

Câu 1 (4 điểm). Cho $a \neq 0$ và dãy số (x_n) định bởi

$$x_1 = a > 0; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{2(n+1)}{nx_n} (n > 1).$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (4 điểm). Tìm tất cả các cặp đa thức hệ số nguyên $P(x), Q(x)$ thỏa mãn

$$Q(0) = 0 \quad \text{và} \quad P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\dots(x-15)$$

Câu 3 (4 điểm). Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho

$$n + f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) + \dots = 2023,$$

trong đó $f(k)$ là ước nguyên dương lớn nhất của số tự nhiên k và khác k và biết $f(0) = f(1) = 0$.

Câu 4 (4 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , $\angle ABC < 45^\circ$.

Một đường thẳng đi qua B và vuông góc với BC cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại điểm I . Gọi D là điểm đối xứng với C qua A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AB và CI lần lượt tại H và K

a/ Chứng minh : $DB \cdot DH = CH \cdot CB$.

b/ Gọi J là giao điểm của AB và DI . Chứng minh rằng bốn điểm B, I, K, J nằm trên đường tròn có tâm thuộc đường thẳng CD .

Câu 5 (4 điểm). Bạn Bình và An mỗi bạn có một hộp bi Trong mỗi hộp đều có chứa bi trắng và có chứa bi đen tổng số bi trong hai hộp là 25 (các bi giống nhau về kích thước và trọng lượng)

a/ Biết hộp của Bình có 3bi trắng 10 bi đen , còn hộp của An 10 bi trắng và 2 bi đen . Mỗi bạn lấy ngẫu nhiên từ hộp của mình ra 2 viên Tính xác suất để bốn viên cùng màu.

b/ Biết hộp của Bình chứa nhiều bi hơn hộp của An và số bi đen trong hộp của Bình nhiều hơn số bi đen trong hộp của An .Từ mỗi hộp của mình mỗi bạn lấy ngẫu nhiên ra một viên .Tính xác suất để hai viên được lấy ra khác màu và biết rằng xác suất lấy ra được hai viên cùng đen là 0,42.

----- HẾT -----

Người ra đề: Trần Văn Châu 0905356469

Đỗ Thị Hồng Anh 0932379992