^3+3n^2-n-3$ chia hết cho 48 với n là số tự nhiên lẻ.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

a) Cho a, b là các số dương thoả mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2019}$.

Chứng minh: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2019}+\sqrt{b-2019}$.

b) Cho a, b, c là các số dương thoả mãn: $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$.

Bài 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\Delta AEF \# \Delta DBF$.

b) Tính: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}$ theo k. Biết $k=\frac{AH}{HD}$.

c) Chứng minh: $\frac{S_{AEF}}{AH^2}=\frac{S_{DBF}}{BH^2}=\frac{S_{DEC}}{CH^2}$.

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Tính $tan36^\circ$ (không được sử dụng bảng số và máy tính).

---HẾT---

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 HUYỆN NAM ĐÀN - NĂM 2020

Bài 1. *(4,0 điểm)*. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A=\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{2}$.

b) $B=\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{4(x-y)^2x^2}}{x(x-y)}-\frac{\sqrt{(x-y)^2y^2}}{y(x-y)}$ (Điều kiện: $x<y<0$).

Lời giải

a) $A=\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}A=\sqrt{14-2\sqrt{13}}-\sqrt{14+2\sqrt{13}}+2$

$\Rightarrow\sqrt{2}A=\sqrt{\left(\sqrt{13}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{13}+1\right)^2}+2$

$\Rightarrow\sqrt{2}A=\sqrt{13}-1-\sqrt{13}-1+2$

$\Rightarrow A=0$.

b) Vì $x<y<0$ nên $xy>0$ và $x-y<0$. Khi đó:

$$B=\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{4(x-y)^2x^2}}{x(x-y)}-\frac{\sqrt{(x-y)^2y^2}}{y(x-y)}=\frac{xy}{xy}+\frac{2(y-x)(-x)}{x(x-y)}-\frac{(y-x)(-y)}{y(x-y)}$$

$=1+2-1=2$.

Bài 2. *(5,0 điểm)*.

a) Tìm số tự nhiên n sao cho các số $2n+2017$ và $n+2019$ đều là các số chính phương.

b) Giải phương trình: $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33$.

c) Chứng minh rằng: $A=n^3+3n^2-n-3$ chia hết cho 48 với n là số tự nhiên lẻ.

Lời giải

a) **Cách 1:** Với $2n+2017$ và $n+2019$ là các số chính phương.

Đặt $\begin{cases}2n+2017=a^2\\ n+2019=b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2n+2017=a^2\\ 2n+4038=2b^2\end{cases} \Rightarrow 2b^2-a^2=2021$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2}b-a\right)\left(\sqrt{2}b+a\right)=2021$.

Ta xét các trường hợp:

+ TH1: $\begin{cases}\sqrt{2}b-a=43\\ \sqrt{2}b+a=47\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\dfrac{45}{\sqrt{2}}\\ a=2\end{cases} \Rightarrow n=\dfrac{-2013}{2}$ (loại).

+ TH2: $\begin{cases}\sqrt{2}b-a=47\\ \sqrt{2}b+a=43\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\dfrac{45}{\sqrt{2}}\\ a=-2\end{cases} \Rightarrow n=\dfrac{-2013}{2}$ (loại).

+ TH3: $\begin{cases}\sqrt{2}b-a=2021\\ \sqrt{2}b+a=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1011}{\sqrt{2}}\\ a=-1010\end{cases} \Rightarrow n=\dfrac{1018083}{2}$ (loại).

+ TH4: $\begin{cases}\sqrt{2}b-a=1\\ \sqrt{2}b+a=2021\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1011}{\sqrt{2}}\\ a=1011\end{cases} \Rightarrow n=\dfrac{1018083}{2}$ (loại).

Vậy không tồn tại số tự nhiên n nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Đặt $\begin{cases}2n+2017=a^2\\ n+2019=b^2\end{cases} \Rightarrow 2b^2=a^2+2021$ (với $a,b\in\mathbb{N}$).

Ta có $a^2=2n+2017 \Rightarrow a$ là số lẻ. Đặt $a=2k+1$ ($k\in\mathbb{N}$).

Suy ra $2b^2=(2k+1)^2+2021 \Rightarrow b^2=2k(k+1)+1011$. $\quad(1)$

Ta thấy vế trái của (1) là số chính phương nên chia cho 4 dư 0 hoặc dư 1, vế phải của (1) chia

cho 4 dư 3. Do đó không tồn tại số tự nhiên n nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta thấy: $2x^2+3x+9>0, \forall x$.

Phương trình $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9+\sqrt{2x^2+3x+9}=42$

Đặt $t=2x^2+3x+9\ \left(t\ge 0\right)$. Phương trình trở thành: $t^2+t-42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-7 \end{array}\right.$, chọn $t=6$.

Với $t=6 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{-9}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{3;\dfrac{-9}{2}\right\}$.

c) Ta có $A=n^3+3n^2-n-3=n^2\left(n+3\right)-\left(n+3\right)=\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n+3\right)$.

Với n là số tự nhiên lẻ $\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n+3\right)$ là tích của 3 số chẵn liên tiếp nên $A \vdots 8$, $A \vdots 3; A \vdots 2$.

Suy ra $A \vdots 48$.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

a) Cho a, b là các số dương thoả mãn: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2019}$.

Chứng minh: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2019}+\sqrt{b-2019}$.

b) Cho a, b, c là các số dương thoả mãn: $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $a\ge 2019$, $b\ge 2019$.

Ta có: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2019} \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b}=2019$.

Khi đó: $\sqrt{a-2019}+\sqrt{b-2019}=\sqrt{a-\dfrac{ab}{a+b}}+\sqrt{b-\dfrac{ab}{a+b}}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a+b}}$ $=\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{a+b}$.

b) Ta có: $\sqrt{a^2+ab+b^2}\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a+b\right)$ (1)

$\sqrt{b^2+bc+c^2}\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(b+c\right)$ (2)

$\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(c+a\right)$ (3)

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3) ta được: $M\ge \sqrt{3}\left(a+b+c\right)=3\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy GTNN $M=3\sqrt{3}$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Bài 4. *(6,0 điểm)*

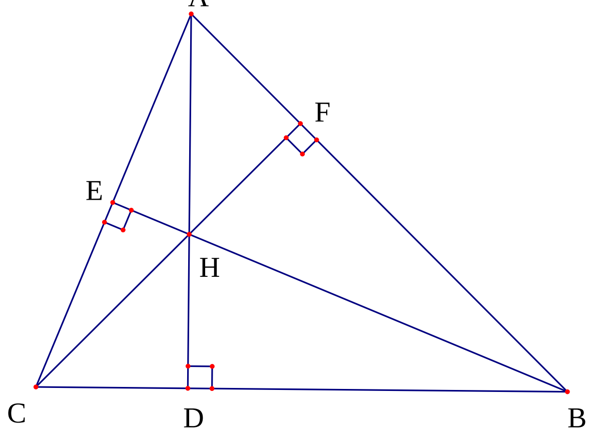
Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\Delta AEF \# \Delta DBF$.

b) Tính: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}$ theo k. Biết $k=\dfrac{AH}{HD}$.

c) Chứng minh: $\dfrac{S_{AEF}}{AH^2}=\dfrac{S_{DBF}}{BH^2}=\dfrac{S_{DEC}}{CH^2}$.

Lời giải



a) Xét ΔAEF và ΔABC có: $\hat{A}$ chung; $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$ $(=cosA)$. Suy ra $\Delta AEF \# \Delta ABC$ (c.g.c).

Tương tự cũng có: $\Delta DBF \# \Delta ABC$ (c.g.c).

Do đó: $\Delta AEF \# \Delta DBF$ (đpcm).

b) Ta có: $\widehat{ACB}=\widehat{BHD}$ (cùng phụ với $\widehat{HBD}$).

Suy ra: $tan\widehat{ACB}=tan\widehat{BHD}=\dfrac{BD}{HD}$ (vì ΔBHD vuông tại D);

$tan\widehat{ABC}=\dfrac{AD}{BD}$ (vì ΔABD vuông tại D).

Khi đó: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}=\dfrac{AD}{BD}.\dfrac{BD}{HD}=\dfrac{AD}{HD}$ $\quad(1)$

Mặt khác: $k=\dfrac{AH}{HD}\Rightarrow\dfrac{AH+HD}{HD}=k+1$ hay $\dfrac{AD}{HD}=k+1$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $tan\widehat{ABC}.tan\widehat{ACB}=k+1$.

c) Ta có: $\Delta AEH \# \Delta BDH$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{AE}{BD}\Rightarrow\dfrac{AH^2}{BH^2}=\dfrac{AE^2}{BD^2}$.

Tương tự: $\dfrac{BH^2}{CH^2}=\dfrac{FB^2}{CE^2}$.

Theo câu a) ta có: $\Delta AEF\#\ \Delta DBF \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{DBF}}=\dfrac{AE^2}{BD^2}=\dfrac{AH^2}{BH^2}$.

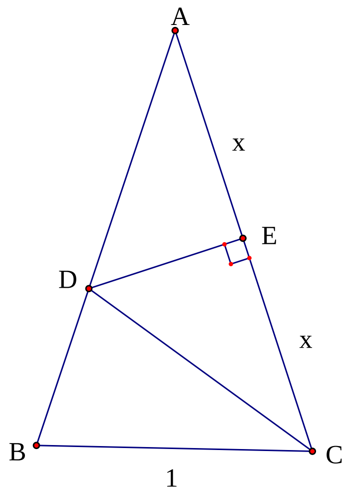
Chứng minh tương tự câu a) ta được: $\Delta DBF\#\ \Delta DCE \Rightarrow \dfrac{S_{DBF}}{S_{DCE}}=\dfrac{BF^2}{CE^2}=\dfrac{BH^2}{CH^2}$.

Do đó: $\dfrac{S_{AEF}}{S_{DBF}}=\dfrac{AH^2}{BH^2};\ \dfrac{S_{DBF}}{S_{DCE}}=\dfrac{BH^2}{CH^2}\ \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{AH^2}=\dfrac{S_{DBF}}{BH^2}=\dfrac{S_{DEC}}{CH^2}$ (đpcm).

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Tính $tan36^\circ$ (không được sử dụng bảng số và máy tính).

Lời giải



Vẽ ΔABC cân tại A, có $BC=1$; $\widehat{A}=36^\circ$; $\widehat{B}=\widehat{C}=72^\circ$.

Vẽ phân giác CD của góc $C \Rightarrow \Delta ADC$ cân tại D và ΔDCB cân tại C
$\Rightarrow DA=DC=BC=1$.

Kẻ $DE\perp AC$ tại E.

Đặt $AE=x\Rightarrow EC=x;\ AC=AB=2x;\ BD=2x-1$.

Mặt khác CD là phân giác của góc $C\Rightarrow \dfrac{DA}{DB}=\dfrac{AC}{CB}$ hay $\dfrac{1}{2x-1}=2x$

$$\Rightarrow 4x^2-2x-1=0\Rightarrow\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\qquad (*)$$

Nghiệm dương của phương trình $(*)$ là: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Ta có: $cos36^\circ=\dfrac{x}{AD}=x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Mà $sin^2 36^\circ+cos^2 36^\circ=1\Rightarrow sin^2 36^\circ=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}\Rightarrow sin36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Suy ra $tan36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}:\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$.

ĐỀ SỐ 14. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN NHƯ THANH - NĂM 2019

Câu 1. (*2,0 điểm*) Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$

1. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa và rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 2.
3. Tính giá trị của biểu thức A tại $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Câu 2. (*2,0 điểm*)

1. Giải phương trình ẩn x sau: $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2-1}=0$.
2. Giải hệ phương trình 2 ẩn x, y:

$$\begin{cases} x^3+xy^2+x^2+2x=y^3+yx^2+y^2+2y \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{y}+\sqrt{4y-x+1}=y^2+x+2y+1 \end{cases}.$$

Câu 3. (*2,0 điểm*)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+4y^2+xy\left(xy+2x-12\right)=8\left(x-2\right)$.
2. Tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho n^2 biểu diễn được thành tổng của một số lẻ các số chính phương liên tiếp.

Câu 4. (*2,0 điểm*)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB bằng $2R$ ($R>0$, R là hằng số). Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, tiếp tuyến này cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD.

1. Tính số đo góc COD; Chứng minh $CD=2OI$ và OI vuông góc với AB.
2. Chứng minh $AC.BD=R^2$.
3. Tìm vị trí điểm M để hình thang $ABDC$ có chu vi nhỏ nhất, khi đó hãy chứng minh diện tích của hình thang này cũng nhỏ nhất.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=2018\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\frac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

---HẾT---

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN NHƯ THANH - NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*) Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$

1. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa và rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x để biểu thức A nhận giá trị bằng 2.
3. Tính giá trị của biểu thức A tại $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x\ge 0$; $x\ne 1$.

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\left[\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2.\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2.\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2.\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2.\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}\ .$$

Vậy $A=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$; $x\ne 1$.

2. Ta có $A=2\Rightarrow \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}=2$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0\left(t/m\right)$ (vì $\sqrt{x}+1>0$ với $\forall x$)

Vậy $x=0$ thì $A=2$.

3. Ta có : $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$

$$\Leftrightarrow x-3=\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3.\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}$$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \left[3+3\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\right].\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \left[1+\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\right].\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \left(\sqrt[3]{2}-1\right)+\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = \sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2^2}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = 1 \Leftrightarrow x-3=1$

$\Leftrightarrow x = 4\left(t/m\right)$

Thay $x=4$ thỏa mãn ĐKXĐ vào A ta được $A=\dfrac{2}{4+\sqrt{4}+1}=\dfrac{2}{7}$.

Vậy $A=\dfrac{2}{4+\sqrt{4}+1}=\dfrac{2}{7}$ với $x=3+\left(\sqrt[3]{2}+1\right).\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình ẩn x sau: $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2-1}=0$.

2. Giải hệ phương trình 2 ẩn x, y:

$$\begin{cases} x^3+xy^2+x^2+2x=y^3+yx^2+y^2+2y \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{y}+\sqrt{4y-x+1}=y^2+x+2y+1 \end{cases}.$$

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x\neq 0$; $x\neq \pm 1$.

$\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\dfrac{3x}{x(x-1)(x+1)}=0$

$\Rightarrow 4x^3+4x^2+2x^2-2+3x=0$

$\Leftrightarrow 4x^3+6x^2+3x-2=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{8}$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{2}$.

2. ĐKXĐ: $\begin{cases} x \le 5 \\ y \ge 0 \\ 4y - x + 1 \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2 + 2x = y^3 + yx^2 + y^2 + 2y & (1) \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{y} + \sqrt{4y-x+1} = y^2 + x + 2y + 1 & (2) \end{cases}$$

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3 - y^3 + xy^2 - yx^2 + x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) - xy(x-y) + (x-y)(x+y) + 2(x-y) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+x+y+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right] = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0$ vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > 0 \ \forall x, y$

$\Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được

$\sqrt{5-y} + \sqrt{y} + \sqrt{3y+1} = y^2 + 3y + 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5-y} - 2\right) + \left(\sqrt{y} - 1\right) + \left(\sqrt{3y+1} - 2\right) = y^2 + 3y - 4$

$\Leftrightarrow \frac{-(y-1)}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3(y-1)}{\sqrt{3y+1}+2} = (y-1)(y+4)$

$\Leftrightarrow \frac{-(y-1)}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3(y-1)}{\sqrt{3y+1}+2} - (y-1)(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)\left(\frac{-1}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3}{\sqrt{3y+1}+2} - y - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow y - 1 = 0$ (vì $\frac{-1}{\sqrt{5-y}+2} + \frac{1}{\sqrt{y}+1} + \frac{3}{\sqrt{3y+1}+2} - y - 4 < 0 \ \forall y \ge 0$)

$\Leftrightarrow y = 1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$\Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1;1)$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4y^2 + xy(xy + 2x - 12) = 8(x-2)$.

2. Tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho n^2 biểu diễn được thành tổng của một số lẻ các số chính phương liên tiếp.

Lời giải

1. Phương trình $2x^2 + 4y^2 + xy(xy + 2x - 12) = 8(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4y^2 + x^2y^2 + 2x^2y - 12xy - 8x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2y^2 + 16 + 2x^2y - 8xy - 8x + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+xy-4)^2+(x-2y)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ x+xy-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y^2+2y-4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=1 \\ x=-4; y=-2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy các cặp số $(2;1)$ và $(-4;2)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2.

+) Xét $n^2=(a-1)^2+a^2+(a+1)^2$, $(a>1)$ (Tổng của 3 số chính phương)

$=3a^2+2$ (Loại vì số dư của số chính phương khi chia cho 3 không thể là 2).

+) Xét $n^2=(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2(a+2)^2$ (Tổng của 5 số chính phương)

$=5a^2+2(1^2+2^2)$

$=5(a^2+2)$.

$\Rightarrow n^2 \vdots 5^2 \Rightarrow (a^2+2) \vdots 5$

Mà a^2 có số dư là 0 hoặc 1 khi chia cho 5 nên $a^2+2 \not\vdots 5$.

+) Xét $n^2=(a-3)^2+(a-2)^2+(a-1)^2+...+(a+3)^2$ (Tổng của 7 số chính phương)

$=7(a^2+4)$

$\Rightarrow n^2 \vdots 7^2 \Rightarrow a^2+4 \vdots 7$ (Không xảy ra)

+) Xét $n^2=(a-4)^2+(a-3)^2+(a-2)^2+...+(a+4)^2$ (Tổng của 9 số chính phương)

$=9a^2+2.30=3(3a^2+20)$

$\Rightarrow n^2 \vdots 3^2$ (Vô lí)

+) Xét $n^2=(a-5)^2+(a-4)^2+(a-3)^2+...+(a+5)^2$ (Tổng của 11 số chính phương)

$=11(a^2+10) \qquad (a>5)$

$\Rightarrow n^2 \vdots 11^2 \Rightarrow a^2+10 \vdots 11$

$\Rightarrow a \equiv 1 (\text{mod} 11)$

$\Rightarrow a=11k \pm 1$, $a>5$

Thử với $a \in \{9, 12, 20, 23\}$ chỉ có $a = 23$ thỏa mãn

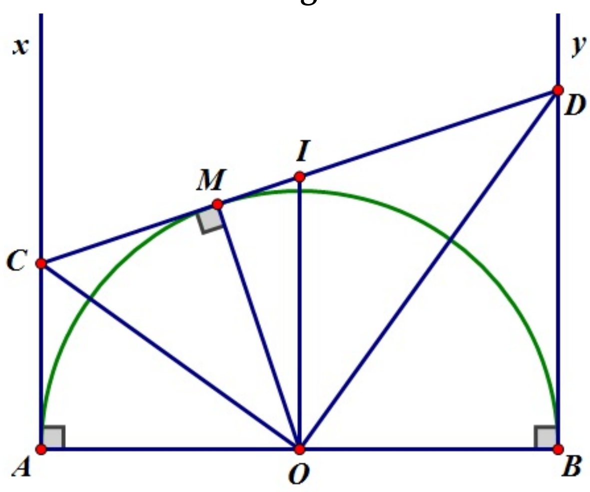
$\Rightarrow n = 77$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: (*2,0 điểm*)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB bằng $2R$ ($R > 0$, R là hằng số). Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, tiếp tuyến này cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD.

1. Tính số đo góc COD; Chứng minh $CD = 2OI$ và OI vuông góc với AB.
2. Chứng minh $AC.BD = R^2$.
3. Tìm vị trí điểm M để hình thang $ABDC$ có chu vi nhỏ nhất, khi đó hãy chứng minh diện tích của hình thang này cũng nhỏ nhất.

Lời giải



1. Hai tiếp tuyến CM, CA của (O) cắt nhau tại C $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\widehat{MOA}$.

Tương tự ta cũng có OD là tia phân giác của $\widehat{MOB}$

Mà $\widehat{MOA} + \widehat{MOB} = 2\left(\widehat{COM} + \widehat{DOM}\right) = 180° \Rightarrow \widehat{COD} = \widehat{COM} + \widehat{DOM} = 90°$.

+) Xét ΔCOD có $\widehat{COD} = 90° \Rightarrow \Delta COD$ vuông tại O có I là trung điểm của CD

$\Rightarrow OI$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền CD $\Rightarrow CD = 2OI$.

+) Xét tứ giác $ABDC$ có $CA // DB$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow ABDC$ là hình thang.

Ta lại có O và I lần lượt là trung điểm của AB, CD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $ABDC$

$\Rightarrow OI // CA \Rightarrow OI \perp AB$. (vì $CA \perp AB(gt)$)

2. Hai tiếp tuyến CM, CA của (O) cắt nhau tại $C \Rightarrow AC = MC$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $BD = MD$ (2)

Xét ΔCOD vuông tại O có $OM \perp CD$

$\Rightarrow OM^2 = MC.MD$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

$\Rightarrow MC.MD = R^2$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AC.BD = R^2$.

3. Chu vi hình thang $ABDC$ là: $C_{ABDC} = AB + BD + CD + AC = AB + 2CD$

Vì $AB = 2R$ không đổi nên $C_{ABDC} = AB + 2CD$ nhỏ nhất khi nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất

Ta có $CD \ge AB = 2R \Rightarrow C_{ABDC} = AB + 2CD \ge 2R + 4R = 6R$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $CD = AB$. Khi đó $CD//AB$

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa nửa đường tròn (O) thì chu vi hình thang $ABDC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

+) Khi M là điểm chính giữa nửa đường tròn (O) ta có $CD = AB$ suy ra

$$S_{ABDC} = \frac{(AC + BD).AB}{2} = \frac{CD.AB}{2} = \frac{2R.2R}{2} = 4R$$

Vì $S_{ABDC} = \dfrac{CD.AB}{2}$ nên CD nhỏ nhất thì S_{ABDC} nhỏ nhất

Vì M di chuyển trên nửa đường tròn (O) nên $CD \ge AB = 2R$

$\Rightarrow S_{ABDC} \ge 4R \Rightarrow MinS_{ABDC} = 4R$

$\Rightarrow$ đpcm.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2018\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + \frac{1}{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}.$$

Lời giải

Chứng minh $\left(\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}\right)^2 \ge 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

$$VT = \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} + 2\left(\frac{a^2 b}{c} + \frac{b^2 c}{a} + \frac{c^2 a}{b}\right)$$

Ta có $\dfrac{a^4}{b^2} + \dfrac{a^2 b}{c} + bc \ge 3a^2$

Tương tự $\dfrac{b^4}{c^2} + \dfrac{b^2 c}{a} + ac \ge 3b^2$

$\dfrac{c^4}{a^2} + \dfrac{c^2 a}{b} + ab \ge 3c^2$

$\Rightarrow VT + ab + bc + ca \ge 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \dfrac{a^2b}{c} + \dfrac{b^2c}{a} + \dfrac{c^2a}{b}$ (1)

Mà $\left(\dfrac{a^2b}{c} + \dfrac{b^2c}{a} + \dfrac{c^2a}{b}\right)(bc + ac + ab) \ge (ab + bc + ca)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2b}{c} + \dfrac{b^2c}{a} + \dfrac{c^2a}{b} \ge ab + bc + ca$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow VT \ge 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \ge \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$

Khi đó

$P \ge 2016\left(\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a}\right) + \Leftrightarrow \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} + \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} + \dfrac{1}{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$

$\ge 2016(a + b + c) + 3\sqrt[3]{\sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}.\sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}.\dfrac{1}{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}$

$= 2016 + 3 = 2019$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Vậy $Min\,P = 2019$ xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

ĐỀ SỐ 15. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN KIM ĐỘNG - NĂM 2019

Câu 1. (*2,0 điểm*)

a) $\dfrac{1}{x^2 + 9x + 20} + \dfrac{1}{x^2 + 11x + 30} + \dfrac{1}{x^2 + 13x + 42} = \dfrac{1}{18}$

b) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{(x + 1)x} + \sqrt{x} - 1 = 0$

Câu 2. (*2,0 điểm*)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$

b) So sánh $B = \sqrt{2020^2 - 1} - \sqrt{2019^2 - 1}$ và $C = \dfrac{2.2019}{\sqrt{2020^2 - 1} + \sqrt{2019^2 - 1}}$

Câu 3. (*2,0 điểm*)

a) Chứng minh hàm số $y = \left(m^2 - 2m + 2\right)x$ luôn đồng biến với mọi tham số m.

b) Cho các số a, b thỏa mãn: $a - b = 3$ và $a \ne -1$; $b \ne 5$; $b \ne -4$.

Tính giá trị của biểu thức: $E = \dfrac{a - 8}{b - 5} - \dfrac{4a - b}{3a + 3}$

Câu 4. (*3,0 điểm*): Cho tam giác ABC nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D xuống AB và AC.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$

b) Giả sử $HD = \frac{1}{3}AD$ và $\widehat{ABC} = \alpha$; $\widehat{ACB} = \beta$. Chứng minh $\tan\alpha.\tan\beta = 3$.

c) Gọi M; N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Câu 5. (*1,0 điểm*): Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN KIM ĐỘNG- NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*)

a) $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$.

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)x}+\sqrt{x}-1=0$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x\ne -4 \\ x\ne -5 \\ x\ne -6 \\ x\ne -7 \end{cases}$.

$$\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7-x-4}{(x+4)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x+4)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow x^2+11x+28=54$$

$$\Leftrightarrow x^2+11x-26=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+13x-2x-26=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+13)-2(x+13)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+13)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \quad \text{(tm)} \\ x=-13 \text{ (tm)} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-13;\ 2\}$.

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)x}+\sqrt{x}-1=0$

Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

$\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)x}+\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-1=0\\ 1-\sqrt{x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\ \text{(tm)}\\ x=1\ \text{(tm)}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;\ 1\}$.

Câu 2: *(2,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$.

b) So sánh $B=\sqrt{2020^2-1}-\sqrt{2019^2-1}$ và $C=\dfrac{2.2019}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}$.

Lời giải

a) $A=\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

$A=\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt[3]{2}$.

b) Ta có

$B=\sqrt{2020^2-1}-\sqrt{2019^2-1}=\dfrac{\left(2020^2-1\right)-\left(2019^2-1\right)}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}=\dfrac{2020^2-2019^2}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}$

$=\dfrac{(2020-2019)(2020+2019)}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}=\dfrac{2020+2019}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}>\dfrac{2.2019}{\sqrt{2020^2-1}+\sqrt{2019^2-1}}$

$=C$

Vậy ta có $B>C$.

Câu 3: *(2,0 điểm)*

a) Chứng minh hàm số $y=\left(m^2-2m+2\right)x$ luôn đồng biến với mọi tham số m.

b) Cho các số a, b thỏa mãn: $a-b=3$ và $a\ne -1$; $b\ne 5$; $b\ne -4$.

Tính giá trị của biểu thức: $E=\dfrac{a-8}{b-5}-\dfrac{4a-b}{3a+3}$.

Lời giải

a) Ta có: $m^2-2m+2=(m-1)^2+1>0\ \ \forall m\in\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y=\left(m^2-2m+2\right)x$ luôn đồng biến với mọi tham số m.

b) $E=\dfrac{a-8}{b-5}-\dfrac{4a-b}{3a+3}$

Có $a-b=3\Rightarrow a=b+3$

$$E=\frac{a-8}{b-5}-\frac{4a-b}{3a+3}=\frac{b+3-8}{b-5}-\frac{4(b+3)-b}{3(b+3)+3}=\frac{b-5}{b-5}-\frac{3b+12}{3b+12}=1-1=0$$

Vậy $E=0$.

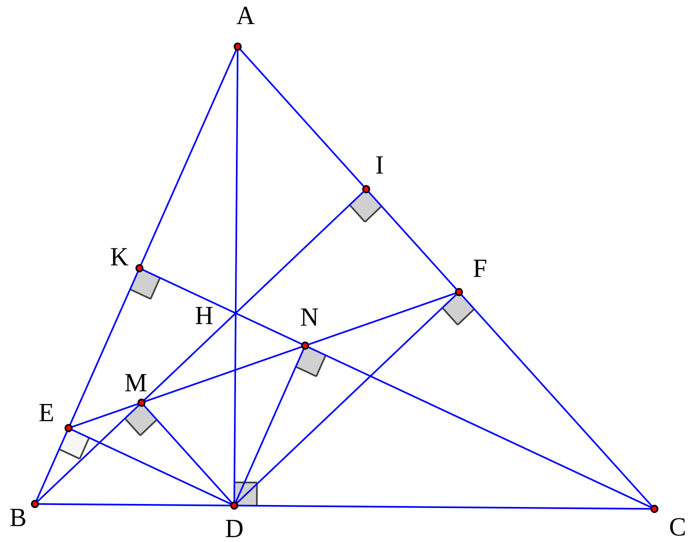
Câu 4: (*3,0 điểm*) Cho tam giác ABC nhọn, có ba đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D xuống AB và AC.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB=AF.AC$

b) Giả sử $HD=\dfrac{1}{3}AD$ và $\widehat{ABC}=\alpha$; $\widehat{ACB}=\beta$. Chứng minh $\tan\alpha.\tan\beta=3$.

c) Gọi M; N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BI và CK. Chứng minh bốn điểm E,M,N,F thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét ΔADB vuông tại D ta có $DE\perp AB$

$\Rightarrow AE.AB=AD^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)

Xét ΔADC vuông tại D ta có $DF\perp AC$

$\Rightarrow AF.AC=AD^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE.AB=AF.AC$ (đpcm).

b) Ta có $HD=\dfrac{1}{3}AD\Rightarrow\dfrac{AD}{HD}=3$

Xét ΔADB vuông tại D ta có:

$\tan\alpha=\tan\widehat{ABD}=\dfrac{AD}{BD}$

Xét ΔADC vuông tại D ta có:

$\tan\ \beta = \tan\ \widehat{ACD} = \dfrac{AD}{DC}$

$\Rightarrow \tan\ \alpha . \tan\ \beta = \dfrac{AD^2}{BD.DC}$ (3)

Xét ΔADB và ΔCDH ta có :

$\widehat{ADB} = \widehat{CDH}\ (= 90°)$

$\widehat{DAB} = \widehat{DCH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABD}$)

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta CDH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{DC}{HD}$ (cặp cặp tương ứng)

$\Rightarrow AD.HD = BD.DC$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD.DC} = \dfrac{1}{HD}$

$\Rightarrow \dfrac{AD^2}{BD.DC} = \dfrac{AD}{HD}$

Mà $\dfrac{AD}{HD} = 3 \Rightarrow \dfrac{AD^2}{BD.DC} = 3$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \tan\ \alpha . \tan\ \beta = 3$ (đpcm).

c) Xét tứ giác $DEKN$ ta có :

$\widehat{DEK} = 90°$ (do $DE \perp AB$)

$\widehat{EKN} = 90°$ (do $CK \perp AB$)

$\widehat{DNK} = 90°$ (do $DN \perp KC$)

$\Rightarrow$ tứ giác $DEKN$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow \widehat{EDN} = 90°$

Ta có: $\widehat{HDN} = \widehat{BDE}$ (cùng phụ với $\widehat{EDH}$) (5)

Xét tứ giác $BEMD$ ta có:

$\widehat{BED} = \widehat{BMD}\ (= 90°)$

Mà $\widehat{BED}$ và $\widehat{BMD}$ là 2 góc kề nhau cùng nhìn cạnh BD dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ tứ giác $BEMD$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết) (6)

$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BDE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MD}$)

Chứng minh được tứ giác $MDNH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HMN} = \widehat{HDN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{HN}$) (7)

Từ (5); (6); (7) $\Rightarrow \widehat{HMN} = \widehat{BME}$

$\Rightarrow E$, M, H thẳng hàng

Chứng minh tương tự ta có M, N, F thẳng hàng

$\Rightarrow$ bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.

Câu 5: *(1,0 điểm)* Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si đối với hai số dương a^5 và $\frac{1}{a}$ ta có:

$a^5+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a^5.\frac{1}{a}}=2a^2$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si đối với hai số dương b^5 và $\frac{1}{b}$ ta có:

$b^5+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{b^5.\frac{1}{b}}=2b^2$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si đối với hai số dương c^5 và $\frac{1}{c}$ ta có:

$c^5+\frac{1}{c}\geq 2\sqrt{c^5.\frac{1}{c}}=2c^2$ (3)

Cộng từng vế của (1); (2); và (3) ta có:

$a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)$ (4)

Ta lại có:

$a^2+1\geq 2a$

$b^2+1\geq 2b$

$c^2+1\geq 2c$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+3\geq 2(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})$

Mà $a+b+c=3$ nên suy ra $a^2+b^2+c^2+3\geq 6\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 3$ (5)

$\Rightarrow a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$

Vậy: $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$.

ĐỀ SỐ 16. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN THẠCH HÀ - NĂM 2019 -2020

Bài 1:

a) Tính giá trị biểu thức $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

b) Chứng minh rằng: $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}$.

c) Tính giá trị biểu thức $N=x^{2019}+3x^{2020}-2x^{2021}$ với

$x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

d) Cho $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Tính $M=x^5+y^5$.

e) Cho $M=\left(a^2+2bc-1\right)\left(b^2+2ac-1\right)\left(1-c^2-2ab\right)$. Trong đó a,b,c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Bài 2:

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xyz=2\left(x+y+z\right)$.

b) Tìm các số a,b,c sao cho đa thức $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ chia cho $x+2$; $x+1$; $x-1$ đều dư 8.

c) Tìm các số tự nhiên x,y biết: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^2+\dfrac{9x^2}{\left(x-3\right)^2}=16$ b) $\sqrt{x\left(x-1\right)}+\sqrt{x\left(x-5\right)}=2\sqrt{x^2}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Tính AH,BH biết $BC=50\,cm$ và $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng: $AH^3=BC.BD.CE$.

c) Giả sử $BC=2a$ là độ dài cố định. Tính giá trị nhỏ nhất của: BD^2+CE^2.

Bài 5: Cho $0\le a,b,c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=a+b^{2019}+c^{2020}-ab-bc-ac$$

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN THẠCH HÀ - NĂM 2019 -2020

Bài 1:

a) Tính giá trị biểu thức $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

b) Chứng minh rằng: $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}$.

c) Tính giá trị biểu thức $N=x^{2019}+3x^{2020}-2x^{2021}$ với $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

d) Cho $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Tính $M=x^5+y^5$.

e) Cho $M=\left(a^2+2bc-1\right)\left(b^2+2ac-1\right)\left(1-c^2-2ab\right)$. Trong đó

a,b,c là các số hữu tỉ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Lời giải

a) $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\left(2\sqrt{5}-3\right)}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=\sqrt{\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)}=1$.

b) $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\Rightarrow A^2=\dfrac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}\Rightarrow A=\sqrt{2}\left(dpcm\right)$.

c) $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)=-1$

Với $x=-1$, ta có: $N=-1+3+2=4$.

d) Ta có: $xy=\dfrac{1}{2}$ và $x+y=\sqrt{3}$.

$x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy=\left(\sqrt{3}\right)^2-2.\dfrac{1}{2}=2$

$x^3+y^3=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3-3.\dfrac{1}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy $x^5+y^5=\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)-x^2y^2\left(x+y\right)=2.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{4}.\sqrt{3}=\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$.

e) $M=\left(a^2+2bc-1\right)\left(b^2+2ac-1\right)\left(1-c^2-2ab\right)$

$=\left(a^2+bc-ac-ab\right)\left(b^2+ac-ab-bc\right)\left(ac+bc-c^2-ab\right)$

$=\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-a\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\left(b-c\right)=\left(a-b\right)^2\left(a-c\right)^2\left(b-c\right)^2$

$\Rightarrow\sqrt{M}=\left|\left(a-b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)\right|$

Vì a,b,c là các số hữu tỉ nên $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Bài 2:

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xyz=2\left(x+y+z\right)$.

b) Tìm các số a,b,c sao cho đa thức $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ chia cho $x+2$; $x+1$; $x-1$ đều dư 8.

c) Tìm các số tự nhiên x, y biết: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879$.

Lời giải

a) Vì x, y, z là các số nguyên dương và vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát gải sử: $1 \le x \le y \le z$, ta có: $xyz = 2(x+y+z) \le 6z$

$\Rightarrow xy \le 6 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=2$.

Xét $x=1$ cho $y=1,2,3,4,5,6$ ta được: $(x, y, z)=(1,3,8),(1,4,5)$

Xét $x=2$ cho $y=2,3$ ta được $(x, y, z)=(2;2;4)$.

Vậy $(x, y, z)=(1;3;8),(1;4;5),(2;2;4)$ và các hoán vị.

b) Từ giả thiết ta có: $f(x)-8$ luôn chia hết cho $x+2$; $x+1$; $x-1$.

$\Rightarrow f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)+8$.

Với $x=-2$, ta có: $-8+4a-2b+c=8 \Rightarrow 4a-2b+c=16(1)$

Với $x=-1$, ta có: $-1+a-b+c=8 \Rightarrow a-b+c=9(2)$

Với $x=1$, ta có: $1+a+b+c=8 \Rightarrow a+b+c=7$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $b=-1 \Rightarrow a=2; b=6$.

c) Ta có: $2^x\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)$ là tích 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5 mà 2^x không chia hết cho 5 nên

$\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)$ chia hết cho 5

Mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y=0$.

$\Rightarrow \left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)=11880=9.10.11.12 \Rightarrow x=3$

Vậy $x=3, y=0$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=16$

b) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \ne 3$

Ta có: $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=16 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{3x}{x-3}\right)^2-\dfrac{6x^2}{x-3}=16 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)^2-2.\dfrac{x^2}{x-3}.3+9=25$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}-3\right)^2=25$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x-3}-3=5\\ \dfrac{x^2}{x-3}-3=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-4)^2+8=0\,(VN)\\ (x+1)^2=7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{7}-1\\ x=-\sqrt{7}-1\end{array}\right.(thoa\,dk)$$

Vậy $S=\left\{-\sqrt{7}-1;\sqrt{7}-1\right\}$.

b) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$

Điều kiện: $x\ge 5$ hoặc $x\le 0$.

Nếu $x\ge 5$ thì $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)(x-1)}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ -12x=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ x=-\dfrac{1}{3}(loai)\end{cases}.$$

Nếu $x<0$ thì $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{5-x}=2\sqrt{-x} \Leftrightarrow \sqrt{(5-x)(1-x)}=-x-3 \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -3\\ -12x=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -3\\ x=-\dfrac{1}{3}(loai)\end{cases}$$

Nếu $x=0$ thì $\sqrt{0(0-1)}+\sqrt{0(0-5)}=2\sqrt{0^2} \Leftrightarrow 0=0\,(dung)$

Do đó $x=0$ thỏa mãn phương trình trên.

Vậy $x=0$ là nghiệm của phương trình trên.

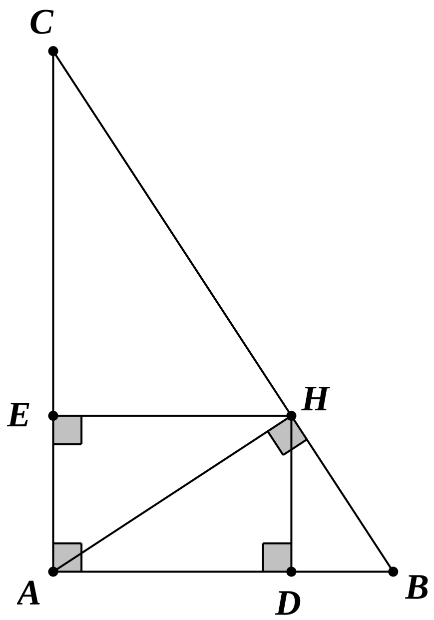
Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Tính AH, BH biết $BC=50\,cm$ và $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$.

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng: $AH^3=BC.BD.CE$.

c) Giả sử $BC=2a$ là độ dài cố định. Tính giá trị nhỏ nhất của: BD^2+CE^2.

Lời giải



a) Ta có: $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{AB}{3}=\frac{AC}{4}=k\Rightarrow\begin{cases}AB=3k\\AC=4k\end{cases}$

$\Rightarrow(3k)^2+(4k)^2=50^2\Rightarrow k^2=100\Rightarrow k=10$

$\Rightarrow AB=30cm, AC=40\,cm$.

Trong ΔABC vuông tại A, đường cao AH , ta có:
$AB.AC=AH.BC\Rightarrow 30.40=AH.50\Rightarrow AH=24\,cm$

$AB^2=BH.BC\Rightarrow 30^2=BH.50\Rightarrow BH=18cm$.

b) Trong ΔABC vuông tại A, đường cao AH , ta có: $AH^2=BH.CH$

$\Rightarrow AH^4=BH^2.CH^2=BD.AB.CE.AC=(BD.CE)(AB.AC)=(BD.CE)(AH.BC)$.

$\Rightarrow AH^3=BC.BD.CE$.

c) Áp dụng định lí Py ta go, ta có:

$BD^2+CE^2=BH^2-HD^2+HC^2-HE^2=BH^2+HC^2-(HD^2+HE^2)$

$=(AB^2-AH^2)+(AC^2-AH^2)-AH^2=(AB^2+AC^2)-3AH^2=BC^2-3AH^2=4a^2-3AH^2$

.

Gọi O là trung điểm của BC, ta có: $AH\le AO=a$ nên $BD^2+CE^2\ge 4a^2-3a^2=a^2$.

Dấu "=" xảy ra khi H trùng $O\Leftrightarrow\Delta ABC$ vuông cân tại A.

Vậy GTNN của BD^2+CE^2 bằng a^2 khi ΔABC vuông cân tại A.

Bài 5: Cho $0\le a,b,c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=a+b^{2019}+c^{2020}-ab-bc-ac.$$

Lời giải

Vì $0 \le a,b,c \le 1$ nên $b^{2019} \le b, c^{2020} \le c, (1-a)(1-b)(1-c) \ge 0, abc \ge 0$.

$\Rightarrow a + b^{2019} + c^{2020} - ab - bc - ac \le a + b + c - ab - bc - ac$

Và $1 - abc - a - b - c + ab + ac + bc \ge 0$

$\Rightarrow a + b + c - ab - ac - bc \le 1 - abc \le 1$

do đó $P = a + b^{2019} + c^{2020} - ab - bc - ac \le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} abc = 0 \\ b^{2019} = b \\ c^{2020} = c \\ (1-a)(1-b)(1-c) = 0 \\ 0 \le a,b,c \le 1 \end{cases}$ chẳng hạn $a = 1; b = c = 0$.

Vậy GTLN của P bằng 1 chẳng hạn khi $a = 1; b = c = 0$.

HẾT

ĐỀ SỐ 17. CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẢNG TRỊ - NĂM 2019 – 2020

Câu 1. (5,0 *điểm*)

1. Rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{a}{3+a} + \dfrac{a^2+9}{9-a^2}\right) : \left(\dfrac{3a-1}{a^2-3a} - \dfrac{1}{a}\right)$
2. Tính giá trị của P biết $a + 1 = \sqrt[4]{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Câu 2. (2,0 *điểm*)

Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a+b=5, ab=1$. Tính giá trị của a^5+b^5

Câu 3. (3,0 *điểm*)

Cho các số nguyên m,n. Chứng minh $mn(mn+1)^2 - (m+n)^2 mn$ chia hết cho 36.

Câu 4. (4,0 *điểm*)

1. Cho số thực x thỏa mãn $0 \le x \le 1$. Chứng minh $x^2 \le x$.
2. Cho a,b,c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4}$.

Câu 5. (6,0 *điểm*)

1. Cho hình vuông $ABCD$ có E nằm trên đường chéo AC sao cho $AE = 3EC$, F trung điểm AD. Chứng minh tam giác BEF vuông cân.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC.

a) Chứng minh: $\frac{BE}{CF}=\frac{AB^5}{AC^5}$.

b) Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABC và diện tích hình chữ nhật $AHEF$.

Tìm đặc điểm của tam giác ABC để $\frac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUÃNG TRỊ - NĂM 2019 – 2020

Câu 1:

1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\frac{3a-1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$

Lời giải

$$P=\left(\frac{a}{3+a}+\frac{a^2+9}{9-a^2}\right):\left(\frac{3a-1}{a^2-3a}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{a(3-a)+a^2+9}{9-a^2}:\frac{3a-1-a+3}{a^2-3a}$$

$$=\frac{3a+9}{9-a^2}.\frac{a^2-3a}{2a+2}$$

$$=\frac{3(a+3)}{(3-a)(3+a)}.\frac{a(a-3)}{2a+2}=\frac{-3a}{2a+2}$$

2. Tính giá trị của P biết $a+1=\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Lời giải

$$a+1=\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{9-\left(2\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{1}$$

$$=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|$$

$$=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$$

$\Rightarrow a=1$

$\Rightarrow P=\frac{-3.1}{2.1+2}=\frac{-3}{4}$

Câu 2: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a+b=5, ab=1$. Tính giá trị của a^5+b^5

Lời giải

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$
$$=5(a^4-a^2+1-b^2+b^4)$$
$$=5\left[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+1-(a^2+b^2)\right]$$
$$=5\left[(a^2+b^2)(a^2+b^2-1)-1\right]$$

$$=5\left[(a+b)^2-2ab\right]\left[(a+b)^2-2ab-1\right]-5$$
$$=5(25-2)(25-2-1)-5=2525$$

Câu 3: Cho các số nguyên m,n. Chứng minh $mn(mn+1)^2-(m+n)^2mn$ chia hết cho 36.

Lời giải

Ta có:

$$A=mn(mn+1)^2-(m+n)^2mn$$
$$=mn\left[(mn+1)^2-(m+n)^2\right]$$
$$=mn(mn+1+m+n)(mn+1-m-n)$$
$$=mn\left[m(n+1)+n+1\right]\left[m(n-1)-(n-1)\right]$$
$$=mn(m+1)(n+1)(n-1)(m-1)$$

Ta có: $m-1,m,m+1$ là 3 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow (m-1)m(m+1)\vdots 6$ (1)

Ta có: $n-1,n,n+1$ là 3 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow (n-1)n(n+1)\vdots 6$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow A\vdots 36$

Câu 4:

1. Cho số thực x thỏa mãn $0\le x\le 1$. Chứng minh $x^2\le x$.

Lời giải

$$0\le x\le 1 \Rightarrow \begin{cases}1-x\ge 0\\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow x(1-x)\ge 0 \ (1)$$

Giả sử: $x^2>x$

$\Rightarrow x-x^2<0$

$\Rightarrow x(1-x)<0$ (mẫu thuẫn (1))

$\Rightarrow$ Giả sử sai

Vậy $x^2\le x$

2. Cho a,b,c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}$.

Lời giải

Ta có $a,b,c \geq 0$ mà $a+b+c=1 \Rightarrow 0 \leq a,b,c \leq 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{5a+4} \geq a+2$

Với $a \in [0;1]$ ta có:

$\sqrt{5a+4} \geq a+2$

$\Leftrightarrow 5a+4 \geq a^2+4a+4$

$\Leftrightarrow a^2-a \leq 0$

$\Leftrightarrow a(a-1) \leq 0$ (đúng)

Cmtt, ta có: $\sqrt{5b+4} \geq b+2, \sqrt{5c+4} \geq c+2$

Suy ra: $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \geq a+2+b+2+c+2=7$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=c=0$ và các hoán vị

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}$ bằng 7.

Câu 5:

1. Cho hình vuông $ABCD$ có E nằm trên đường chéo AC sao cho $AE=3EC$, F trung điểm AD. Chứng minh tam giác BEF vuông cân.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC.

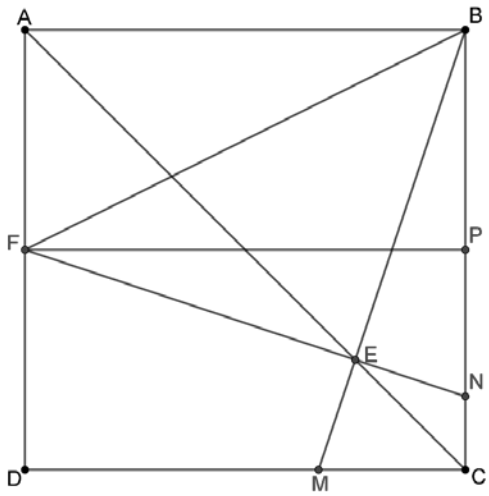
   a) Chứng minh: $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{AB^5}{AC^5}$.

   b) Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABC và diện tích hình chữ nhật $AHEF$.

   Tìm đặc điểm của tam giác ABC để $\dfrac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1. Chứng minh tam giác BEF vuông cân.



Vẽ $FP \perp BC\,(P \in BC), BE \cap DC = M, FE \cap BC = N$

Đặt độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là a

Ta có: F là trung điểm AD mà $FP \perp BC$ $\Rightarrow FP = AB = a$

$AD // BC \Rightarrow \dfrac{AF}{NC} = \dfrac{AE}{EC} = 3 \Rightarrow NC = \dfrac{AF}{3} = \dfrac{a}{6}$ mà $PC = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow NP = \dfrac{1}{3}a \Rightarrow FN = \sqrt{FP^2 + PN^2} \Rightarrow FN = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}a \Rightarrow EF = \dfrac{\sqrt{10}}{4}a$ (1)

$AB // CD \Rightarrow \dfrac{AB}{MC} = \dfrac{AE}{EC} = 3 \Rightarrow MC = \dfrac{a}{3} \Rightarrow MB = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}a \Rightarrow BE = \dfrac{\sqrt{10}}{4}a$ (2)

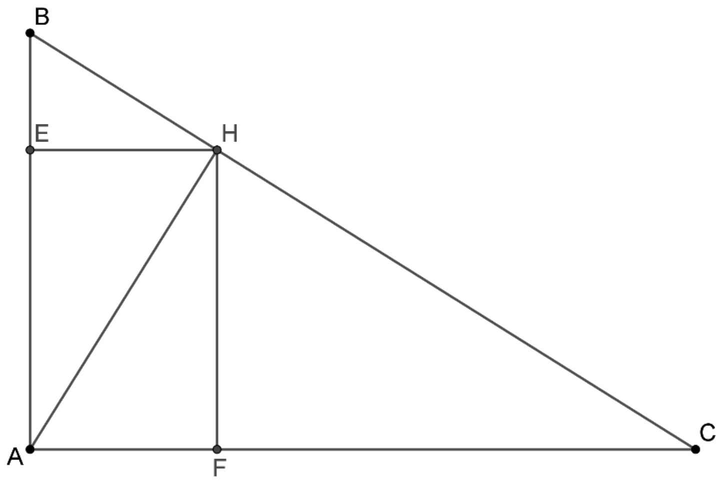
Từ (1), (2) $\Rightarrow BE = EF\left(=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a\right) \Rightarrow \Delta BEF$ cân tại E (3)

Ta có: $\begin{cases} FB^2 = AB^2 + AF^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \\ BE^2 + EF^2 = 2.\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta BEF$ vuông tại E (Py – ta – go đảo) (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \Delta BEF$ vuông cân.

2.



a) Chứng minh: $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AB^5}{AC^5}$.

Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{CF}{AC} = HC^2 \Rightarrow CF = AC.HC^2 \\ \dfrac{BE}{AB} = BH^2 \Rightarrow BE = AB.BH^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}.\frac{BH^2}{HC^2} = \frac{AB}{AC}.\frac{\frac{AB^4}{BC^2}}{\frac{AC^4}{BC^2}} = \frac{AB^5}{AC^5}$$

b) Tìm đặc điểm của tam giác ABC để $\frac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{AE.AF}{\frac{1}{2}AB.AC} = 2.\frac{\frac{AH^2}{AB}.\frac{AH^2}{AC}}{AB.AC} = 2.\frac{AH^4}{AB^2.AC^2} = 2.\frac{AH^2}{BC^2} = 2.\frac{BH}{BC}.\frac{CH}{BC} \le \frac{1}{2}\left(\frac{BH}{BC} + \frac{CH}{BC}\right) = \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BH = CH$ $\Rightarrow$ H là trung điểm BC mà $AH \perp BC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân

Vậy $\frac{S_2}{S_1}$ đạt giá trị lớn nhất khi ΔABC vuông cân.

ĐỀ SỐ 18. HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẬN CẦU GIẤY NĂM 2019 - 2020

Câu 1: (5 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1}\right).\frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

2. Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn: $x^3 + y^3 + z^3 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$.

a) Tính $x + y + z$ biết $xy + yz + zx = 9$.

b) Chứng minh rằng nếu $z \ge x;\ z \ge y$ thì $z > x + y$.

Câu 2: (5 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2 + 33x + 28} + 5\sqrt{4x - 3} = 5\sqrt{3x + 4} + \sqrt{12x^2 + 19x - 21}$

2. Tìm các số nguyên $(x; y)$ với $x \ge 0;\ y \ge 0$ thỏa mãn:

$$x^3 + 3y^2 + 4xy + 4x + 10y - 12 = 0.$$

Câu 3: (3 điểm)

1. Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = a + b^{2011} + c^{1954} - ab - bc - ac$$

2. Tìm số nguyên dương x để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương.

Câu 4: (6 điểm)

Cho tam giác đều ABC cạnh a, hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn AB, AC sao cho $\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM=x;\ AN=y$.

a. Biết $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{5}$, tính diện tích tam giác AMN theo a.

b. Chứng minh rằng $MN=a-x-y$.

c. Gọi D là trọng tâm tam giác ABC, K là trung điểm AB. Vẽ $DI\perp MN$, chứng minh rằng: $DI=DK$.

Câu 5: (1 điểm)

Cho một bảng ô vuông 2019×2020, mỗi ô vuông con có thể tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng ban đầu tất cả các ô đều được tô màu xanh. Cho phéo mỗi lần ta chọn một hang hoặc một cột và thay đổi màu của tất cả các ô thuộc hàng hoặc cột đó. Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu ta có thể thu được một bảng gồm đúng 2000 ô vuông màu đỏ hay không?

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 QUẬN CẦU GIẤY NĂM 2019 – 2020

Câu 1: (5 điểm)

1. Cho biểu thức $P=\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

2. Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn: $x^3+y^3+z^3=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$.

a) Tính $x+y+z$ biết $xy+yz+zx=9$.

b) Chứng minh rằng nếu $z\ge x;\ z\ge y$ thì $z\ge x+y$.

Lời giải:

1.

a) Để P có nghĩa thì:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x\sqrt{x}-1\ne 0 \\ x-1\ne 0 \\ 2x+\sqrt{x}-1\ne 0 \\ 2\sqrt{x}-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\sqrt{x}\ne 1 \\ x\ne 1 \\ 2(\sqrt{x}-\frac{1}{2})(\sqrt{x}+1)\ne 0 \\ \sqrt{x}\ne \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^3\ne 1 \\ x\ne 1 \\ x\ne \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 1 \\ x\ne \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy với $x \geq 0;\ x \neq 1;\ x \neq \frac{1}{4}$ thì P có nghĩa.

Ta có: $P = \left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right).\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-\frac{1}{2})(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$= \left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$= \left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-\sqrt{x}.(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$= \left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$= \left(\frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\sqrt{x}.(\text{x}+\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)((x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+x\sqrt{x}+x+\sqrt{x})}{(2\sqrt{x}-1)((x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x}{(2\sqrt{x}-1)((x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}-x+2x-\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-1)((x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x.(2\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}.(2\sqrt{x}-1)}{(2\sqrt{x}-1)((x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{(2\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$ thì $P = \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) Ta có: $P = \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}+1-1}{x+\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$ đạt giá trị lớn nhất

$\Rightarrow x+\sqrt{x}+1$ phải đạt giá trị nhỏ nhất.

Lại có $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{4}$ nên $x+\sqrt{x}+1 \geq 1$.

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $x+\sqrt{x}+1 = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $P = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy với $x=0$ thì P có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

2. Với $x>0, y>0, z>0$

a) Xét $VT = x^3+y^3+z^3$

$$= (x+y+z).\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

$$VP = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$

$$= x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2$$

$$= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$$

$$= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

Do $VT = VP$ nên suy ra $x+y+z=2$.

Vậy $x+y+z=2$.

b) Ta có: $x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$\Leftrightarrow z^2-(x+y)^2+2x^2+2y^2-2yz-2zx=0$

$\Leftrightarrow z^2-(x+y)^2 = 2y(\text{z}-\text{y})+2x(\text{z}-x)$

Do x, y, z >0 và $z\ge y$; $z\ge x$ nên $2y(\text{z}-\text{y})+2x(\text{z}-x)\ge 0$

$\Rightarrow z^2-(x+y)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (z-x-y)(z+x+y)\ge 0$ mà x, y, z >0 nên $z+x+y>0$

$\Rightarrow z\ge x+y$ (đpcm).

Câu 2: (5 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{9x^2+33x+28}+5\sqrt{4x-3}=5\sqrt{3x+4}+\sqrt{12x^2+19x-21}$

2. Tìm các số nguyên $(x;y)$ với $x\ge 0$; $y\ge 0$ thỏa mãn:

$$x^3+3y^2+4xy+4x+10y-12=0.$$

Lời giải:

1. ĐKXĐ: $x\ge \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{(3x+4)(3x+7)}+5\sqrt{4x-3}=5\sqrt{3x+4}+\sqrt{(4x-3)(3x+7)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+4)(3x+7)}-\sqrt{(4x-3)(3x+7)}=5(\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-3})$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+7}.(\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-3})=5(\sqrt{3x+4}-\sqrt{4x-3})$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+7}=5$

$\Leftrightarrow x=6$ (tm).

Vậy $x=6$ là nghiệm của phương trình.

2. Với $x\ge 0$; $y\ge 0$ ta có:

$x^3+3y^2+4xy+4x+10y-12=0$

$\Leftrightarrow (x^2+4xy+4y^2+4+4x+8y)-(y^2-2y+1)-17=0$

$\Leftrightarrow \left[(x+2y)^2+2.(x+2y).2+2\right]-(y-1)^2=17$

$\Leftrightarrow (x+2y+2)^2-(y-1)^2=17$

$\Leftrightarrow (x+2y+2-y+1).(x+2y+2+y-1)=17$

$\Leftrightarrow (x+y+3).(x+3y+1)=17$

Do 17 là số nguyên tố mà $x\ge 0;\ y\ge 0$ suy ra $x+y+3>0$ và $x+3y+1>0$ nên ta có:

TH1:

$\begin{cases}x+y+3=1\\x+3y+1=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-2\\x+3y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-11\\y=9\end{cases}\Rightarrow$ loại do $x\ge 0$.

TH2:

$\begin{cases}x+y+3=17\\x+3y+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=14\\x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=21\\y=-7\end{cases}\Rightarrow$ loại do $y\ge 0$.

Vậy không có giá trị nào của $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 3: (3 điểm)

1. Cho 3 số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=a+b^{2011}+c^{1954}-ab-bc-ac$$

2. Tìm số nguyên dương x để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương.

Lời giải:

1. Ta có:

$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=1\\a,b,c\ge 0\end{cases}$

$\Rightarrow a,b,c\in[0;1]$

$\Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)\le 0$

$\Leftrightarrow abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\le 0$

$\Leftrightarrow a-ab-bc-ca\le 1-abc-b-c$

$\Rightarrow T\le 1+b^{2011}+c^{1954}-abc-b-c=1+b.(b^{2010}-1)+c.(c^{1953}-1)-abc\le 1$

GTLN của T bằng 1 khi và chỉ khi $a=1;\ b=c=0$.

2. Đặt $A=4x^3+14x^2+9x-6$ ta được:

$A=4x^3+8x^2+6x^2+12x-3x-6$

$=4x^2.(x+2)+6x.(x+2)-3(x+2)$

$=(x+2).(4x^2+6x-3)$

Lại có $x+2,\ 4x^2+6x-3$ là 2 số nguyên tố cùng nhau.

Thật vậy, giả sử $UCLN\ (x+2,4x^2+6x-3)=d\ (d\in N^*)$ ta có:

$x+2$ chia hết cho d suy ra $4x(x+2)=4x^2+8x$ chia hết cho d

$4x^2+6x-3$ chia hết cho d

Suy ra $4x^2+8x-4x^2-6x+3$ chia hết cho d

$\Rightarrow 2x+3$ chia hết cho d

$\Rightarrow 2(x+2)-2x-3$ chia hết cho $d \Rightarrow 1 \vdots d$

Mà $d \in N^*$ nên $d = 1$. Từ đó suy ra $UCLN\ (x+2, 4x^2+6x-3) = 1$ hay $x+2$, $4x^2+6x-3$ là 2 số nguyên tố cùng nhau.

Để A là số chính phương thì $x+2$ và $4x^2+6x-3$ đều là số chính phương.

Đặt $x+2 = a^2$, $4x^2+6x-3 = b^2$. Thay $x = a^2-2$ vào $4x^2+6x-3 = b^2$ ta được:

$4.(a^2-2)^2 + 6.(a^2-2) - 3 = b^2$

$\Leftrightarrow 4a^4 - 16a^2 + 16 + 6a^2 - 12 - 3 = b^2$

$\Leftrightarrow 4a^4 - 10a^2 + 1 = b^2$

$\Leftrightarrow 16a^4 - 40a^2 + 4 = 4b^2$

$\Leftrightarrow (4a^2-2b-5)(4a^2+2b-5) = 21$

Vì $4a^2-2b-5 \le 4a^2+2b-5$ ta có bảng sau:

$4a^2-2b-5$	1	3	-21	-7
$4a^2+2b-5$	21	7	-1	-3

Suy ra

$4a^2-2b$	6	8	-16	-2
$4a^2+2b$	26	12	4	2

Lại có: $4a^2-2b+4a^2+2b = 8a^2$ hay:

$8a^2$	32	20	-12	0
a^2	4 (tm)	2,5	-1,5	0

Ta được $a^2 = 4 \Rightarrow b^2 = 25$. Trả lại ẩn:

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 4 \\ 4x^2+6x-3 = 25 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ (tm)}.$$

Vậy với x = 2 thì $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương.

Câu 4: (6 điểm)

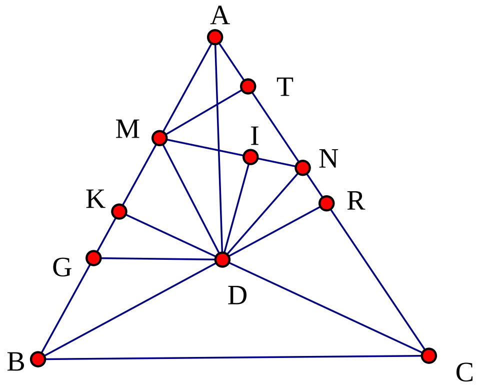
Cho tam giác đều ABC cạnh a, hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn AB, AC sao cho $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$. Đặt $AM = x$; $AN = y$.

a. Biết $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$, tính diện tích tam giác AMN theo a.

b. Chứng minh rằng $MN = a - x - y$.

c. Gọi D là trọng tâm tam giác ABC, K là trung điểm AB. Vẽ $DI \perp MN$, chứng minh rằng: $DI = DK$.

Lời giải:



a) Ta có: $\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=1 \Rightarrow \frac{x}{a-x}+\frac{y}{a-y}=1$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{a-x}-\frac{y}{a-y}=-1 \Leftrightarrow \frac{a-x-a}{a-x}-\frac{a-y-a}{a-y}=-1 \Leftrightarrow 1-\frac{a}{a-x}+1-\frac{a}{a-y}=-1$

$\Leftrightarrow \frac{a}{a-x}+\frac{a}{a-y}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{a-x}+\frac{1}{a-y}=\frac{3}{a}$ (1)

Lại có: $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{a}{5}$. Thay vào (1) ta được:

$\frac{1}{a-\frac{a}{5}}+\frac{1}{a-y}=\frac{3}{a} \Leftrightarrow \frac{5}{4a}+\frac{1}{a-y}=\frac{3}{a} \Rightarrow y=\frac{3a}{7}$

Diện tích tam giác là: $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}AM.AN.\sin\widehat{MAN}=x.y.\sin 60°$

$=\frac{a}{5}.\frac{3a}{7}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{70}$ (đvdt).

b) Do $\frac{x}{a-x}+\frac{y}{a-y}=1$

$\Rightarrow ax+ay-2xy=a^2-ax-ay+xy$

$\Rightarrow a^2-2ax-2ay+2xy+xy=0$

$\Rightarrow (a-x-y)^2=x^2+y^2-xy$ (2)

Giả sử $MN^2=AM^2+AN^2-AM.AN$

Lấy điểm $T\in AC$ sao cho $MT\perp AC$ và $2AT=AM$ ta có:

$MN^2-AM^2=TN^2-AT^2=AN(TN-AT)=AN(AN-2AT)=AN(AN-AM)$

$=AN^2-AN.AM$

$MN^2=AM^2+AN^2-AN.AM$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $MN=a-x-y$ (đpcm).

c) Trên tia BA lấy điểm G sao cho $BG=AN \Rightarrow MN=MG$.

Do $\Delta GBD=\Delta NAD$ (c.g.c) $\Rightarrow DN=DG \Rightarrow \Delta DMN=\Delta DMG$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{KGD}=\widehat{IND}$

$\Rightarrow \Delta KGD=\Delta IND$ (ch – gn) $\Rightarrow DK=DI$ (đpcm).

Câu 5: (1 điểm)

Cho một bảng ô vuông $2019\times 2020,$ mỗi ô vuông con có thể tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng ban đầu tất cả các ô đều được tô màu xanh. Cho phéo mỗi lần ta chọn một hang hoặc một cột và thay đổi màu của tất cả các ô thuộc hàng hoặc cột đó. Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu ta có thể thu được một bảng gồm đúng 2000 ô vuông màu đỏ hay không?

Lời giải:

Trước hết ta chứng minh với mọi cách chọn 2000 ô trên bảng đã cho luôn tồn tại một bảng con 2×2 chứa đúng 1 trong 2000 ô này.

Thật vậy, vì số hàng lớn hơn số ô được chọn nên tồn tại 2 hàng liền nhau R_1, R_2 mà R_1 không chứ ô nào và R_2 có chứa ít nhất một ô đã chọn.

Vì số cột cũng lớn hơn số ô được chọn nên tồn tại 2 ô $A,\ B$ cạnh nhau trên R_2 mà chỉ có đúng một ô đã chọn.

Gọi $C,\ D$ là 2 ô nằm trên R_1 và cùng cột với $A,\ B$. Bảng con 2×2 gồm 4 ô $A,$ $B,\ C,\ D$ chỉ có đúng một ô được chọn.

Giả sử ta có thể thu được bảng gồm đúng 1000 ô màu đỏ sau hữu hạn lần đổi màu. Khi đó theo chứng minh trên tồn tại một bảng vuông con 2×2 chứa đúng một ô màu đỏ, ba ô còn lại màu xanh.

Vì ở trạng thái ban đầu tất cả các bảng vuông con 2×2 đều gồm 4 ô màu xanh nên mỗi lần đổi màu hàng hoặc cột thì số ô màu đỏ và số ô màu xanh trong bảng vuông con 2×2 luôn là số chẵn.

Do đó không thể thu được một bảng vuông con 2×2 có 1 ô màu đỏ, 3 ô màu xanh.

Suy ra ta có mâu thuẫn.

Vậy không thể thu được bảng chứa đúng 2000 ô màu đỏ sau hữu hạn lần đổi màu.

ĐỀ SỐ 19. HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – HUYỆN QUAN SƠN
NĂM 2019 - 2020

Câu 1. *(4 điểm)* Cho $P=\dfrac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2}+\dfrac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P>1$.
2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Câu 2. *(4 điểm)* Giải phương trình:

1. $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-10x+18\right)+12x-39=0$
2. $x^2+5x=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

Câu 3. *(4 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x để biểu thức $x^4 - x^2 + 2x + 2$ là số chính phương.
2. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta luôn có:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng:

1. $AF.AB = AH.AD = AE.AC$.
2. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
3. Gọi M, N, P, I, K, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC, AB, EF, ED, DF. Chứng minh rằng các đường thẳng MI, NQ, PK đồng quy.
4. Gọi độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA lần lượt là a,b,c; độ dài các đoạn thẳng AD, BE, CF là a', b', c'. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{(a+b+c)^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}$

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho hai số dương a,b thỏa mãn: $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{a^2+b^2}$

……………….HẾT…………….

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – HUYỆN QUAN SƠN NĂM 2019 - 2020

Câu 1: *(4 điểm)* Cho $P = \dfrac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \dfrac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P > 1$.
2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

1. $P = \dfrac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \dfrac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$

$$= \frac{(\sqrt{x}-2)(x-1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{(\sqrt{x}+2)(x-1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2x+2}{x-1}$$

2. Ta có $P=\dfrac{2x+2}{x-1}=\dfrac{(2x-2)+4}{x-1}=2+\dfrac{4}{x-1}$

P có giá trị lớn nhất khi $2+\dfrac{4}{x-1}$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x-1$ là số nguyên dương nhỏ nhất

$\Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

Câu 2: *(4 điểm)* Giải phương trình:

1. $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-10x+18\right)+12x-39=0$

2. $x^2+5x=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

Lời giải

1. $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-10x+18\right)+12x-39=0$

Đặt $x^2-6x+8=a$; $x^2-10x+18=b$

Ta có $a-b=\left(x^2-6x+8\right)-\left(x^2-10x+18\right)=4x-10$

$\Rightarrow 12x-39=(12x-30)-9=3(4x-10)-9=3(a-b)-9$

Khi đó ta có phương trình $ab+3(a-b)-9=0$

$\Leftrightarrow ab+3a-3b-9=0$

$\Leftrightarrow (ab+3a)-(3b+9)=0$

$\Leftrightarrow a(b+3)-3(b+3)=0$

$\Leftrightarrow (b+3)(a-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b+3=0 \\ a-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-3 \\ a=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+18=-3 \\ x^2-6x+8=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+21=0 \\ x^2-6x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \\ x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

2. $x^2+5x=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

$\Leftrightarrow x^2+5x+2-2\sqrt[3]{x^2+5x-2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+5x-2\right)-2\sqrt[3]{x^2+5x-2}+4=0$

Đặt $\sqrt[3]{x^2+5x-2}=a \quad \Rightarrow x^2+5x-2=a^3$

Khi đó ta có phương trình $a^3-2a+4=0$

$\Leftrightarrow (a+2)\left(a^2-2a+2\right)=0$

$\Rightarrow a+2=0$ (Vì $a^2-2a+2=(a-1)^2+1\ge 1>0$)

$\Leftrightarrow a=-2$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2+5x-2}=-2$

$\Leftrightarrow x^2+5x-2=-8$

$\Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Câu 3: *(4 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x để biểu thức x^4-x^2+2x+2 là số chính phương.
2. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta luôn có:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge \frac{3}{1+abc}$$

Lời giải

1. x^4-x^2+2x+2

$=\left(x^4+2x^3+x^2\right)-\left(2x^3+4x^2+2x\right)+\left(2x^2+4x+2\right)$

$=x^2\left(x^2+2x+1\right)-2x\left(x^2+2x+1\right)+2\left(x^2+2x+1\right)$

$=(x+1)^2\left(x^2-2x+2\right)$

Đặt $x^4-x^2+2x+2=A\left(a\in\mathbb{N}\right)$

Vì $(x+1)^2$, A là số chính phương nên suy ra x^2-2x+2 phải là số chính phương

$x^2-2x+2=a^2\left(a\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow a^2-\left(x^2-2x+1\right)=1$

$\Leftrightarrow a^2-(x-1)^2=1$

$\Leftrightarrow (a-x+1)(a+x-1)=1$

Vì $a,x\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-x+1=1 \\ a+x-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-x+1=-1 \\ a+x-1=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-x=0 \\ a+x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a-x=-2 \\ a+x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ x=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x=1$

2. $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\ge \dfrac{3}{1+abc}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+abc}{a(1+b)}+\frac{1+abc}{b(1+c)}+\frac{1+abc}{c(1+a)}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+abc+a+ab}{a(1+b)}+\frac{1+abc+b+bc}{b(1+c)}+\frac{1+abc+ca+c}{c(1+a)}\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+a)+(ab+abc)}{a(1+b)}+\frac{(1+c)+(bc+abc)}{b(1+c)}+\frac{(1+a)+(ca+abc)}{c(1+a)}\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+a)+ab(1+c)}{a(1+b)}+\frac{(1+c)+bc(1+a)}{b(1+c)}+\frac{(1+a)+ca(1+b)}{c(1+a)}\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{c(1+a)}{1+c}\geq 6$$

Mà $\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{c(1+a)}{1+c}$

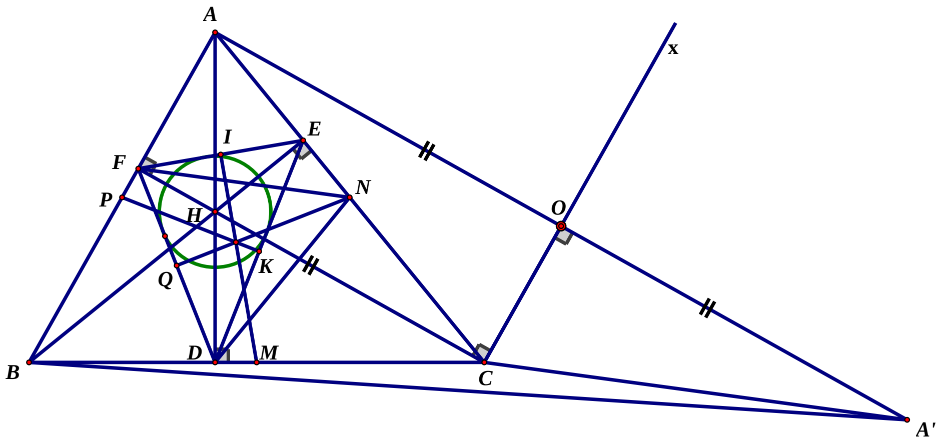
$\geq 2\sqrt{\frac{1+a}{a(1+b)}.\frac{a(1+b)}{1+a}}+2\sqrt{\frac{1+b}{b(1+c)}.\frac{b(1+c)}{1+b}}+2\sqrt{\frac{1+c}{c(1+a)}.\frac{c(1+a)}{1+c}}=6$ luôn đúng

Suy ra $\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq \frac{3}{1+abc}$

Câu 4: *(6 điểm)* Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

1. $AF.AB = AH.AD = AE.AC$.
2. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
3. Gọi M, N, P, I, K, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC, AB, EF, ED, DF. Chứng minh rằng các đường thẳng MI, NQ, PK đồng quy.
4. Gọi độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA lần lượt là a, b, c; độ dài các đoạn thẳng AD, BE, CF là a', b', c'. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\frac{(a+b+c)^2}{a'^2+b'^2+c'^2}$

Lời giải



1. $\Delta AFH \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AF.AB = AH.AD$

$\Delta AEH \backsim \Delta ADC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD$

Do đó $AF.AB = AH.AD = AE.AC$

2. Ta có $\Delta CFB \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow \dfrac{BF}{CB} = \dfrac{BD}{AB}$

Xét ΔBFD và ΔBCA có : $\dfrac{BF}{CB} = \dfrac{BD}{AB}$; $\widehat{ABC}$ chung

$\Rightarrow \Delta BFD \backsim \Delta BCA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BCA}$ (1)

chứng minh tương tự $\Delta AFE \backsim \Delta ACB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{BCA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AFE} = \widehat{BFD}$

Mà $\widehat{AFE} + \widehat{EFC} = 90°; \widehat{CFD} + \widehat{DFB} = 90° \Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{CFD}$

Suy ra FC là phân giác của $\widehat{EFD}$ (3)

Chứng minh tương tự ta được EB là phân giác của $\widehat{DEF}$, DA là phân giác của $\widehat{EDF}$ (4)

Mà H là giao điểm của ba đoạn thẳng AD, BE, CF (5)

Từ (3),(4),(5) suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

3. Ta có $FN = DN\left(= \dfrac{1}{2}AC\right)$ mà $FQ = QD$ nên suy ra NQ là đường trung trực của FD

Chứng minh tương tự ta có : IM là đường trung trực của FE; PK là đường trung trực của ED

Suy ra MI, NQ, PK là ba đường trung trực của ΔDFE

mà trong một tam giác ba đường trung trực cùng đi qua một điểm nên các đường thẳng MI, NQ, PK đồng quy.

4. Vẽ $Cx \perp CF$, gọi A' là điểm đối xứng của A qua Cx

Tứ giác $AFCO$ là hình chữ nhật ($\widehat{F} = \widehat{C} = \widehat{O} = 90°$)

$\Rightarrow \widehat{BAA'} = 90°, AA' = 2CF$

AA' có Cx là đường trung trực nên $AC = CA'$

Với ba điểm B, C và A' ta có $BA' \le BC + CA'$

Dấu "=" xảy ra khi $BA' = BC + CA'$, khi đó $AC = CB$

$\Delta ABA'$ vuông tại A có $AB^2 + AA'^2 = BA'^2$ mà $BA' \le BC + CA'$, $AA' = 2CF$ nên suy ra $AB^2 + 4CF^2 \le (BC + CA')^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + 4CF^2 \le \left(BC + AC\right)^2$

$\Leftrightarrow 4CF^2 \le \left(BC + AC\right)^2 - AB^2$

$\Leftrightarrow 4c'^2 \le \left(a+b\right)^2 - c^2$

Chứng minh tương tự ta cũng có $4a'^2 \le \left(b+c\right)^2 - a^2$; $4b'^2 \le \left(a+c\right)^2 - b^2$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên ta có

$4\left(a'^2+b'^2+c'^2\right) \le \left(b+c\right)^2 - a^2 + \left(a+c\right)^2 - b^2 + \left(a+b\right)^2 - c^2$

$\Leftrightarrow 4\left(a'^2+b'^2+c'^2\right) \le \left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow \dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(a'^2+b'^2+c'^2\right)} \ge 4$

Dấu "=" xảy ra khi $AC = CB = AB$ hay tam giác ABC đều.

Câu 5: *(2 điểm)*

Cho hai số dương a,b thỏa mãn: $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{a^2+b^2}$

Lời giải

Ta có $a+b=1 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \le 1 \Leftrightarrow ab \le \dfrac{1}{4}$

$$A = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \frac{1}{2ab} \ge \frac{4}{\left(a+b\right)^2} + \frac{1}{2ab} = \frac{4}{1^2} + \frac{1}{2.\frac{1}{4}} = 4+2=6$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

ĐỀ SỐ 20. HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – HUYỆN TRƯƠNG MỸ

NĂM 2019 - 2020

Bài 1: (1,25 điểm) Tìm số a, b trong sơ đồ sau:

b				
a	9			
6	8	14		
9	7	13	19	
12	10	8	22	20

Bài 2. (5,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{x}{4-x}$

a) Tìm x để A <1

b) Biết $A=\frac{1}{2}.\left(\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}\right)-1$, hãy tính giá trị của $B=\frac{\sqrt{x}+3}{2-x}:(2A)$

c) Tìm giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên, khi $P=A:\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}$

d) Tìm x để $A.\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}=x+4+\sqrt{x+16}+\sqrt{9-x}$

Bài 3. (3,25 điểm)

1) Tìm m để phương trình $\frac{x+2}{x-m}=\frac{x+1}{x-1}$ vô nghiệm

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y=x+\sqrt{2(1-x)}$ với $0\le x\le 1$

3) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}$

Bài 4. (3,5 điểm)

1) Cho $x-\sqrt{2}=1$, hãy tính giá trị của $D=x^5-x^4-3x^3-4x^2+6x+2022$

2) Tìm a, b để $P(x)=3x^3+ax^2+bx+9$ chia hết cho $Q(x)=x^2-9$

3) Cho a, b, c là ba số thực bất kì.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

Bài 5. (7,0 điểm)

Cho tam giác ΔABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác AEF

2) Giả sử góc BAC là 45^0, Hãy tính diện tích tứ giác BCEF, biết diện tích tam giác ABC là $60cm^2$

3) Chứng minh rằng: $\frac{DC}{BD}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{BC^2+AB^2-AC^2}$

4) Chứng minh: Điểm H cách đều 3 cạnh của tam giác DEF

5) Chứng minh rằng: $\frac{AH}{BC}+\frac{BH}{AC}+\frac{CH}{AB}\ge\sqrt{3}$

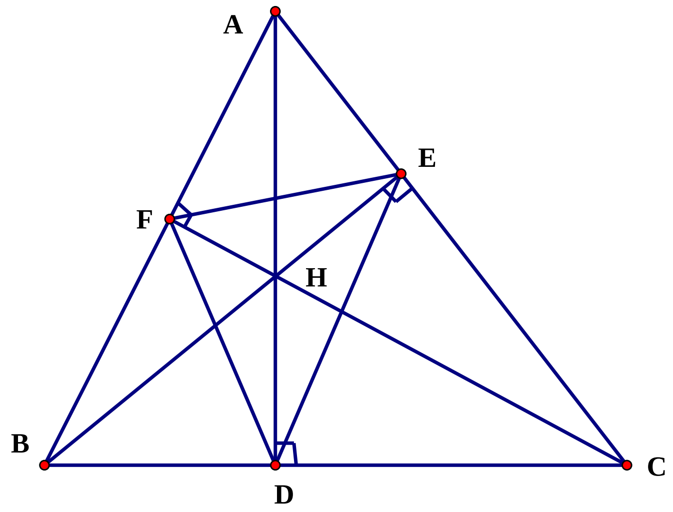
HƯỚNG DẪN CHẤM HSG TOÁN 9 VÒNG I

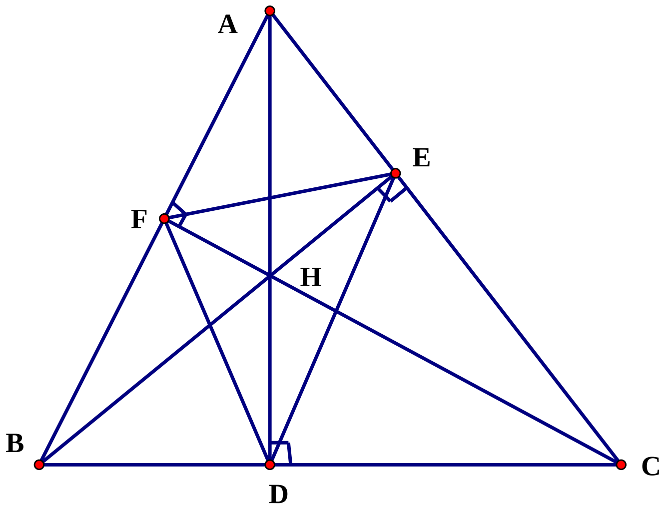
Năm học 2019-2020

Bài	Hướng dẫn chấm	Điểm
Bài 1	***(1,25 điểm)***	
	- Quy luật: tổng 2 số hàng dưới chia 2 rồi trừ 2 được số ở hàng trên	0,25

	giữa 2 số đó.	
	- Tính đúng a = 5	0,5
	- Tính đúng b = 5	0,5
	Chú ý: *Nếu chỉ ra quy luật sai, tính đúng a, b cho 0 điểm* *Nếu chỉ có kết quả đúng, không có quy luật cho 0,5 điểm*	
Bài 2		**(5,0 điểm)**
a) (1,5 điểm)	Đk: $x \ne 4; x \ge 0$	0,25
	Rút gọn $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$	0,75
	Do A<1 nên suy ra: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow x < 4$	0,25
	Kết hợp với điều kiện rồi kết luận: $0 \le x < 4$	0,25
b) (1,5 điểm)	- Tính được A = 3	0,5
	- Từ đó suy ra: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = 3$, tìm được x = 9 (tmđk)	0,5
	- Thay vào biểu thức $B = \dfrac{6}{-7} : 6 = \dfrac{-1}{7}$	0,5
c) (1,0 điểm)	- Tính được $P = \dfrac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = -1 + \dfrac{3}{3-\sqrt{x}}$	0,25
	- Để P nguyên thì $\dfrac{3}{3-\sqrt{x}} \in Z$ từ đó lập luận tìn x là 0; 36; 16; 4	0,5
	- So sánh điều kiện và kết luận x $\in \{0;16;36\}$	0,25
d) (1,0 điểm)	- Thay A vào rồi biến đổi đưa về dạng $5-\left(\sqrt{x}-3\right)^2 = \sqrt{x+16} + \sqrt{9-x}$	0,25
	- Đánh giá VT$\le$ 5; VP$\ge$ 5 với mọi x thuộc ĐKXĐ	0,25
	- Từ đó quy ra: dấu bằng xảy ra khi x = 9	0,25
	- Kết luận	0,25
	Chú ý: *Nếu học sinh có cách làm khác và lập luận đúng cho điểm tối đa theo mỗi ý.*	
Bài 3		**(3,25 điểm)**
1) (1,0 điểm)	- đk: $x \ne m; x \ne 1$ Biến đổi pt ban đầu về dạng: $mx = 2 - m$ (2)	0,25
	+ Nếu m = 0 thì (2) có dạng: 0x=2 , PT vô nghiệm + Nếu $m \ne 0$ suy ra: $x = \dfrac{2-m}{m}$	0,25

	Để PT vô nghiệm thì x =m và x=1 - Khi x = m thì $m=\frac{2-m}{m}$ tìm được m=1; m = -2 - Khi x = 1 thì $1=\frac{2-m}{m}$ tìm được m=1	0,25
	Kết luận:	0,25
2) (1,0 điểm)	Đặt $\sqrt{1-x}=t\quad(0\le t<1)$ suy ra $x=1-t^2$	0,25
	Thay vào ta được $y=-t^2+\sqrt{2}t+1=-\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}$	0,5
	GTLN là 3/2 khi $t=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	0,25
3) (1,25 điểm)	ĐK : $x\ne 0;\ y\ne 0$ Biến đổi PT ta được $(x-6)(y-6)=37$	0,5
	Lập bảng ta được kết quả : (x ;y) là (7 ; 43); (43 ;7); (5 ; -31); (-31 ;5)	0,5
	Kết luận:	0,25
	<u>Chú ý:</u> Nếu thiếu một cặp nghiệm: - 0,25 điểm *Nếu thiếu hai cặp nghiệm: - 0,5 điểm*	
Bài 4	***(3,5 điểm)***	
a) (1,0 điểm)	Từ $x-\sqrt{2}=1$ biến đổi $x^2-2x-1=0$	0,25
	$D=x^5-2x^4-x^3+x^4-2x^3-x^2-3x^2+6x+3+2019$	0,25
	$D=x^3\left(x^2-2x-1\right)+x^2\left(x^2-2x-1\right)-3\left(x^2-2x-1\right)+2019$	0,25
	$D=2019$ Kết luận:	0,25
b) (1,5 điểm)	Ta có: x^2-9 =(x-3).(x+3) Để chia P(x) chia hết cho x^2-9 tức là P(3) = 0; P(-3) = 0	0,25
	Ta có P(3) = 9a+3b+90 = 0	0,25
	P(-3) = 9a-3b-72 =0	0,25
	Suy ra : 9a+3b+90 = 9a-3b-72, từ đó tìm được a = -1; b = -27	0,5
	Kết luận	0,25
c) (1,0 điểm)	Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$	0,25

	$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)$ $\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\geq 0$	0,25
	Bất đẳng thức cuối cùng là đúng, kéo theo bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.	0,25
Bài 5		**(7 điểm)**
		
1) (1,5 điểm)	Chứng minh ΔEAB đồng dạng với ΔFAC	0,5
	$\Rightarrow \dfrac{EA}{FA}=\dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{EA}{AB}=\dfrac{FA}{AC}$	0,5
	Chứng minh ΔAEF đồng dạng với ΔABC (c.g.c)	0,5
2) (1,5 điểm)	ΔEAB vuông tại E và $\widehat{A}=45^0$ $\Rightarrow \cos\widehat{EAB}=\dfrac{EA}{AB} \Rightarrow \dfrac{EA}{AB}=\cos 45^0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0,5
	ΔAEF đồng dạng với ΔABC (câu a) $k=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=k^2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{AEF}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}=30cm^2$	0,25
	$\Rightarrow S_{BCEF}=S_{ABC}-S_{AEF}=60-30=30cm^2$.	0,5
3) (1,5 điểm)	Biến đổi $\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{BC^2+AB^2-AC^2}=\dfrac{AD^2+DC^2+\left(BD+DC\right)^2-AB^2}{\left(BD+DC\right)^2+AB^2-\left(AD+DC\right)^2}$	0,5

	$=\dfrac{AD^2+DC^2+BD^2+2.DB.DC+DC^2-AB^2}{BD^2+2.DB.DC+DC^2+BD^2+AD^2-AD^2-2.AD.DC-DC^2}$	0,5
	$=\dfrac{2.DC^2+2.BD.DC}{2.BD+2.BD.DC}=\dfrac{2.DC.(DC+BD)}{2.BD.(DC+BD)}=\dfrac{DC}{BD}$	0,5
4) (1,5 điểm)	Chứng minh rằng: H cách đều 3 cạnh của ΔDEF. ΔAEF đồng dạng với ΔABC (câu a) ⇨ $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}$	0,25
	CM TT câu a: +ΔBDF đồng dạng với ΔBAC => $\widehat{BFD}=\widehat{ACB}$	0,25
	⇨ $\widehat{AFE}=\widehat{BFD}(=\widehat{ACB})$ ⇨ $\widehat{DFC}=\widehat{EFC}$ FC là phân giác của $\widehat{EFD}$	0,5
	Chứng minh tương tự ta có: EB là phân giác của $\widehat{FED}$	0,25
	⇨ H là giao điểm của ba đường phân giác của ΔDEF H cách đều ba cạnh của ΔDEF.	0,25
		
5) (1,0 điểm)	$S_{BHC}+S_{CHA}+S_{AHB}=S_{ABC}$ ΔHEC đồng dạng với ΔAFC (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HC}{AC}=\dfrac{CE}{CF}\Rightarrow \dfrac{HC.HB}{AC.AB}=\dfrac{CE.HB}{CF.AB}=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$	0,25
	Tương tự: $\dfrac{HB.HA}{AC.BC}=\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$; $\dfrac{HA.HC}{AB.BC}=\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$. Do đó:	0,25

	$\frac{HC.HB}{AC.AB}+\frac{HB.HA}{AC.BC}+\frac{HA.HC}{AB.BC}=\frac{S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HAB}}{S_{ABC}}=1$	
	* Chứng minh được: $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ (*)	0,25
	Áp dụng (*) ta có: $\left(\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{AC}+\frac{HC}{AB}\right)^2 \ge 3.\left(\frac{HA.HB}{BC.AC}+\frac{HB.HC}{CA.AB}+\frac{HC.HA}{AB.BC}\right)=3.1=3$ Suy ra $\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{AC}+\frac{HC}{AB}\ge\sqrt{3}$.	0,25

ĐỀ SỐ 21. HỌC SINH GIỎI TOÁN 2019-2020

HUYỆN KỲ ANH

Bài 1: a) Tính giá trị của biểu thức : $A=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

b) Cho $xy+\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=1$ Tính giá trị của : $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

Bài 2: Giải các phương trình sau :

a) $x^2+12\sqrt{1-x}=x+36$

b) $x^2+3x+1=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}$

Bài 3: a) Tìm các số thực x,y thỏa : $2x+3y=1$ và $3x^2+2y^2=\frac{6}{35}$

b)Cho : $x^2+y^2+z^2+x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=6$ Tính $P=x^{2018}+y^{2019}+z^{2009}$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH :

a) Biết $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{7};CH-BH=10$ .Tính BC

b) Lấy điểm D đối xứng với C qua A .Gọi I là trung điểm của AH chứng minh $BI\perp DH$

c) Gọi K là điểm đối xứng với I qua A , biết $\frac{HC}{HB}=\frac{1}{4}$.Chứng minh $\Delta IAC\backsim\Delta ICK$ từ đó tính $\widehat{CKA}+\widehat{CAI}$?

Bài 5: cho các số thực dương a,b,c .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c+2a}+\frac{\sqrt{ac}}{a+c+2b}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a) $A=\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}\Rightarrow\dfrac{A}{\sqrt{2}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{56}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+1}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1}=\dfrac{6}{11}\Rightarrow A=\dfrac{6\sqrt{2}}{11}$

b) Từ giả thiết $xy+\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=1\Rightarrow x^2y^2+\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)+2xy\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=1$(bình phương 2 vế)

$\Rightarrow 2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=0$

Mặt khác : $\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$

Vậy : $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$

Bài 2:

a) $x^2+12\sqrt{1-x}=x+36\Leftrightarrow x^2-2x+1=36-12\sqrt{1-x}+1-x$

$\Leftrightarrow(x-1)^2=\left(6-\sqrt{1-x}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=6-\sqrt{1-x}\,(1)\\ x-1=\sqrt{1-x}-6(2)\end{array}\right.$

Giải (1) Vô nghiệm

Giải (2) $x=-3$ hoặc $x=-8$

b) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow x^2+1+3x-x\sqrt{x^2+1}-3\sqrt{x^2+1}=0$

Đặt $a=x;b=\sqrt{x^2+1}$ ta có $b^2+3a-ab+3b=0$

$\Leftrightarrow(b-a)(b-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=a(1)\\ b=3(2)\end{array}\right.$

Giải (1) vô nghiệm

Giải (2) $x=\pm2\sqrt{2}$

Bài 3:

a)Ta có: $3x^2+2y^2=\dfrac{6}{35}\Rightarrow\left(3x^2+2y^2\right).\dfrac{35}{6}=1\Rightarrow\left(3x^2+2y^2\right)\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{2}\right)=1$

$\Rightarrow 4x^2+9y^2+\dfrac{27}{2}x^2+\dfrac{8}{3}y^2=1=(2x+3y)^2\Rightarrow 4x^2+9y^2+\dfrac{27}{2}x^2+\dfrac{8}{3}y^2=4x^2+9y^2+12xy$

$\Rightarrow\dfrac{27}{2}x^2+\dfrac{8}{3}y^2-12xy=0\Rightarrow 6\left(\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{4}{9}y^2-2xy\right)=0\Rightarrow 6\left(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{3}y\right)^2=0\Rightarrow 9x=4y$

Hay $x=\dfrac{4y}{9}\Rightarrow 2.\dfrac{4y}{9}+3y=1\Rightarrow\dfrac{35}{9}y=1\Rightarrow y=\dfrac{9}{35}\Rightarrow x=\dfrac{4}{35}$

b)Áp dụng : $x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2; y^2+\frac{1}{y^2}\ge 2; z^2+\frac{1}{z^2}\ge 2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\ge 6$

đẳng thức xảy ra khi $x^2=1; y^2=1; z^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1; y=\pm1; z=\pm1$

Khi đó $x^{2018}=\left(x^2\right)^{1009}=1^{1009}=1$ và

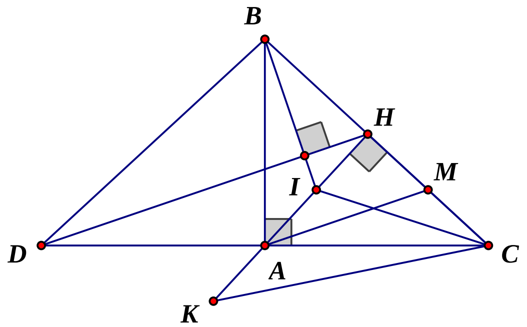
$y^{2019}+z^{2009}=y.\left(y^2\right)^{1009}+z.\left(z^2\right)^{1004}=y.1+z.1=y+z$

+)Nếu $y=z=1\Rightarrow P=1+1+1=3$

+)Nếu $y=1; z=-1$ hay $y=-1; z=1\Rightarrow P=1+1-1=1$

+) Nếu $y=z=-1\Rightarrow P=1-1-1=-1$

Bài 4: a)



Đặt $CH=x\Rightarrow BH=x-10$

mà : $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BH}{CH}=\frac{9}{49}$

$\Rightarrow \frac{x-10}{x}=\frac{9}{49}\Rightarrow x=12,25\Rightarrow BC=14,5$

b)

Gọi M là trung điểm của HC suy ra $IM//AC\Rightarrow IM\perp AB$ vậy I là trực tâm tam giác MBA suy ra BI vuông góc với AM mà $MA//DH$ suy ra $BI\perp DH$

c)Đặt $BH=a\Rightarrow CH=\frac{a}{4}\Rightarrow AH^2=\frac{a^2}{4}\Rightarrow\frac{IH^2}{4}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow IH=\frac{a}{4}\Rightarrow IC^2=\frac{a^2}{8}$

$\Rightarrow IA.IK=\frac{a}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8}$

$\Rightarrow IC^2=IK.IA\Rightarrow \Delta IKA\backsim\Delta ICA\left(c-g-c\right)\Rightarrow\widehat{IAC}=\widehat{ICK}\Rightarrow\widehat{CKA}+\widehat{CAI}=\widehat{HIC}=45^\circ$ (do ΔHIC vuông cân)

Bài 5:

Ta có $a+b+2c=\left(a+c\right)+\left(b+c\right)\ge 2\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}$ (BĐT cô si)

$\Rightarrow\frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c}\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\left(a+c\right)}.\frac{b}{\left(b+c\right)}}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$ (BĐT Cô si)

Tương tự ta cũng có : $\frac{\sqrt{bc}}{b+c+2a}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)$ và $\frac{\sqrt{ac}}{a+c+2b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)$

Cộng vế theo vế tương ứng ta có :

$P=\frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c+2a}+\frac{\sqrt{ac}}{a+c+2b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right)=\frac{3}{4}$

Vậy $P_{max}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a=b=c$

ĐỀ SỐ 22. HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – HUYỆN QUAN SƠN NĂM 2019 - 2020

Bài I *(5,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(1-\dfrac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của A khi $x=\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

Bài II *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng, nếu p và $8p^2+1$ là hai số nguyên tố lẻ thì $8p^2+2p+1$ là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các số nguyên $(x;y)$ sao cho: $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7\left(x+2y\right)$

Bài III *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

2) Cho x,y,z là các số thực dương và các số thực a,b,c .

Chứng minh $\left(\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\geq(a+b+c)^2$

3) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{1}{1+2y}+\dfrac{1}{1+2z}$

Bài IV *(4,0 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là a . Trên CB,CD lần lượt lấy các điểm M,N sao cho chu vi tam giác CMN có chu vi là $2a$. Gọi giao điểm của đường thẳng BD với các đường thẳng AM,AN lần lượt là E,F . Giao điểm của MF và NE là H

1) Tính số đo $\widehat{MAN}$

2) Chứng minh $AH\perp \text{EF}$

3) Gọi diện tích tam giác AEF,AMN lần lượt là S_1,S_2 . Tính $\dfrac{S_1}{S_2}$

Bài V *(1,0 điểm)*

Trong mặt phẳng cho 2020 điểm, khoảng cách giữa hai điểm bất kì đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm trong số 2020 điểm này với điểm ở gần nhất tương ứng. Chứng minh rằng với cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I *(5,0 điểm)*

a) $A=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(1-\frac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right)$

$A=\frac{x-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$

b)Ta có $x=\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}}=2$

Vậy $A=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

Bài II *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng, nếu p và $8p^2+1$ là hai số nguyên tố lẻ thì $8p^2+2p+1$ là số nguyên tố.

Do p là số nguyên tố lẻ nên $p=3k\pm1$ hoặc $p=3k$

+Nếu $p=3k\pm1$ thì $8p^2+1=8(3k\pm1)^2+1=3\left(24k^2\pm16k+3\right)\vdots 3$ nên vô lý.

+Nếu $p=3k$. Do p là số nguyên tố lẻ nên $p=3$, rõ ràng $8.9+1=73$ là số nguyên tố mà $8p^2+2p+1=72+6+1=79$ là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các số nguyên $(x;y)$ sao cho: $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7(x+2y)$

Ta có $5\left(4x^2+4xy+4y^2\right)=28(x+2y)\Rightarrow 15x^2=28(x+2y)-5(x+2y)^2$

Do $15x^2\ge0\Rightarrow 28(x+2y)-5(x+2y)^2=-5\left[(x+2y)^2-2(x+2y).\frac{14}{5}+\frac{169}{25}\right]+\frac{169}{5}\le\frac{169}{5}$

Vậy $0\le15x^2\le\frac{169}{5}\Rightarrow 0\le x^2\le\frac{169}{75}, x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;0;1\}$

$+x=0\Rightarrow y=0$

$+x=-1\Rightarrow y=3$ thỏa mãn bài toán

$+x=1\Rightarrow y=2$

Bài III *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

Ta có

$x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0$

Suy ra $x=-1$ là nghiệm của phương trình.

2) Cho x,y,z là các số thực dương và các số thực a,b,c .

Chứng minh $\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\ge(a+b+c)^2$

Ta biến đổi vế trái: $VT=a^2+b^2+c^2+\frac{a^2y}{x}+\frac{a^2x}{x}+\frac{b^2x}{y}+\frac{b^2z}{y}+\frac{c^2x}{z}+\frac{c^2y}{z}$

Ta có $\frac{a^2y}{x}+\frac{b^2x}{y}\ge 2ab;\frac{a^2x}{x}+\frac{c^2x}{z}\ge 2ac;\frac{b^2z}{y}+\frac{c^2y}{z}\ge 2bc,$

Nên $VT\ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2$.

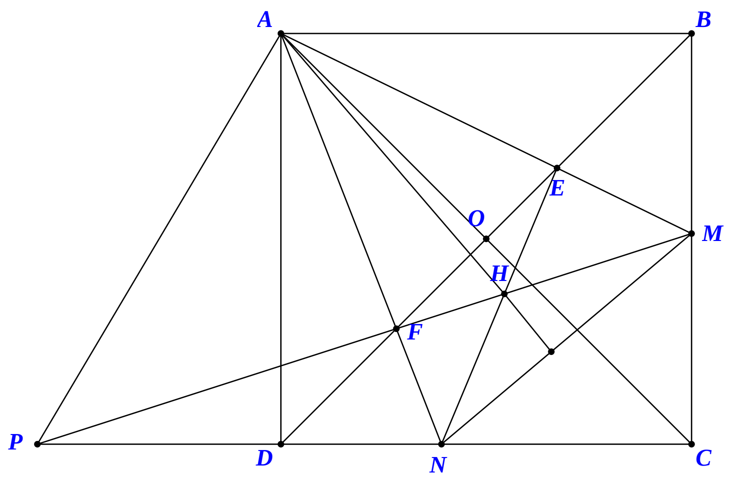
3) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}$

Đặt $x=\frac{a}{b};y=\frac{b}{c};z=\frac{c}{a};a,b,c>0$ *nên*

$$P=\frac{b}{b+2a}+\frac{c}{c+2b}+\frac{a}{a+2c}=\frac{b^2}{b^2+2ab}+\frac{c^2}{c^2+2bc}+\frac{a^2}{a^2+2ac}\ge 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Bài IV *(4,0 điểm)*



a)Gọi P là điểm trên tia đối của DC sao cho $DP=BM$

Ta chứng minh được: $\Delta ABM=\Delta ADP(c.g.c)\Rightarrow BM=DP;AM=AP;\widehat{BAM}=\widehat{DAP}$

Từ đó suy ra $\widehat{MAP}=\widehat{PAD}+\widehat{DAM}=\widehat{BAM}+\widehat{DAM}=90^0$

Hay ΔPAM là tam giác vuông cân. Ta có chu vi tam giác CMN là: $MN+MC+NC=2a$

Hay $MN+BC-BM+CD-DN=2a\Leftrightarrow MN+2a-(DP+DN)=2a\Leftrightarrow MN=PN$ dẫn đến $\Delta PAN=\Delta MAN$ suy ra $\widehat{PAN}=\widehat{MAN}=45^0$

b)Ta định nghĩa lại F là giao điểm của AN và PM, từ chứng minh PAM vuông cân và $\widehat{PAN}=\widehat{MAN}=45^0$

suy ra F là trung điểm của PM và $AF\perp PM$

suy ra $AF=CF=\frac{1}{2}PM$

hay F nằm trên trung trực của AC

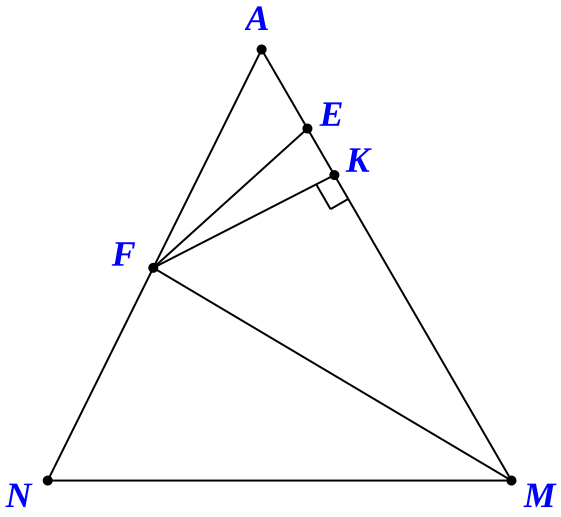
mà BD cũng là trung trực của AC

suy ra $F\in BD$ hay F cũng chính là giao điểm của AN với BD.

Tương tự ta cũng có $AM\perp NE$ mà H là giao điểm của NE,MF nên H là trực tâm của tam giác AMN suy ra $AH\perp EF$

c)Ta có kết quả quen thuộc sau:

« Cho tam giác AMN và hai điểm E,F nằm trên hai cạnh AM,AN của tam giác thì $\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=\frac{AE}{AM}\cdot\frac{AF}{AN}$ »



Thật vậy hạ $FK\perp AM$ thì $\frac{S_{AEF}}{S_{AFM}}=\frac{\frac{1}{2}AE.FK}{\frac{1}{2}AM.FK}=\frac{AE}{AM}$. Từ đó ta có

$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=\frac{S_{AEF}}{S_{AFM}}\cdot\frac{S_{AFM}}{S_{AMN}}=\frac{AE}{AM}\cdot\frac{AF}{AN}$

Trở lại bài toán ta có $\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=\frac{AE}{AM}\cdot\frac{AF}{AN}$

Mặt khác các tam giác AEN,AFM là tam giác vuông cân nên $AN=\sqrt{2}AE,AM=\sqrt{2}AF$

suy ra $\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=\frac{AE}{AM}\cdot\frac{AF}{AN}=\frac{AE}{\sqrt{2}AF}\cdot\frac{AF}{\sqrt{2}AE}=\frac{1}{2}$

Bài V *(1,0 điểm)*

Giả sử tồn tại một đường gấp khúc khép kín.

Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất trong đường gấp khúc khép kín trên. Khi đó, giả sử AC, BD là hai đoạn kề với đoạn AB

TH1: Nếu $AC < AB$ nên điểm B không là điểm gần A nhất

TH2: Nếu $DB < AB$ nên điểm A không là điểm gần B nhất

Điều đó chứng tỏ không thể nối điểm B và điểm A

Do đó, không tồn tại đường gấp khúc thỏa mãn

ĐỀ SỐ 23. CHỌN HSG HUYỆN CẨM THỦY (THANH HÓA) – V2
NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right) : \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

a) Rút gọn P. b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

2) Với *a, b, c* là 3 số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$3 + \frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)} = \frac{2a+b}{a-b} + \frac{2b+c}{b-c} + \frac{2c+a}{c-a}.$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0.$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4 + 2x^2 = y^3.$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố *p* thì $p^2 + \dfrac{p-1}{2}$ không là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

b) Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng đi qua $M(1;4)$. Biết đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm *A* có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm *B* có tung độ dương. Tìm *a, b* sao cho $OA + OB$ nhỏ nhất. (Với *O* là gốc tọa độ)

Câu 4. *(6,0 điểm)* Cho đường tròn (*O, r*) nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với cạnh *BC* tại *D*. Vẽ đường kính *DN* của (*O, r*). Tiếp tuyến của (*O*) tại *N* cắt *AB*, *AC* theo thứ tự tại *P* và *K*.

a) Chứng minh rằng $NK.CD = r^2$.

b) Gọi *E* là giao điểm của *AN* và *BC*. Chứng minh rằng $BD = CE$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{OA+OB+OC}{r}$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{a^4b}{a^2+1}+\dfrac{b^4c}{b^2+1}+\dfrac{c^4a}{c^2+1}\ge\dfrac{3}{2}$.

---------------------Hết--------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN 9 – NĂM HỌC 2019 - 2020 (HUYỆN CẨM THỦY)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)$

a) Rút gọn P. b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

2) Với a, b, c là 3 số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$3+\frac{(2a+b)(2b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(2b+c)(2c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(2c+a)(2a+b)}{(c-a)(a-b)}=\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2b+c}{b-c}+\frac{2c+a}{c-a}.$$

Hướng dẫn giải:

1) ĐKXĐ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

a) Có: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2-x}{x\sqrt{x}+x}\right)=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\dfrac{2\left(\sqrt{x}+1\right)-2+x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{x+2\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

b) Có: $P=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{x-1+1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+2\overset{Co-Si}{\ge}2\sqrt{\sqrt{x}-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}}+2=4.$

Dấu "=" xảy ra $\sqrt{x}-1=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-1=1\\ \sqrt{x}-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\ (TM)\\ x=0\ (KTM)\end{array}\right.$

Vậy $P_{Min}=4\Leftrightarrow x=4.$

2) Đặt: $\begin{cases}\dfrac{2a+b}{a-b}=x\\ \dfrac{2b+c}{b-c}=y\\ \dfrac{2c+a}{c-a}=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3a}{a-b}=x+1\\ \dfrac{3b}{b-c}=y+1\\ \dfrac{3c}{c-a}=z+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{3b}{a-b}=x-2\\ \dfrac{3c}{b-c}=y-2\\ \dfrac{3a}{c-a}=z-2\end{cases}$

$\Rightarrow(x+1)(y+1)(z+1)=(x-2)(y-2)(z-2)\Leftrightarrow 9+3(xy+yz+zx)=3(x+y+z)$

$\Leftrightarrow 3+xy+yz+zx=x+y+z$ (đpcm)

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0\cdot$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4+2x^2=y^3$.

Hướng dẫn giải:

a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0\ (1)$

ĐK: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+\left(3x^2-14x-9\right)=0$

$$\Leftrightarrow\frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1-(6-x)}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow(x-5)=0$ Vì: $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0\ \forall\ -\frac{1}{3}\le x\le 6$

$\Leftrightarrow x=5(TM)$. Vậy phương trình có nghiệm là: $x=5$.

b) Có: $x^4+2x^2=y^3\ (1)\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2\right)=y^3$

Với $y=0\Rightarrow x=0\ \left(Do: x^2+2\ge 2\right)$

Với $y\ne 0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\frac{x^4+2x^2}{y^3}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{x^2+2}{y}\right)=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{x^2+2}{y}=1$ (vô nghiệm)

Vậy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^2+\frac{p-1}{2}$ không là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

b) Cho hàm số bậc nhất $y=ax+b$ có đồ thị là đường thẳng đi qua $M(1;4)$. Biết đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm B có tung độ dương. Tìm *a, b* sao cho $OA+OB$ nhỏ nhất. (Với O là gốc tọa độ)

Hướng dẫn giải:

a) Với $p=2\Rightarrow p^2+\frac{p-1}{2}=2^2+\frac{2-1}{2}=\frac{9}{2}$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

Với $p=3 \Rightarrow p^2+\dfrac{p-1}{2}=3^2+\dfrac{3-1}{2}=10=2.5$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

Với $p>3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=3k+1 \\ p=3k+2 \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{N}^*\right)$

- Nếu $p=3k+1 \Rightarrow p^2+\dfrac{p-1}{2}=\left(3k+1\right)^2+\dfrac{3k+1-1}{2}=9k^2+6k+1+\dfrac{3k}{2}=\dfrac{18k^2+12k+2+3k}{2}$

$=\dfrac{18k^2+15k+2}{2}=\dfrac{\left(6k+1\right)\left(3k+2\right)}{2}$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

- Nếu $p=3k+2 \Rightarrow p^2+\dfrac{p-1}{2}=\left(3k+2\right)^2+\dfrac{3k+2-1}{2}=9k^2+12k+4+\dfrac{3k+1}{2}$

$=\dfrac{18k^2+24k+8+3k+1}{2}=\dfrac{18k^2+27k+9}{2}=\dfrac{9}{2}\cdot\left(2k^2+3k+1\right)=\dfrac{9}{2}\cdot\left(2k+1\right)\left(k+1\right)$ (không phải tích 2 số tự nhiên liên tiếp)

Vậy với mọi số nguyên tố $p \Rightarrow p^2+\dfrac{p-1}{2}$ không phải là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

b) Vì đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm B có tung độ dương $\Rightarrow a<0$ $\left(1\right)$

Do đồ thị là đường thẳng đi qua $M\left(1;4\right) \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow b>0$ $\left(2\right)$ $\left(Do: a<0\right)$

Có: $OA+OB \overset{Co-si}{\geq} 2\sqrt{OA.OB}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OA=OB$ hay ΔOAB cân tại O.

Vì: $OA=OB \Leftrightarrow b=\dfrac{-b}{a} \Leftrightarrow b\left(a+1\right)=0 \Leftrightarrow a=-1$ $(Do: b>0)$

Với $a=-1 \Rightarrow b=5 \Rightarrow y=-x+5$

Vậy $a=-1 \Rightarrow b=5$ thì $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất là: 5 + 5 = 10.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

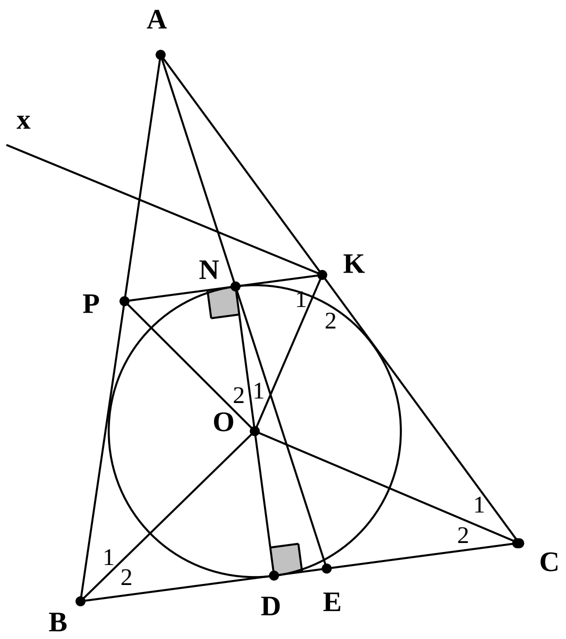
Câu 4. *(6,0 điểm)* Cho đường tròn (*O*, *r*) nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với cạnh *BC* tại *D*. Vẽ đường kính *DN* của (*O*, *r*). Tiếp tuyến của (*O*) tại *N* cắt *AB*, *AC* theo thứ tự tại *P* và *K*.

a) Chứng minh rằng $NK.CD=r^2$.

b) Gọi *E* là giao điểm của *AN* và *BC*. Chứng minh rằng $BD=CE$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{OA+OB+OC}{r}$.

Hướng dẫn giải:



a) Có: $PK \,//\, BC$ (cùng $\perp DN$) $\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ACB}$ (đồng vị)

Gọi Kx là tia phân giác của $\widehat{AKN} \Rightarrow Kx \,//\, CO$ (Vì CO là tia phân giác của $\widehat{ACB}$)

Mà: $Kx \perp KO$ (tia phân giác trong và phân giác ngoài)

$\Rightarrow CO \perp KO \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{O_1}$ (cùng phụ với $\widehat{K_1}$)

$\Rightarrow \Delta NKO \backsim \Delta DOC\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{NK}{DO} = \dfrac{NO}{DC} \Rightarrow NK.DC = NO.DO \;\Rightarrow NK.CD = r^2$ (đpcm)

b) *Cách 1:*

Ta có: $BD = \dfrac{r}{\tan\dfrac{B}{2}}$; $CD = \dfrac{r}{\tan\dfrac{C}{2}} \Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{C}{2}}$ (1)

Mà: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{O_1}\,(cmt) \Rightarrow NK = r.\tan\dfrac{C}{2}$

Tương tự: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{O_2} \Rightarrow NP = r.\tan\dfrac{B}{2} \Rightarrow \dfrac{NP}{NK} = \dfrac{\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{C}{2}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{NK}{NP} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow \dfrac{NK}{BD} = \dfrac{NP}{CD} = \dfrac{NK + NP}{BD + CD} = \dfrac{KP}{BC}$ (3)

Mặt khác: $KP \,//\, BC$ $\Rightarrow \dfrac{NK}{EC} = \dfrac{KP}{BC}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{NK}{EC} = \dfrac{NK}{BD} \Rightarrow EC = BD$ (đpcm).

Cách 2:

Ta có: $NK.CD = NP.BD = r^2$ (cmt)

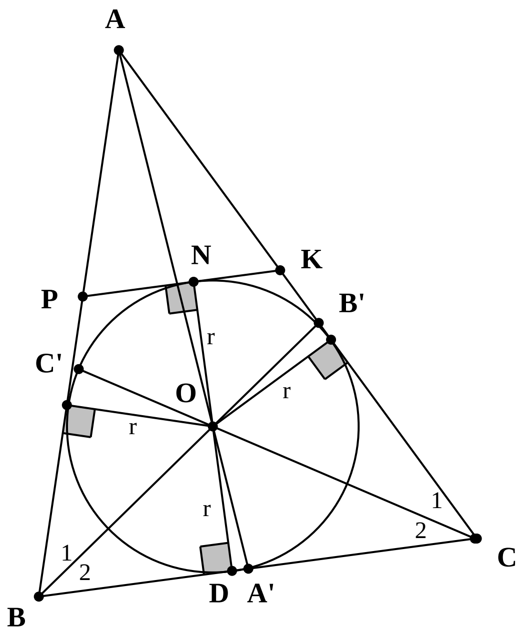
Mà: $\Rightarrow \dfrac{NK}{EC} = \dfrac{NP}{BE}$ (Vì: $KP // BC$)

$\Rightarrow EC.CD = BE.BD \Rightarrow EC.(EC + ED) = (BD + ED).BD \Rightarrow EC^2 + EC.ED = BD^2 + ED.BD$

$\Rightarrow EC^2 - BD^2 + EC.ED - ED.BD = 0 \Rightarrow (EC - BD).(EC + BD + ED) = 0$

$\Rightarrow EC - BD = 0 \Rightarrow EC = BD$ (đpcm)

c)



Gọi $S_{OAC} = S_1; S_{OBC} = S_2; S_{OAB} = S_3$

Ta có: $\dfrac{OA}{r} + \dfrac{OB}{r} + \dfrac{OC}{r} \ge \dfrac{OA}{OA'} + \dfrac{OB}{OB'} + \dfrac{OC}{OC'}$

Mà: $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{S_1}{S_{OA'C}} = \dfrac{S_3}{S_{OA'B}} = \dfrac{S_1 + S_3}{S_2}$

Tương tự: $\dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1}$; $\dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{S_1 + S_2}{S_3}$.

$\Rightarrow \dfrac{OA}{OA'} + \dfrac{OB}{OB'} + \dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{S_1 + S_3}{S_2} + \dfrac{S_2 + S_3}{S_1} + \dfrac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_2}{S_1}\right) + \left(\dfrac{S_2}{S_3} + \dfrac{S_3}{S_2}\right) + \left(\dfrac{S_3}{S_1} + \dfrac{S_1}{S_3}\right) \ge 6.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3$ hay ΔABC đều.

Vậy $\dfrac{OA}{r} + \dfrac{OB}{r} + \dfrac{OC}{r} \ge 6 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \dfrac{a^4 b}{a^2+1} + \dfrac{b^4 c}{b^2+1} + \dfrac{c^4 a}{c^2+1} \ge \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $S=\frac{a^4b}{a^2+1}+\frac{b^4c}{b^2+1}+\frac{c^4a}{c^2+1}=a^2b-\frac{1}{a^2+1}+b^2c-\frac{1}{b^2+1}+c^2a-\frac{1}{c^2+1}$

$=\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)-\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\overset{Co-si}{\geq}3\sqrt[3]{a^2b.b^2c.c^2a}-\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)$

$\overset{Co-si}{\geq}3abc-\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{2c}}\right)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

ĐỀ SỐ 24. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN ĐAN PHƯỢNG - NĂM 2019

Câu 1. (*2,0 điểm*) Tính:

a. $A=\sqrt{3}.\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\right)-\sqrt{75}$

b. $B=2\sqrt{45}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\frac{8}{\sqrt{5}+1}$.

Câu 2. (*2,0 điểm*) Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1}{2}\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}+\sqrt{9x-18}=0$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$

Câu 3. (*2,0 điểm*)

Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x>0, x\neq 4, x\neq 9$.

a. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=100$;

b. Rút gọn biểu thức B;

c. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M=A:B$ có giá trị nguyên.

Câu 4. (*4,0 điểm*)

Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB<AC\right)$, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB, AC.

a. Cho $BH=4cm, CH=9cm$. Tính AH, DE;

b. Chứng minh $AD.AB=AE.AC$;

c. Đường phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt BC tại K. Gọi I là trung điểm của AK . Chứng minh tam giác AKC cân và CI vuông góc với AK;

d. Dựng IM vuông góc với BC tại M. Chứng minh $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{4CI^2}$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN ĐAN PHƯỢNG - NĂM 2019

Câu 1: (*2,0 điểm*) Tính:

a. $A=\sqrt{3}.\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\right)-\sqrt{75}$

b. $B=2\sqrt{45}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}$.

Lời giải

a. $A=\sqrt{3}.\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\right)-\sqrt{75}$

$A=\sqrt{36}-\sqrt{81}+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}$

$A=6-9=-3$

b. $B=2\sqrt{45}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\dfrac{8}{\sqrt{5}+1}$.

$B=6\sqrt{5}+\sqrt{5}-1-2\left(\sqrt{5}-1\right)$

$B=7\sqrt{5}-1-2\sqrt{5}+2$

$B=5\sqrt{5}+1$

Câu 2: (*2,0 điểm*) Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}+\sqrt{9x-18}=0$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$

Lời giải

a. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8}+\sqrt{9x-18}=0$ Điều kiện: $x\ge 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{x-2}-2\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}-2+3\right)\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$

$\Leftrightarrow x=2$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$ Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}=2x-1$

$\Leftrightarrow |x-2|=2x-1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=1-2x \\ x-2=2x-1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 3 \\ x = -1(loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1(t/m)$$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$.

a. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 100$;

b. Rút gọn biểu thức B;

c. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = A : B$ có giá trị nguyên.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$.

a. Khi $x = 100$ (thỏa mãn) thì $A = \dfrac{10}{10-2} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

b. $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$

$$B = \frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right) - x - 9\sqrt{x}}{x-9}$$

$$B = \frac{2x+6\sqrt{x}-x-9\sqrt{x}}{x-9}$$

$$B = \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

c. Ta có:

$$M = A : B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$$

Để M nguyên thì $\sqrt{x}-2 \in U(5)$ và $\sqrt{x}-2 > -2$ nên

$\Rightarrow \sqrt{x}-2 \in \{-1;1;5\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{1;3;7\} \Leftrightarrow x \in \{1;9;49\}$ Kết hợp với điều kiện ta được

$x \in \{1;49\}$

Câu 4: *(4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại $A\left(AB < AC\right)$, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB, AC.

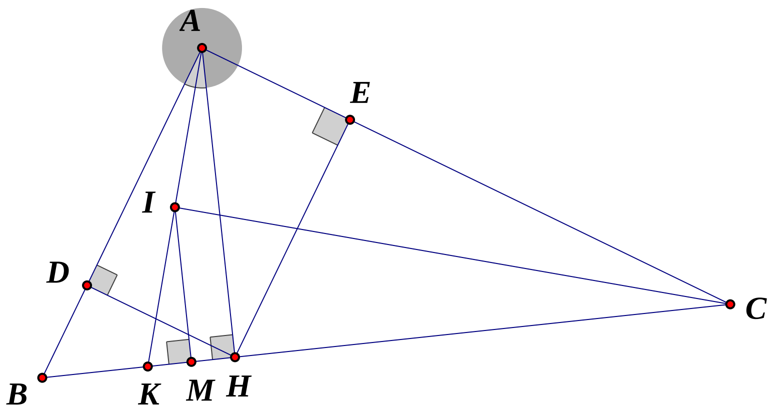
a. Cho $BH = 4cm, CH = 9cm$. Tính AH, DE;

b. Chứng minh $AD.AB = AE.AC$;

c. Đường phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt BC tại K. Gọi I là trung điểm của AK. Chứng minh tam giác AKC cân và CI vuông góc với AK;

d. Dựng IM vuông góc với BC tại M. Chứng minh $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{4CI^2}$.

Lời giải



a. Xét tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A}=\widehat{D}=\widehat{E}=90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AH=DE$

Ta lại có: ΔABC vuông tại A có AH là đường cao nên

$AH^2=DE^2=BH.CH=4.9=36$

$\Rightarrow AH=DE=6$

b. ΔAHB có $\widehat{AHB}=90^\circ$; $HD\perp AB$ suy ra $AD.AB=AH^2$ (1)

ΔAHC có $\widehat{AHC}=90^\circ, HE\perp AC$ suy ra $AE.AC=AH^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD.AB=AE.AC$

c. ΔABC vuông tại A nên $\widehat{KAC}=90^\circ-\widehat{BAK}$ (3)

ΔAHK vuông tại H nên $\widehat{AKH}=90^\circ-\widehat{KAH}$ (4)

Mặt khác, $\widehat{BAK}=\widehat{KAH}$ (AK là phân giác của góc BAH) (5)

Từ $(3),(4)$ và $(5)\Rightarrow \widehat{KAC}=\widehat{AKH}\Rightarrow \Delta AKC$ cân tại C nên đường trung tuyến CI đồng thời là đường cao $\Rightarrow CI\perp AK$.

d. Ta có $IM\perp BC$; $AH\perp BC\Rightarrow IM // AH$ mà I là trung điểm của $AK\Rightarrow M$ là trung điểm của AK $\Rightarrow IM$ là đường trung bình của tam giác ΔAKH

$\Rightarrow IM=\frac{1}{2}AH$

Xét ΔKIC có $\widehat{KIC}=90^\circ, IM\perp AH$

$\Rightarrow \frac{1}{IM^2}=\frac{1}{KI^2}+\frac{1}{IC^2}$ (6)

Mà $IM = \dfrac{1}{2}AH \Rightarrow AH = 2IM \qquad (7)$

$IK = \dfrac{1}{2}AK \Rightarrow AK = 2IK \qquad (8)$

Từ $(6),(7)$ và (8) $\Rightarrow \dfrac{4}{AH^2} = \dfrac{4}{AK^2} + \dfrac{1}{CI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{4CI^2}$

ĐỀ SỐ 25. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BA THƯỚC - NĂM 2019-2020

Câu 1. (*4,0 điểm*)

Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(x - \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$, với $x \ge 4; x \ne 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{x-1} < 0$

Câu 2. (*4,0 điểm*)

a. Cho 3 số $x, y, z \ne 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \left(\frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} - 3\right)^{2019}$$

b. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1} = 3x^2 + 6$.

Câu 3. (*4,0 điểm*)

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2 + 2xy + x = 32y$.

b) Tìm số tự nhiên n để số p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$.

Câu 4. (*2,0 điểm*)

Cho tam giác ABC vuông ở A, $AH \perp BC$, $HE \perp AB$, $HF \perp AC$ $(H \in BC, E \in AB, F \in AC)$.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$, $BH = BC.cos^2 B$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BE}{CF}$.

c) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{CF^2} - \sqrt[3]{BE^2}$.

d) Cho $BC = 2a$ .Tim GTLN của diện tích tứ giác $AEHF$.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

Cho x, y, z là các số thức dương thay đổi và thỏa minh điều kiện $xyz = 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $\dfrac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \dfrac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \dfrac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN BA THƯỚC - NĂM 2019

Câu 1: (*4,0 điểm*)

Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{2x+1}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(x-\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$, với $x\ge 4; x\ne 0$.

b) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P\sqrt{x-1}<0$

Lời giải

a. $P=\left(\dfrac{2x+1}{x\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(x-\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$

$$P=\left(\dfrac{2x+1}{\left(\sqrt{x}\right)^3+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right).\left(\dfrac{x\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\dfrac{2x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\right)\left(\dfrac{x\sqrt{x}-2x-x+4}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\dfrac{2x+1-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)\left(\dfrac{x\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(x-4\right)}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\left(\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\right)\left(\dfrac{x\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(x-4\right)}{\sqrt{x}-2}\right)$$

$$P=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}.\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x-\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$P=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{1}$$

$$P=\sqrt{x}-2$$

b) $P.\sqrt{x-1}<0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt{x-1}<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-2<0\\ \sqrt{x-1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<4\\ x>1\end{cases}$

Vậy với $1<x<4$ thì $P.\sqrt{x-1}<0$.

Câu 2 (*4,0 điểm*)

a. Cho 3 số $x,y,z\ne 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\left(\dfrac{xy}{z^2}+\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}-3\right)^{2019}$$

b. Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1}=3x^2+6$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow yz+xz+xy=0$.

Lại có $P=\left(\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}-3\right)^{2019}$

$$P=\left(\frac{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3}{x^2y^2z^2}-3\right)^{2019}$$

$$P=\left(\frac{(xy+yz+xz)^3-3(xy+yz)(yz+xz)(xy+xz)}{x^2y^2z^2}-3\right)^{2019}$$

$$P=\left(\frac{3x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}-3\right)^{2019}=0.$$

b) ĐK $x\geq -1$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$3\left(x^2-x+1\right)+3\left(x+1\right)=10\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

Đặt $\sqrt{x^2-x+1}=u$, $\sqrt{x+1}=v$ thì ta có phương trình:

$$3u^2+3v^2-10uv=0 \Leftrightarrow (3u-v)(u-3v)=0$$

TH1: $3u=v$ thì $9\left(x^2-x+1\right)=x+1 \Leftrightarrow 9x^2-10x+8=0$ (Phương trình này vô nghiệm).

TH2: $u=3v$ thì $x^2-x+1=9\left(x+1\right) \Leftrightarrow x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{33}$.

Vậy phương trình đa cho có 2 nghiệm là $x=5\pm\sqrt{33}$

Câu 3 *(4,0 điểm)*

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2+2xy+x=32y$.

b) Tìm số tự nhiên n để số p là số nguyên tố biết: $p=n^3-n^2+n-1$.

Lời giải

a) Ta có: $xy^2+2xy+x=32y \Leftrightarrow x\left(y+1\right)^2=32y \Leftrightarrow x=\frac{32y}{\left(y+1\right)^2}=\frac{32}{y+1}-\frac{32}{\left(y+1\right)^2}$

Để x nguyên dương thì $\left(y+1^2\right)\in U\left(32\right)$ và $\left(y+1\right)^2$ là 1 số chính phương.

$\Rightarrow \left(y+1\right)^2=\{1,4,16\} \Leftrightarrow y+1=\{1,2,4\} \Leftrightarrow y=\{0,1,2\}$ vì y nguyên dương nên $y=1 \Rightarrow x=8$, $y=3 \Rightarrow x=6$.

b) Ta có $p=n^3-n^2+n-1=\left(n-1\right)\left(n^2+1\right)$

Lại có: $n-1<n^2+1 \Rightarrow n-1=1 \Rightarrow n=2$

Với $n=2 \Rightarrow p=5$ là số nguyên tố.

Câu 4 (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở A, $AH \perp BC$, $HE \perp AB$, $HF \perp AC$ $(H \in BC, E \in AB, F \in AC)$.

a) Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$, $BH = BC.cos^2 B$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BE}{CF}$.

c) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{CF^2} - \sqrt[3]{BE^2}$.

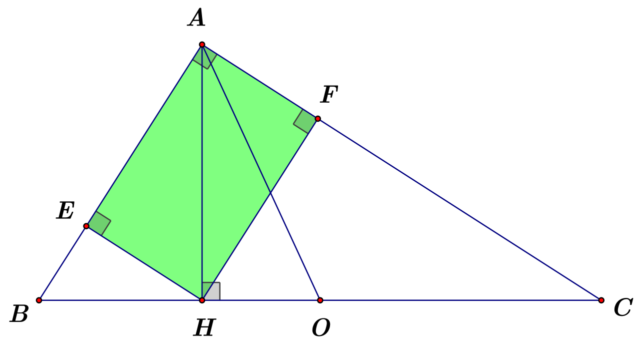
d) Cho $BC = 2a$ .Tim GTLN của diện tích tứ giác $AEHF$.

Lời giải

a) Xét ΔAHB và ΔAEH có:

- $\widehat{A}$ chung;
- $\widehat{E} = \widehat{H} = 90°$.

Vậy $\Delta AHB \backsim \Delta AEH$ (g.g)



Suy ra: $AE.AB = AH^2$ (1)

Tương tự ta có: $AF.AC = AH^2$ (2)

Từ (1) và (2): $\Rightarrow AE.AB = AF.AC$

Ta có:

$\cos B = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \cos B.AB$ (3)

Lại có: $\cos B = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \cos B.BC$ (4)

Từ (3) và (4) : suy ra $BH = BC.cos^2 B$

b) Ta có ΔABC vuông ở A có AH là đường cao $\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = BH.BC \\ AC^2 = CH.BC \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BH}{CH}$

Lại có ΔHCA vuông tại H có HF là đường cao $\Rightarrow CH^2 = CF.AC \Rightarrow CF = \dfrac{CH^2}{AC}$.

Suy ra $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BH^2}{AB}.\dfrac{AC}{CH^2} = \left(\dfrac{AB^2}{AC^2}\right)^2.\dfrac{AC}{AB} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$

c) Ta có $BH^2 = BE.BA \Rightarrow BE^2 = \dfrac{BH^4}{BA^2} = \dfrac{BH^4}{BH.BC} = \dfrac{BH^3}{BC} \Rightarrow \sqrt[3]{BE^2} = \dfrac{BH}{\sqrt[3]{BC}}$;

Tương tự, $\sqrt[3]{CF^2} = \dfrac{CH}{\sqrt[3]{BC}}$. Do đó

$$\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \dfrac{BH}{\sqrt[3]{BC}} + \dfrac{CH}{\sqrt[3]{BC}} = \dfrac{BC}{\sqrt[3]{BC}} = \sqrt[3]{BC^2}.$$

Vậy $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

d) Gọi O là trung điểm của BC. Ta có $S_{AEHF} = AE.AF$.

Mà $AH^2 = AE.AB \Rightarrow AE = \dfrac{AH^2}{AB}$. Tương tự, $AF = \dfrac{AH^2}{AC}$. Do đó

$$S_{AEHF} = \frac{AH^2}{AB}.\frac{AH^2}{AC} = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{AH.BC} = \frac{AH^3}{BC} \le \frac{AO^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}.$$

Vậy S_{AEHF} lớn nhất khi $H \equiv O$ hay ΔABC vuông cân tại A.

Câu 5 *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thức dương thay đổi và thỏa minh điều kiện $xyz = 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $\dfrac{x^2\left(y+z\right)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \dfrac{y^2\left(z+x\right)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \dfrac{z^2\left(x+y\right)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$.

Lời giải

Ta có: $x^2\left(y+z\right) \ge 2x\sqrt{x}$. Tương tự, $y^2\left(x+z\right) \ge 2y\sqrt{y}$, $z^2\left(x+y\right) \ge 2z\sqrt{z}$.

$$\Rightarrow P \ge \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Đặt $a = x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}$, $b = y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}$, $c = z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}$.

Suy ra: $x\sqrt{x} = \dfrac{4c+a-2b}{9}$, $y\sqrt{y} = \dfrac{4a+b-2c}{9}$, $z\sqrt{z} = \dfrac{4b+c-2a}{9}$.

Do đó: $P \ge \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{4c+a-2b}{b} + \dfrac{4a+b-2c}{c} + \dfrac{4b+c-2a}{a}\right)$

$$= \frac{2}{9}\left[4\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) - 6\right] \ge \frac{2}{9}\left(4.3+3-6\right) = 2.$$

Do $\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a} = \left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right) + \left(\dfrac{b}{a}+1\right) - 1 \ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}} + 2\sqrt{\dfrac{b}{a}} - 1 \ge 4-1 = 3\right)$

Hoặc $\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{c}{b}.\dfrac{a}{c}.\dfrac{b}{a}} = 3$. Tương tự, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \ge 3$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2$.

ĐỀ SỐ 26. CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN KIM THÀNH - NĂM 2019-2020

Câu1. (2 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{x}-1}$ $\quad\left(x > 0; x \ne 1\right)$

2) Cho x và y là hai số thỏa mãn: $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right) = 5$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M = x^{2017} + y^{2017}$

Câu2. (2 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x+3}{2}$

2) Giải bất phương trình: $(2x-3)\sqrt{x+4}\ge 0$

Câu3. (2 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $xy+2x+2y=1$

2) Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n thì số $A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Câu4. (3 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HD, HE lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng:

1) $\dfrac{DB}{EC}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$

2) $BC.BD.CE=AH^3$

Câu5. (1 điểm)

Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $x^2+3^y=3026$.

……………..Hết……………..

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu1. (2 điểm)

1)

$$P=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(2\sqrt{x}+1\right)+2\left(\sqrt{x}+1\right)$$
$$=x-\sqrt{x}-2\sqrt{x}-1+2\sqrt{x}+2$$
$$=x-\sqrt{x}+1$$

2)

Nhân 2 vế của $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5$ (1) với $\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ ta được:

$$\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[x^2-\left(x^2+5\right)\right]\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$$
$$\Leftrightarrow -5\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$$
$$\Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5} \qquad (2)$$

Tương tự nhân 2 vế của (1) với $\left(y+\sqrt{y^2+5}\right)$ ta được:

$$x-\sqrt{x^2+5}=-y-\sqrt{y^2+5} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế của (2) và (3) ta được:

$$y-\sqrt{y^2+5}+x-\sqrt{x^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5}-y-\sqrt{y^2+5}$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y=0\Leftrightarrow 2(x+y)=0\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow x=-y$$

Vậy $M=x^{2017}+y^{2017}=0$

Câu2. (2 điểm)

1)

Điều kiện để phương trình xác định là: $x\ge 1$

Phương trình đó cho tương đương với:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\frac{x+3}{2} \qquad (*)$$

Nếu $\sqrt{x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$ thì phương trình (*) trở thành

$$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=\frac{x+3}{2}\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=x+3$$

$$\Leftrightarrow 16(x-1)=x^2+6x+9$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x+25=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2=0$$

$\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện $x\ge 2$)

Vậy $S=\{5\}$

2) $(2x-3)\sqrt{x+4}\ge 0$ $(dk: x\ge -4)$

Xét trường hợp: $(2x-3)\sqrt{x+4}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-3=0\\ \sqrt{x+4}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}(tm)\\ x=-4(tm)\end{array}\right.$$

Xét trường hợp: $(2x-3)\sqrt{x+4}>0$

$$\Leftrightarrow 2x-3>0 (vi \sqrt{x+4}>0)$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$$

Vậy: bất phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x\ge \dfrac{3}{2}\\ x=-4\end{array}\right.$

Câu3 (2 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $xy+2x+2y=1$

$xy+2x+2y=1$

$\Leftrightarrow y(x+2)=1-2x$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1-2x}{x+2}=-2+\dfrac{5}{x+2}$

Để $x,y\in Z \Leftrightarrow x+2\in U(5)=\{\pm 1;\pm 5\} \Rightarrow x\in\{-3;-1;-7;3\}$

Thay vào ta tìm được $y\in\{-7;3;-3;-1\}$

Vậy; nghiệm nguyên của pt là: $(-3;-7);(-1;3);(-7;-3);(3;-1)$

2) $A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n(n+3)(n+2)(n+1)+1$

$A=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

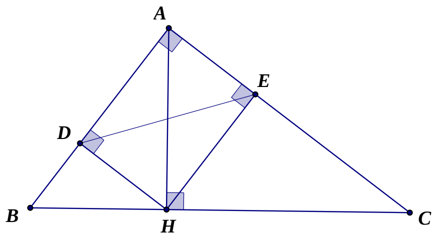
Đặt $n^2+3n=t\,(t\in N)=A=t(t+2)+1=(t+1)^2$

Vậy tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là số chính phương.

Câu4 (2 điểm)

a) Ta có: Δ ABC vuông tại A, đường cao AH:

$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BH.BC}{CH.BC}=\dfrac{BH}{CH}$



$\Rightarrow\left(\dfrac{AB^2}{AC^2}\right)^2=\left(\dfrac{BH}{CH}\right)^2\Rightarrow\dfrac{AB^4}{AC^4}=\dfrac{BH^2}{CH^2}=\dfrac{BD.AB}{CE.AC}$

$\Rightarrow\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BD}{CE}\Rightarrow\dfrac{BD}{CE}=\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$

b) Ta có:

$AH^2=BH.CH$

$\Leftrightarrow AH^4=BH^2.CH^2=(BD.AB)(CE.AC)=(BD.CE)(AB.AC)=BD.CE.AH.BC$

$\Leftrightarrow AH^3=BD.CE.BC$

Câu 5 (1 điểm)

Ta có x^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 .

- Nếu $y \neq 0 \Rightarrow 3^y \vdots 3 \Rightarrow x^2 + 3^y$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1

  Mà 3026 chia 3 dư 2

  ⇨ Trường hợp này không xảy ra.

- Vậy $y = 0$ $\Rightarrow x^2 + 1 = 3026$ $\Leftrightarrow x^2 = 3025$ $\Leftrightarrow x^2 = 55^2$ $\Leftrightarrow x = 55$

  Vậy cặp số tự nhiên $(x; y) = (55; 0)$.

ĐỀ SỐ 27. CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG THCS VU LAN - NĂM 2019-2020

Câu 1(2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $\left(x^2+4x+6\right)\left(x^2+6x+6\right)-3x^2$
2) Cho a, b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $B = \dfrac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4}$

Câu 2(2,0 điểm) Giải các phương trình

1) $\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^3 - (x-3)^3 = 16$
2) $\dfrac{3}{3x^2-4x+1} + \dfrac{13}{3x^2+2x+1} = \dfrac{6}{x}$

Câu 3(2,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $20y^2 - 6xy = 150 - 15x$

2) Tìm số nguyên tố p sao cho các số $2p^2 - 1;\ 2p^2 + 3;\ 3p^2 + 4$ đều là số nguyên tố

Câu 4(3,0 điểm)

Cho tam giác ABC, M là một điểm thuộc cạnh BC, qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và AB, chúng cắt AB và AC tương ứng tại N và P.

1) Gọi O là trung điểm của NP. Chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.
2) Giả sử đường thẳng NP cắt đường thẳng BC tại Q và $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{2}$. Tính tỉ số $\dfrac{QB}{QC}$.
3) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác MNP có giá trị lớn nhất.

Câu 5(1,0 điểm)

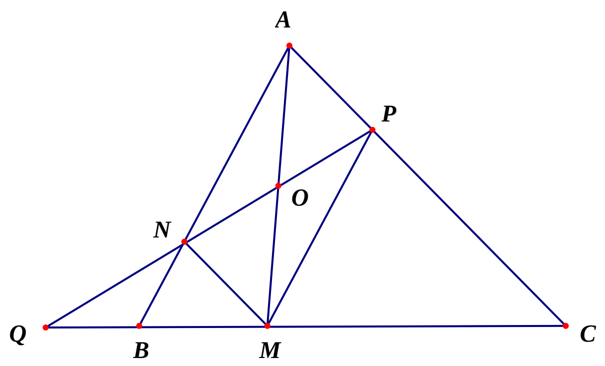
Cho $0 \leq a;\ b;\ c \leq 2$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a^3 + b^3 + c^3$.

…………………………Hết……………………………

TRƯỜNG THCS LAI VU Ngày 19.9.2019 (lần 2)	HƯỚNG DẪN, BIỂU DIỄN CHẤM BÀI

CÂU	PHẦN	NỘI DUNG	ĐIỂM
1	1	$A=\left(x^2+5x+6-x\right)\left(x^2+5x+6+x\right)-3x^2$	0,25
		Đặt $y=x^2+5x+6$ $\Rightarrow A=\left(y-x\right)\left(y+x\right)-3x^2=y^2-4x^2=\left(y-2x\right)\left(y+2x\right)$	0,25
		$=\left(x^2+5x+6-2x\right)\left(x^2+5x+6+2x\right)$ $=\left(x^2+3x+6\right)\left(x^2+7x+6\right)$	0,25
		$=\left(x^2+3x+6\right)\left(x+1\right)\left(x+6\right)$	0,25
	2	$a^3-a^2b+ab^2-6b^3=0\Leftrightarrow\left(a-2b\right)\left(a^2+ab+3b^2\right)=0\ (*)$	0,25
		Vì $a>b>0\Rightarrow a^2+ab+3b^2>0$ nên từ (*) ta có $a=2b$	0,25
		Vậy biểu thức $B=\dfrac{a^4-4b^4}{b^4-4a^4}=\dfrac{16b^4-4b^4}{b^4-64b^4}$	0,25
		$B=\dfrac{12b^4}{-63^4}=\dfrac{-4}{21}$	0,25
2	1	(ĐKXĐ: $x\neq 2$) PT $\Leftrightarrow\left(\dfrac{x-3}{x-2}-x+3\right)^3+3\dfrac{\left(x-3\right)^3}{x-2}\left(\dfrac{1}{x-2}-1\right)=16$	0,25
		$\Leftrightarrow -\left[\dfrac{\left(x-3\right)^2}{x-2}\right]^3-3\left[\dfrac{\left(x-3\right)^2}{x-2}\right]^2=16$ Đặt $t=\dfrac{\left(x-3\right)^2}{x-2}$ ta được $t^3+3t^2+16=0\ (*)$	0,25
		$(*)\Leftrightarrow\left(t^3+4t^2\right)-\left(t^2-16\right)=0\Leftrightarrow t2\left(t+4\right)-\left(t+4\right)\left(t-4\right)=0$ $\Leftrightarrow\left(t+4\right)\left(t^2-t+4\right)=0$ Lí do để có $t=-4$	0,25
		Với $t=-4$ thì $\dfrac{\left(x-3\right)^2}{x-2}=-4$ Hay $x^2-6x+9=-4x+8\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1\left(TM\right)$	0,25

		Vậy $x=1$	
	2	$\dfrac{2}{3x^2-5x+2}+\dfrac{13}{3x^2+x+2}=\dfrac{6}{x}\left(x\neq 1;x\neq \dfrac{2}{3};x\neq 0\right)$	0,25
		$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3x-5+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{3}{3x+1+\dfrac{2}{x}}=6$	
		Đặt $3x-2+\dfrac{2}{x}=a$ ta có phương trình:	0,25
		$\Leftrightarrow \dfrac{2}{a-3}+\dfrac{13}{a+3}=6 \quad (a\neq \pm 3)$	
		$\Rightarrow 2(a+3)+13(a-3)=6(a-3)(a+3)$ $\Leftrightarrow 2a^2-5a-7=0$ $\Leftrightarrow (a+1)(2a-7)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1(tm) \\ a=\dfrac{7}{2}(tm)\end{array}\right.$	**0,25**
		Với $a=-1\Rightarrow 3x-2+\dfrac{2}{x}=-1$ $\Rightarrow 3x^2-x+2=0$ vô nghiệm Với $a=\dfrac{7}{2}\Rightarrow 3x-2+\dfrac{2}{x}=\dfrac{7}{2}$ $\Rightarrow 6x^2-11x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3}(tm) \\ x=\dfrac{1}{2}(tm)\end{array}\right.$ Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{2};x=\dfrac{4}{3}$	**0,25**
3	*1*	Ta có : $150-15x=20y^2-6xy \Leftrightarrow 6xy-15x=20y^2-150$ $\Leftrightarrow 3x(2y-5)=5(4y^2-25)-25$ $\Leftrightarrow (2y-5)(10y+25-3x)=25$ Xét 6 trường hợp sau	**0,25**
		+) $\begin{cases}2y-5=1\\10y+25-3x=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10\\y=3\end{cases}(tm)$ +) $\begin{cases}2y-5=25\\10y+25-3x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=58\\y=15\end{cases}(tm)$	**0,25**

		+) $\begin{cases}2y-5=-1\\10y+25-3x=-25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{70}{3}\\y=2\end{cases}$ (loại) $\begin{cases}2y-5=-25\\10y+25-3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-10\\x=\dfrac{-74}{3}\end{cases}$ (loại)	**0,25**
		+) $\begin{cases}2y-5=5\\10y+25-3x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{70}{3}\\y=5\end{cases}$ (loại)	**0,25**
	2	Vì p^2 là số chính phương nên p^2 chia cho 7 có số dư là $0;1;2;4$ +) Nếu $p^2\vdots 7$ thì $p\vdots 7\Rightarrow p=7$ Khi đó $2p^2-1=2.7^2-1=97$ là số nguyên tố $2p^2+3=2.7^2+3=101$ là số nguyên tố $3p^2+4=3.7^2+4=151$ là số nguyên tố +) Nếu p^2 chia 7 dư 1 thì $\left(3p^2+4\right)\vdots 7\Rightarrow$ Trái với đề bài +) Nếu p^2 chia 7 dư 2 thì $\left(3p^2+1\right)\vdots 7\Rightarrow$ Trái với đề bài +) Nếu p^2 chia 7 dư 4 thì $\left(2p^2-1\right)\vdots 7\Rightarrow$ Trái với đề bài Vậy $p=7$	
	a	 Xét tứ giác $APMN$ có: $\left.\begin{matrix}MP//AN(gt)\\AP//MN(gt)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ tứ giác $APMN$ là hình bình hành có O là trung điểm của đường chéo NP nên O cũng là trung điểm của đường chéo AM . Vậy 3 điểm A, O, M thẳng hàng.	

	b	Theo gt: $\frac{MB}{MC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BM}{BC}=\frac{BN}{BA}=\frac{MN}{AC}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow\frac{AP}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AP}{PC}=\frac{1}{2}$ $\frac{QM}{QC}=\frac{MN}{PC}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow QM=MC$ Mà $BM=\frac{MC}{2}\Rightarrow MB=QB\Rightarrow\frac{QB}{QC}=\frac{1}{4}$	
	c)	c)(1 điểm) Kẻ đường thẳng vuông góc với MN và AC tại H và K Ta có **3.** $S_{MNP}=\frac{1}{2}S_{ANMP}$ $\Rightarrow S_{ANMP}$ lớn nhất khi S_{ANMP} lớn nhất Ta có $S_{ANMP}=MN.HK$ $S_{ABC}=\frac{1}{2}BK.AC$ $\Rightarrow\frac{S_{AMNP}}{S_{ABC}}=\frac{2MN.HK}{BK.AC}=2.\frac{MN}{AC}\frac{HK}{BK}$ Đặt BM = x, MC = y $\frac{MN}{AC}=\frac{x}{x+y};\frac{HK}{BK}=\frac{y}{x+y}$ $\Rightarrow\frac{S_{AMNP}}{S_{ABC}}=\frac{2xy}{(x+y)^2}\le\frac{2xy}{4xy}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow S_{AMNP}\le\frac{1}{2}S_{ABC}$ $\Rightarrow S_{MNP}\le\frac{1}{4}S_{ABC}$ $\Rightarrow S_{NMP}$ lớn nhất bằng $\frac{1}{4}S_{ABC}$ khi x = y hay M là trung điểm của BC	
5		Bài 5: Vai trò của a,b,c là như nhau, giả sử $a\ge b\ge c$ Ta có 3a $\ge a+b+c=3\Rightarrow a\ge 1$ Do $2\ge a\ge 1\Rightarrow(a-1)(a-2)\le 0\Leftrightarrow a^2-3a+2\le 0$	

		$M = a^3+b^3+c^3 \le a^3+b^3+c^3+3b^2c+3bc^2 = a^3+(b+c)^3$ $= a^3+(3-a)^3 = 9a^2-27a+27 = 9(a^2-3a+2)+9 \le 9$ Vậy giá trị lớn nhất của M là 9 khi (a,b,c)= (2;1;0) và các hoán vị vòng của chúng	

ĐỀ SỐ 28. CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG THCS LƯƠNG THẾ VINH NĂM HỌC 2019-2020

Bài 1 (4,0 điểm)Cho biểu thức $A=\left[\dfrac{x-9}{x+2\sqrt{x}-3}-\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}\right]:\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$ với $x>0; x\ne 1$

Tính giá trị biểu thức khi $x=4\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}\right)$

Bài 2 (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{5x^2+10x}+\sqrt{4x-4x^2}=6x+3$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+y=3xy-9$

Bài 3 (4,0 điểm)

a) Cho $x, y>0$. Tìm GTNN của $P=\dfrac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{xy}(x+y)}$

b) Tìm 2019 số tự nhiên liên tiếp mà trong đó không có số nguyên tố nào?

Bài 4 (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A, B trên CD.

a) Khi OAC là tam giác đều, hãy giải tam giác ABC

b) Chứng minh HC = KD

c) Chứng minh $S_{AHKB}=S_{ABC}+S_{ABD}$

Bài 5 (2,0 điểm) Viết 150 số tự nhiên 1, 2, 3,…, 150 lên bảng. Mỗi lần ta xóa đi hai số nào đó và thay bằng tổng hoặc hiệu của chúng. Sau một số lần như vậy thì trên bảng chỉ còn lại một số. Hỏi có khi nào số đó là 100 không?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (4,0 điểm)

Ta có:

$$A=\left[\frac{x-9}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}\right]:\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right]:\left(\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right].\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{-3}{\sqrt{x}-1}.\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}}=-\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Có:

$$x=4\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9+\frac{125}{27}}}\right)\Leftrightarrow\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9+\frac{125}{27}}}=\frac{x}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^3}{64}=6-\frac{5}{4}x\Leftrightarrow x^3+80x-384=0\Leftrightarrow\left(x-4\right)\left(x^2+4x+96\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=0\\x^2+4x+96=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\\left(x+2\right)^2+92=0\,(vn)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4(tm)$$

Thay $x=4$ (tmđk) vào A, ta được: $A=-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}}=-\frac{9}{4}$

Bài 2 a) ĐK: $0\le x\le 1$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{5x^2+10x}\ge 0\\b=\sqrt{4x-4x^2}\ge 0\end{cases}\Rightarrow 4a^2+5b^2=60x$. Khi đó Phương trình trở thành:

$$20a+10b=4a^2+5b^2+30\Leftrightarrow\left(4a^2-20a+25\right)+\left(5b^2-10b+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(2a-5)^2+5\left(b-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\b=1\end{cases}$$

Với $\begin{cases}a=\frac{5}{2}\\b=1\end{cases}$, ta có:

$$\begin{cases}\frac{5}{2}=\sqrt{5x^2+10x}\\1=\sqrt{4x-4x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x^2+10x=\frac{25}{4}\\4x-4x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1=\frac{9}{4}\\(2x-1)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+1\right)^2=\frac{9}{4}\\2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\frac{3}{2}(do\,0\le x\le 1)\\x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(tm)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2}$

b) Ta có:

$x + y = 3xy - 9 \Leftrightarrow 3x + 3y = 9xy + 27 \Leftrightarrow 3y(1-3x) - (1-3x) = 26 \Leftrightarrow (1-3x)(3y-1) = 26$

+) TH 1:

$\begin{cases} 3y - 1 = 1 \\ 1 - 3x = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \\ 1 - 3x = 26 \end{cases}$ (loại)

+) TH 2:

$\begin{cases} 3y - 1 = 26 \\ 1 - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = 0 \end{cases}$ (tm)

+) TH 3:

$\begin{cases} 3y - 1 = -1 \\ 1 - 3x = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 9 \end{cases}$ (tm)

+) TH 4:

$\begin{cases} 3y - 1 = -26 \\ 1 - 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 1 = -26 \\ x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ (loại)

+) TH 5:

$\begin{cases} 3y - 1 = 2 \\ 1 - 3x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases}$ (tm)

+) TH 6:

$\begin{cases} 3y - 1 = 13 \\ 1 - 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 1 = 13 \\ x = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ (loại)

+) TH 7:

$\begin{cases} 3y - 1 = -13 \\ 1 - 3x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 1 \end{cases}$ (tm)

+) TH 8:

$\begin{cases} 3y - 1 = -2 \\ 1 - 3x = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \\ 1 - 3x = -13 \end{cases}$ (loại)

Vậy $(x; y) \in \{(0;9);(9;0);(-4;1);(1;-4)\}$

Bài 3 (4,0 điểm)

a) Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của $P = \frac{x^2 - xy + y^2}{\sqrt{xy}(x+y)}$

b) Tìm 2019 số tự nhiên liên tiếp mà trong đó không có số nguyên tố nào?

Giải

a) Ta có:

$$P=\frac{x^2-xy+y^2}{\sqrt{xy}(x+y)}=\frac{(x+y)^2-3xy}{\sqrt{xy}(x+y)}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}-\frac{3\sqrt{xy}}{x+y}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương x, y, ta được:

$x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$. Khi đó:

$$P\geq\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}-3\frac{\frac{x+y}{2}}{x+y}\geq 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{2}$ khi $x=y$.

b) Xét số tự nhiên $A=2.3.4.5...2019.2020$. Khi đó:

A chia hết cho các số: 2; 3; 4; 5; …; 2019; 2020

Xét dãy 2019 số tự nhiên liên tiếp: $A+2; A+3; A+4; A+5;...; A+2019; A+2020$.

Do $A\vdots 2$ nên $A+2\vdots 2$ mà $A+2>2\Rightarrow A+2$ là hợp số

Tương tự: Do $A\vdots 3$ nên $A+3\vdots 3$ mà $A+3>3\Rightarrow A+3$ là hợp số

Do $A\vdots 4$ nên $A+4\vdots 4$ mà $A+4>4\Rightarrow A+4$ là hợp số

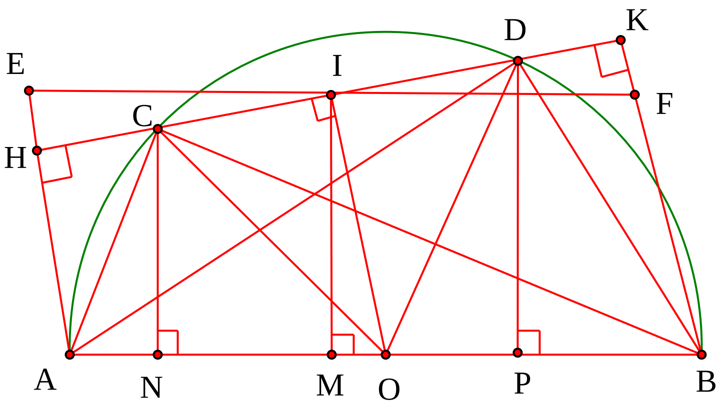
…..

Do $A\vdots 2019$ nên $A+2019\vdots 2019$ mà $A+2019>2019\Rightarrow A+2019$ là hợp số

Do $A\vdots 2020$ nên $A+2020\vdots 2020$ mà $A+2020>2020\Rightarrow A+2020$ là hợp số

Vậy dãy 2019 số tự nhiên liên tiếp: $A+2; A+3; A+4; A+5;...; A+2019; A+2020$, trong đó không có số nguyên tố nào.

Bài 4



a) Khi ΔAOC đều thì $AC=OA=OC=R=\frac{1}{2}AB$. $\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^0 \Rightarrow \widehat{C} = 60^0$

b) Kẻ $OI \perp CD \Rightarrow I$ là trung điểm của CD và $OI // AH // BK$.

Lại có O là trung điểm của $AB \Rightarrow I$ là trung điểm của $HK \Rightarrow IH = IK; CI = ID \Rightarrow CH = DK$.

c) Kẻ EF đi qua I và song song với $AB (E \in AH, F \in BK)$

$\Rightarrow \Delta EHI = \Delta FKI (\text{ch}-\text{gn}) \Rightarrow S_{AHKB} = S_{AEFB} = IM.AB$

Lại có: $S_{ACB} + S_{ADB} = \dfrac{1}{2} AB.(CN + DP) = AB.IM$

$\Rightarrow S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$

Bài 5:

Gọi tổng của 150 số ban đầu là $S = 1 + 2 + 3 + ... + 150 = \dfrac{(1+150).150}{2} = 11325 = S_1 + a + b$

Giả sử xóa đi hai số bất kì a, b và thay bằng $a + b$ hoặc $a - b$ thì ta có tổng mới là:

$S_1 + a + b$ hoặc $S_1 + a - b$

Ta có: $(S_1 + a + b) + (S + a + b) = 2S + 2a + 2b$ và $(S_1 + a + b) + (S + a - b) = 2S + 2a$ đều chẵn nên tổng lúc đầu và tổng lúc sau luôn cùng tính chẵn lẻ mà tổng ban đầu là số lẻ nên tổng lúc sau không thể bằng 100.

ĐỀ SỐ 29. CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG HUYỆN MỸ ĐỨC - NĂM 2019-2020

Bài I *(5,0 điểm).* Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \ge 0; x \ne 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = \dfrac{2}{7}$

c) So sánh $2P$ và P^2

Bài II *(4,0 điểm).*

1) Giải các phương trình: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 7$

2) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $(x - 2019)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$

Bài III *(4,0 điểm).*

1) Cho các số x, y, z thỏa mãn $\dfrac{x}{y-z} + \dfrac{y}{z-x} + \dfrac{z}{x-y} = 0$ với $x \ne y; y \ne z; z \ne x$

Tính giá trị biểu thức: $A = \dfrac{x}{(y-z)^2} + \dfrac{y}{(z-x)^2} + \dfrac{z}{(x-y)^2}$

2) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^2}{x+2y+3z}+\dfrac{y^2}{y+2z+3x}+\dfrac{z^2}{z+2x+3y}$

Bài IV *(6,0 điểm).*

Cho ΔABC có ba góc nhọn, $\widehat{A}=60^o$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của AH

a) Chứng minh: $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$ và $EF=\dfrac{1}{2}BC$.

b) Chứng minh: $\widehat{EKF}=120^o$ và tính AH , biết $BC=12$ cm.

c) Chứng minh: $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=1$.

d) Chứng minh: $AD.DH+BE.EH+CF.FH\le\dfrac{AB^2+AC^2+BC^2}{4}$.

Bài V *(1,0 điểm)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I *(5,0 điểm).* Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x\ge 0; x\ne 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P=\dfrac{2}{7}$

c) So sánh $2P$ và P^2

HD:

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{2}=\left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Với x ≥ 0, x ≠ 1. Ta có:

$$P=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

Vì $\sqrt{x}+3>0$ nên $\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow x=4$ (t/m)

Vậy P = $\frac{2}{7}$ khi x = 4

c) Vì $x\ge 0\Rightarrow x+\sqrt{x}+1\ge 1$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}\le 2$$

$$\Leftrightarrow 0<P\le 2$$

$$\Leftrightarrow P(P-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow P^2-2P\le 0$$

$$\Leftrightarrow P^2\le 2P$$

Dấu "=" xảy ra khi P = 2 $\Leftrightarrow$ x = 0

Vậy $P^2 \le 2P$

Bài II *(4,0 điểm).*

1) Giải các phương trình:

$$\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2+6x+9}=7$$

$$\Leftrightarrow |2x+5|+|x+3|=7 \ (*)$$

2) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$(x-2019)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$$

$$(x-2019)^2=y^4-6y^3+9y^2+2y^2-6y$$

$$(x-2019)^2=y^2(y-3)^2-2y(y-3)+1-1$$

$$(x-2019)^2=\left[y(y-3)-1\right]^2-1$$

$$(x-2019)^2-\left[y(y-3)-1\right]^2=-1$$

$$(x-2019-a+1)(x-2019+a-1)=-1 \quad (Voi\ y(y-3)=a)$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2019-a+1=-1\\x-2019+a-1=1\end{cases}\\\begin{cases}x-2019-a+1=1\\x-2019+a-1=-1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2019\\a=-2\end{cases}\\\begin{cases}x=2019\\a=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow(x;y)=\{(2019;0),(2019;1),(2019;2),(2019;3)\}$$

Bài III *(4,0 điểm).*

1) Cho các số x, y, z thỏa mãn $\dfrac{x}{y-z}+\dfrac{y}{z-x}+\dfrac{z}{x-y}=0$ với $x\neq y; y\neq z; z\neq x$

Tính giá trị biểu thức: $A=\dfrac{x}{(y-z)^2}+\dfrac{y}{(z-x)^2}+\dfrac{z}{(x-y)^2}$

2) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^2}{x+2y+3z}+\dfrac{y^2}{y+2z+3x}+\dfrac{z^2}{z+2x+3y}$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*)

Ta có: $A=\dfrac{x^2}{x+2y+3z}+\dfrac{y^2}{y+2z+3x}+\dfrac{z^2}{z+2x+3y}\geq\dfrac{(x+y+z)^2}{6(x+y+z)}=1$

Bài V *(1,0 điểm)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (*x*; *y*; *z*) thỏa mãn $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

HD:

Ta có:

$\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=\dfrac{m}{n}\in Q\ (m,n\in Z, n\neq 0)\Rightarrow nx+ny\sqrt{2019}=my+mz\sqrt{2019}$

$\Rightarrow nx-my=\sqrt{2019}(mz-ny)$

Vì *x, y, z, m, n là các số nguyên nên* $nx-my\in Z$ và $mz-ny\in Z$

Khi đó: $nx-my=0$ và $mz-ny=0$. Suy ra: $\dfrac{m}{n}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{x}{y}\Rightarrow y^2=xz$.

Theo đề bài $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố hay

$x^2+2y^2+z^2-y^2=x^2+2xz+z^2-y^2=(x+z)^2-y^2=(x-y+z)(x+y+z)$ là số nguyên tố.

Khi đó: $x-y+z=1$ hay $x+z=1+y$. Suy ra:

$(x+z)^2=(1+y)^2\Leftrightarrow x^2+z^2+2y^2=y^2+2y+1\Leftrightarrow (y-1)^2+x^2+z^2-2=0$

Vì *x, y, z* là số nguyên dương nên $x=y=z=1$

ĐỀ SỐ 30. CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG HUYỆN THẠCH HÀ - NĂM 2019-2020

Bài 1. a) Tính giá trị biểu thức $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

b) Chứng minh rằng: $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}$

c) Tính giá trị biểu thức $N=x^{2019}+3x^{2020}-2x^{2021}$

Với $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

d) Cho $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ và $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Tính $M=x^5+y^5$

e) Cho $M = (a^2 + 2bc - 1)(b^2 + 2ac - 1)(1 - c^2 - 2ab)$. Trong đó a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Bài 2. a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: xyz = 2(x+ y + z).

b) Tìm các số a, b, c sao cho đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia cho

$x + 2$; $x + 1$; $x - 1$ đều dư 8

c) Tìm các số tự nhiên x, y biết: $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y=11879$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=16$

b) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Tính AH, BH biết BC = 50 cm và $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$

b) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng:

$AH^3 = BC.BD.CE$

c) Giả sử BC = 2a là độ dài cố định. Tính giá trị nhỏ nhất của: $BD^2 + CE^2$

Bài 5. Cho $0\le a, b, c \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = a + b^{2019}+c^{2020}-ab-bc-ac$$

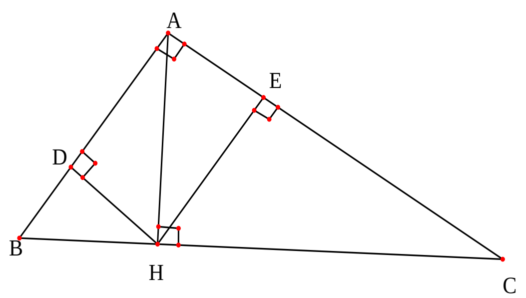
SƠ LƯỢC GIẢI

Đề thi chọn HSG huyện năm học 2019 – 2020

Môn: Toán 9

Bài	Nội dung
1a.	$T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}}$ $=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-(2\sqrt{5}-3)}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ $=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$ $=\sqrt{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)}=1$
1b.	$A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\Rightarrow A^2=\dfrac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}=2\Rightarrow A=\sqrt{2}$ (đpcm)
1c.	$x=\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)=-1$ với x = -1 ta có N = -1 + 3 + 2 = 4
1d.	Ta có: $xy=\dfrac{1}{2}$ và $x+y=\sqrt{3}$ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{3})^2-2.\dfrac{1}{2}=3-1=2$ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt{3})^3-3.\dfrac{1}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=2.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{4}.\sqrt{3}=\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$
1e	$M=(a^2+bc-ac-ab)(b^2+ac-ab-bc)(ac+bc-c^2-ab)$ $=(a-b)(a-c)(b-a)(b-c)(c-a)(b-c)$ $=(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$

	$\Rightarrow \sqrt{M} = \lvert(a-b)(a-c)(b-c)\rvert$ vì a, b, c là các số hữu tỉ nên $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ
2a	Vì x, y, z là các số nguyên dương và vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử : $1 \le x \le y \le z$ ta có xyz = 2(x + y + z) ≤ 6z ⇒xy ≤ 6 ⇒ x = 1 hoặc x = 2 Xét x = 1 cho y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta được (x, y, z) = (1; 3; 8), (1; 4; 5) Xét x = 2 cho y = 2, 3 ta được (x, y, z) = (2; 2; 4) vậy (x, y, z) = (1; 3; 8), (1; 4; 5), (2; 2; 4) và các hoán vị
2b	Từ gt ta có f(x) - 8 luôn chia hết cho x + 2; x + 1; x – 1. => f(x) = (x + 2)(x + 1)(x – 1) + 8. Với x = -2, ta có: -8 + 4a – 2b + c = 8 ⇒4a – 2b +c = 16 (1) Với x = -1, ta có: -1 + a – b + c = 8 ⇒ a – b +c = 9 (2) Với x = 1, ta có: 1 + a + b + c = 8 ⇒ a + b + c = 7 (3) từ (1), (2) và (3) ta có b = - 1 ⇒a = 2 ; b = 6
2c	$2^x(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)$ là tích 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5 mà 2^x không chia hết cho 5 nên $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)$ chia hết cho 5 mà 11879 không chia hết cho 5 nên y = 0 $\Rightarrow (2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) = 11880 = 9.10.11.12 \Rightarrow x = 3$ vậy x = 3 và y = 0
3a	ĐK: $x \ne 3$ (*) Ta có: $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x-3)^2} = 16$ $\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{2.x.3x}{x-3} + \dfrac{9x^2}{(x-3)^2} - \dfrac{2.x.3x}{x-3} = 16 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)^2 - \dfrac{6x^2}{x-3} + 9 = 25$

	$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}-3\right)^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3}-3=5$ hoặc $\frac{x^2}{x-3}-3=-5$ +) $\frac{x^2}{x-3}-3=5 \Leftrightarrow (x-4)^2+8=0$ (VN) +) $\frac{x^2}{x-3}-3=-5 \Leftrightarrow (x+1)^2=7 \Leftrightarrow x+1=\pm\sqrt{7}$ $\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}-1$ (t/m ĐK(*)) Vậy pt có 2 nghiệm: $x=\pm\sqrt{7}-1$
3b	ĐK: $x\ge 5$ hoặc $x\le 0$ (*) Nếu $x\ge 5$ thì pt: $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)(x-1)}=x+3$ ĐK: $x\ge -3$ (**) $\Leftrightarrow -12x=4 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{3}$ (loại) Nếu $x=0$ thỏa mãn pt Nếu $x<0$ thì pt: $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x-5)}=2\sqrt{x^2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{5-x}=2\sqrt{-x} \Leftrightarrow \sqrt{(5-x)(1-x)}=-x-3$ ĐK: $x\le -3$ $\Leftrightarrow -12x=4 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{3}$ (loại) Vậy pt có nghiệm $x=0$
4a	 $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{AB}{3}=\frac{AC}{4}=k \Rightarrow$ AB = 3k, AC = 4k

	$\Rightarrow (3k)^2 + (4k)^2 = 50^2 \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = 10$ $\Rightarrow$ AB = 30 cm, AC = 40 cm Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có AB.AC = AH.BC $\Rightarrow$ 30.40 = AH.50 $\Rightarrow$ AH = 24cm $AB^2 = BH.BC \Rightarrow 30^2 = BH.\ 50 \Rightarrow BH = 18$ cm
4b	Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $AH^2 = BH.CH$ $\Rightarrow AH^4 = BH^2.CH^2 = BD.AB.CE.AC=(BD.CE)(AB.AC)$ $= (BD.CE).(AH.BC)$ $\Rightarrow AH^3 = BC.BD.CE$
4c	Áp dụng định lí Pytago ta có: $BD^2 + CE^2 = BH^2 – HD^2 + HC^2 – HE^2 = BH^2 + HC^2 – (HD^2 +HE^2)$ $= (AB^2 – AH^2)+ (AC^2 – AH^2) – AH^2 = (AB^2 + AC^2) – 3AH^2$ $= BC^2 – 3AH^2 = 4a^2 – 3AH^2$ Gọi O là trung điểm của BC ta có. AH $\le$ AO = a nên $BD^2 + CE^2 \ge 4a^2 – 3a^2 = a^2$. Dấu = xảy ra khi H trùng O $\Leftrightarrow \Delta$ ABC vuông cân tại A Vậy GTNN của $BD^2 + CE^2$ bằng a^2 khi Δ ABC vuông cân tại A
5	vì $0 \le a$, b, c ≤ 1 nên $b^{2019} \le b$, $c^{2020} \le c$, $(1 – a)(1 – b)(1 – c) \ge 0$, abc ≥ 0 $\Rightarrow a + b^{2019} + c^{2020} - ab - bc - ac \le a + b + c - ab - bc - ac$ và $1 – abc – a – b – c + ab + ac + bc \ge 0$ $\Rightarrow a + b + c – ab – ac – bc \le 1 – abc \le 1$ do đó $P = a + b^{2019} + c^{2020} - ab - bc - ac \le 1$. Dấu bằng xảy ra khi

	$\begin{cases} abc = 0 \\ b^{2019} = b \\ c^{2020} = c \\ (1-a)(1-b)(1-c) = 0 \\ 0 \le a,b,c \le 1 \end{cases}$ chẳng hạn a = 1, b = c = 0 Vậy GTLN của P bằng 1 chẳng hạn khi a = 1; b = c = 0

Chú ý: *HS giải cách khác đúng, hợp lí thì chấm điểm tối đa./.*