SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ:
PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TRONG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

GV**: Phương Xuân Trịnh**
Đơn vị: Trường THPT Lương Tài.
Điện thoại: 0972859879

I. LÝ THUYẾT

Cơ sở lý thuyết.

Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(a;b\right)$. Nếu $f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(a;b\right)$ và $u,v\in\left(a;b\right)$ thì phương trình $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v$.

Nhận dạng:

Phương trình, bất phương trình chưa hai thành phần hàm số là Hàm số đại số (đa thức, phân thức, căn thức) và hàm số siêu việt (mũ, lôgarit)

Phương pháp

+ Biến đổi phương trình (bất phương trình về dạng $f\left(u\right)=f\left(v\right)$

+ Nếu $f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(a;b\right)$ và $u,v\in\left(a;b\right)$ thì $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v$.

+ Nếu $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(a;b\right)$ và $u,v\in\left(a;b\right)$ thì $f\left(u\right)<f\left(v\right)\Leftrightarrow u<v$.

+ Nếu $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)$ và $u,v\in\left(a;b\right)$ thì $f\left(u\right)<f\left(v\right)\Leftrightarrow u>v$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2\dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 2. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $3x^2+3x+m+1>0$.

- Ta có:

$$\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}=x^2-5x+2-m\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}\right)-1=x^2-5x+1-m$$

$$\Leftrightarrow\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{4x^2-2x+2}=x^2-5x+1-m$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)-\log_2\left(4x^2-2x+2\right)=\left(4x^2-2x+2\right)-\left(3x^2+3x+m+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+\left(3x^2+3x+m+1\right)=\log_2\left(4x^2-2x+2\right)+\left(4x^2-2x+2\right)\ \ (1)$$

Xét hàm số: $f\left(t\right)=t+\log_2 t$ trên $D=\left(0;+\infty\right)$, có $f'\left(t\right)=1+\dfrac{1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t\in D$,

Do đó hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên D

$\Rightarrow(1)\Leftrightarrow f\left(4x^2-2x+2\right)=f\left(3x^2+3x+m+1\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-2x+2=3x^2+3x+m+1 \Leftrightarrow x^2-5x=m-1\ \ (2)$.

- Xét hàm số: $g(x)=x^2-5x$ trên $\mathbb{R}$, có $g'(x)=2x-5 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

- Bảng biến thiên:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x & -\infty & & 1 & & \frac{5}{2} & & +\infty \\
\hline
y' & & - & 0 & - & 0 & + & \\
\hline
y & & \searrow & \boxed{-4} & \searrow & -\frac{25}{4} & \nearrow &
\end{array}
$$

- Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-\dfrac{25}{4}<m-1<-4 \Leftrightarrow -\dfrac{21}{4}<m<-3$, do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4\}$, hay có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $3x+y=6$. Có tất cả giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2\dfrac{x^2+y+m}{x+y}+x^2-2x-y+m-1=0$ có nghiệm?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ giải thiết suy ra $\begin{cases} x^2+y+m>0 \\ x+y>0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 0<x<3 \\ 0<y<6 \end{cases}$

$\log_2\dfrac{x^2+y+m}{x+y}+x^2-2x-y+m-1=0$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2-3x+m+6}{6-2x}+x^2+x+m-7=0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(^2-3x+m+6\right)+x^2-3x+m+6=\log_2(6-2x)-4x+13$

$\Leftrightarrow \log_2\left(^2-3x+m+6\right)+x^2-3x+m+6=\log_2 2+\log_2(6-2x)-4x+12$

$\Leftrightarrow \log_2\left(^2-3x+m+6\right)+\left(x^2-3x+m+6\right)=\log_2(12-4x)+(12-4x)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$, có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t\in D$,

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình đã cho tương đương với $f\left(x^2-3x+m+6\right)=f(12-4x)$

$\Leftrightarrow x^2-3x+m+6=12-4x \Leftrightarrow x^2+x=6-m$ có nghiệm trên $(0;3)$

$\Rightarrow 0<6-m<12 \Leftrightarrow -6<m<6$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương $m\in\{1;2;3;4;5\}$

Ví dụ 3. Cho phương trình: $\left(2x^2-2x+1\right)\cdot 2^{2x^3+2x^2-4x+4-2m}=-x^3+x^2+m-1(1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình (1) có nghiệm $x\in[1;2]$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Do $(1) \Leftrightarrow 4x^2-4x+2>0$ nên từ phương trình suy ra $-2x^3+2x^2+2m-2>0$

Phươngtrình $(1) \Leftrightarrow \left(4x^2-4x+2\right)\cdot 2^{2x^3+2x^2-4x+4-2m}=-2x^3+2x^2+2m-2$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-4x+2\right)\cdot 2^{\left(4x^2-4x+2\right)-\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)}=-2x^3+2x^2+2m-2$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-4x+2\right)\cdot \dfrac{2^{\left(4x^2-4x+2\right)}}{2^{\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)}}=-2x^3+2x^2+2m-2$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-4x+2\right)\cdot 2^{\left(4x^2-4x+2\right)}=\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)2^{\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)}$

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ .Tacó: $f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2=2^t(1+t.\ln 2)>0,\ \forall t>0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$(1) \Leftrightarrow f\left(4x^2-4x+2\right)=f\left(-2x^3+2x^2+2m-2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+2=-2x^3+2x^2+2m-2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x+2=m$

Xét hàm số $g(x)=x^3+x^2-2x+2$ trên $[1;2]$

$g'(x)=3x^2+2x-2>0,\ \ \forall x\in[1;2] \Rightarrow g(1)\le m\le g(2) \Leftrightarrow 2\le m\le 10$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m .

Ví dụ 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)-2\le x-\sqrt{2x^2+mx+1}$ nghiệm đúng với $\forall x\in(0;1)$?

A. 10. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Do $x\in(0;1)$ và $m>0$Đ nên . $\begin{cases}2x^2+mx+1>0\\ x+2>0\end{cases}$

Ta có: $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)-2\le x-\sqrt{2x^2+mx+1}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)+\sqrt{2x^2+mx+1}\le \log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right)+x+2$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t\in(0:+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $t\in(0:+\infty)$.

Bất phương trình tương đương với

$f\left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right)\le f(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+mx+1}\le x+2$

$\Leftrightarrow x^2+(m-4)x-3\le 0$ nghiệm đúng $\forall x\in(0;1)$ khi tam thức vế trái có hai nghiệm

$x_1\le 0<1\le x_2 \Leftrightarrow m\le 6$

Vậy có 6 giá trị nguyên dương.

Ví dụ 5. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$2023^{2x^2-4x+9}-2023^{x^2+5x+1}-(x-1)(8-x)<0.$$

A. 7 . **B.** 5 . **C.** 6 . **D.** 8 .

Lời giải

Chọn C

$2023^{2x^2-4x+9}-2023^{x^2+5x+1}-(x-1)(8-x)<0$

$\Leftrightarrow 2023^{2x^2-4x+9}-2023^{x^2+5x+1}+x^2-9x+8<0$

$\Leftrightarrow 2023^{2x^2-4x+9}+\left(2x^2-4x+9\right)<2023^{x^2+5x+1}+\left(x^2+5x+1\right)$

Xét hàm số $f(t)=2023^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

$f'(t)=2023^t\ln 2+1>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình tương đương với

$f\left(2x^2-4x+9\right)<f\left(x^2+5x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+9<x^2+5x+1\Leftrightarrow x^2-9x+8<0\Leftrightarrow 1<x<8$

Vậy bất phương trình có 6 nghiệm nguyên

Ví dụ 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên $b>1$ để với mỗi giá trị của b có đúng 5 số nguyên $a\in(-10;10)$ thỏa mãn $\log_3\dfrac{2a^2+3a+b}{a^2-a+2}\le a^2-6a+7-b$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

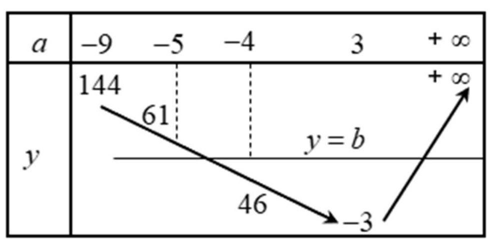
Ta có $\log_3\dfrac{2a^2+3a+b}{a^2-a+2}\le a^2-6a+7-b\Leftrightarrow \log_3\dfrac{2a^2+3a+b}{3a^2-3a+6}+2a^2+3a+b\le 3a^2-3a+6$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2a^2+3a+b\right)+2a^2+3a+b\le\log_3\left(3a^2-3a+6\right)+3a^2-3a+6\qquad (*)$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t, t>0\Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 3}>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow f\left(2a^2+3a+b\right)\le f\left(3a^2-3a+6\right)\Leftrightarrow 2a^2+3a+b\le 3a^2-3a+6\Leftrightarrow b\le a^2-6a+6$

Xét hàm số $y=a^2-6a+6$ có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 46<b\le 61$. Vậy có 15 giá trị thoả mãn.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: **(Đề minh họa 2023)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Câu 2: Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 21

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy).27^{9x}$?

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 4: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $4yx^6+\log_2\left(yx^6\right)-2\log_2 x+1\ge 2^{\log_2^2(2x)}+\log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tập hợp S có nhiều nhất 32 phần tử?

A. 16. **B.** 32. **C.** 19. **D.** 8.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;6)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x=y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 6: Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương $a, a\le 2023$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$$x\left(\ln a+e^x\right)\le e^x\left(1+\ln(x\ln a)\right)?$$

A. 2008. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2006.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên $a\in(0;2023)$ sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất mười số nguyên $b\in(-3;10)$ thỏa mãn $2^b3^a+6560\le 3^{2a^2+b}$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất 7 số nguyên $b\in(0;10)$ thỏa mãn $\log_5\left(b^2+16\right)+\log_3\left(b\sqrt{13-a}\right)-\log_7(a-3)\ge 5$?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 1.

Câu 9: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của x để tồn tại duy nhất giá trị nguyên của y sao cho thỏa mãn bất phương trình $e^{2y}+4x^2y-y^2+x>\ln\left(x^2-y\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ửng với mỗi a tồn tại đúng 8 số thực x thỏa mãn $\left(x^4-4x^2-3+\log_4 a\right)\left(a.2^{2x^4-8x^2-3}+1\right)=-3$?

A. 1024. **B.** 1028. **C.** 1023. **D.** 1026.

Câu 11: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2023]$ để bất phương trình $\log\left(60x^2+120x+10m-10\right)-3\log(x+1)>1$ có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến x. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\log_3\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)+3x^{2021}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để bất phương trình $f\left(x^2+1\right)+f(-2mx)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$.

A. 2023. **B.** 4020. **C.** 4022. **D.** 2021.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, điểm $M(x;y)$ biểu diễn nghiệm của bất phương trình $\log_3(9x+18)+x=y+3^y$. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ nguyên thuộc hình tròn tâm O bán kính $R=7$?

A. 7. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 49.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên $a<11$ sao cho ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b\in(0;8)$ thỏa mãn $\log_4\left(b^2+12\right)+\log_3\left[(b+7)(a-3)\right]+\log_5(a+19)\geq 7$.

A. 5.. **B.** 4.. **C.** 6.. **D.** 7.

Câu 15: Cho hai số m,n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình: $2022(\log_m x)(\log_n x)=2021(\log_m x)+2022(\log_n x)+2023$. Hỏi P nguyên và đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $mn=2^{2020}$. **B.** $mn=2^{2017}$. **C.** $mn=2^{2023}$. **D.** $mn=2^{2018}$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để bất phương trình $4^{2x-m}-4.2^{3x-2m}+4.2^{x-m}<1$ nghiệm đúng với $\forall x\in(-\infty;4]$?

A. 2015. **B.** 92. **C.** 2032. **D.** 93.

LỜI GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUYỆN

.

Câu 1: (Đề minh họa 2023) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\leq\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\leq\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+y^2+x\right)-\log_3 x\leq\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\right)\leq\log_2\left(\dfrac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow\log_3\left(1+\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)\leq\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)\leq 0.$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+y^2}{x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)\leq 0$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=0$

Từ đó suy ra: $(1)\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2\le 16$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $(x-4)^2\le 16\Leftrightarrow 0\le x\le 8$, mà $x>0$ nên $0<x\le 8$.

Với $x=1, x=7\Rightarrow y=\{\pm2;\pm1;0\}$ nên có 10 cặp.

Với $x=2, x=6\Rightarrow y=\{\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=3, x=5\Rightarrow y=\{\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=4\Rightarrow y=\{\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 9 cặp.

Với $x=8\Rightarrow y=0$ có 1 cặp.

Vậy có 48 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

.

Câu 2: Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 21

Lời giải

Điều kiện: $x>m$

Đặt: $t=\log_5(x-m)\Rightarrow\begin{cases}x-m=5^t\\5^x+m=t\end{cases}\Rightarrow 5^x+x=5^t+t\ \ (1)$.

Xét hàm số $f(u)=5^u+u\Rightarrow f'(u)=5^u\ln 5+1>0,\forall u\in\mathbb{R}$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow x=5^x+m\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $f(x)=x-5^x$, $x>m$

Do: $5^x>0\Rightarrow m<x$, suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

$f'(x)=1-5^x\ln 5$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-5^x\ln 5=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\approx -0,295$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx -0,917$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\le\approx -0,917\xrightarrow{m\in(-20;20)} m=\{-19;-18;...;-1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy).27^{9x}$?

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

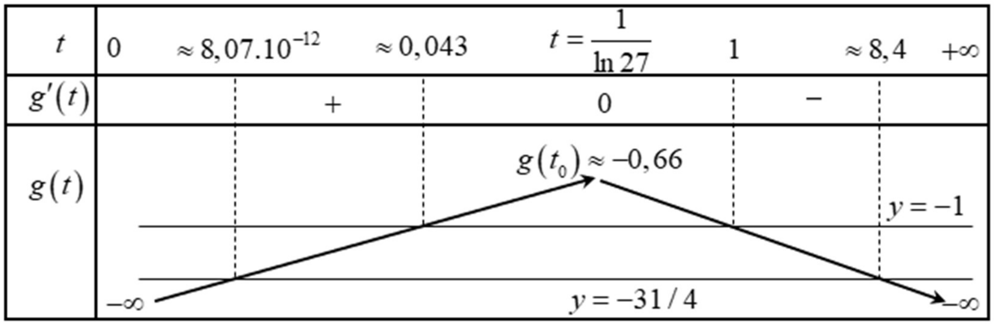
Lời giải

Chọn C

Ta có $(1) \Leftrightarrow 3x^2 + xy = \log_{27}(1+xy) + 9x \Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 1 = \log_{27} t - t$, với $t = 1 + xy > 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 9x - 1$. Ta có $-\dfrac{31}{4} \le f(x) < -1 \quad \forall x \in \left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

Xét hàm số $g(t) = \log_{27} t - t, t > 0$ có $g'(t) = \dfrac{1}{t\ln 27} - 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\ln 27}$



Ta có $-\dfrac{31}{4} \le f(x) < -1 \quad \forall x \in \left(\dfrac{1}{3};3\right)$. Suy ra $-\dfrac{31}{4} \le g(t) < -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \in (\approx 8,07.10^{-12}; \approx 0,04) \\ t \in (1; \approx 8,4) \end{array}\right.$

hay $\left[\begin{array}{l} \approx 8,07.10^{-12} < 1 + xy < \approx 0,04 \\ 1 < 1 + xy < \approx 8,4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \approx \dfrac{-1 + 8,07.10^{-12}}{x} < y < \approx \dfrac{-1 + 0,04}{x} \\ 0 < y < \approx \dfrac{7,4}{x} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < y < -\dfrac{1}{3} \\ 0 < y \le 22 \end{array}\right.$, ($x \in \left(\dfrac{1}{3};3\right)$, y nguyên).

Nhận thấy $y = -2; y = -1$ thỏa mãn đề.

Với $0 < y \le 22$, ta có $(1) \Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 1 - \log_{27}(1+xy) + (1+xy) = 0$.

Nhập hàm, thay các giá trị nguyên của y, kiểm tra nghiệm $x \in \left(\dfrac{1}{3};3\right)$ dẫn đến chọn $1 \le y \le 9$.

Vậy $y \in \{-2;-1;1;2;...;9\}$ nên có 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn đề.

Câu 4: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $4yx^6 + \log_2(yx^6) - 2\log_2 x + 1 \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tập hợp S có nhiều nhất 32 phần tử?

A. 16. **B.** 32. **C.** 19. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$ và $y > 0$.

Bất phương trình tương đương với: $4yx^6 + \log_2(yx^6) + 1 \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \log_2^2 x + 2\log_2 x$

$\Leftrightarrow 4yx^6 + \log_2(yx^6) + 2 \ge 2^{\log_2^2(2x)} + (\log_2^2 x + 2\log_2 x + 1)$

$\Leftrightarrow 4yx^6 + \log_2(4yx^6) \ge 2^{\log_2^2(2x)} + (\log_2 x + 1)^2$

$\Leftrightarrow 4yx^6 + \log_2(4yx^6) \ge 2^{\log_2^2(2x)} + \log_2^2(2x) \Leftrightarrow f(4yx^6) \ge f\left(2^{\log_2^2 2x}\right)$ (1).

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t + \log_2 t,\ t > 0$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0$ với $t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó ta được:

$(1)\Leftrightarrow 4yx^6\ge 2^{\log_2^2 2x}\Leftrightarrow 2+\log_2 y+6\log_2 x\ge \log_2^2 2x\Leftrightarrow \log_2 y\ge \log_2^2 x-4\log_2 x-1=g(x)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{2}{x\ln 2}\log_2 x-\dfrac{4}{x\ln 2}=\dfrac{2}{x\ln 2}\left(\log_2 x-2\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \log_2 x=2\Leftrightarrow x=4$.

x	0		1		4		33
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		-1	↘	-5	↗	$g(33)$

Để tập S có nhiều nhất 32 phần tử thì $\log_2 y<g(33)\Leftrightarrow 0<y<2^{g(33)}\Rightarrow 0<y\le 19$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;6)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x=y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4(x-1)e^x=y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)\Leftrightarrow 4(x-1)e^x-y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)=0\ (*)$.

Xét hàm số $f(x)=4(x-1)e^x-y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$ trên $(1;6)$.

$f'(x)=4e^x+4(x-1)e^x-y\left(e^x+y-4x\right)=4xe^x-ye^x+y(4x-y)=(4x-y)\left(e^x+y\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow (4x-y)\left(e^x+y\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{4}$ (do $e^x+y>0$, $\forall y\in\mathbb{N}^*$).

Trường hợp 1: $\dfrac{y}{4}\le 1\Leftrightarrow y\le 4$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		6
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	↗	$f(6)$

$f(1)=-y(e+y-5)$; $f(6)=20e^6-y\left(e^6+6y-75\right)=-6y^2+\left(75-e^6\right)y+20e^6$.

Ta có $f(6)>0\Leftrightarrow -6y^2+\left(75-e^6\right)y+20e^6>0\Leftrightarrow -72{,}1<y<18{,}4$.

Suy ra $\forall y\in\mathbb{N}^*, y\le 4,$ thì $f(6)>0$.

Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $x\in(1;6)$ $\Leftrightarrow f(1)<0\Leftrightarrow e+y-5>0\Leftrightarrow y>5-e\approx 2{,}3$.

Cùng điều kiện $y \le 4$ và y nguyên dương, ta có $y \in \{3;4\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\frac{y}{4} \ge 6 \Leftrightarrow y \ge 24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		6
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f(6)$

Với $y \ge 24$ ta luôn có $f(1) = -y(e+y-5) < 0$ nên không tồn tại $x \in (1;6)$ thỏa mãn $(*)$.

Trường hợp 3: $1 < \frac{y}{4} < 6 \Leftrightarrow 4 < y < 24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		$\frac{y}{4}$		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$\nearrow$	$f(6)$

Với $y \in (4;24)$ ta luôn có $f(1) = -y(e+y-5) < 0$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in (1;6)$
$\Leftrightarrow f(6) > 0 \Leftrightarrow -72,1 < y < 18,4$.

Cùng điều kiện $y \in (4;24)$ và y nguyên dương ta có $y \in \{5;6;...;18\}$.

Do đó, tập các giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\{3;4;....;18\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương $a, a \le 2023$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:
$x(\ln a + e^x) \le e^x(1 + \ln(x \ln a))$?

A. 2008. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2006.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x > 0;\ a > 1;\ a \in \mathbb{N}$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow x.\ln a + x.e^x \le e^x + e^x.\ln(x \ln a)$. Đặt $t = \ln(x \ln a) \Leftrightarrow e^t = x.\ln a$

Khi đó, bất phương trình trở thành: $e^t + x.e^x \le e^x + e^x.t \Leftrightarrow e^{t-x} + x \le 1 + t$.

Đặt $u = t - x$ suy ra $e^u \le 1 + u \Leftrightarrow e^u - 1 - u \le 0 \quad (1)$.

Xét hàm số $f(u) = e^u - 1 - u; f'(u) = e^u - 1$

u	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(u) \ge 0$ với mọi u nên $(1) \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow t = x$.

Khi đó: $e^x = x.\ln a \Leftrightarrow \ln a = \dfrac{e^x}{x}$. Xét hàm số $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$; $g'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\ln a \ge e \Leftrightarrow a \ge e^e \approx 15,15$.

Vậy $a \in \{16;17;...;2023\}$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (0;2023)$ sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất mười số nguyên $b \in (-3;10)$ thỏa mãn $2^b 3^a + 6560 \le 3^{2a^2+b}$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^b 3^a + 6560 \le 3^{2a^2+b} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^b 3^a + 6560\left(\dfrac{1}{3}\right)^b - 3^{2a^2} \le 0$.

Đặt $f(b) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^b 3^a + 6560\left(\dfrac{1}{3}\right)^b - 3^{2a^2}$, bất phương trình trên có dạng $f(b) \le 0$, $b \in (-3;10)$.

Ta có $f'(b) = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right).\left(\dfrac{2}{3}\right)^b 3^a + 6560\left(\dfrac{1}{3}\right)^b \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$, $\forall b \in (-3;10)$.

Do đó $f(b)$ nghịch biến trên $(-3;10)$.

Khi đó $f(-3) > f(-2) > f(-1) > f(0) > f(1) > ... > f(9)$.

Để tìm được ít nhất 10 giá trị b nguyên thuộc $(-3;10)$ thỏa mãn $f(b) \le 0$ thì $f(0) \le 0$

$\Leftrightarrow 3^a + 6560 \le 3^{2a^2}$. Có a nguyên, $a \in (0;2022)$ nên $a \ge 1$

Suy ra $6563 \le 3^a + 6560 \le 3^{2a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge \sqrt{\dfrac{1}{2}\log_3 6563} > 2 \\ a \le -\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_3 6563} < -2 \end{array}\right.$.

Vậy $a \in \{3;4;5;...;2022\}$ nên có 2020 số nguyên a thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất 7 số nguyên $b \in (0;10)$ thỏa mãn $\log_5(b^2+16) + \log_3\left(b\sqrt{13-a}\right) - \log_7(a-3) \ge 5$?

A. 9. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} b>0 \\ 3<a<13 \end{cases}$. Ta có $\log_5\left(b^2+16\right)+\log_3\left(b\sqrt{13-a}\right)-\log_7\left(a-3\right)\ge 5$

$\Leftrightarrow \log_5\left(b^2+16\right)+\log_3 b+\log_3\sqrt{13-a}-\log_7\left(a-3\right)-5\ge 0$

Đặt $f\left(b\right)=\log_5\left(b^2+16\right)+\log_3 b+\log_3\sqrt{13-a}-\log_7\left(a-3\right)-5$, điều kiện $b>0$

Bất phương trình trở thành $f\left(b\right)\ge 0$

$f'\left(b\right)=\dfrac{2b}{\left(b^2+16\right)\ln 5}+\dfrac{1}{b\ln 3}$ do $b>0$ nên $f'\left(b\right)>0 \Rightarrow$ Hàm số $f\left(b\right)$ đồng biến trên $\left(0;10\right)$

suy ra $f\left(1\right)<f\left(2\right)<f\left(3\right)<...<f\left(9\right)$.

Do đó để có ít nhất 7 giá trị b nguyên thuộc $\left(0;10\right)$ thì $f\left(3\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \log_3\sqrt{13-a}-\log_7\left(a-3\right)-2\ge 0\ (*)$.

Đặt $g\left(a\right)=\log_3\sqrt{13-a}-\log_7\left(a-3\right)-2,\ a\in\left(3;13\right)$.

Bất phương trình $\left(*\right)$ trở thành $g\left(a\right)\ge 0$.

$g'\left(a\right)=\dfrac{-1}{2(13-a)\ln 3}-\dfrac{1}{(a-3)\ln 7}<0,\ \forall a\in\left(3;13\right)$ nên hàm số $g\left(a\right)$ nghịch biến trên $\left(3;13\right)$.

Mặt khác $g\left(4\right)=0$ bất phương trình $\left(*\right)$ trở thành $g\left(a\right)\ge g\left(4\right)$, $g\left(a\right)$ nghịch biến nên $a\le 4$ mà $a\in\left(3;13\right)$, a nguyên nên $a=4$.

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên $a=4$ thỏa mãn bài toán.

Câu 9: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của x để tồn tại duy nhất giá trị nguyên của y sao cho thỏa mãn bất phương trình $e^{2y}+4x^2y-y^2+x>\ln\left(x^2-y\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện ban đầu: $x^2-y>0 \Leftrightarrow y<x^2$

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $e^{2y}+4x^2y-y^2+x-\ln\left(x^2-y\right)>0$

Xét hàm số theo biến y tức $f\left(y\right)=e^{2y}+4x^2y-y^2+x-\ln\left(x^2-y\right)$ trên $\left(-\infty;x^2\right)$ ta có:

$f'\left(y\right)=2e^{2y}+4x^2-2y+\dfrac{1}{x^2-y}>0$ trên $\left(-\infty;x^2\right)$ nên hàm số $f\left(y\right)$ **đồng biến** trên $\left(-\infty;x^2\right)$

Từ đó ta có bất phương trình $f\left(y\right)>0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(0\right)<y<x^2$

Ta có nhận xét như sau: do tồn tại duy nhất giá trị nguyên của y nên suy ra khoảng $\left(f^{-1}\left(0\right);x^2\right)$ của giá trị y cũng chứa duy nhất **một** giá trị nguyên, khi đó giá trị của y sẽ chạy từ x^2-1 đến x^2, tức $x^2-1<f^{-1}\left(0\right)<y<x^2$, từ đó ta suy ra mệnh đề này chỉ xảy ra khi và chỉ khi:

$f^{-1}\left(0\right)>x^2-1 \Leftrightarrow f\left(x^2-1\right)<0 \Leftrightarrow e^{2\left(x^2-1\right)}+4x^2\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)^2+x-\ln\left(x^2-\left(x^2-1\right)\right)<0$

$\Leftrightarrow e^{2\left(x^2-1\right)}+4x^2\left(x^2-1\right)-\left(x^4-2x^2+1\right)+x>0 \Leftrightarrow e^{2\left(x^2-1\right)}+3x^4-2x^2+x-1<0$

Xét hàm số $g\left(x\right)=e^{2\left(x^2-1\right)}+3x^4-2x^2+x-1$ có $g'\left(x\right)=0$ có một nghiệm duy nhất

Suy ra phương trình $g(x)=0$ có không quá hai nghiệm

Từ đó ta giải ra bất phương trình $g(x)<0$ có chứa 1 giá trị nguyên $x=0$ tức có 1 giá trị nguyên x sao cho thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a tồn tại đúng 8 số thực x thỏa mãn $\left(x^4-4x^2-3+\log_4 a\right)\left(a.2^{2x^4-8x^2-3}+1\right)=-3$?

A. 1024. **B.** 1028. **C.** 1023. **D.** 1026.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^4-4x^2+\log_4 a \Leftrightarrow x^4-4x^2=t-\log_4 a=t-\dfrac{1}{2}\log_2 a$

Phương trình trở thành:

$$(t-3)\left(2^{2t-3}+1\right)=-3 \Leftrightarrow t-3=-\frac{3}{2^{2t-3}+1} \Leftrightarrow g(t)=t-3+\frac{3}{2^{2t-3}+1}=0 \quad (*)$$

$;g'(t)=1-\dfrac{6.2^{2t-3}.\ln 2}{\left(2^{2t-3}+1\right)^2}=0$ có đúng 2 nghiệm nên $(*)$ có tối đa 3 nghiệm

Nhận thấy $g(1)=g(1,5)=g(2)=0$ nên $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1,5 \\ t=2 \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x^4-4x^2+\log_4 a=1 \\ x^4-4x^2+\log_4 a=1,5 \\ x^4-4x^2+\log_4 a=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-x^4=\log_4 a-1(1) \\ 4x^2-x^4=\log_4 a-1,5(2) \\ 4x^2-x^4=\log_4 a-2(3) \end{array}\right.$

Mà 3 đường thẳng $y=\log_4 a-1, y=\log_4 a-1,5; y=\log_4 a-2$ đôi một song song

Hàm số $g(x)=4x^2-x^4$ có bảng biến thiên, như sau.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Vậy phương trình có đúng 8 nghiệm khi và chỉ khi

Trường hợp 1: Các phương trình (2); (3) mỗi phương trình có 4 nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 a-1>4 \\ 0<\log_4 a-1,5<4 \\ 0<\log_4 a-2<4 \end{cases} \Leftrightarrow 5<\log_4 a<5,5 \Leftrightarrow 1024<a<2048 \Rightarrow a\in\{1025,\ldots,2047\}$$

Trường hợp 2: Phương trình (1) có 4 nghiệm và phương trình (2);(3) mỗi phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 0<\log_4 a-1<4 \\ \log_4 a-1,5<0 \\ \log_4 a-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<\log_4 a<1,5 \Leftrightarrow 4<a<8 \Rightarrow a\in\{5,6,7\}$.

Vậy có tất cả 1026 giá trị của m.

Câu 11: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [0;2023]$ để bất phương trình $\log\left(60x^2+120x+10m-10\right)-3\log(x+1)>1$ có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến x. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>-1 \\ 6x^2+12x+m-1>0 \end{cases} \quad (*)$.

$\log\left(60x^2+120x+10m-10\right)-3\log(x+1)>1 \Leftrightarrow 1+\log\left(6x^2+12x+m-1\right)-\log(x+1)^3>1$

$\Leftrightarrow \log\left(6x^2+12x+m-1\right)>\log(x+1)^3 \Leftrightarrow 6x^2+12x+m-1>(x+1)^3 \ (1)$

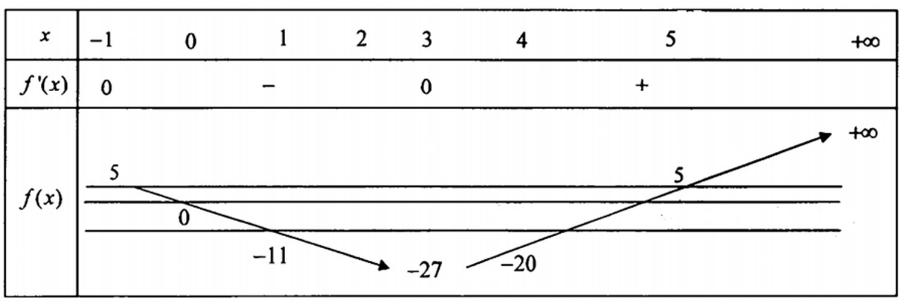
$\Leftrightarrow 6x^2+12x+m-1>x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow m-2>x^3-3x^2-9x=f(x)$.

Từ $(1) \Longrightarrow$ Hệ điều kiện $(*)$ trở thành: $x>-1$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x-9$. Đạo hàm $f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Để bất phương trình $\log\left(60x^2+120x+10m-10\right)-3\log(x+1)>1$ có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến x khi $-11<m-2\le 0 \Leftrightarrow -9<m\le 2 \xrightarrow{m\in[0;2023]} 0\le m\le 2.$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\log_3\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)+3x^{2021}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để bất phương trình $f\left(x^2+1\right)+f(-2mx)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$.

A. 2023. **B.** 4020. **C.** 4022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\ln 3}+6063x^{2020}>0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta thấy:

$f(-x)=\log_3\left(\sqrt{4(-x)^2+1}+2(-x)\right)+3(-x)^{2021}=\log_3\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)^{-1}-3x^{2021}=-f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

Khi đó: $f\left(x^2+1\right)\ge -f(-2mx) \Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)\ge f(2mx) \Leftrightarrow x^2+1\ge 2mx \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}\ge 2m, \forall x>0$.

Xét $g(x)=x+\dfrac{1}{x},\forall x>0\Rightarrow g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(L)\\x=1(N)\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Theo yêu cầu bài toán thì $2m\le 2\Leftrightarrow m\le 1$.

Vì $m\in[-2021;2021]\Rightarrow$ số giá trị của m bằng: $(1-(-2021))+1=2023$.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, điểm $M(x;y)$ biểu diễn nghiệm của bất phương trình $\log_3(9x+18)+x=y+3^y$. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ nguyên thuộc hình tròn tâm O bán kính $R=7$?

A. 7. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 49.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $9x+18>0\Leftrightarrow x>-2$.

Ta có: $\log_3(9x+18)+x=y+3^y\Leftrightarrow\log_3(x+2)+x+2=y+3^y$

Đặt $t=\log_3(x+2)$, $t\in\mathbb{R}$. Khi đó ta có: $t+3^t=y+3^y$ (*)

Ta thấy hàm số $f(x)=x+3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (do $f'(x)=1+3^x.\ln 3>0\,\forall x\in\mathbb{R}$)

Suy ra $(*)\Leftrightarrow t=y\Rightarrow\log_3(x+2)=y\Leftrightarrow x+2=3^y$

Do M có tọa độ nguyên thuộc hình tròn tâm O bán kính $R=7$ nên $\begin{cases}x^2+y^2\le 49\\x,y\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Khi đó $-1\le x\le 7\Rightarrow 1\le x+2\le 9\Rightarrow 3^0\le 3^y\le 3^2\Rightarrow y\in\{0;1;2\}$

Trường hợp 1: $y=0\Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $y=1\Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $y=2\Rightarrow x=7$ (loại)

Vậy có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu là $(-1;0),(1;1)$.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên $a<11$ sao cho ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b\in(0;8)$ thỏa mãn $\log_4(b^2+12)+\log_3[(b+7)(a-3)]+\log_5(a+19)\ge 7$.

A. 5.. **B.** 4.. **C.** 6.. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_4(b^2+12)+\log_3[(b+7)(a-3)]+\log_5(a+19)\ge 7$

$\Leftrightarrow\log_4(b^2+12)+\log_3(b+7)+\log_3(a-3)+\log_5(a+19)-7\ge 0.$

Xét hàm $f(b)=\log_4(b^2+12)+\log_3(b+7)+\log_3(a-3)+\log_5(a+19)-7$ trên $(0;8)$

có $f'(b)=\dfrac{2b}{(b^2+12)\ln 4}+\dfrac{1}{(b+7)\ln 3}>0,\ \forall b\in(0;8)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;8)$

Suy ra $f(1)<f(2)<...<f(7)$, do đó để có ít nhất 6 số nguyên $b\in(0;8)$ ta cần $f(2)\ge 0$

$\Leftrightarrow \log_3(a-3)+\log_5(a+19)-3\ge 0\quad (1)$

Xét hàm $g(a)=\log_3(a-3)+\log_5(a+19)-3$ trên $(3;11)$ có

$g'(a)=\dfrac{1}{(a-3)\ln 3}+\dfrac{1}{(a+19)\ln 5}>0,\ \forall a\in(3;11)$ suy ra hàm $g(a)$ đồng biến trên $(3;11)$

và có $g(6)=0$, mặt khác $(1)\Leftrightarrow g(a)\ge g(6)\Leftrightarrow a\ge 6$, do đó $a\in\{6,7,8,9,10\}$.

Câu 15: Cho hai số m,n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình: $2022(\log_m x)(\log_n x)=2021(\log_m x)+2022(\log_n x)+2023$. Hỏi P nguyên và đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $mn=2^{2020}$. **B.** $mn=2^{2017}$. **C.** $mn=2^{2023}$. **D.** $mn=2^{2018}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_m x=t\Rightarrow x=m^t$.

Thay vào phương trình ta được: $2022(\log_n m^t).t=2021t+2022(\log_n m^t)+2023$

$\Leftrightarrow 2022(\log_n m).t^2-(2021+2022\log_n m)t-2023=0$

Đây là một phương trình bậc 2 theo t và $ac=-2023.2022\log_n m<0$

Do đó phương trình có 2 nghiệm t_1,t_2 và phương trình ban đầu có hai nghiệm $x_1=m^{t_1}$, $x_2=m^{t_2}$.

Ta có: $P=x_1x_2=m^{t_1+t_2}=m^{\frac{2021+2022\log_n m}{2022\log_n m}}=m^{1+\frac{2021}{2022\log_n m}}=m.\left(m^{\frac{1}{\log_n m}}\right)^{\frac{2021}{2022}}=m.n^{\frac{2021}{2022}}$

Vì m nguyên dương và khác 1 nên $m\ge 2$, suy ra $P\ge 2\sqrt[2022]{n^{2021}}$.

Mặt khác $(2021,2022)=1$ và $n\ge 2$ nên P nguyên và nhỏ nhất khi $\begin{cases}m=2\\ n=2^{2022}\end{cases}$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để bất phương trình $4^{2x-m}-4.2^{3x-2m}+4.2^{x-m}<1$ nghiệm đúng với $\forall x\in(-\infty;4]$?

A. 2015. **B.** 92. **C.** 2032. **D.** 93.

Lời giải

Chọn A

$4^{2x-m}-4.2^{3x-2m}+4.2^{x-m}<1\Leftrightarrow 2^{4x}-4.2^{3x}+4.2^x.2^m<2^{2m}$

$$\Leftrightarrow (2^m-2^{2x})(2^m+2^{2x}-4.2^x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^m>2^{2x}\\ 2^m>4.2^x-2^{2x}\end{cases}(1)\\ \begin{cases}2^m<2^{2x}\\ 2^m<4.2^x-2^{2x}\end{cases}(2)\end{array}\right.$$

$\forall x\in(-\infty;4]\Rightarrow\begin{cases}0<2^{2x}\le 2^8\\ -192\le 4.2^x-2^{2x}\le 2^2\end{cases}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2^m>2^{2x}\\ 2^m>4.2^x-2^{2x}\end{cases}(1)$

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m > 2^8 \\ 2^m > 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 8$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ nên có 2015 giá trị của m.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4.2^x - 2^{2x} \end{cases}$ (2)

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m \le 0 \\ 2^m < -192 \end{cases}$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy có 2015 giá trị của m.