

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. (THPT Hai Bà Trưng - Huế 2019) Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

Trả lời:

Lời giải

$$y' = \frac{2-m}{(x+1)^2}$$

Ta có:

+ Xét $m=2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y=2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m=2$ (loại)

+ Xét $m > 2$.

$$\Rightarrow y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} < 0 \quad (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min_{[0;4]} y = y(4) = \frac{8+m}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{8+m}{5} = 3 \Leftrightarrow m = 7 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

+ Xét $m < 2$.

$$\Rightarrow y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} > 0 \quad (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min_{[0;4]} y = y(0) = m$$

$\Rightarrow m=3$ (loại).

Vậy $m=7$.

Câu 2. (Chuyên - Vĩnh Phúc 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có $y' = -3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \in [-1;1] \\ x=-2 \notin [-1;1] \end{cases}$

$$\begin{cases} y'(-1) = m-2 \\ y'(0) = m \\ y'(1) = m-4 \end{cases}$$

Mà

$$\min_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Do đó

Vậy $m=4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$

Tập xác định: $D = [-1; 1]$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} = x \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta có: $y(-1) = -1 + m, y(1) = 1 + m, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$

Do hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ liên tục trên $[-1; 1]$ nên $\text{Max}_{[-1;1]} y = m + \sqrt{2}$

Theo bài ra thì $\text{Max}_{[-1;1]} y = 2\sqrt{2}$, suy ra $m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 4. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2 x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

Trả lời:

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3m^2 x^2 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3m^2 x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3m^2 x - 4 = 0 \quad (\Delta = 9m^2 + 64) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3m^2 + \sqrt{9m^2 + 64}}{8} > 1 \\ x = \frac{3m^2 - \sqrt{9m^2 + 64}}{8} < 0 \end{cases}$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0; 1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ bằng -16 nên $y(0) + y(1) = -16 \Leftrightarrow -m + (-m^2 - m - 1) = -16 \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0$

Vậy $m_1.m_2 = -15$.

Câu 5. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là
Trả lời:

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow [0; 2] \subset D$.

$$y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + m}{(x+1)^2}$$

Ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) = m \quad (1).$$

Ta có $y(0) = -m; y(2) = 4 - \frac{m}{3}$

Đặt $g(x) = -(2x^3 + 4x^2 + 2x) \Rightarrow g'(x) = -(6x^2 + 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}$.

Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0	-36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x) \in [-36; 0], \forall x \in [0; 2]$.

Trường hợp 1: $m > 0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

Để thấy $y(0) = -m < y(2) = 4 - \frac{m}{3}$ khi $m > 0$.

Khi đó $\max_{[0; 2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3$ loại do $m > 0$.

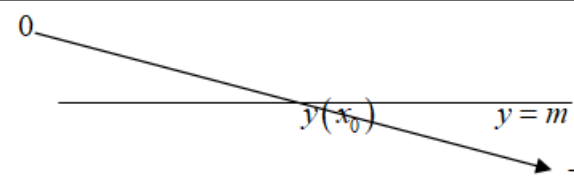
Trường hợp 2: $m < -36 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.

Để thấy $y(0) = -m > y(2) = 4 - \frac{m}{3}$ khi $m < -36$.

Khi đó $\max_{[0; 2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5$ loại do $m < -36$.

Trường hợp 3: $m \in [-36; 0] \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất (giả sử $x = x_0$).

Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên:

x	0	x_0	2
$g'(x)$		—	
$g(x)$			

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$$+ x = x_0 : g(x) = m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) = m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow y' = 0$$

$$+ x \in (0; x_0) : g(x) > m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) > m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m < 0 \Leftrightarrow y' < 0$$

$$+ x \in (x_0; 0) : g(x) < m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) < m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m > 0 \Leftrightarrow y' > 0$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	x_0	2
y'	—	0	+
y	$y(0)$	$y(x_0)$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{[0,2]} y \in [y(2); y(0)]$

$$\text{Nếu } m \in [-36; -6] \Rightarrow y(0) \geq y(2) \Rightarrow \max_{[0,2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5 (l)$$

$$\text{Nếu } m \in [-6; 0] \Rightarrow y(0) \leq y(2) \Rightarrow \max_{[0,2]} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3 (n)$$

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Cách 2:

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow [0; 2] \subset D$

$$y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} = x^2 - \frac{m}{x + 1} \Rightarrow y' = 2x + \frac{m}{(x + 1)^2}$$

Ta có:

Trường hợp 1: $m \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0; 2]$.

$$\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = y(2) = 4 - \frac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3 \quad \text{loại do } m > 0.$$

Trường hợp 2: $m < 0$, giả sử $\Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = y(x_0)$ với $x_0 \in (0; 2)$. Do hàm số liên tục trên $[0; 2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x_0(x_0 + 1)^2 \\ \frac{x_0^3 + x_0^2 - m}{x_0 + 1} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^3 + x_0^2 + 2x_0(x_0 + 1)^2 = 5(x_0 + 1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{-5}{3} \vee x = 1(n) \Rightarrow m = -8$$

$$y' = 2x + \frac{-8}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Khi đó:

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	2
y'	-	0	+
y	8	5	$\frac{20}{3}$

$\Rightarrow m = -8$ không thỏa yêu cầu đề.

Nên không tồn tại $x_0 \in (0; 2)$ để $\underset{[0;2]}{\text{Max}} y = y(x_0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = y(2) \Rightarrow m = -5 \\ \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = y(0) \Rightarrow m = -3 \end{cases}$$

Nếu $m = -5 \Rightarrow y(0) = 5; y(2) = \frac{17}{3} \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = y(2) = \frac{17}{3} \neq 5 \Rightarrow m = -5(l)$

Nếu $m = -3 \Rightarrow y(0) = 3; y(2) = 5 \Rightarrow \underset{[0;2]}{\text{Max}} y = y(2) = 5 \Rightarrow m = -3(n)$

Vậy $m = -3$ thỏa đề.

Câu 6. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

Trả lời:

Lời giải

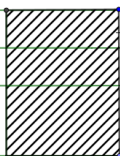
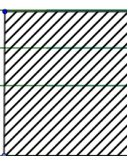
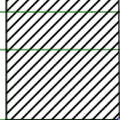
$$D = \mathbb{R}.$$

Đặt $t = x^3 - 3x, x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có hàm số $f(t) = (t + m)^2$.

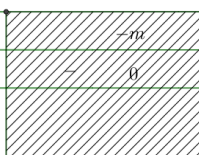
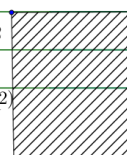
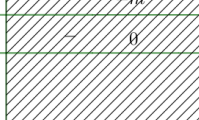
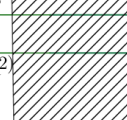
$$f'(t) = 2(t + m); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -m.$$

Trường hợp 1: $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

t		-2	$-m$	2		
$f'(t)$			-	0	+	
$f(t)$				$f(-m)$		

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min_{[-2; 2]} f(t) = f(-m) = 0$ không thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: $-m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2$

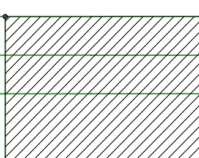
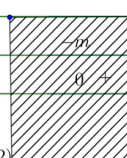
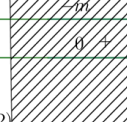
t		-2	2		
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$			$f(-2)$	$f(2)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min_{[-2; 2]} f(t) = f(-2) = (m - 2)^2$.

$$(m - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases} \xrightarrow{m \geq 2} m = 3.$$

Theo yêu cầu bài toán:

Trường hợp 3: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$

t		-2	2		
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$f(-2)$	$f(2)$		

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min_{[-2; 2]} f(t) = f(2) = (m + 2)^2$.

$$(m + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases} \xrightarrow{m \leq -2} m = -3.$$

Theo yêu cầu bài toán:

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu là: $3 + (-3) = 0$.

Câu 7. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2; 5]} f(x) + \max_{[2; 5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Ta có $f'(x) = m \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m \neq 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x \in (1; +\infty)$.

Nếu $m > 0$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 5]$. Do đó $\min_{[2;5]} f(x) = f(2) = m; \max_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$.

$$\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m + 2m = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -2 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Do $m > 0$ nên nhận $m_2 = 5$.

Nếu $m < 0$ thì $f'(x) < 0, \forall x \in [2; 5]$. Do đó $\min_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m; \max_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$.

$$\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow 2m + m = m^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -2 \\ m_2 = 5 \end{cases}$$

Do $m < 0$ nên nhận $m_1 = -2$.

Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

Câu 8. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1 .
Trả lời:

Lời giải

Điều kiện: $\cos x + 2 \neq 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y(\cos x + 2) = m \sin x + 1 \quad (\text{do } \cos x + 2 \neq 0 \text{ luôn đúng } \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1 (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$$

$$\min_{\mathbb{R}} y < -1 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3m^2} > 5 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \approx 2,82 \\ m < -2\sqrt{2} \approx -2,82 \end{cases}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$.

Câu 9. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020) Cho hàm số $y = f(x) = m^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 4\sqrt{4-x^2} + m + 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Trả lời:

Lời giải

TXĐ: $D = [-2; 2]$.

Đặt $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$; $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

$\Leftrightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} = t^2 - 4$.

$\Rightarrow y = g(t) = m^2 t + 2(t^2 - 4) + m + 1 = 2t^2 + m^2 t + m - 7$ với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Ta có: $g'(t) = 4t + m^2$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-m^2}{4} < 0; \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $[2; 2\sqrt{2}] \Rightarrow \min_{[2; 2\sqrt{2}]} g(t) = g(2) = 4$.

Mà $g(2) = 2m^2 + m + 1 \Leftrightarrow 2m^2 + m + 1 = 4 \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Tổng các giá trị của m thỏa mãn ycbt là $S = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Câu 10. (Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1; 3]$ là số dương?

Trả lời:

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1; 3]$ thì $m \notin [1; 3]$.

$y' = \frac{-2m-6}{(x-m)^2}$.

Trường hợp 1: $-2m-6 > 0 \Leftrightarrow m < -3$.

Khi đó $\max_{x \in [1; 3]} y = y(3) = \frac{m+9}{3-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là số dương thì $\frac{m+9}{3-m} > 0 \Leftrightarrow m+9 > 0 \Leftrightarrow m > -9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là -8, -7, -6, -5, -4.

Trường hợp 2: $-2m - 6 < 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Khi đó $\max_{x \in [1;3]} y = y(1) = \frac{m+7}{1-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là số dương thì $\frac{m+7}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1-m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2, -1, 0$.

Trường hợp 3: $-2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Khi đó $y = 1$. Nên $\max_{x \in [1;3]} y = 1$.

Vậy $m = -3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11. (Mã 103 - 2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\min_{[0;2]} f(x)$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 0$

$$\Rightarrow 4a + 4(a+4) = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ và } f(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1$$

Ta có $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = -17$

Vậy $\min_{[0;2]} f(x) = f(2) = -17$

Câu 12. (Mã 104-2022) Cho hàm số $f(x) = (a+3)x^4 - 2ax^2 + 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\min_{[0;3]} f(x)$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm $f(x) = (a+3)x^4 - 2ax^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4(a+3)x^3 - 4ax$

Hàm số đạt GTLN tại $x = 2$ và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

$$\Rightarrow f'(2) = 0 \Leftrightarrow 32(a+3) - 8a = 0 \Leftrightarrow a = -4$$

Với $a = -4$ ta có $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 1$ với $x \in [0;3]$.

$$f'(x) = -4x^3 + 16x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (TM)} \\ x=2 \text{ (TM)} \\ x=-2 \text{ (L)} \end{cases}$$

Cho

Khi đó $f(0)=1$, $f(2)=17$, $f(3)=-8$.

Suy ra $\max_{[0;3]} f(x) = f(2) = 17$ (thỏa mãn giả thiết).

Vậy $\min_{[0;3]} f(x) = f(3) = -8$.

Câu 13. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - m^2}{x + 1}$, với m là tham số. Gọi m_1, m_2 ($m_1 < m_2$) là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2 \max_{[0;2]} f(x) - \min_{[0;2]} f(x) = 8$. Tổng $2m_1 + 3m_2$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{2 + m^2}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [0; 2]$

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f(0) = -m^2; \max_{[0;2]} f(x) = f(2) = \frac{4 - m^2}{3}$$

Do đó:

$$2 \max_{[0;2]} f(x) - \min_{[0;2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{4 - m^2}{3} \right) + m^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 2m_1 + 3m_2 = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 4 = 4$$

Câu 14. (THPT Nguyễn Viết Xuân – Vĩnh Phúc 2022) Có bao nhiêu giá trị của tham số a thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = ax^4 + 3x^2 + cx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại $x = 1$

Trả lời:

Lời giải

$y = f(x) = ax^4 + 3x^2 + cx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

$$f'(x) = 4ax^3 + 6x + c$$

$$\Rightarrow f'(1) = 4a + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -4a - 6$$

$$\Rightarrow 4ax^3 + 6x - 4a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a(x^3 - 1) + 6(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[4a(x^2+x+1)+6]=0$$

Đề $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại $x=1$

$$\Rightarrow 4ax^2+4ax+4a+6=0 \text{ vô nghiệm}$$

$$\Delta'=4a^2-4a(4a+6)<0$$

$$\Leftrightarrow a^2+2a>0$$

$$\Rightarrow a<-2 \text{ hoặc } a>0$$

$$f(4)>f(1) \Leftrightarrow 256a+48+4(-4a-6)>a+3+(-4a-6) \Rightarrow a>\frac{-1}{9}$$

$$f(0)>f(1) \Leftrightarrow 0>a+3+(-4a-6) \Rightarrow a>-1$$

Kết hợp với điều kiện $m=\{1;2;3\cdots 10\}$ có 10 giá trị $\Rightarrow$ chọn **B**

Câu 15. (Sở Vĩnh Phúc 2019) Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^2-2x+m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

Trả lời:

Lời giải

Ta có $y'=\frac{2x-2}{|x^2-2x+m|}$, $y'=0 \Rightarrow x=1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $\max\{y(-1), y(2), y(1)\}=5$.

$$\Leftrightarrow \max\{|3+m|, |m|, |m-1|\}=5$$

+ Trường hợp $m \geq -1$, ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\}=5 \Leftrightarrow |3+m|=5 \Rightarrow m=2$.

+ Trường hợp $m < -1$ ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\}=5 \Leftrightarrow |m-1|=5 \Rightarrow m=-4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Câu 16. (HSG Bắc Ninh 2019) Xét hàm số $f(x)=|x^2+ax+b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=|x^2+ax+b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1-a+b| \\ M \geq |9+3a+b| \\ M \geq |1+a+b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1-a+b| + |9+3a+b| + 2|-1-a-b| \\ &\geq |1-a+b+9+3a+b+2(-1-a-b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2. \end{aligned}$$

Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b, 9 + 3a + b, -1 - a - b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$. Ta có: $a + 2b = -4$.

Câu 17. Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Trả lời:

Lời giải

Xét $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ trên đoạn $[-3; -1]$ ta có: $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$.

$$A = \max_{[-3; -1]} u = u(-1) = 26 - m^2 \quad a = \min_{[-3; -1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$$

$$\text{Do đó} \quad M = \max_{[-3; -1]} y = \max\{|26 - m^2|, |6 - 3m^2|\} \quad \text{và} \quad 4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72$$

$$\text{Vậy } M \geq 18.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } |26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$$

Câu 18. (Sở Quảng Nam - 2018) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4?

Trả lời:

Lời giải

$$f(x) = x^2 + 2x + m - 4 \quad \text{có} \quad f'(x) = 2x + 2, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1. \quad \text{Do đó}$$

$$\max_{[-2; 1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m - 1|; |m - 4|; |m - 5|\}$$

Ta thấy $m - 5 < m - 4 < m - 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$, suy ra $\max_{[-2; 1]} y$ chỉ có thể là $|m - 5|$ hoặc $|m - 1|$.

$$\text{Nếu } \max_{[-2; 1]} y = |m - 5| \quad \text{thì} \quad \begin{cases} |m - 5| = 4 \\ |m - 5| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Nếu $\max_{[-2;1]} y = |m-1|$ thì $\begin{cases} |m-1|=4 \\ |m-1| \geq |m-5| \end{cases} \Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m \in \{1; 5\}$.

Câu 19. (Chuyên Hạ Long 2018) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng
Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$

Ta có $g'(x) = x^3 - 19x + 30$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	0	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	
$g(x)$			$g(0)$	$g(2)$		

$g(0) = m - 20$; $g(2) = m + 6$.

Để $\max_{[0;2]} |g(x)| \leq 20$ thì $\begin{cases} g(0) \leq 20 \\ g(2) \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-20| \leq 20 \\ |m+6| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 14$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; \dots; 14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |\sin^2 x - 2 \sin x + m|$ bằng 1. Số phần tử của S là

Trả lời:

Lời giải

Đặt $\sin x = t$ ($t \in [-1; 1]$) $\Rightarrow y = |t^2 - 2t + m|$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + m$ có $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-1; 1]$

$$\text{Có } f(-1) = m+3, f(1) = m-1. \text{ Khi đó } \begin{cases} \max_{[-1;1]} f(x) = \max\{m+3; m-1\} = m+3 \\ \min_{[-1;1]} f(x) = \min\{m+3; m-1\} = m-1 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } |m+3| \geq |m-1| \Leftrightarrow m \geq -1$$

$$\Rightarrow \max f(x) = |m+3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ (l)} \\ m = -4 \text{ (l)} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } |m+3| < |m-1| \Leftrightarrow m < -1$$

$$\Rightarrow \max f(x) = |m-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (l)} \\ m = 0 \text{ (l)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại m thỏa mãn

Câu 21. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M \geq 2m$?

Trả lời:

Lời giải

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{x^4 + ax + a}{x+1} = \frac{x^4}{x+1} + a$$

$$y' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$+\infty$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên suy ra } M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\} \text{ và } m = \min \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{16}{3} \right| = a + \frac{16}{3} \\ m = \left| a + \frac{1}{2} \right| = a + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 1.

$$M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2 \left(a + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow a \leq \frac{13}{3}$$

Khi đó

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

$$a + \frac{16}{3} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{16}{3} \Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{1}{2} \right| = -a - \frac{1}{2} \\ m = \left| a + \frac{16}{3} \right| = -a - \frac{16}{3} \end{cases}$$

Trường hợp 2.

$$M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2 \left(-a - \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{61}{6}$$

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2} < 0 \\ a + \frac{16}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} < a < -\frac{1}{2}$$

Trường hợp 3.

Nếu $\left| a + \frac{1}{2} \right| > \left| a + \frac{16}{3} \right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} > a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{35}{12}$ thì

$$\begin{cases} M = -a - \frac{1}{2} \\ m = a + \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2 \left(a + \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow a \leq -\frac{67}{18}$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{16}{3} < a \leq -\frac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Nếu $\left| a + \frac{1}{2} \right| \leq \left| a + \frac{16}{3} \right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \leq a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a \geq -\frac{35}{12}$ thì

$$\begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = -a - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2 \left(-a - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{19}{9}$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{19}{9} \leq a < -\frac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.
Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Câu 22. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 10$?

Trả lời:

Lời giải

Đặt $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a| = |f(x)|$

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$

Khi đó $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1 \right\}$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2] \text{ và } f(1) = a; f(2) = a + 4$$

$$\text{Ta có } \forall x \in [1; 2] \text{ thì } \begin{cases} \max y \in \{|a|, |a+4|\} \\ \min y \in \{|a|, 0, |a+4|\} \end{cases}.$$

Xét các trường hợp

$$+ a \geq 0 \Rightarrow \max y = a + 4; \min y = a \Rightarrow 2a + 4 = 10 \Rightarrow a = 3, \text{ nhận.}$$

$$+ a \leq -4 \Rightarrow \max y = -a; \min y = -a - 4 \Rightarrow -a - 4 - a = 10 \Rightarrow a = -7, \text{ nhận.}$$

$$+ \begin{cases} a < 0 \\ a + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < 0 \Rightarrow \min y = 0; \max y \in \{a + 4; -a\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 10 \\ -a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -10 \end{cases} \text{ (Loại).}$$

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 23. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ không lớn hơn 2020?

Trả lời:

Lời giải

$$\text{Với } u = x^3 - 3x^2 + m \text{ có } u' = 3x^2 - 6x; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \min_{[1;3]} u = \min \{u(1); u(3); u(2)\} = \min \{m - 2; m; m - 4\} = m - 4 \\ \max_{[1;3]} u = \max \{u(1); u(3); u(2)\} = \max \{m - 2; m; m - 4\} = m \end{cases}$$

$$* \text{ Nếu } m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m - 4 \leq 2020 \Leftrightarrow m \leq 2024 \Rightarrow m \in \{4, \dots, 2024\}.$$

$$* \text{ Nếu } m \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = -m \leq 2020 \Leftrightarrow -2020 \leq m \Rightarrow m \in \{-2020; \dots; 0\}.$$

$$* \text{ Nếu } 0 < m < 4 \text{ khi đó } \min_{[1;3]} u < 0; \max_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m \in \{-2020, \dots, 2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Câu 24. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Xét hàm số $f(x) = \left| \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$?

Trả lời:

Lời giải

Cách 1:

Xét hàm số $g(x) = \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(x) = |g(x)|$.

Ta có $g(0) = -1; g(1) = \frac{m - 2\sqrt{5}}{6}; g(-1) = \frac{-m - 2\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\begin{cases} g(-1) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2\sqrt{5} \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{cases}$ thì $\min_{[-1;1]} f(x) = 0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1) < 0 \\ g(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}$

Mà m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Ta có $g'(x) = \frac{4m + \frac{2x+12}{\sqrt{x+4}}}{(2x+4)^2}$.

TH1: $m \geq 0$.

Khi đó $g'(x) > 0 \forall x \in [-1; 1]$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1; 1]$.

Mà $g(0) = -1 \Rightarrow g(1) > -1$. Do đó $-1 < g(1) < 0$. Vậy $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$ hay $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m < 0$.

Xét hàm số $h(x) = \frac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1; 1]$. Ta có $h'(x) = \frac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}} > 0 \forall x \in [-1; 1]$.

Khi đó dễ thấy $h(x) \in \left[\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{14}{\sqrt{5}}\right]$.

* Khi $m = -1 \Rightarrow 4m + h(x) > 0 \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in [-1; 1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1; 1]$. Khi đó $-1 < g(1) < 0$ nên $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$. Vậy $m = -1$ thỏa mãn.

* Khi $m \in \{-3; -2\} \Rightarrow 4m + h(x) < 0 \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow g'(x) < 0 \forall x \in [-1; 1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Khi đó $g(-1) > g(0) \Rightarrow -1 < g(-1) < 0$ nên $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$. Vậy $m \in \{-3; -2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m .

Cách 2

Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 1] \\ f(0) = 1 \end{cases}$ nên suy ra $0 \leq \min_{x \in [-1; 1]} f(x) \leq 1$.

$$0 < \min_{x \in [-1; 1]} f(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{x \in [-1; 1]} f(x) > 0 \quad (1) \\ \min_{x \in [-1; 1]} f(x) \neq 1 \quad (2) \end{cases}$$

Vậy điều kiện

* Ta có (1) $\Leftrightarrow$ Phương trình $mx - 2\sqrt{x+4} = 0$ vô nghiệm trên $[-1; 1]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1; 1] \setminus \{0\}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}, \forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$

$$g'(x) = \frac{-x-8}{x^2\sqrt{x+4}} < 0, \forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

Bảng biến thiên

x		-1	0	1	
$g'(x)$		-	-		
$g(x)$		$-2\sqrt{3}$	$+\infty$	$2\sqrt{5}$	

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện phương trình $m = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1; 1] \setminus \{0\} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}$.

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

* Để giải (2) trước hết ta đi tìm điều kiện để $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = 1$.

Do $f(0) = 1$ nên $\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(0)$, mà $0 \in (-1; 1)$, suy ra $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Đặt $h(x) = \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \Rightarrow h'(0) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$. Do đó với m nguyên thì (2) chắc chắn xảy ra.

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn điều kiện (2)

Kết luận: Có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 25. (Chuyên Sơn La - 2020) Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m|$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 12. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng
Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 12x + m$ ($1 \leq x \leq 3$) $g'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$
 $g(1) = m - 11, g(2) = m - 16, g(3) = m - 9$

Suy ra $\max_{[1;3]} f(x) = \{|m - 16|; |m - 9|\}$

Giả sử $|m - 16| = 12 \Leftrightarrow m = 28, m = 4$ thử lại ta thấy $m = 4$ nhận.

Giả sử $|m - 9| = 12 \Leftrightarrow m = 21, m = -3$ thử lại ta thấy $m = 21$ nhận.

Vậy $m = 4$ và $m = 21$.

Câu 26. (Chuyên Thái Nguyên - 2020) Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho

giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m \right|$ trên đoạn $[2; 4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m$

$$f'(x) = x^3 - 28x + 48$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 (ktm) \\ x = 4 (tm) \\ x = 2 (tm) \end{cases}$$

$$f(2) = m + 44; f(4) = m + 32$$

$$\Rightarrow \min_{[2;4]} f(x) = m + 32; \max_{[2;4]} f(x) = m + 44$$

$$\Rightarrow \max_{[2;4]} y = \max \{|m + 44|; |m + 32|\}$$

Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m \right|$ trên đoạn $[2; 4]$ không vượt quá 30 thì

$$\begin{cases} |m + 44| \leq 30 \\ |m + 32| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -74 \leq m \leq -14 \\ -62 \leq m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -62 \leq m \leq -14$$

Câu 27. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho

giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \right|$ trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10$. Để thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

Ta có $g'(x) = x^2 - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \notin [0; 3] \end{cases}$

Ta có $g(0) = m + 10$; $g(3) = m - 8$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max_{[0;3]} y = \max_{[0;3]} |g(x)| \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \leq 12 \\ |g(3)| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 10| \leq 12 \\ |m - 8| \leq 12 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -7 .

Câu 28. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

Trả lời:

Lời giải

Xét $u = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$u' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 4 \notin [0; 2] \end{cases}$$

Khi đó $\max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(2)\} = \max \{m - 30, m + 14\} = m + 14$.

Suy ra $\max_{[0;2]} y = \max \{|m - 30|, |m + 14|\}$.

Trường hợp 1: $\max_{[0;2]} y = |m + 14|$

$$\begin{cases} |m + 14| \geq |m - 30| \\ |m + 14| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 14|^2 \geq |m - 30|^2 \\ -30 \leq m + 14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \geq 704 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 8 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 8 \leq m \leq 16$, mà $m \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m \in \{8; 9; 10; \dots; 16\}$.

Trường hợp 2: $\max_{[0;2]} y = |m - 30|$

$$\begin{cases} |m - 30| \geq |m + 14| \\ |m - 30| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 14|^2 \leq |m - 30|^2 \\ -30 \leq m - 30 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \leq 704 \\ 0 \leq m \leq 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ 0 \leq m \leq 60 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8$, mà $m \in \mathbb{Z}$.

$$\Leftrightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 8\}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $0 + 1 + 2 + \dots + 16 = 136$.

Câu 29. (Liên trường Nghệ An - 2020) Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$ trên $[0; 3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m .

Trả lời:

Lời giải

Có $\max_{[0;3]} f(x) = 60 \Leftrightarrow f(x) \leq 60, \forall x \in [0; 3]$ và $\exists x_0 \in [0; 3]$ sao cho $f(x_0) = 60$.

$$\text{Có } f(x) \leq 60 \Leftrightarrow |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x \leq 60 \Leftrightarrow |2x^3 - 15x + m - 5| \leq 60 - 9x$$

$$\Leftrightarrow 9x - 60 \leq 2x^3 - 15x + m - 5 \leq 60 - 9x \Leftrightarrow -2x^3 + 24x - 55 \leq m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0; 3].$$

$$\text{Có } -2x^3 + 6x + 65 \geq 29, \forall x \in [0; 3] \text{ nên } m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow m \leq 29.$$

$$\text{Tương tự } -2x^3 + 24x - 55 \leq -23 \text{ nên } -2x^3 + 24x - 55 \leq m, \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow m \geq -23.$$

$$\text{Vậy } -23 \leq m \leq 29 \text{ thì } f(x) \leq 60, \forall x \in [0; 3].$$

$$\text{Để } \exists x_0 \in [0; 3] \text{ sao cho } f(x_0) = 60 \text{ thì } \begin{cases} -2x^3 + 24x - 55 = m \\ -2x^3 + 6x + 65 = m \end{cases} \text{ có nghiệm trên } [0; 3].$$

$$\text{Hay } \begin{cases} m \geq 29 \\ m \leq -23 \end{cases} \text{ Vậy } \begin{cases} m = 29 \\ m = -23 \end{cases} \text{ thì } \max_{[0;3]} f(x) = 60.$$

Khi đó tổng các giá trị của m là $29 - 23 = 6$.

Câu 30. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10$. Số phần tử của S là?

Trả lời:

Lời giải

$$g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Đặt

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$m+4$	m	$m+\frac{1}{16}$	m	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của

$$f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|. \text{ Ta có các trường hợp sau:}$$

Trường hợp 1: $m \geq 0$. Bảng biến thiên của $f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$	m	$m+\frac{1}{16}$	m	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow m + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 3$ (TM)

Trường hợp 2: $m < 0 < m + \frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} < m < 0$. Bảng biến thiên:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$	0	$-m$	0	$m+\frac{1}{16}$
			0	$-m$	0
				0	0
					$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6$ (Loại)

Trường hợp 3: $m + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{16}$. Tương tự ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 6 \text{ (Loại)}$$

Trường hợp 4: $m + \frac{1}{16} < 0 < m + 4 \Leftrightarrow -4 < m < -\frac{1}{16}$. Bảng biến thiên:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$m+4$	$-m$	$-m-\frac{1}{16}$	$-m$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} \min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \\ \min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + m + 4 = 10 \\ 0 + (-m) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -10 \end{cases}$ (Loại)

Trường hợp 5: $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$. Ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 0 - m = 10 \Leftrightarrow m = -10 \quad (\text{Loại})$$

Trường hợp 6: $m+4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$. Ta có:

$$\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10 \Leftrightarrow -m - m - 4 = 10 \Leftrightarrow m = -7 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

$$\text{Vậy } m \in \{-7; 3\}.$$

Câu 31. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$f(x) = \left| \frac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2} \right| \text{ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn } [-1; 1] \text{ là } a \text{ thỏa mãn } 0 < a < 1.$$

Trả lời:

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2}, x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [1; \sqrt{3}]; x = t^2 - 2.$$

$$\text{Hàm số đã cho trở thành } g(t) = \left| \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t} \right|.$$

$$\text{Xét hàm } h(t) = \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t} \text{ trên đoạn } [1; \sqrt{3}].$$

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{2m(t^2 + 2)}{t^2}$$

$$\text{Th1: } m = 0 \text{ thì } h(t) = -4 \Rightarrow g(t) = 4 \forall t \in [1; \sqrt{3}] \Rightarrow a = 4 \quad (\text{loại}).$$

$$\text{Th2: } m \neq 0 \text{ thì hàm số } h(t) \text{ đồng biến hoặc nghịch biến trên } [1; \sqrt{3}]$$

$$\text{Ta có } h(1) = -2m - 4; h(\sqrt{3}) = \frac{2m - 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Nếu $h(1).h(\sqrt{3}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$ và hàm số $h(t)$ liên tục trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ suy ra đồ thị hàm số $h(t)$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ cắt trục hoành $\Rightarrow a = 0$ (loại).

Nếu $h(1).h(\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2\sqrt{3}$. Khi đó, $h(1) < 0; h(\sqrt{3}) < 0$

$\Rightarrow a = \left| \frac{2m - 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right|$. Suy ra $\begin{cases} m = 3 \\ m = 4 \end{cases}$ là các giá trị nguyên dương để $0 < a < 1$.

Câu 32. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$. Số phần tử của S là

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (l) \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(1) = m - 1; f(2) = m - 3; f(4) = 17 + m$$

$$\max_{[1;4]} f(x) = m + 17; \min_{[1;4]} f(x) = m - 3$$

+Nếu $m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì $\max_{[1;4]} |f(x)| = m + 17$, $\min_{[1;4]} |f(x)| = m - 3$. Khi đó:
 $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow 17 + m \leq 3(m - 3) \Leftrightarrow m \geq 13$

+Nếu $m + 17 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -17$ thì $\max_{[1;4]} |f(x)| = -m + 3$, $\min_{[1;4]} |f(x)| = -17 - m$

Khi đó: $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow -m + 3 \leq 3(-17 - m) \Leftrightarrow m \leq -27$

+Nếu $(m - 3)(m + 17) < 0 \Leftrightarrow -17 < m < 3$ thì

$$\max_{[1;4]} |f(x)| = \max\{|m + 17|, |m - 3|\} = \max\{m + 17, 3 - m\} > 0; \min_{[1;4]} |f(x)| = 0$$

Khi đó, không thỏa điều kiện $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$

Do đó: $\begin{cases} m \leq -27 \\ m \geq 13 \end{cases}$ kết hợp với $m \in [-2020; 2020]$ ta có $m \in [-2020; -27] \cup [13; 2020]$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 33. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2m}{x+2}$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S bằng
Trả lời:

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{2-2m}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$

Nếu $m=1 \Rightarrow f(x)=1, \forall x \neq -2$, khi đó $\max_{[1;3]} |f(x)| = \min_{[1;3]} |f(x)| = 1$

$$= \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right|$$

Nếu $m \neq 1$ ta có $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;3]$, $f(1) = \frac{1+2m}{3}, f(3) = \frac{3+2m}{5}$

+) Nếu $f(1).f(3) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{2}$ thì $\min_{[1;3]} |f(x)| = 0, \max_{[1;3]} |f(x)| = f(1)$ hoặc

$$\max_{[1;3]} |f(x)| = f(3) \quad \text{Do đó} \quad \max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1+2m}{3} \right| = 2 \\ \left| \frac{3+2m}{5} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2}, m = -\frac{7}{2} \\ m = \frac{7}{2}, m = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện xét thì không có giá trị m .

+) Nếu $f(1).f(3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$ thì $\min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = |f(1)| + |f(3)|$

$$= \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right| \quad \text{Do đó} \quad \max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{11}{4} \\ m = 1 \text{ (loại do } m \neq 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = 2 \end{cases}$$

Vậy S có hai phần tử $m=1, m=-\frac{11}{4}$

Câu 34. (Sở Tuyên Quang - 2021) Cho hàm số $f(x) = |2x^2 + (a+4)x + b + 3|$. Đặt $M = \max_{[-2;3]} f(x)$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $T = a + 4b$ là
Trả lời:

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = 2x^2 + (a+4)x + b + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x + a + 4$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 - \frac{a}{4}$$

$$g(-2) = -2a + b + 3; \quad g(3) = 3a + b + 33; \quad g\left(-1 - \frac{a}{4}\right) = b + 3 - \frac{(a+4)^2}{8}$$

$$\Rightarrow M = \max \left\{ |-2a + b + 3|; |3a + b + 33|; \left| b + 3 - \frac{(a+4)^2}{8} \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ |-2a + b + 3|; |3a + b + 33|; \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| \right\}$$

$$\begin{cases} M \geq |-2a + b + 3| \\ M \geq |3a + b + 33| \\ M \geq \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}M \geq \left| -a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} \right| \\ \frac{1}{2}M \geq \left| \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{33}{2} \right| \\ M \geq \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| \end{cases}$$

Ta có

$$\Rightarrow 2M \geq \left| -a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} \right| + \left| \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{33}{2} \right| + \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right|$$

$$\geq \left| -a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{33}{2} + \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| = \left| \frac{1}{8}a^2 + \frac{3}{2}a + 17 \right| \geq \frac{25}{2} \Rightarrow M \geq \frac{25}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |-2a + b + 3| = |3a + b + 33| = \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| = \frac{25}{4} \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -\frac{35}{4} \end{cases}$$

Câu 35. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021) Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Với M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

Trả lời:

Lời giải

$$\begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |-a+b+1| \\ M \geq |3a+b+9| \\ 2M \geq 2|a+b+1| = |-2a-2b-2| \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } 4M &\geq |-a+b+1| + |3a+b+9| + |-2a-2b-2| \geq |-a+b+1+3a+b+9-2a-2b-2| \\ &\Leftrightarrow 4M \geq 8 \Leftrightarrow M \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện cần để } M=2 \text{ là } &|-a+b+1|=|3a+b+9|=|-a-b-1|=2 \text{ và } -a+b+1, 3a+b+9, \\ &-a-b-1 \text{ cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+1=3a+b+9=-a-b-1=2 \\ -a+b+1=3a+b+9=-a-b-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ngược lại, với } \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases} \text{ thì } f(x)=|x^2-2x-1|$$

$$\text{Xét hàm số } g(x)=x^2-2x-1 \text{ trên đoạn } [-1;3]$$

$$\text{Ta có: } g'(x)=2x-2; g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \in [-1;3]$$

$$\begin{aligned} \text{Do } M \text{ là giá trị lớn nhất của hàm số } f(x) \text{ trên đoạn } [-1;3] \text{ nên} \\ M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra với } \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

$$\text{Vậy } a+2b=-4$$

Câu 36. (Trung Tâm Thanh Trường -2021) Cho hàm số $f(x)=|x^3-15x+2m|+12x-m$. Giá trị nhỏ nhất của $M=\max_{x \in [-2;3]} f(x)$ bằng

Trả lời:

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \max_{x \in [-2;3]} f(x)$$

$$\text{Ta có } f(x) \leq a, \forall x \in [-2;3] \text{ và điều kiện } a+m-12x \geq 0, \forall x \in [-2;3]$$

$$\Leftrightarrow |x^3-15x+2m|+12x-m \leq a, \forall x \in [-2;3]$$

$$\Leftrightarrow |x^3-15x+2m| \leq a+m-12x, \forall x \in [-2;3]$$

$$\Leftrightarrow -a-m+12x \leq |x^3-15x+2m| \leq a+m-12x, \forall x \in [-2;3]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -x^3+27x-3m \\ a \geq x^3-3x+m \\ a \geq -m+12x \end{cases}, \forall x \in [-2;3] \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm } g(x) = -x^3+27x-3m \text{ trên đoạn } [-2;3]$$

$$\text{Ta có } g'(x) = -3x^2+27$$

BBT của hàm $g(x)$

x	-2	3
$g'(x)$		+
$g(x)$		$54 - 3m$

Xét hàm $h(x) = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[-2; 3]$

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 3$

BBT của hàm $h(x)$

x	-2	-1	1	3	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$		$m+2$		$m+18$	

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 54 - 3m \\ a \geq m + 18 \\ a \geq 36 - m \end{cases}$$

Hệ

Trường hợp 1: $\min a = m + 18$ nếu $\begin{cases} m + 18 \leq 54 - 3m \\ m + 18 \leq 36 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \leq 36 \\ 2m \leq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 9$

Trường hợp 2: $\min a = 36 - m$ nếu $\begin{cases} 36 - m \leq 54 - 3m \\ 36 - m \leq m + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq 18 \\ 2m \geq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m = 9$

Trường hợp 3: $\min a = 54 - 3m$ nếu $\begin{cases} 54 - 3m \leq 36 - m \\ 54 - 3m \leq m + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 9 \\ m \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 9$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M = \max_{[-2;3]} f(x)$ bằng 27

Câu 37. (Sở Thái Nguyên 2022) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $|2x^3 - 3x^2 + m| \leq 16, \forall x \in [0; 3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Trả lời:

Lời giải

Xét $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$, với $x \in [0; 3]$.

Ta có: $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$f(0) = m$; $f(1) = m - 1$; $f(3) = 27 + m$

Do đó: $f(x) \in [m - 1; m + 27]$

Vậy: $|f(x)| \leq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \geq -16 \\ m + 27 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -15 \\ m \leq -11 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-15; -11]$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -15; -14; -13; -12; -11$

Ta có: $(-15) + (-14) + (-13) + (-12) + (-11) = -65$

Câu 38. (Sở Hải Dương 2022) Cho hàm số $y = \left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

Trả lời:

Lời giải

Theo đề ra ta có $\max \left\{ \left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right| \right\} \geq 4$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} = 1$ do đó luôn tồn tại $\max \left\{ \left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right| \right\}$ trên $\mathbb{R}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ta tìm m để $\max \left\{ \left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right| \right\} < 4, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $\left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right| < 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} > -4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} < 4, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - (2m + 4)x + 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ -3x^2 - (2m - 4)x - 7 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 41 < 0 \\ m^2 - 4m - 17 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 3\sqrt{5} < m < -2 + 3\sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{21} < m < 2 + \sqrt{21} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{21} < m < -2 + 3\sqrt{5}$

Khi đó

$\max \left\{ \left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right| \right\} \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 - \sqrt{21} \\ m \geq -2 + 3\sqrt{5} \end{cases}$

Giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ là $m \in \{-10; -9; \dots; -3; 5; 6; \dots; 10\}$

Câu 39. (Sở Hà Nam 2023) Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x + m - 1 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 15.

Trả lời:

Lời giải

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x + m - 1 \right| \leq 15, \forall x \in [0; 2]$

$$\Leftrightarrow -15 \leq \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x + m - 1 \leq 15, \forall x \in [0; 2]$$

$$\Leftrightarrow -14 - m \leq \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x \leq 16 - m, \forall x \in [0; 2].$$

Khảo sát hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x$ trên $[0; 2]$, ta được $\max_{[0; 2]} f(x) = 12; \min_{[0; 2]} f(x) = 0$

Do đó yêu cầu bài toán trở thành $\begin{cases} -14 - m \leq 0 \\ 12 \leq 16 - m \end{cases} \Leftrightarrow -14 \leq m \leq 4$

Câu 40. (Sở Bình Phước 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$ với mọi $x \in [1; 3]$?

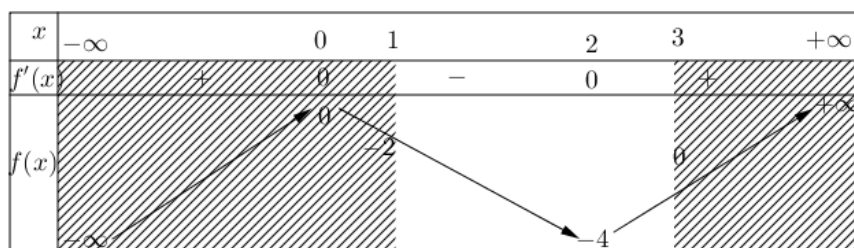
Trả lời:

Lời giải

$$|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x^3 - 3x^2 + m \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 \geq -4 - m \\ x^3 - 3x^2 \leq 4 - m \end{cases}, \forall x \in [1; 3]$$

Xét $f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} -4 \geq -4 - m \\ 0 \leq 4 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1; 2]} f(x) = 3$. Xét hàm số $g(x) = f(3x - 1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0; 1]} g(x) = -10$.

Trả lời:

Lời giải

Đặt $u = 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) + m$

$x \in [0; 1] \Rightarrow u \in [-1; 2]$

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[-1;2]} (f(u) + m) = \max_{[-1;2]} f(u) + m = 3 + m$

Để $\max_{[0;1]} g(x) = 10 \Leftrightarrow m = -13$

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$ là

Trả lời:

Lời giải

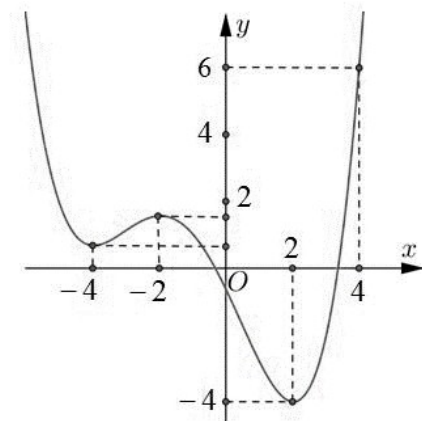
Đặt $t = x^3 + x$. $\forall x \in [0; 2] \Rightarrow t \in [0; 10]$

Ta có: $\max_{x \in [0;2]} g(x) = \max_{x \in [0;2]} [f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m] \leq \max_{x \in [0;2]} f(x^3 + x) + \max_{x \in [0;2]} [-x^2 + 2x + m]$
 $= \max_{t \in [0;10]} f(t) + 1 + m$ (với $t = x^3 + x$ và $\max_{x \in [0;2]} [-x^2 + 2x + m] = 1 + m$).
 $\leq \max_{x \in [0;10]} f(x) + 1 + m = 4 + 1 + m = 5 + m$

Suy ra: $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 5 + m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Theo giả thiết, ta có: $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8 \Leftrightarrow m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3$

Câu 43. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2 + 1}\right) + m - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2020?

Trả lời:

Lời giải

Đặt $t = \frac{8x}{x^2 + 1}$. Ta có: $t' = \frac{-8x^2 + 8}{(x^2 + 1)^2}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
t'	$-$	0	$+$	0	$-$
t	0	-4	4	0	

$$\Rightarrow t \in [-4; 4]$$

Hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$ trở thành $g(t) = |f(t) + m - 1|, t \in [-4; 4]$

$$h(t) = f(t) + m - 1, t \in [-4; 4], \text{ ta có: } h'(t) = f'(t)$$

Đặt

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \in [-4; 4] \\ t = -2 \in [-4; 4] \\ t = 2 \in [-4; 4] \end{cases}$$

Ta có: $h(-4) \approx 0,8 + m - 1 = m - 0,2$;

$$h(4) = 6 + m - 1 = m + 5$$

$$h(-2) \approx 1,6 + m - 1 = m + 0,6$$

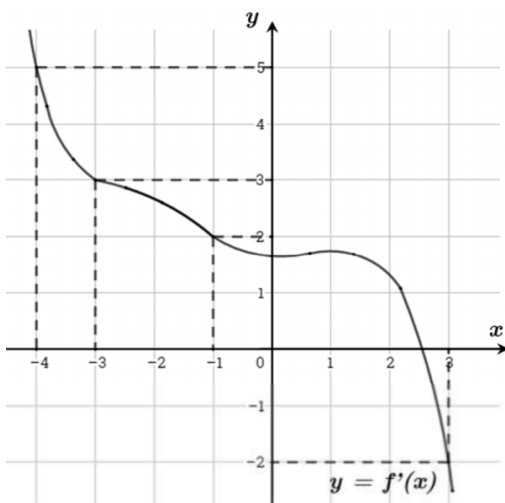
$$h(2) = -4 + m - 1 = m - 5$$

$$\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-4; 4]} |h(t)| = \max\{|m + 5|; |m - 5|\}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} |m + 5| \leq 2020 \\ |m - 5| \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2020 \leq m + 5 \leq 2020 \\ -2020 \leq m - 5 \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2025 \leq m \leq 2015 \\ -2015 \leq m \leq 2025 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow -2015 \leq m \leq 2015$

Vậy có tất cả 4031 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



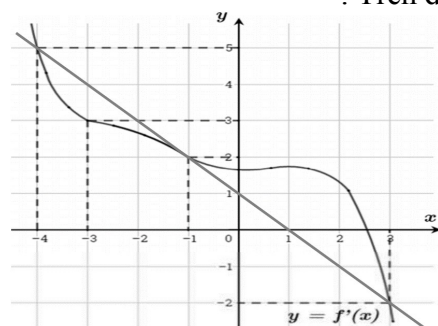
Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên $[-4; 3]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1 - x$.



$$f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta thấy

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4	-1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$g(-4)$	$g(-1)$	$g(3)$

Vậy $\min_{[-4; 3]} g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 45. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4; 4]$ như sau:

x	-4	-3	-1	0	2	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

$-4 \nearrow 4 \searrow 2 \nearrow 3 \searrow -3 \nearrow 1$

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [-4; 4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x|^3 + 3|x|) + f(m)$ trên $[-1; 1]$ bằng $\frac{11}{2}$?

Trả lời:

Lời giải

Ta có $g(-x) = g(x)$ nên $g(x)$ chẵn hay đồ thị của hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục tung.

$$\Rightarrow \max_{[-1;1]} g(x) = \max_{[0;1]} g(x) = \max_{[0;1]} [f(x^3 + 3x) + f(m)] = \max_{[0;1]} [f(x^3 + 3x)] + f(m).$$

Xét hàm số $y = f(x^3 + 3x)$ trên $[0; 1]$.

$$t = x^3 + 3x \Rightarrow t \in [0; 4] \Rightarrow \max_{[0;1]} y = \max_{[0;4]} f(t) = 3.$$

Đặt

$$\text{Khi đó } \max_{[-1;1]} g(x) = 3 + f(m) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow f(m) = \frac{5}{2}.$$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx - c \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ với a, b, c là các số thực dương, biết $f(1) = -3, f(5) = 2$. Xét hàm số $g(t) = |3f(3-2t) + 2f(3t-2) + m|$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max_{[-1;1]} g(t) = 10$. Số phần tử của S là

Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx - c \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = -ax^3 - bx - c \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = -ax^3 - bx - c \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right)$$

Ta có

$$= -ax^3 - bx + c \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \text{ suy ra } f(x) \text{ là hàm số lẻ} \Rightarrow f(-5) = -f(5)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b - \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}$$

Mặt khác ta lại có:

Xét hàm số $h(t) = 3f(3-2t) + 2f(3t-2) + m$, có $h'(t) = -6f'(3-2t) + 6f'(3t-2)$

$$\begin{aligned} h'(t) &= 6[f'(3t-2) - f'(3-2t)] = 6 \left[3a[(3t-2)^2 - (3-2t)^2] + c \left[\frac{1}{\sqrt{1+(3-2t)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(3t-2)^2}} \right] \right] \\ &= 6(\sqrt{1+(3t-2)^2} - \sqrt{1+(3-2t)^2}) \left[3a(\sqrt{1+(3t-2)^2} + \sqrt{1+(3-2t)^2}) + c \right] \end{aligned}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+(3t-2)^2} - \sqrt{1+(3-2t)^2} = 0 \Leftrightarrow (3t-2)^2 = (3-2t)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-2 = 3-2t \\ 3t-2 = 2t-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

Do $h(1) = 3f(1) + 2f(1) = 5f(1) = -15$; $h(-1) = 3f(5) + 2f(-5) = f(5) = 2$

$$A = \max_{[-1;1]} g(t) = m+2, \quad B = \min_{[-1;1]} g(t) = m-15$$

Do đó

$$\text{Ta có } \max_{[-1;1]} g(t) = \max\{|m-15|, |m+2|\}$$

Trường hợp 1:

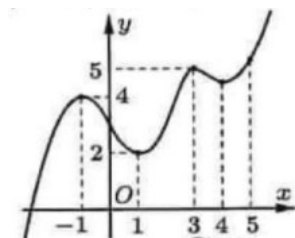
$$\begin{cases} |m-15| \geq |m+2| \\ \max_{[-1;1]} g(t) = |m-15| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-15| \geq |m+2| \\ |m-15| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m=5$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m+2| > |m-15| \\ \max_{[-1;1]} g(t) = |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| > |m-15| \\ |m+2| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m=8$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=5, m=8$.

Câu 47. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = 3f(\log_2 x - 1) + x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ trên đoạn $[1;4]$ bằng:



Trả lời:

Lời giải

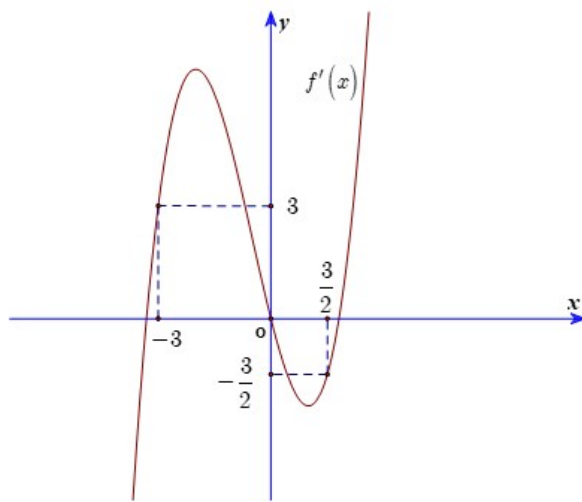
Chọn C

+ Xét hàm số $g(x) = f(\log_2 x - 1)$. Đặt $t = \log_2 x - 1, t \in [-1; 1]$. Ta có:
$$\begin{cases} \max_{[1;4]} g(x) = g(1) = 4 \\ \min_{[1;4]} g(x) = g(4) = 2 \end{cases} \quad (1)$$

+ Xét hàm số $k(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ có
$$\begin{cases} \max_{[1;4]} k(x) = k(1) = 8 \\ \min_{[1;4]} k(x) = k(4) = -19 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:
$$\begin{cases} \max_{[1;4]} h(x) = h(1) = 20 \\ \min_{[1;4]} h(x) = h(4) = -13 \end{cases} \Rightarrow \max_{[1;4]} h(x) - \min_{[1;4]} h(x) = 33$$

Câu 48. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0) = 0$, $f(-3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = |4f(x) + 2x^2|$ giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $\left[-2; \frac{3}{2}\right]$ là

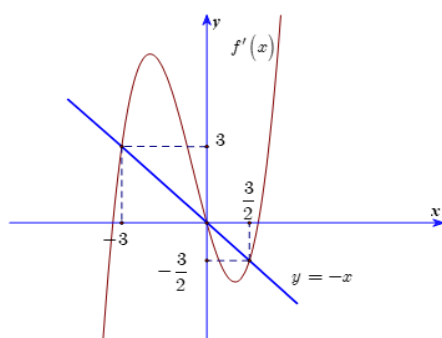
Trả lời:

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + 2x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm đa thức và $h(0) = 4f(0) + 2 \cdot 0 = 0$

Khi đó $h'(x) = 4f'(x) + 4x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$, ta có

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-3; 0; \frac{3}{2}\right\}$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$			
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$							$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			-1	0	$-\frac{29}{2}$			

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$ như sau

x	$-\infty$	-3	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$ h(x) $	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			0	1	0
				$\frac{29}{2}$	
					0

Vậy giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $\left[-2; \frac{3}{2}\right]$ là $\frac{29}{2}$.

- Câu 49. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{\left[-8; \frac{8}{3}\right]} f(x)=5$. Xét hàm số $g(x)=2f\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max_{[-2;4]} g(x)=-20$.
- Trả lời:**

Lời giải

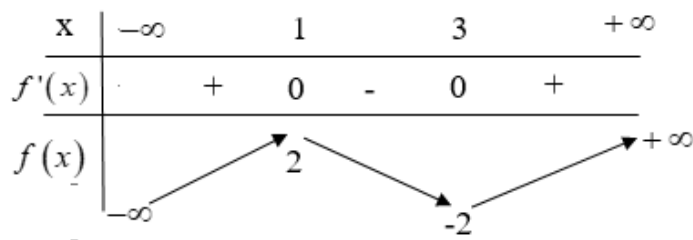
Xét hàm số $g(x)=2f\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)+m$ trên $[-2;4]$.

Đặt $t=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$, với $x \in [-2;4]$ thì $t \in \left[-8; \frac{8}{3}\right]$.

Khi đó: $\max_{[-2;4]} g(x)=-20 \Leftrightarrow 2 \max_{\left[-8; \frac{8}{3}\right]} f\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)+m=-20$

$\Leftrightarrow 2 \max_{\left[-8; \frac{8}{3}\right]} f(t)+m=-20 \Leftrightarrow 2.5+m=-20 \Leftrightarrow m=-30$.

- Câu 50. (Sở Nam Định - 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|\sin x - \sqrt{3} \cos x| + 1) - 2 \cos 2x + 4 \cos x - 10$

Trả lời:

Lời giải

Ta có: $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$; $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

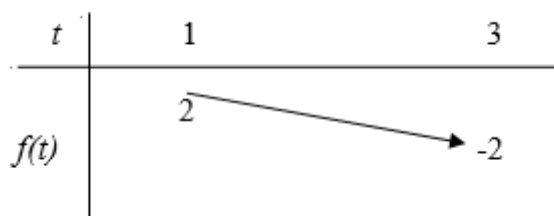
$$\Rightarrow y = f\left(2 \left|\sin(x - \frac{\pi}{3})\right| + 1\right) - 4 \cos^2 x + 4 \cos x - 8$$

$$y = f\left(2 \left|\sin(x - \frac{\pi}{3})\right| + 1\right) - 4(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4}) - 7$$

$$y = f\left(2 \left|\sin(x - \frac{\pi}{3})\right| + 1\right) - 4(\cos x - \frac{1}{2})^2 - 7 \leq f\left(2 \left|\sin(x - \frac{\pi}{3})\right| + 1\right) - 7$$

Đặt $t = 2 \left|\sin(x - \frac{\pi}{3})\right| + 1 \Rightarrow t \in [1; 3]$

Dựa vào BBT của hàm số $y = f(x)$, ta có:



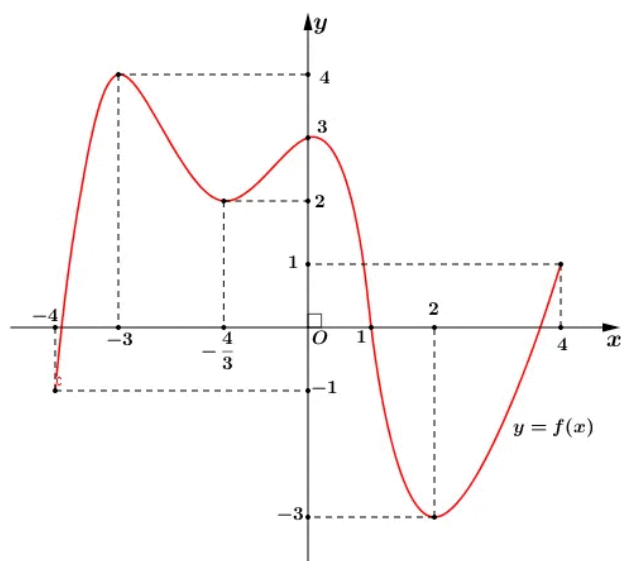
Suy ra $f\left(2 \left|\sin(x - \frac{\pi}{3})\right| + 1\right) \leq 2$

Vậy, $y = f(|\sin x - \sqrt{3} \cos x| + 1) - 2 \cos 2x + 4 \cos x - 10 \leq 2 - 7 = -5$

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$$

Câu 51. (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[-4; 4]$, có các điểm cực trị trên $(-4; 4)$ là $-3; -\frac{4}{3}; 0; 2$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x^3 + 3x) + m$ với m là

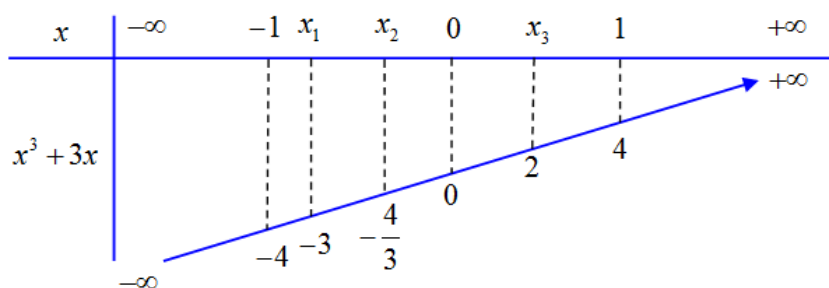
tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max_{[0;1]} g(x) = 2022$, m_2 là giá trị của m để $\min_{[-1;0]} g(x) = 2004$.
 Giá trị của $m_1 - m_2$ bằng



Trả lời:

Lời giải

♦ Trước tiên, xét hàm $y = x^3 + 3x$, có BBT như sau:



$$g'(x) = (3x^2 + 3)f'(x^3 + 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x = -3 \\ x^3 + 3x = -\frac{4}{3} \\ x^3 + 3x = 0 \\ x^3 + 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in [-1; 0] \\ x = x_2 \in [-1; 0] \\ x = 0 \\ x = x_3 \in [0; 1] \end{cases}$$

♦ Có

♦ Trên $[0; 1]$, có $g(0) = f(0) + m = 3 + m$; $g(x_3) = f(2) + m = -3 + m$; $g(1) = f(4) + m = 1 + m$
 $\max_{[0;1]} g(x) = 3 + m = 2022$, suy ra $m_1 = m = 2022 - 3 = 2019$.

Dễ thấy

♦ Trên $[-1; 0]$, có $g(0) = f(0) + m = 3 + m$; $g(-1) = f(-4) + m = -1 + m$;

$$g(x_1) = f(-3) + m = 4 + m; \quad g(x_2) = f\left(-\frac{4}{3}\right) + m = 2 + m.$$

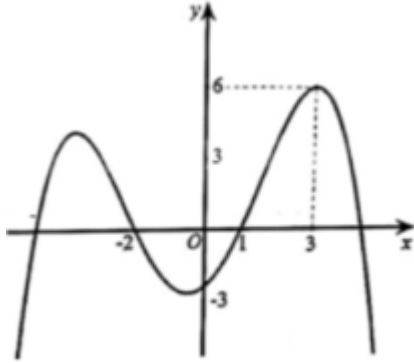
$$\min_{[-1;0]} g(x) = -1 + m = 2004, \text{ suy ra } m_2 = m = 2004 + 1 = 2005.$$

Dễ thấy

Vậy $m_1 - m_2 = 2019 - 2005 = 14$.

♦

Câu 52. (Sở Thanh Hóa 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Xét $T = 103f(a^2 + a + 1) + 234f(af(b) + bf(a)), (a, b \in \mathbb{R})$. Biết T có giá trị lớn nhất bằng M đạt tại m cặp $(a; b)$, khi đó $\frac{M}{m}$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Quan sát đồ thị đã cho ta có $\max_{\mathbb{R}} f(x) = f(3) = 6$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max f(a^2 + a + 1) = 6 \\ \max f(af(b) + bf(a)) = 6 \end{cases} \Rightarrow T_{\max} = (103 + 234) \times 6 = 2022.$$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} a = 1 \\ a^2 + a + 1 = 3 \\ af(b) + bf(a) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(b) = 3 - bf(1) = 3 \Rightarrow 4n_0 \\ a = -2 \end{cases} \\ f(b) = \frac{3 - bf(-2)}{-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 4n_0 \end{cases}, (f(1) = f(-2) = 0)$
tức có 8 cặp $(a; b)$.

$$\text{Vậy } \frac{M}{m} = \frac{2022}{8} = \frac{1011}{4}.$$

Câu 53. (THPT Yên Phong 1 - Bắc Ninh - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa điều kiện $f(0) > 0$ và $[f(x) + 6x] f(x) = 9x^4 + 3x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(2x^2 - 3x + 1)$ trên đoạn $[0; 1]$.

Trả lời:

Lời giải

♦ Có $[f(x) + 6x] f(x) = 9x^4 + 3x^2 + 4 \Leftrightarrow [f(x) + 3x]^2 = (3x^2 + 2)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 3x = 3x^2 + 2 \\ f(x) + 3x = -3x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3x^2 - 3x + 2 \\ f(x) = -3x^2 - 3x - 2 \end{cases} (I)$$

♦ Đặt $t = 2x^2 - 3x + 1$, với $x \in [0; 1]$ thì $t \in \left[-\frac{1}{8}; 1\right]$.

$$g(t) = f(t) \text{ trên } \left[-\frac{1}{8}; 1\right], \text{ có } g'(t) = f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{8}; 1\right].$$

Xét hàm

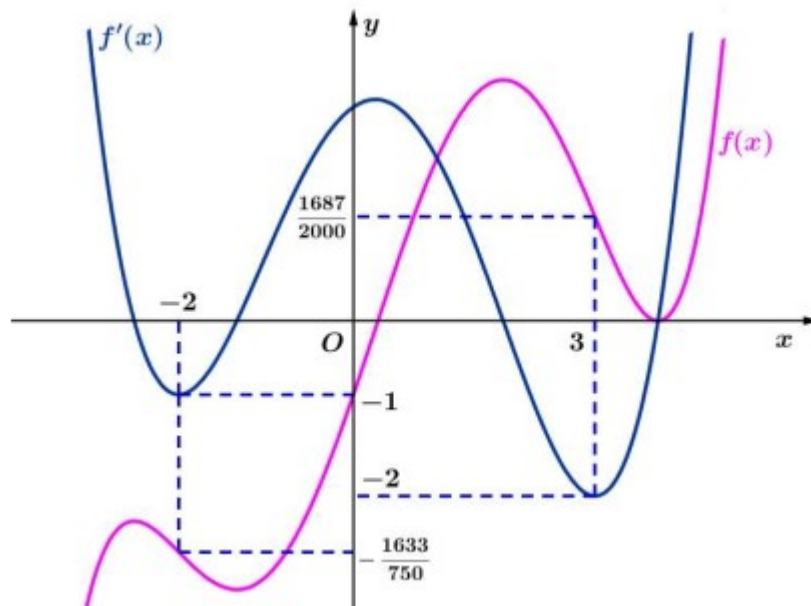
Có $g\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{155}{64}; g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}; g(1) = 2$

$$\max_{[0;1]} y = \max_{\left[-\frac{1}{8}; 1\right]} g(t) = \frac{155}{64}$$

Suy ra,

Câu 54. (Chuyên Biên Hòa – Hà Nam 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị $f(x), f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số dưới đây trên đoạn $[-2; 3]$ không vượt quá 4044:

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + (3 + m^2)\frac{x^3}{3} - (m + 1)x^2 + 4x + 2022$$



Trả lời:

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x^4 - 2x^3 + (3 + m^2)x^2 - 2(m + 1)x + 4$
 $= [f'(x) + 2] + (x^2 - x)^2 + (mx - 1)^2 + x^2 + (x - 1)^2$. Nhận thấy khi tịnh tiến thêm 2 đơn vị theo chiều dương Oy của đồ thị $f'(x)$ thì đồ thị $f'(x) + 2$ luôn dương trên đoạn $[-2; 3]$

Mà $(x^2 - x)^2 + (mx - 1)^2 + x^2 + (x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in [-2; 3]$ nên suy ra $g'(x) > 0, \forall x \in [-2; 3]$ tức hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[-2; 3]$

Khi đó ta có được

$$\max_{[-2;3]} g(x) = g(3) = f(3) + \frac{20601}{10} + 9m^2 - 9m = \frac{1687}{200} + \frac{20601}{10} + 9m^2 - 9m \leq 4044$$

Suy ra: $-14.32 \leq m \leq 15.32 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in [-14; 15]$ tức có 30 giá trị nguyên m thỏa.

Câu 55. (Sở Hà Nam 2022) Cho các hàm số $f(x) = x + 3^x$ và $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 3$ với m là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(2x + f(x))$ trên đoạn $[0; 1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng

Trả lời:

Lời giải

Đặt $h(x) = 2x + f(x) = 3x + 3^x$

$$h'(x) = 3 + 3^x \cdot \ln 3 > 0$$

Bảng biến thiên:

x	0	1
$h'(x)$		+
$h(x)$	1	6

Với $x \in [0; 1]$ suy ra $h(x) \in [1; 6]$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 3$ trên $[1; 6]$.

$$g'(x) = 3x^2 - 2mx + (m^2 + 1) = x^2 - 2mx + m^2 + 2x^2 + 1 = (x - m)^2 + 2x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $M = g(6) = 6m^2 - 36m + 219 = 6(m^2 - 6m + 9) + 147 = 6(m - 3)^2 + 147 \geq 147$

M đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = 3$.

Câu 56. (Cụm trường Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	-4	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	0	-2	5	-6	1	-5	3

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4; 4]$ để hàm số $g(x) = |f(x^3 + 2x) + 3f(m)|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 8?

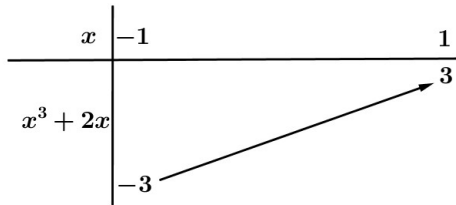
Trả lời:

Lời giải

Đặt $t = x^3 + 2x \Rightarrow t' = 3x^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Hàm số $t = x^3 + 2x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó



$$x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-3; 3]$$

$$f(x^3 + 2x) = f(t) \text{ với } t \in [-3; 3]$$

$$\text{Ta có } \max_{x \in [-1; 1]} g(x) = |f(t) + 3f(m)| = 8$$

$$\begin{cases} \max_{[-1; 1]} g(x) = 5 + 3f(m) = 8 \\ \min_{[-1; 1]} g(x) = -6 + 3f(m) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = 1 \\ f(m) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên với $m \in [-4; 4]$ ta có:

Với $f(m) = 1$ phương trình có 4 nghiệm.

Với $f(m) = -\frac{2}{3}$ phương trình có 6 nghiệm.

Vậy có tất cả 10 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 57. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 8. Tính tổng các phần tử của S .

Trả lời:

Lời giải

$$\text{Xét } u(x) = f^2(x) - 2f(x) + m = (f(x) - 1)^2 + m - 1 = (x^2 - 2x)^2 + m - 1$$

$$\text{Ta có } \min_{[-1; 3]} u(x) = u(0) = u(2) = m - 1; \max_{[-1; 3]} u(x) = u(-1) = u(3) = m + 8$$

$$\Rightarrow \max_{[-1; 3]} g(x) = \max\{|m - 1|, |m + 8|\} = 8 \Leftrightarrow m = 0; m = -7$$

Chọn đáp án #A.

Câu 58. (THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc 2023) Gọi d là đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + 9x - 1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để d có hệ số góc bằng 4?

Trả lời:

Lời giải

$y' = x^2 + 2mx + 9$. Để hàm số có 2 điểm cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases}$$

PT đường thẳng d đi qua 2 cực trị của (C) nên $(x_0, y_0) \in d$ thỏa mãn

$$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y_0 = \frac{x_0^3}{3} + mx_0^2 + 9x_0 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2mx_0 + 9 = 0 \\ y_0 = \frac{x_0^3}{3} + mx_0^2 + 9x_0 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2mx_0 = -9 \\ y_0 = \frac{1}{3}x_0(x_0^2 + 2mx_0) + 9x_0 - 1 + \frac{1}{3} \cdot mx_0^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -2mx_0 - 9 \\ y_0 = 6x_0 - 1 + \frac{1}{3} \cdot mx_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -2mx_0 - 9 \\ y_0 = 6x_0 - 1 + \frac{1}{3} \cdot m(-2mx_0 - 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -2mx_0 - 9 \\ y_0 = \left(6 - \frac{2}{3}m^2\right)x_0 - 1 - 3m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ số góc của d là $6 - \frac{2}{3}m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$ (không thỏa mãn).

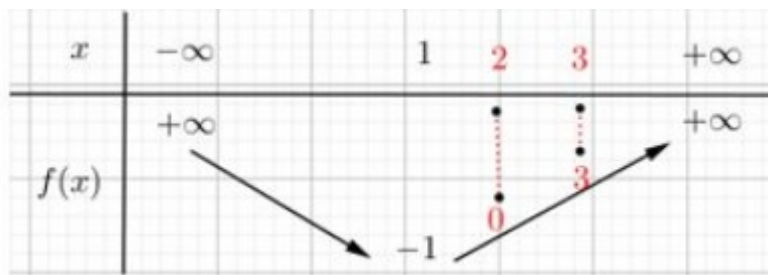
Chọn đáp án **B.**

Câu 59. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2023) Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $|f(2 + \sin x) + m|$ bằng 2023?

Trả lời:

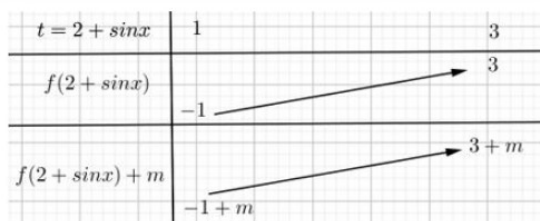
Lời giải

+ Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$



+ Xét hàm số $g(x) = f(2 + \sin x) + m$. Đặt $t = 2 + \sin x$, khi đó $1 \leq t \leq 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có, bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.



+ Từ bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $|g(x)|$ có thể là $|-1 + m|$ hoặc $|3 + m|$

$|-1 + m| = 2023 \Rightarrow \begin{cases} -1 + m = 2023 \\ -1 + m = -2023 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2024 \\ m = -2022 \end{cases}$

* Trường hợp 1:

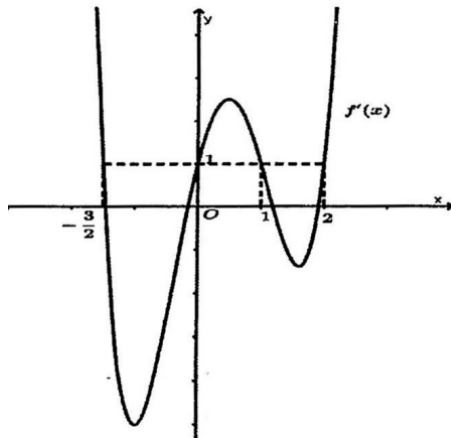
Thử lại $m = -2022$ thỏa mãn.

$|3 + m| = 2023 \Rightarrow \begin{cases} 3 + m = 2023 \\ 3 + m = -2023 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2020 \\ m = -2026 \end{cases}$

* Trường hợp 2:

Thử lại $m = 2021$ thỏa mãn. Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = -2022$ và $m = 2021$.

Câu 60. (Sở Cà Mau 2023) Cho $f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Biết $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{653}{320}$, $f(0) = -2$ và $f(1) = -\frac{1}{60}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) - x + a$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $[-2023; 2023]$ để $9m^2 - 320M > 0$?

Trả lời:

Lời giải

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$. Cho

BBT của hàm số $g(x) = f(x) - x + a$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

x	$-\frac{3}{2}$		0		1
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$\frac{1133}{320} + a$		$-2 + a$		$-\frac{61}{60} + a$

$$9m^2 - 320M = 9(-2 + a)^2 - 320\left(\frac{1133}{320} + a\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -2,9 \\ a > 42,4 \end{cases}$$

Từ BBT:

Kết hợp với điều kiện số nguyên $a \in [-2023; 2023]$, ta được $a \in [-2023; -2,9) \cup (42,4; 2023] \rightarrow$ có 4002 số nguyên a .

Câu 61. (HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$, $x + y + z = 2$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a + b$ bằng

Trả lời:

Lời giải

Ta có:
$$P = xyz \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot z = \left(\frac{2-z}{2}\right)^2 \cdot z = \frac{1}{4}(4z - 4z^2 + z^3)$$

Xét hàm số $f(z) = \frac{1}{4}(4z - 4z^2 + z^3)$ trên $[1; 2]$.

$$f'(z) = \frac{1}{4}(4 - 8z + 3z^2); f'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{3} \text{ (loại)} \\ z = 2 \end{cases}$$

Ta có:

Bảng biến thiên:

z	1	2
$f'(z)$		-
$f(z)$	$\frac{1}{4}$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P \leq \frac{1}{4}$.

Vậy $P_{\max} = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} z = 1 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 4 \Rightarrow 2a + b = 6$.

Câu 62. (Chuyên Bắc Giang Nam 2019) Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng:

Trả lời:

Lời giải

Xét
$$\frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

+nếu $y = 0$ thì $x^2 = 2$. Do đó $P = x^2 = 2$ suy ra $\min P = 2$

+nếu $y \neq 0$ ta chia tử mẫu cho y^2 ta được

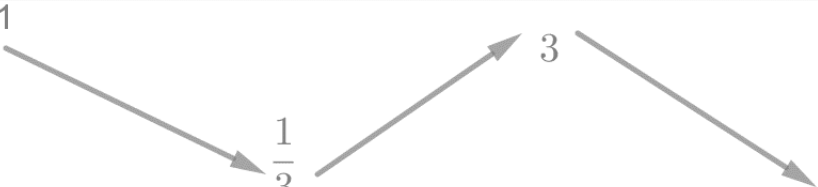
$$\frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1 + \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó
$$\frac{P}{2} = \frac{1 + t + t^2}{1 - t + t^2}$$

Xét
$$f(t) = \frac{1 + t + t^2}{1 - t + t^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2 + 2}{(1 - t + t^2)^2}$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$					

Khi đó $\min \frac{P}{2} = \frac{1}{3}$ do đó $\min P = \frac{2}{3}$.

Câu 63. (THPT Lê Xoay - 2018) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+1=2(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M=3^{x+y-4}+(x+y+1).2^{7-x-y}-3(x^2+y^2)$ bằng
Trả lời:

Lời giải

Điều kiện $x \geq 2; y \geq -3$.

$$x+y+1=2(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y+1)^2=4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}) \quad (*)$$

Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1$ nên từ (*) suy ra $(x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1) \Leftrightarrow x+y \leq 7$.

$$\begin{aligned} \text{Vì } 2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \geq 0 \text{ nên từ (*) suy ra } (x+y+1)^2 &\geq 4(x+y+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Do $x \geq 2$ nên $x^2 \geq 2x$, $y^2+1 \geq 2y$, suy ra $x^2+y^2+1 \geq 2(x+y)$. Từ đó ta có $M=3^{x+y-4}+(x+y+1).2^{7-x-y}-3(x^2+y^2) \leq 3^{x+y-4}+(x+y+1).2^{7-x-y}-6(x+y)+3$.

Đặt $t=x+y$ với $t=-1$ hoặc $3 \leq t \leq 7$.

Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-6t+3$, ta có $f(-1)=\frac{2188}{243}$.

$$f'(t)=3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1).2^{7-t} \ln 2 - 6$$

$$f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 + [(t+1) \ln 2 - 2] 2^{7-t} \cdot \ln 2 > 0, \quad \forall t \in [3; 7].$$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3; 7)$, mà $f'(t)$ liên tục trên $[3; 7]$ và $f'(3) \cdot f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3; 7)$.

t	3	t_0	7
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4

Suy ra $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2+y^2) \leq \frac{148}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1$.

Câu 64. (Sở Phú Thọ - 2018) Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x^3+y^3+z^3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ bằng:

Trả lời:

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ xy=5-z(x+y)=5-4z+z^2 \end{cases}$$

Lại có: $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (4-z)^2 \geq 4(5-4z+z^2) \Rightarrow \frac{2}{3} \leq z \leq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Và $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3 + 3(x+y+z)(x+y)z + 3xy(x+y)$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 = 4^3 - 12(x+y)z - 3xy(x+y) = 64 - 3(4-z)(5+z^2)$$

Ta có:
$$P = (x^3+y^3+z^3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = (3z^3 - 12z^2 + 15z + 4) \left(\frac{5}{z^3 - 4z^2 + 5z} \right)$$

Đặt $t = z^3 - 4z^2 + 5z$, với $\frac{2}{3} \leq z \leq 2 \Rightarrow \frac{50}{27} \leq t \leq 2$.

Do đó xét hàm số $f(t) = 5 \left(\frac{4}{t} + 3 \right)$, với $\frac{50}{27} \leq t \leq 2$.

Ta có $f'(t) = \frac{-20}{t^2} < 0, \quad \forall t \in \left[\frac{50}{27}; 2 \right]$ nên hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến.

Do đó $P_{\min} = f(2) = 25$ đạt tại $x=y=1, z=2$.

Câu 65. (Chuyên Long An - 2018) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

Trả lời:

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq -3 \end{cases}$.

Ta có $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}\sqrt{y+3} \geq 4(x+y)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{cases} \quad (1)$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được:

$$x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \leq 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x + y \in [4; 8]$

Ta lại có $(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9$

Đặt $t = x + y$ suy ra $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy \geq 4t^2 - 21t - 63$

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$, với $t \in [4; 8]$

Ta có $f'(t) = 8t - 21 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{21}{8} \notin [4; 8]$. Do đó $\min_{[4; 8]} f(t) = f(4) = -83$

Do đó $P \geq -83$ suy ra $\min P = -83$ khi $\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$

Câu 66. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$.

Trả lời:

Lời giải

Theo giả thiết ta có $x^2 - xy + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{x}$

Từ bất phương trình $2x + 3y - 14 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2 - 4x + 9}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{5}$

Mặt khác ta có $\begin{cases} x^2 = xy - 3 \\ xy = x^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = x^2y - 3x \\ xy^2 = x^2y + 3y \end{cases}$

Thay vào ta được $P = -3y + 8x = -3\left(\frac{x^2 + 3}{x}\right) + 8x = 5x - \frac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 5x - \frac{9}{x}$ trên đoạn $\left[1; \frac{9}{5}\right]$.

Ta có $f'(x) = 5 + \frac{9}{x^2} \geq 0, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$ do đó $\min_{\left[1; \frac{9}{5}\right]} = f(1) = -4$ và $\max_{\left[1; \frac{9}{5}\right]} = f\left(\frac{9}{5}\right) = 4$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0.

Câu 67. (Sở Nam Định - 2018) Biết rằng bất phương trình $m(|x| + \sqrt{1 - x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2 - x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1 - x^2} + 2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; a\sqrt{2} + b]$ với $a, b \in \mathbf{Z}$. Tính giá trị của $T = a + b$.

Trả lời:

Lời giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$m(|x| + \sqrt{1 - x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2 - x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1 - x^2} + 2$$

$$\Leftrightarrow m(\sqrt{x^2} + \sqrt{1 - x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2 - x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1 - x^2} + 2$$

Đặt $t = \sqrt{x^2} + \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq t \leq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{x^2 - x^4} = t^2 - 1 \end{cases}$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$$m(t + 1) \leq t^2 + t + 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \quad (\text{vì } t \in [1; 2] \text{ nên } t + 1 > 0).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$ trên $[1; \sqrt{2}]$.

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{t + 1} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{2}] \text{ suy ra hàm số đồng biến trên } [1; \sqrt{2}].$$

$$\min_{[1; \sqrt{2}]} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}; \quad \max_{[1; \sqrt{2}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2}$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình

$$m \leq \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \text{ có nghiệm } t \in [1; \sqrt{2}] \Leftrightarrow m \leq \max_{[1; \sqrt{2}]} f(t) \Leftrightarrow m \leq -1 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1 \Rightarrow a + b = 1.$$

Câu 68. (THPT Nguyễn Huệ 2018) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$.

Trả lời:

Lời giải

Ta có $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2) \geq (x + y)2\sqrt{2xy}$.

Đặt $a = x^2 + y^2; b = xy$ ta được: $(2a + b)^2 \geq 8b(a + 2b) \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab - 15b^2 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{5}{2}$. Suy ra: $\frac{x^2 + y^2}{xy} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{5}{2}$.

Ta có:

$P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 = f(t)$ với $t \geq \frac{5}{2}$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ với $t \geq \frac{5}{2}$ ta được $f(t) \geq -\frac{23}{4}$. Vậy chọn C

Câu 69. (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá

trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}$.

Trả lời:

Lời giải

Từ giả thiết ta có $y = \frac{5}{4} - 2x$. Vì $y > 0$ nên $\frac{5}{4} - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{8}$. Do đó $0 < x < \frac{5}{8}$.

Ta có $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4\left(\frac{5}{4} - 2x\right)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{5 - 8x} = \frac{10 - 15x}{-8x^2 + 5x}$ với $0 < x < \frac{5}{8}$.

$P' = \frac{-15(-8x^2 + 5x) - (-16x + 5)(10 - 15x)}{(-8x^2 + 5x)^2} = \frac{120x^2 - 75x - (-160x + 240x^2 + 50 - 75x)}{(-8x^2 + 5x)^2}$

$P' = \frac{-120x^2 + 160x - 50}{(-8x^2 + 5x)^2}$. Có $P' = 0 \Rightarrow -120x^2 + 160x - 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \notin \left(0; \frac{5}{8}\right) \\ x = \frac{1}{2} \in \left(0; \frac{5}{8}\right) \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
y'		- 0 +	
y	$+\infty$	$\searrow 5 \nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min} = 5$.

Câu 70. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022) Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $\frac{x^2+1}{\sqrt{y}} = \frac{y+1}{x}$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = \frac{y+4}{x}$ là

Trả lời:

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x^2+1}{\sqrt{y}} = \frac{y+1}{x} \Leftrightarrow x^3 + x = (\sqrt{y})^3 + \sqrt{y}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, $t > 0$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x^2 = y$.

Khi đó: $P = \frac{y+4}{x} = \frac{x^2+4}{x} = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = 2; y = 4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Câu 71. (Chuyên Thái Bình 2022) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$

Trả lời:

Lời giải

Điều kiện: $x \leq 1$.

Ta có $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$

$\Leftrightarrow 2(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + y - 1 = 2\sqrt{1-x}(1-x) + \sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2(y-1)^3 + y - 1 = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(y-1) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y-1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 2y - y^2$ (điều kiện $y \geq 1$).

Khi đó $P = x + 2y = -y^2 + 4y = 4 - (y-2)^2 \leq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi $y = 2, x = 0$.

Vậy $\max P = 4$ khi $(x, y) = (0; 2)$.