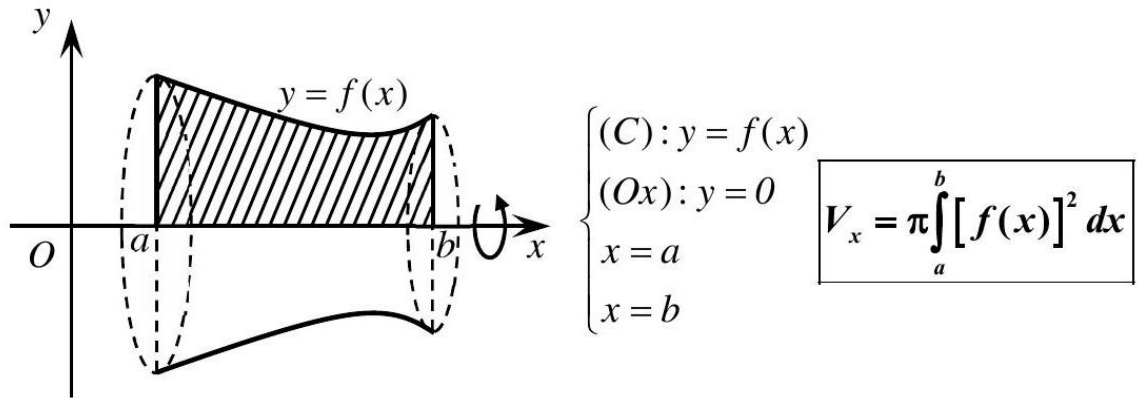


BÀI 8. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ HÀM XÁC ĐỊNH

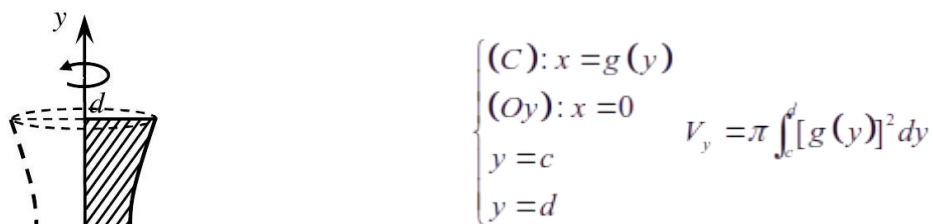
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Thể tích khối tròn xoay

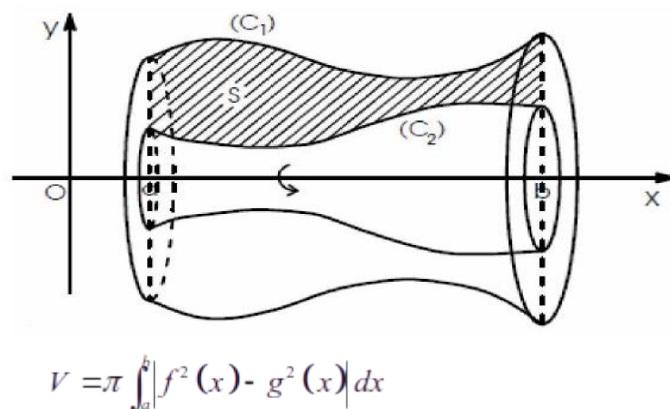
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox :



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c, y = d$ quanh trục Oy :



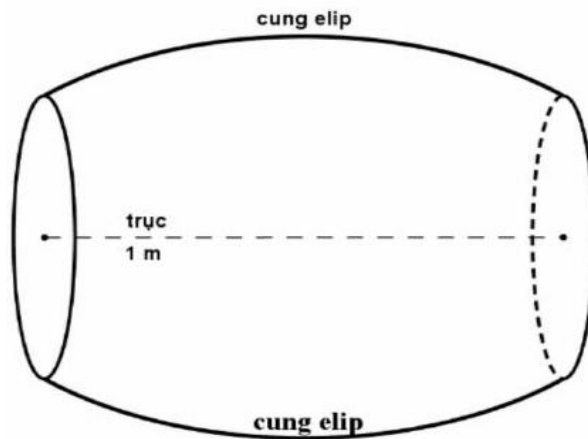
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox :



Một số Câu toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

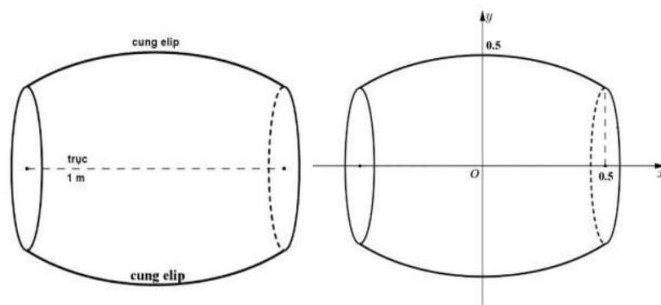
PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Một cái trống trường có khoảng cách giữa hai mặt trống là 1 m . Một mặt phẳng qua trục của trống cắt phần xung quanh của trống theo hai cung của elip (E) (tham khảo hình vẽ). Biết rằng elip (E) có trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 2 m và 1 m . Hãy tính thể tích của phần không gian mà cái trống đã nêu chiếm chỗ.



Lời giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (trục hoành trùng với trục của trống, gốc tọa độ O trùng với tâm trống, đơn vị: m).



Theo giả thiết elip (E) có phương trình là

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2}$$

$$V = 2\pi \int_0^{0.5} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^{0.5} (1 - x^2) dx = \frac{11\pi}{48}$$

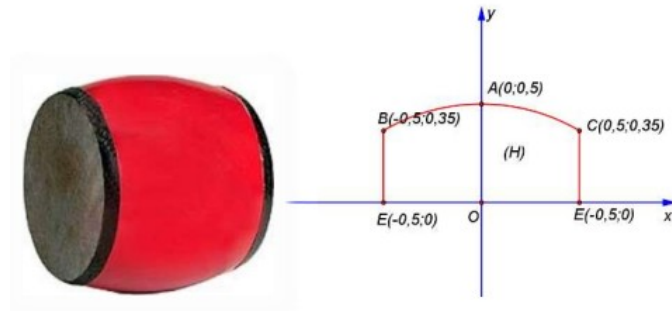
Thể tích của cái trống là

Vậy thể tích của cái trống trường là $\frac{11\pi}{48} (\text{m}^3)$

Câu 2: Một cái trống (hình vẽ) có đường kính 1 m , hai mặt trống có đường kính $0,7 \text{ m}$ và chiều cao của trống là 1 m . Thể tích khối giới hạn bởi bề mặt của trống gần với số nào?



Lời giải



Xét hình phẳng (H) (hình vẽ). Thể tích khối được giới hạn bởi bề mặt của trống là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục hoành.

Gọi phương trình parabol đi qua 3 điểm A, B, C là

$$(P): y = ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

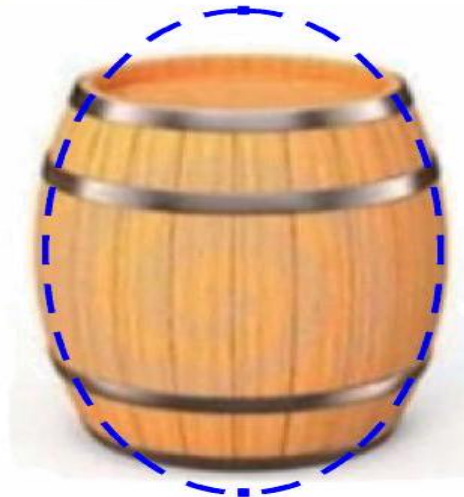
Thay tọa độ các điểm $A(0; 0,5), B(-0,5; 0,35), C(0,5; 0,35)$ vào phương trình của (P) ta được:

$$\begin{cases} c = 0,5 \\ 0,25a - 0,5b + c = 0,35 \\ 0,25a + 0,5b + c = 0,35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0,6 \\ b = 0 \\ c = 0,5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -0,6x^2 + 0,5$$

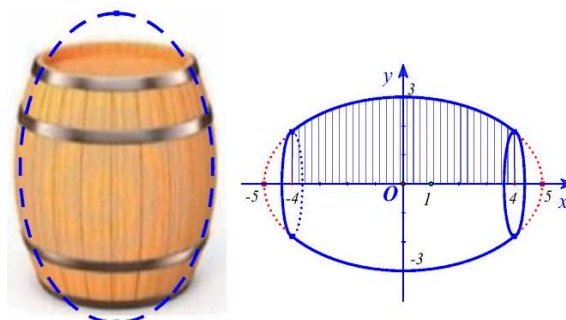
Thể tích cần tìm

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} (-0,6x^2 + 0,5)^2 dx = \frac{409\pi}{2000} (\text{m}^3)$$

Câu 3: Một thùng chứa rượu bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai mặt đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy là 8 dm . Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm , trục bé bằng 6 dm . Hỏi thùng gỗ này đựng được bao nhiêu lít rượu?



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Khi đó đường Elip có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Thùng rượu là vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đường elip, trục Ox , các đường thẳng $x = -4; x = 4$ quay xung quanh trục Ox .

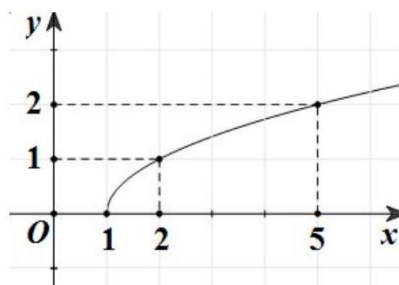
Ta có $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{25}(25 - x^2)$ suy ra thể tích thùng rượu là

$$V = \int_{-4}^4 \pi y^2 dx = \frac{9\pi}{25} \int_{-4}^4 (25 - x^2) dx = \frac{9\pi}{25} \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^4 = \frac{1416\pi}{25} (\text{m}^3) = \frac{1416\pi}{25} (\text{lít}).$$

Câu 4: Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay với đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 và 4.

Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay khi quay đường cong $y = \sqrt{x-1}$ quay quanh trục Ox . Thể tích của bình cắm hoa đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



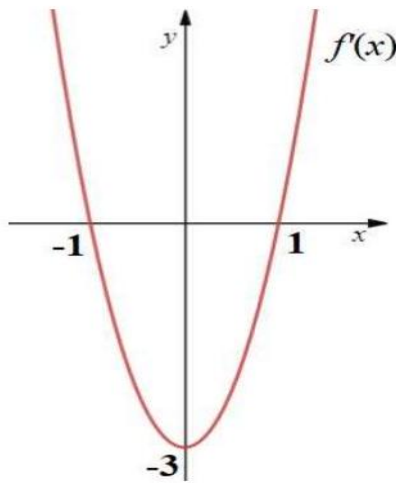
Vì đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 và 4 nên bán kính của đáy bình và miệng bình lần lượt là 1 và 2.

Ta có $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ và $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$.

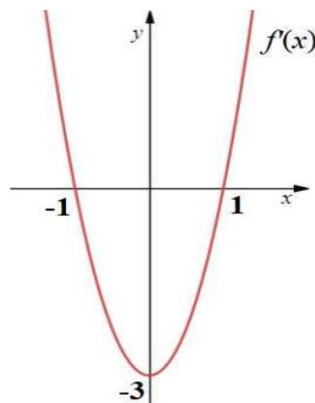
Vậy thể tích của bình cắm hoa là

$$V = \pi \int_2^5 (\sqrt{x-1})^2 dx = \pi \int_2^5 (x-1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_2^5 = \frac{15\pi}{2}$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới y. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .



Lời giải



Từ hình vẽ ta có được $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + d$

Ta có $y = 4$ là đường thẳng có hệ số góc bằng 0 nên $y = 4$ là tiếp tuyến tại điểm cực trị x_0 có hoành độ âm của hàm số $f(x) \Rightarrow f(x_0) = 4$.

Từ hình vẽ ta thấy được $f(x)$ có một điểm cực trị âm là $x = -1$
 $\Rightarrow f(-1) = 4 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

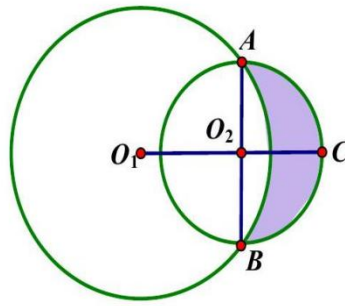
Xét phương trình

Khi đó thể tích vật thể được tạo ra khi xoay hình phẳng H quanh trục Ox là:

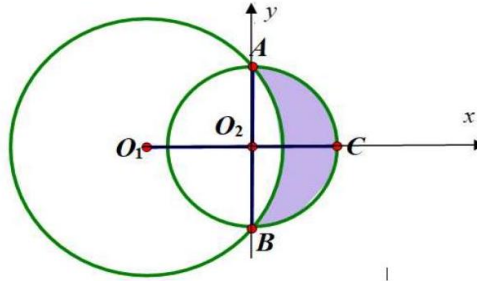
$$V = \pi \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)^2 dx = \frac{729\pi}{35}$$

Câu 6: Cho hai đường tròn $(O_1; 10)$ và $(O_2; 8)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn.

Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



Lời giải



Cách 1: Ta xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 6$

Ta có $O_2(0;0), O_1(-6;0)$

Đường tròn $(O_2; 8)$ có phương trình là: $x^2 + y^2 = 64$

$$\Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$$

Đường tròn $(O_1; 10)$ có phương trình là: $(x+6)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - (x+6)^2}$

$$V = \pi \int_0^8 (64 - x^2) dx - \pi \int_0^4 [100 - (x+6)^2] dx = \frac{608\pi}{3}$$

Thể tích cần tìm:

Cách 2: Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O, O_2C \equiv Ox, O_2A \equiv Oy$

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow (O_1): (x+8)^2 + y^2 = 100$

Phương trình đường tròn $(O_2): x^2 + y^2 = 36$

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{100 - (x+8)^2}$, trục $Ox, x=0, x=2$

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{36 - x^2}$, trục $Ox, x=0, x=6$

Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox .

Ta có $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 6^3 = 144\pi$

$$V_1 = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 [100 - (x+8)^2] dx = \frac{112\pi}{3}$$

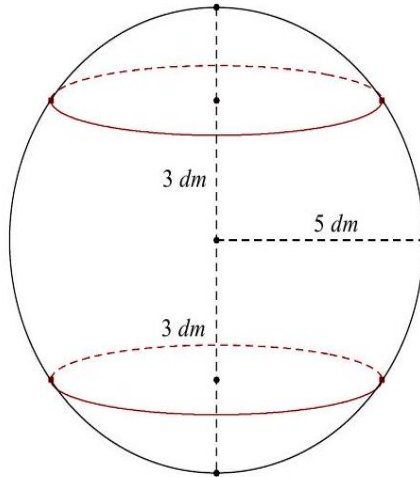
Lại có

$$V = V_2 - V_1 = 144\pi - \frac{112\pi}{3} = \frac{320\pi}{3}$$

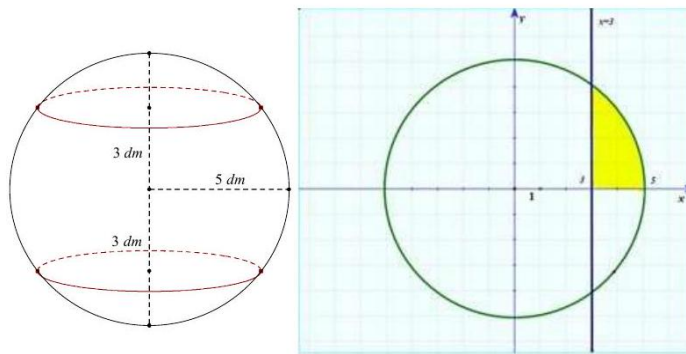
Do đó

Lời giải

Một khối cầu có bán kính là $5(\text{dm})$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc với đường kính và cách tâm một khoảng $3(\text{dm})$ để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước tối đa mà chiếc lu có thể chứa được.



Lời giải



Cách 1: Sử dụng ứng dụng của tích phân

Xét đường tròn có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=5$. Khi đó phương trình của đường tròn là: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2$ (C)

Thể tích lu nước cần tính chính là thể tích của khối tròn xoay khi quay đường tròn (C) quanh trục Ox và bỏ đi phần chỏm cầu giới hạn bởi 2 mặt phẳng song song và vuông góc với trục Ox và cách O một khoảng là 3.

$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = 132\pi (\text{dm}^3)$$

Thể tích của lu nước là:

Cách 2: Sử dụng các công thức thể tích thông thường

$$\Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi (\text{dm}^3)$$

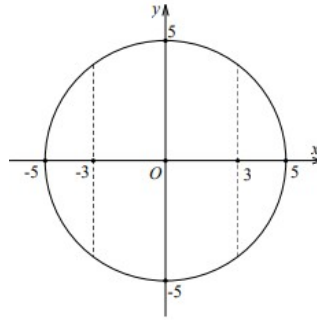
Gọi V_1 là thể tích khối cầu

Gọi V_2 là tổng thể tích 2 chỏm cầu bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm một khoảng $3(\text{dm}) \Rightarrow V_2 = 2\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = 2\pi \cdot 2^2 \cdot \left(5 - \frac{2}{3} \right) = \frac{104}{3}\pi (\text{dm}^3)$

$$V = V_1 - 2V_2 = 132\pi (\text{dm}^3)$$

Khi đó thể tích V của lu nước cần tính là:

Cách 3:

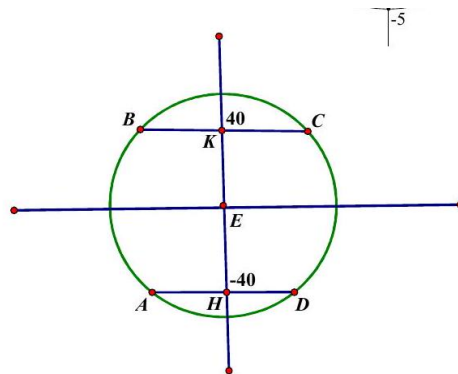


Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy . Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2 + y^2 = 25$. Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục Ox , đường thẳng $x = -3, x = 3$ quay quanh Ox .

$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 132\pi (\text{dm}^3)$$

Câu 8: Một thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy bằng 80 cm. Đường sinh của mặt xung quanh thùng là một phần đường tròn có bán kính bằng 60 cm. Hỏi thùng đó có thể đựng được bao nhiêu lít rượu?

Lời giải

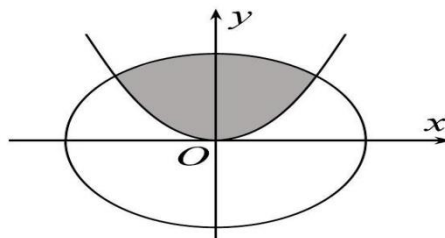


Phương trình đường tròn tâm E bán kính 60 cm là: $x^2 + y^2 = 60^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{60^2 - y^2}$.

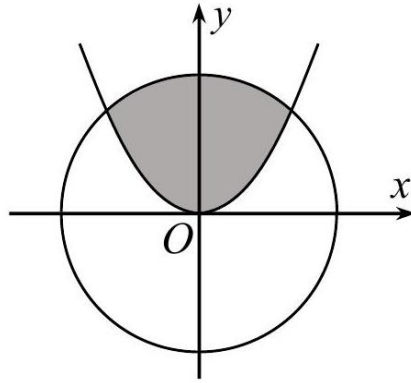
Thể tích thùng rượu được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $x = \sqrt{3600 - y^2}; x = 0; y = \pm 40$ quanh Oy .

$$V = \pi \int_{-40}^{40} (3600 - y^2) dy = 770737,4 (\text{cm}^3) \approx 771 (\text{lit}).$$

Câu 9: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



Lời giải



Với $y = x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được

$$x^2 + x^4 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hơn nữa

$$x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2 - x^2} \\ y = \sqrt{2 - x^2} \end{cases}$$

$$(H_1): \begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2} \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$$

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay

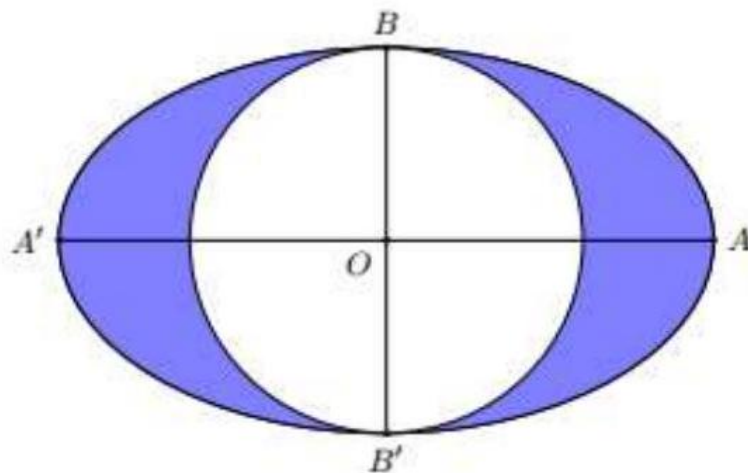
quay quanh Ox bỏ đi phần thể tích

$$(H_2): \begin{cases} y = x^2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases} \text{ quay quanh } Ox$$

$$V = \pi \left[\int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2})^2 dx - \int_{-1}^1 (x^2)^2 dx \right] = \frac{44\pi}{15}$$

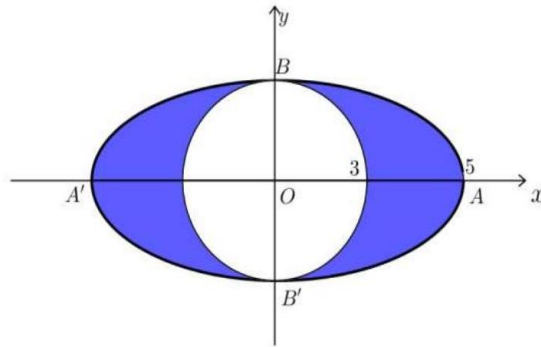
Do đó

Câu 10: Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA' = 10$, độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$, đường tròn tâm O có đường kính là BB' (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và đường tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA' .



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

Giả sử phương trình chính tắc của elip có dạng

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} AA' = 10 \\ BB' = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$$

Đường tròn tâm O bán kính OB có phương trình $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm \sqrt{9 - x^2}$

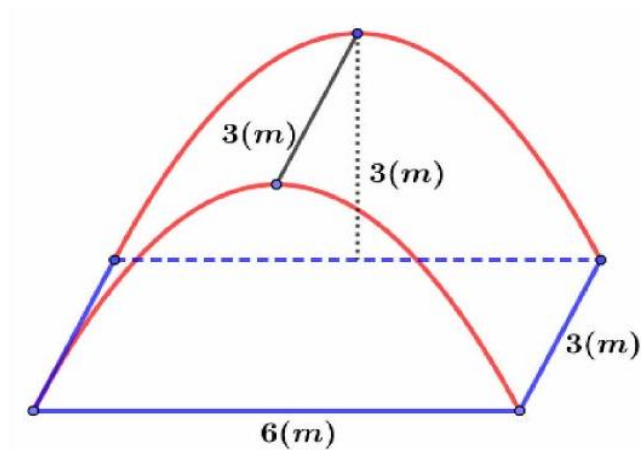
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$ quay xung quanh trục Ox .

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ quay xung quanh trục Ox .

Thể tích khối tròn xoay cần tìm bằng:

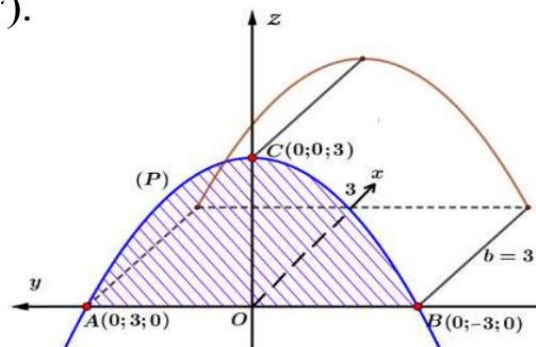
$$V = 2(V_1 - V_2) = 2 \left(\pi \int_0^5 \frac{9}{25} (25 - x^2) dx - \pi \int_0^3 (9 - x^2) dx \right) = 24\pi$$

Câu 11: Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12B dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



Lời giải

).



Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ có đỉnh $C(0; 3)$, đi qua hai điểm

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 3 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$A(-3; 0)$ và $B(3; 0)$ nên có hệ phương trình

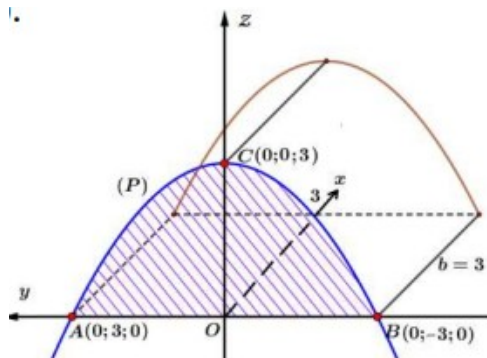
$$(P): y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$$

Suy ra

$$S = \int_{-3}^3 \left(3 - \frac{1}{3}x^2 \right) dx = 12 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích mặt trước của lều trại là:

- Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ



$$V = \int_0^3 12 dx = 36 \text{ (m}^3\text{)}$$

Khi đó thể tích phần không gian bên trong lều trại là

* Ta có thể làm trắc nghiệm như sau: Công thức tính nhanh

Diện tích phần gạch sọc là: $S = \frac{2}{3}ah$, với a là đáy, h là chiều cao.

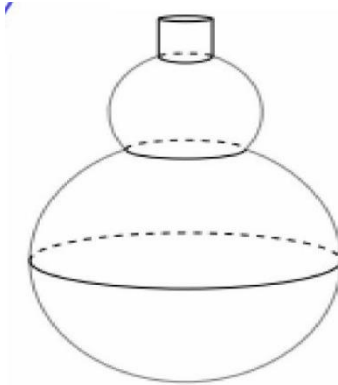
$$S = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 3 = 12 \text{ (m}^2\text{)}; h = 3 \text{ (m)}$$

Có

$$V = 12 \cdot 3 = 36 \text{ (m}^3\text{)}$$

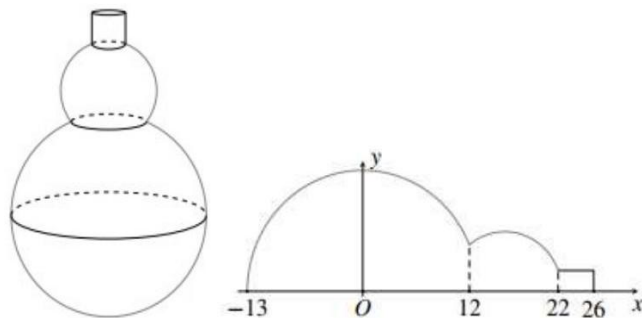
Coi khối cần tính như khối trụ thì khối có thể tích là

Câu 12: Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13 \text{ cm}$ và $r = \sqrt{41} \text{ cm}$ và một phần của mặt trụ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ dưới đây. Biết giao của hai hình cầu là đường tròn có bán kính $r_1 = 5 \text{ cm}$ và cổ của hồ lô là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5} \text{ cm}$, chiều cao bằng 4 cm . Giả sử độ dày của hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được tối đa bao nhiêu lít rượu?



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



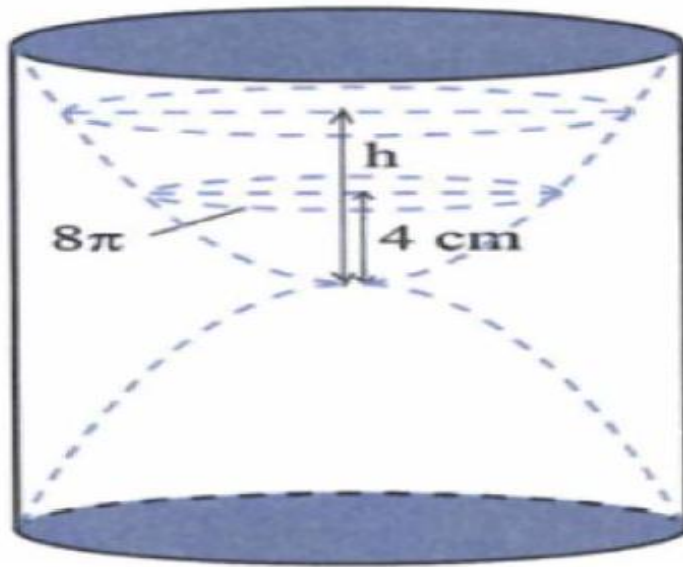
Ta có hồ lô được tạo thành từ hình phẳng trên khi nó quay xung quanh trục Ox .

Phương trình cung cong lớn là

$$x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow y = \sqrt{169 - x^2}$$

Phương trình cung cong nhỏ là

$$(x - 16)^2 + y^2 = 41 \Rightarrow y = \sqrt{41 - (x - 16)^2}$$

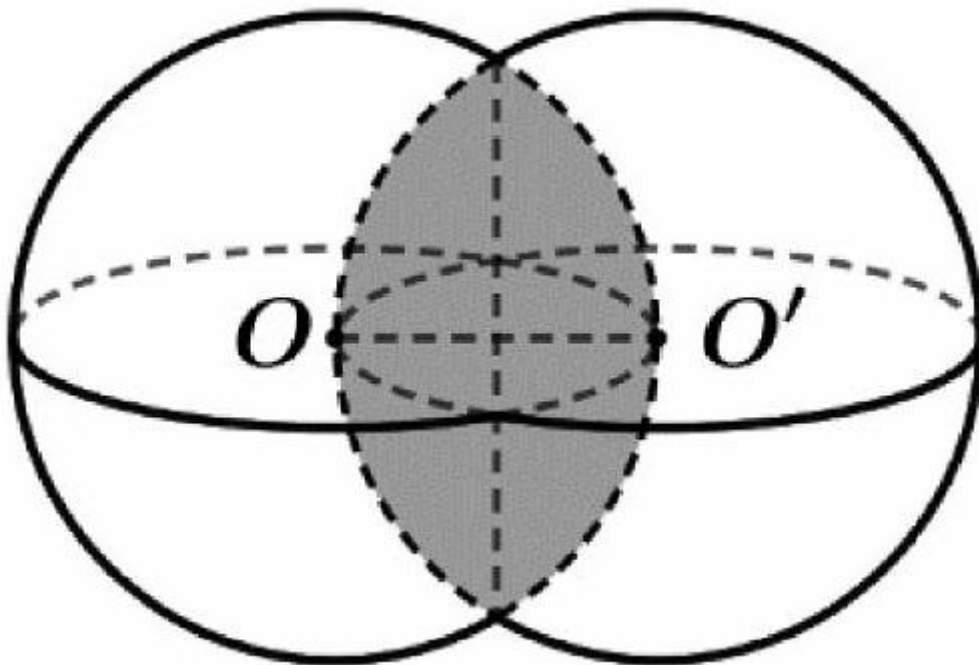


Thể tích hồ là

$$V = \pi \int_{-13}^{12} (169 - x^2) dx + \pi \int_{12}^{22} [41 - (x - 16)^2] dx + \pi \int_{22}^{26} 5 dx$$

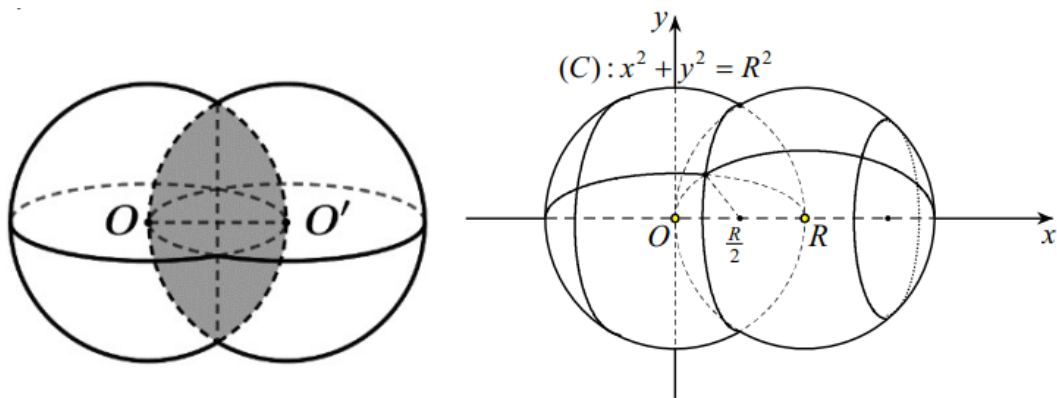
$$= \pi \left(\frac{8750}{3} + \frac{950}{3} + 20 \right) = \frac{9760}{3} \pi \approx 10220,6 \text{ (cm}^3 \text{)} \approx 10,2 \text{ (lít)}.$$

Câu 13: Một đồ chơi được thiết kế gồm hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại (xem hình vẽ). Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox và mặt cầu tâm (O, R) là hình tròn.

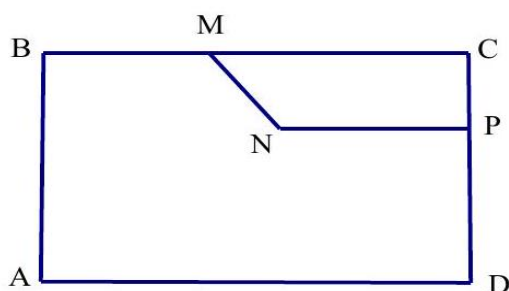


Diện tích thiết diện là $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$ (Trong đó x là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P))

$$V = 2 \int_{\frac{R}{2}}^R S(x) dx = 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}$$

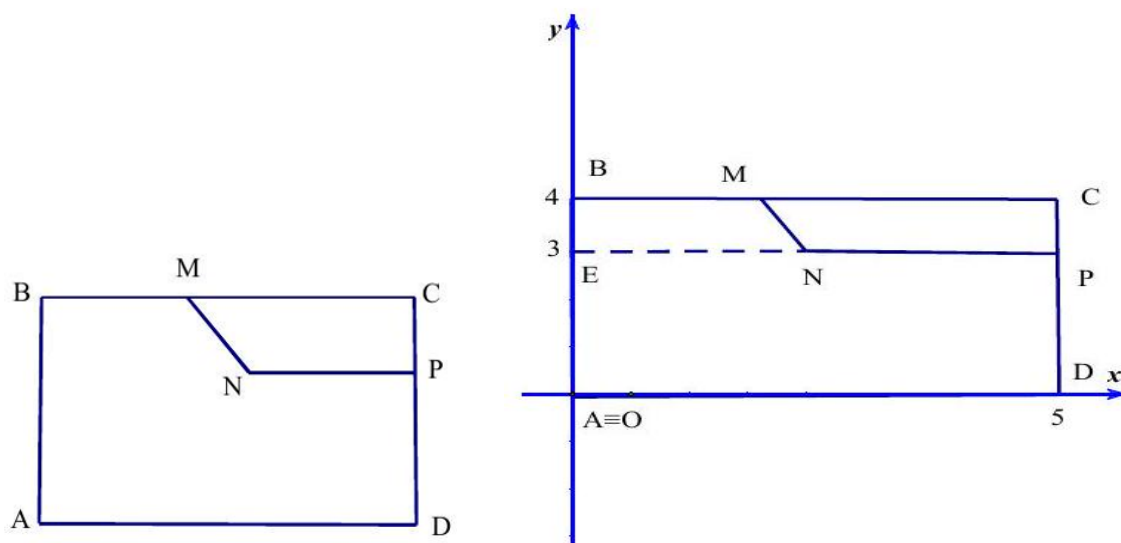
Thể tích cần tính là:

Câu 14: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=4, AD=5$. Cắt hình chữ nhật theo đường gấp khúc MNP với $BM=2, DP=3, PN=2$ và bỏ đi phần hình thang vuông $MNPC$ (tham khảo hình vẽ). Gọi (H) là phần hình phẳng còn lại của hình chữ nhật đã cho sau khi cắt bỏ. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục AB .



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



$$V = V_{ADPE} = \pi \int_0^5 5^2 dy = 75\pi \text{ (đvtt)}$$

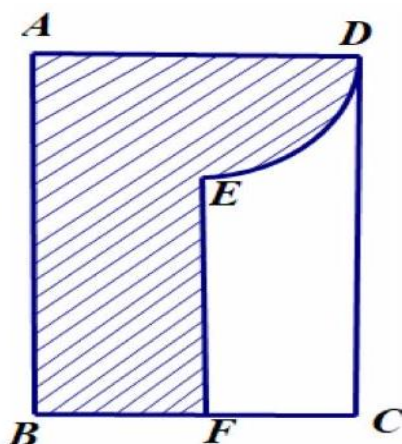
Đường thẳng MN đi qua $M(2;4), N(3;3)$ có dạng $x=6-y$.

$$V_{ENMB} = \pi \int_3^6 (6-y)^2 dy = \frac{19\pi}{3} \text{ (đvtt)}.$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quay quanh trục Oy :

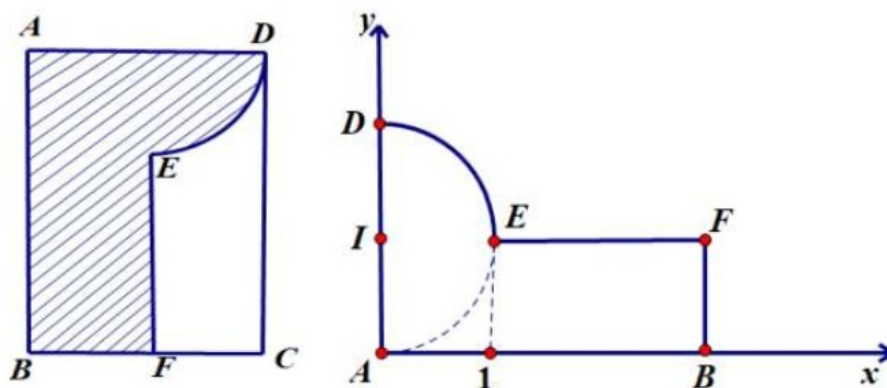
$$V = V_{ADPE} + V_{ENMB} = 75\pi + \frac{19\pi}{3} = \frac{244\pi}{3} \text{ (đvtt)}$$

Câu 15: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB . Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3 \text{ cm}, AD = 2 \text{ cm}$; F là trung điểm của BC ; điểm E cách AD một đoạn bằng 1 cm. Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A; B \in Ox; D \in Oy$.



Ta có: $A(0;0); D(0;2); B(3;0); E(1;1)$

Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Nên cung trên của đường tròn tâm I có phương trình là: $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

$$V = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1-x^2})^2 dx + \pi \int_1^3 1^2 dx \approx 16,5 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của vật thể trang trí là:

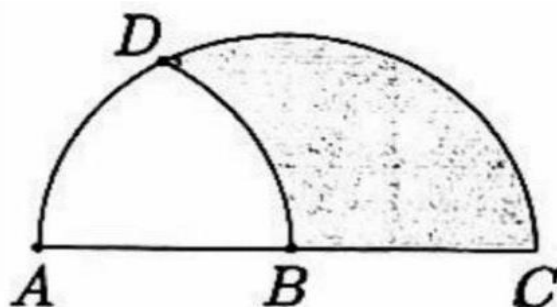
Câu 16: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (H) (phần màu xám trong hình vẽ bên) quanh trục AC . Biết rằng $AC = 2 \text{ cm}, B$ là trung điểm của AC . Miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng BC và các cung tròn bán kính 1 cm có tâm A và B . Thể tích của vật trang trí đó

bằng

bao

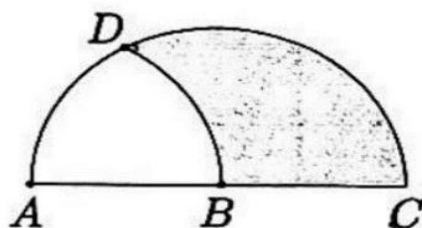
nhiều?

(Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy với $O \equiv B$, tia $Ox \equiv BC$,



Đường tròn tâm $B(0;0), R=1$ là $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$

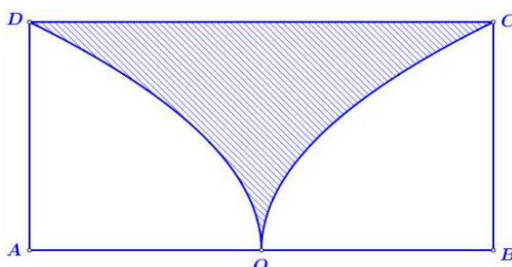
Đường tròn tâm $A(-1;0), R=1$ là $(x+1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - (x+1)^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường tròn là

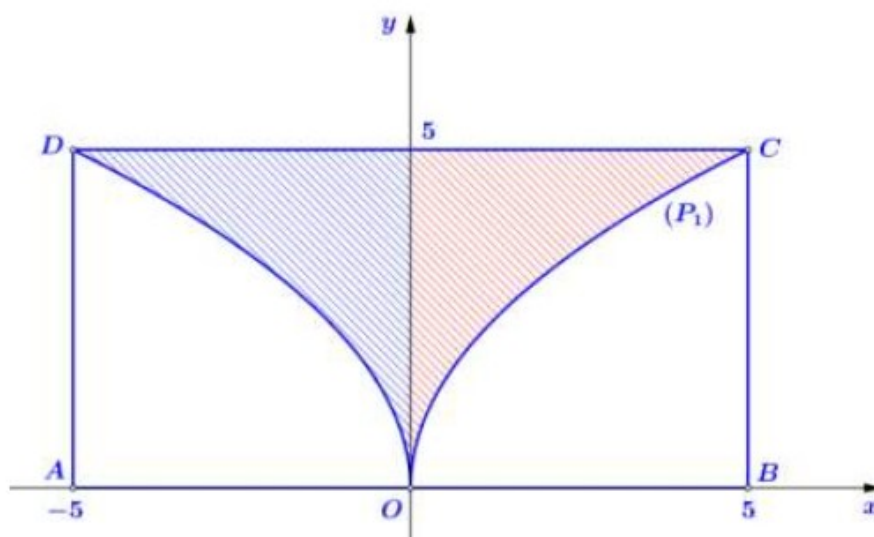
$$1 - x^2 = 1 - (x+1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx - \pi \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 - (x+1)^2) dx = \frac{11}{12} \pi \approx 2,9 \text{ cm}^3$$

Câu 17: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10 \text{ cm}$ và chiều rộng $BC = 5 \text{ cm}$; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?



Lời giải



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB ta được khối trụ có

- Bán kính đáy $r = BC = 5 \text{ cm}$.
- Chiều cao $h = AB = 10 \text{ cm}$.

Do đó thể tích khối trụ này có thể tích

$$V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi (\text{cm}^3)$$

Mặt khác, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì $C(5;5)$ và parabol bên phải trục Ox có dạng $(P_1): y^2 = 2px$

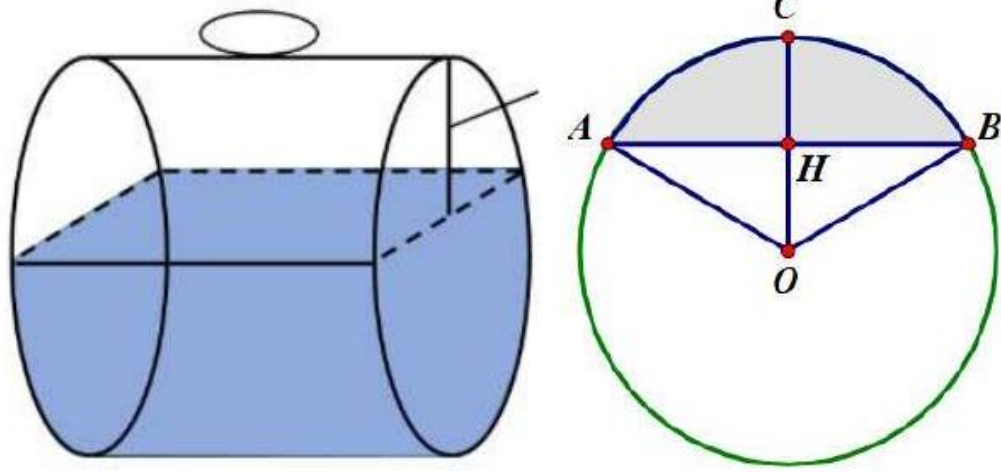
Ta có $C \in (P_1) \Leftrightarrow p = \frac{5}{2} \Rightarrow (P_1): y^2 = 5x$ hay $y = \sqrt{5x}$.

Khi đó miền (R) khi quay quanh trục Ox có thể tích

$$V_2 = 2\pi \int_0^5 [5^2 - 5x] dx = 2\pi \left(25x - \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^5 = 125\pi$$

Vậy thể tích phần còn lại là $V = V_1 - V_2 = 125\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 18: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).

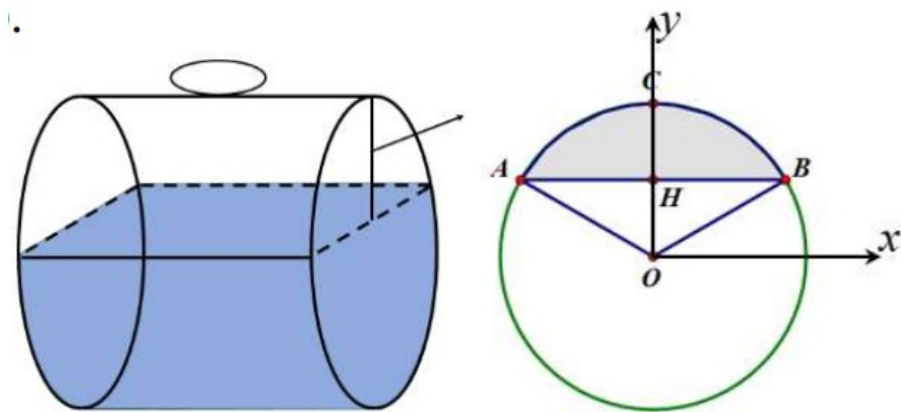


Lời giải

Thể tích của bồn chứa dầu là $V = B \cdot h = 5\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Gọi V_1 là thể tích phần dầu bị rút ra.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có diện tích phần tô đậm là

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 V_1 &= \int_0^5 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dx = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 5
 \end{aligned}$$

Vậy thể tích phần dầu bị rút ra là

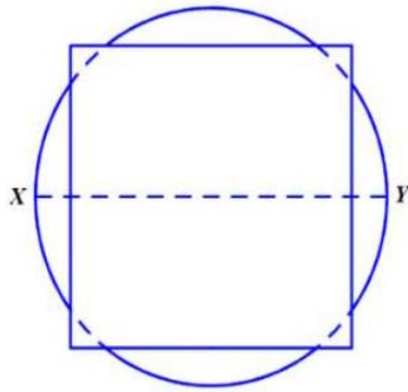
$$V_2 = V - V_1 = 5\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) 5 \approx 12.637 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy thể tích phần dầu còn lại trong bồn là

Câu 19: Cho hình vuông có độ dài 8 cm và một hình tròn có bán kính 5 cm được xếp chồng lên nhau sau cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Biết thể tích V của vật thể tròn

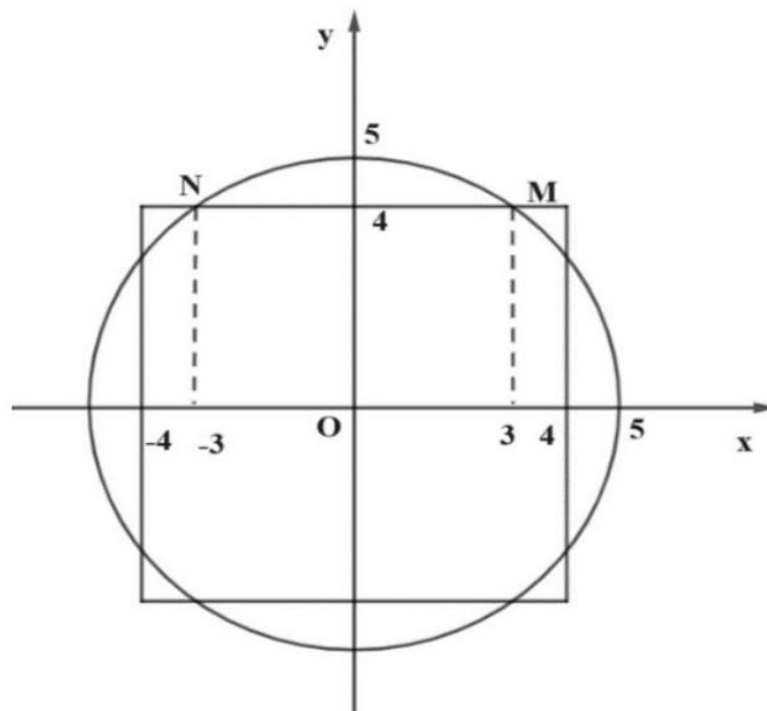
xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY bằng $\frac{b}{a}\pi; a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Khi đó $\frac{a}{10} + 2b$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Khi đó phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.

Một phần tư đường tròn $\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ x \geq 0 \end{cases}$ cắt các đường $y=4$ và $x=4$ lần lượt tại $(3;4)$ và $(4;3)$.

Do đó thể tích của mô hình khi quay quanh trục XY là

$$V = 2\pi \left[\int_0^3 (25 - x^2) dx + \int_3^4 (25 - x^2) dx + \int_3^4 4^2 dx \right] = \frac{520\pi}{3}$$

Suy ra $\begin{cases} a = 520 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{10} + 2b = 58$.

Cách 2:

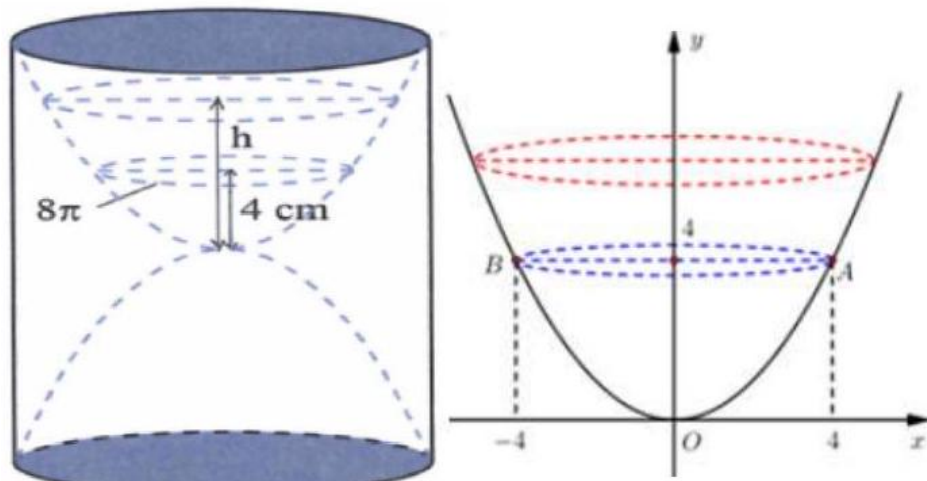
$$V = V_{\text{cũ}} + 2\pi \cdot \int_3^4 [4^2 - (25 - x^2)] dx = \frac{4}{3} \cdot 5^3 \cdot \pi + \frac{20}{3} \cdot \pi = \frac{520\pi}{3}$$

Suy ra
$$\begin{cases} a = 520 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{10} + 2b = 58$$

Câu 20: Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai Parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $14,75 \text{ cm}^3 / \text{phút}$. Khi chiều cao của cát còn 4 (cm) thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi $8\pi \text{ (cm)}$. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Gọi phương trình parabol (P) là $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

Theo giả thiết, đường tròn thiết diện chu vi $8\pi \text{ (cm)}: 2\pi r = 8\pi \Leftrightarrow r = 4 \text{ (cm)}$

Vì parabol (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(4;4)$ và $B(-4;4)$, suy ra
$$\begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b = 4 \\ 16a - 4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$(P): y = \frac{1}{4}x^2$$

Nên phương trình parabol

Thể tích phần cát ban đầu chính bằng thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay nhánh phải của parabol (P) quanh trục Oy và bằng thể tích cát chảy trong 20 phút.

Ta có:

Thể tích cát chảy trong 20 phút: $20.14,75 = 295 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Suy ra $V = \pi \int_0^h (2\sqrt{y})^2 dy = 295 \text{ (cm}^3\text{)} \Leftrightarrow 2\pi h^2 = 295 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{295}{2\pi}}$ (cm).

Vậy chiều cao của khối trụ bên ngoài là: $2 \cdot \frac{3}{2}h = 3\sqrt{\frac{295}{2\pi}} \approx 20,6 \text{ (cm)}$.