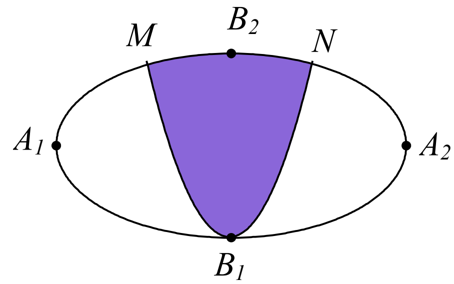
ĐỀ VDC SỐ 16 Ứng dụng của mín-max

Câu 1: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4m, B_1B_2 = 2m, MN = 2m$.



A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Câu 2: Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{4}{3}$.

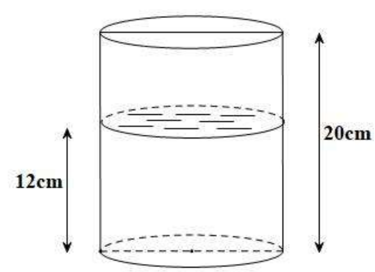
Câu 3: Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$.

A. $160cm^2$. **B.** $100cm^2$. **C.** $80cm^2$. **D.** $200cm^2$.

Câu 4: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

A. $2(m)$. **B.** $\frac{5}{2}(m)$. **C.** $1(m)$. **D.** $\frac{3}{2}(m)$.

Câu 5: Một cốc hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $20cm$. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



A. 30. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

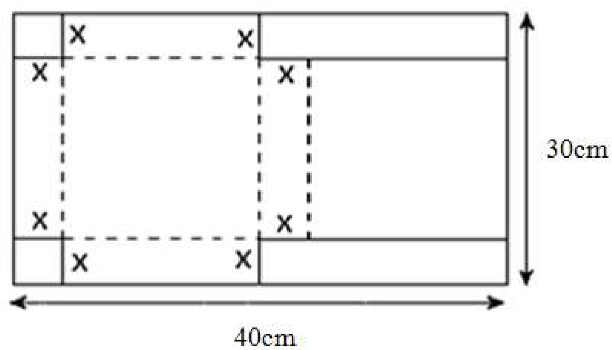
Câu 6: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$. **B.** $\frac{112}{4+\pi}$. **C.** $\frac{84}{4+\pi}$. **D.** $\frac{92}{4+\pi}$.

Câu 7: Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3\,cm$, lề trái và lề phải là $2\,cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

A. $82\,cm$. **B.** $100\,cm$. **C.** $90\,cm$. **D.** $84\,cm$.

Câu 8: Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm;\ 40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gấp lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. **B.** $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. **C.** $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. **D.** $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

Câu 9: Ông A dự định sử dụng hết $6{,}5\,\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $2{,}26\,\text{m}^3$. **B.** $1{,}01\,\text{m}^3$. **C.** $1{,}33\,\text{m}^3$. **D.** $1{,}50\,\text{m}^3$.

Câu 10: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243. **B.** 144. **C.** 27. **D.** 36.

Câu 11: Một bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200\,\text{cm}^2$, tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

A. $1200\,\text{cm}^2$. **B.** $120\,\text{cm}^2$. **C.** $160\,\text{cm}^2$. **D.** $1600\,\text{cm}^2$.

Câu 12: Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224 đồng. **B.** 67593346 đồng. **C.** 63389223 đồng. **D.** 67398228 đồng.

Câu 13: Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K.

A. $\dfrac{5\sqrt{65}}{4}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $9\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 14: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\,\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\,\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15\,\text{m}$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30\,\text{m}$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{10+2\sqrt{725}}{30}$. **C.** $\dfrac{20+\sqrt{725}}{30}$. **D.** 5.

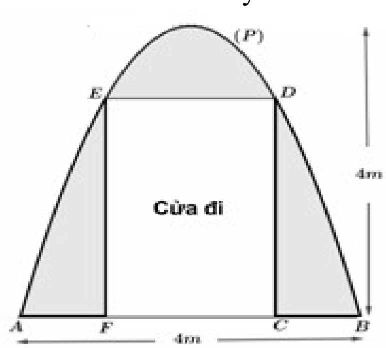
Câu 15: Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao $60\,\text{cm}$, thể tích là $96.000\,\text{cm}^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2. Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

A. 283.000 đồng. **B.** 382.000 đồng. **C.** 83.200 đồng. **D.** 832.000 đồng.

Câu 16: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \dfrac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 17: Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m, $AB = 4$ m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là $1.000.000$ đồng/ m^2. Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



A. 4.450.000 đồng. **B.** 4.605.000 đồng. **C.** 4.505.000 đồng. **D.** 4.509.000 đồng.

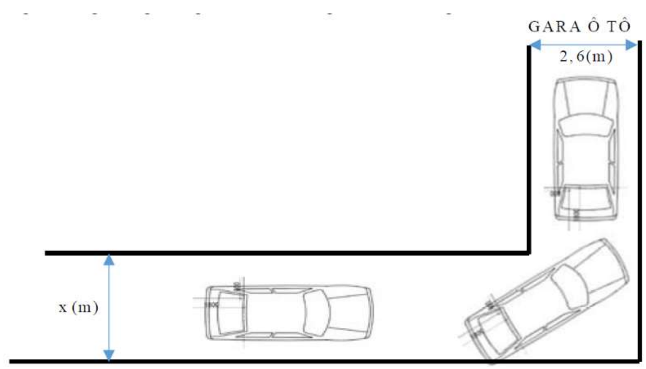
Câu 18: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h=\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 19: Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

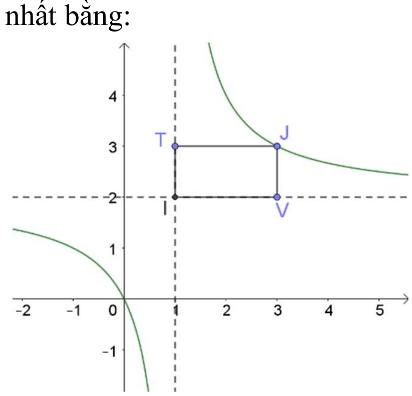
A. 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.

Câu 20: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(\text{m})$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2{,}6\,(\text{m})$. Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m}\times 1{,}9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(\text{m})$, chiều rộng $1{,}9\,(\text{m})$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



A. $x=3{,}7\,(\text{m})$. **B.** $x=2{,}6\,(\text{m})$. **C.** $x=3{,}55\,(\text{m})$. **D.** $x=4{,}27\,(\text{m})$.

Câu 21: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên. Hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng:



A. $2\sqrt{2}$. **B.** 6. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3$, $f'(2)=-2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(\infty;-2017)$. **C.** $(-2017;0)$. **D.** $S=(2017;+\infty)$.

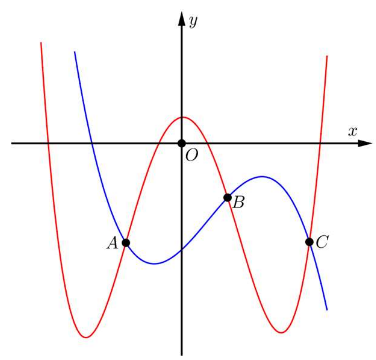
Câu 23: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x^2+4}$ với $a \neq 0$ và a,b là các số thực. Biết rằng $\max\limits_{x\in R} y = 5$ và $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -2$. Giá trị của biểu thức $P = a^2b$ bằng

A. 7680. **B.** 1920. **C.** 3840. **D.** -1920.

Câu 24: L;,Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{34}{\sqrt{(x^3-3x+2m)^2+1}}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

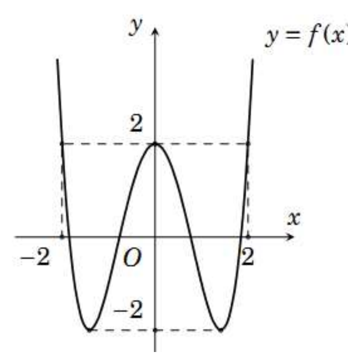
A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** -1.

Câu 25: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm, đồ thị hàm số $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A,B,C của $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a;c]$?



A. $\min\limits_{[a;c]} h(x) = h(0)$. **B.** $\min\limits_{[a;c]} h(x) = h(a)$. **C.** $\min\limits_{[a;c]} h(x) = h(b)$. **D.** $\min\limits_{[a;c]} h(x) = h(c)$.

Câu 26: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \left| |2f(x)+m+4| - f(x) - 3 \right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?



A. 18. **B.** 19.
C. 20. **D.** 21.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+2m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)| + \min\limits_{[0;1]}|f(x)| = 3$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 28: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^2+3m\right|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1,m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng 2021. Tính giá trị $\left|m_1-m_2\right|$

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4052}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4051}{3}$.

Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho $\min\limits_{\left[-1;1\right]}\left|f\left(x\right)\right|>\dfrac{3}{4}$. Số phần tử của S là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

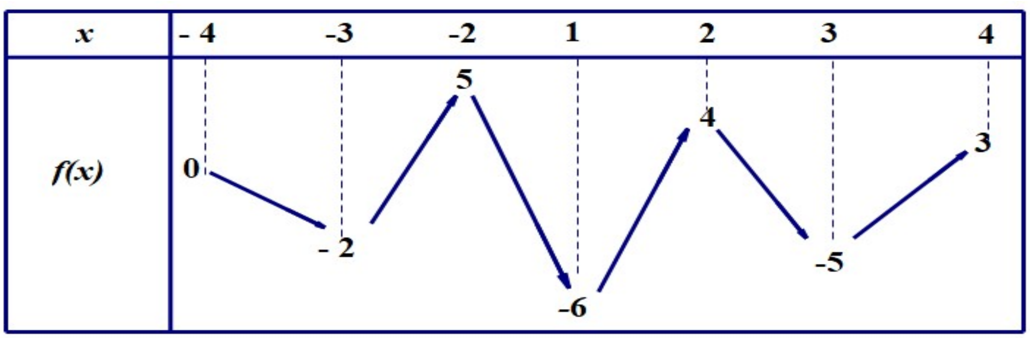
Câu 30: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\log x+m}{\log x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]}\left|f\left(x\right)\right|+\max\limits_{\left[\frac{1}{10};1\right]}\left|f\left(x\right)\right|=2$. Tổng số phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=\left|3e^{4x}-4e^{3x}-24e^{2x}+48e^x+m\right|$. Gọi A,B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[0;\ln 2\right]$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m thuộc $\left[-23;-10\right]$ thỏa mãn $A\le 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. -33. **B.** 0. **C.** -111. **D.** -74.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-4;4\right]$ và có bản biến thiên như hình vẽ bên dưới



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in\left[-4;4\right]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x^3+2x)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng 8?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 33: Cho a,b,c. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\dfrac{3a^4+12b^4+25c^3+2}{\left(a+\sqrt{2}b+c\right)^3}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $A\left(\dfrac{5}{6};2\right)$. **B.** $\left[\dfrac{13}{18};2\right]$. **C.** $\left[\dfrac{2}{3};2\right]$. **D.** $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Câu 34: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{mx-\sqrt{x+2019}}{x+2020}$ trên tập $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le|x|\le 2018\right\}$ không vượt quá $\dfrac{1}{2}$. Số các phần tử của S là:

A. 2110. **B.** 2108. **C.** 1054. **D.** 1009.

Câu 35: Cho hàm số $f(t)=\dfrac{2t+1}{t-2}$ và x,y là các số thực thỏa mãn $5x^2+2xy+y^2=9$. Giá trị lớn nhất của $f\left(\dfrac{6x-6}{4x-y-9}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** -3. **D.** $\dfrac{-1}{3}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\left(x^2+x+m\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[-2;2]}y=4$ bằng

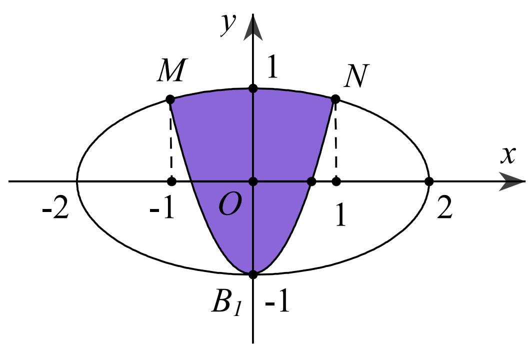
A. $-\dfrac{23}{4}$. **B.** $-\dfrac{31}{4}$. **C.** -8. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.D	5.C	6.B	7.B	8.C	9.D	10.D
11.C	12.A	13.B	14.A	15.C	16.C	17.D	18.C	19.C	20.A
21.C	22.B	23.B	24.B	25.C	26.B	27.A	28.D	29.C	30.C
31.A	32.B	33.C	34.A	35.A	36.A				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



Phương trình đường Elip là: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Diện tích hình Elip là $S_{(E)}=\pi a.b=2\pi\left(m^2\right)$

Tọa độ giao điểm M,N là nghiệm hệ: $\begin{cases} x=\pm 1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Vậy $M\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \mathrm{N}\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy có dạng $y=ax^2+c\left(a\neq 0\right)$.

Vì $B_1(0;-1), N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(P)\Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}+1 \end{cases} \Rightarrow (P): y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_1=2\int_0^1\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx$

• Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$. Đặt $\frac{x}{2}=\sin t\Rightarrow\frac{dx}{2}=\cos tdx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\rightarrow t=0 \\ x=1\rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{cases}$.

Suy ra $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t}.2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2t) dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

• Tính $I_2 = \int_0^1 \left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2 + 1\right] dx = \left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{x^3}{3} + x\right]\Bigg|_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3}$.

Vậy $S_1 = 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{3}\ \text{m}^2$.

Tổng số tiền sử dụng là: $S_1.200000 + \left(S_{(E)} - S_1\right).500000 \approx 2.341.000$ đồng

Câu 2: Chọn D

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t$. $v'(t) = 6t - 8$. Có $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$.

t	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
v'		$-$	0	$+$	
v	0	$\searrow$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;+\infty)} v = v\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}$.

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t = \frac{4}{3}$.

Câu 3: Chọn B

Đặt $OA = x\ \ (0 < x < 10)$. Suy ra: $AB = 2x;\ AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

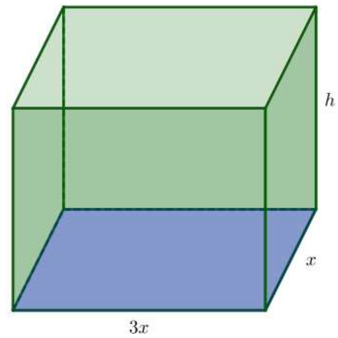
Khi đó: $S_{ABCD} = S = AB.AD = 2x.\sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{100x^2 - x^4}$

Suy ra: $S' = \frac{200x - 4x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}} \Rightarrow S' = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5\sqrt{2} \\ x = -5\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$S(x)$		$+$	0	$-$	
$S'(x)$		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ bằng $100\,\text{cm}^2$ khi $x = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Câu 4: Chọn D



Gọi $x\ (x>0)$ là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$V=h.x.3x=h.3x^2=18\ \ (x>0)$.

$\Rightarrow h=\dfrac{18}{3x^2}=\dfrac{6}{x^2}$,

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật.
Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$P=2hx+2.h.3x+3x^2=2.\dfrac{6}{x^2}.x+2.\dfrac{6}{x^2}.3x+3x^2=\dfrac{48}{x}+3x^2$.

Đặt $f(x)=\dfrac{48}{x}+3x^2$, $(x>0)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-48}{x^2}+6x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{-48}{x^2}+6x=0\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	36	$\nearrow$	

Suy ra vật liệu ít nhất khi $h=\dfrac{6}{x^2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}(m)$.

Câu 5: Chọn C

Gọi bán kính hình trụ là r, bán kính viên đá hình cầu là R.

Thể tích một viên đá là $\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi.(0,6)^3$.

Gọi n là số viên đá con quạ thả vào cốc, n nguyên dương.

Thể tích nước cần đổ thêm vào cốc để mực nước cách miệng cốc $6cm$ là $\pi.r^2.2=8\pi$.

Để con quạ uống được nước thì lượng đá bỏ vào cốc phải làm mực nước dâng lên cách miệng cốc không quá $6cm$ nên ta phải có: $n.\dfrac{4}{3}.\pi.(0,6)^3\geq 8\pi\Leftrightarrow n\geq\dfrac{24}{4.(0,6)^3}\Leftrightarrow n\geq\dfrac{250}{9}$.

Do n nguyên dương nên suy ra $n\geq 28$.

Vậy con quạ cần thả vào cốc ít nhất 28 viên đá.

Câu 6: Chọn B

Gọi l_1, l_2 (m) lần lượt là chu vi hình vuông và hình tròn. $(0 < l_1, l_2 < 28)$

Gọi a, R (m) lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn. Khi đó ta có:

$l_1 + l_2 = 28$; $l_1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{l_1}{4}$; $l_2 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{28 - l_1}{2\pi}$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$S = a^2 + \pi.R^2 = \frac{l_1^2}{16} + \pi.\left(\frac{28 - l_1}{2\pi}\right)^2$, $0 < l_1 < 28$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm $l_1 \in (0,28)$ để S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$S' = \frac{l_1}{8} - \left(\frac{28 - l_1}{2\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị nhỏ nhất tại $l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$.

Câu 7: **Chọn B**

Ta thấy muốn chi phí sản xuất nhỏ nhất thì kích thước tối ưu là khi diện tích mỗi trang sách phải nhỏ nhất đồng thời vẫn bảo đảm yêu cầu đề ra.

Gọi x, y thứ tự là chiều dài và chiều rộng của trang sách, đơn vị cm, điều kiện: $x > 6; y > 4$.

Diện tích phần chữ trên mỗi trang là:

$(x - 6)(y - 4) = 384 \Leftrightarrow xy = 4x + 6y + 360 \geq 2\sqrt{4x.6y} + 360$.

Khi đó $xy - 4\sqrt{6xy} - 360 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 10\sqrt{6} \Rightarrow xy \geq 600$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} xy = 600 \\ 4x = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$.

Vậy chu vi trang sách khi sản xuất theo kích thước tối ưu là $2(x + y) = 100\ (cm)$.

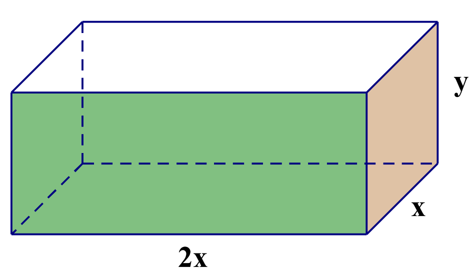
Câu 8: **Chọn C**

Khối hộp chữ nhật thu được có kích thước là $30 - 2x$; $20 - x$; x với $x \in [0;15]$.

Khi đó $V = x(30 - 2x)(20 - x) = f(x) \leq \max_{[0;15]} f(x) = f\left(\frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}\right)$.

Dấu "=" đạt tại $x = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$.

Câu 9: **Chọn D**



Gọi chiều rông của bể cá là $x\left(\mathrm{m}\right)$, chiều cao là $y\left(\mathrm{m}\right)\left(x,y>0\right)$, khi đó chiều dài bể cá là $2x\left(\mathrm{m}\right)$. Diên tích kính sử dụng là $S=2x^2+2xy+4xy\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Theo bài ra ta có: $2x^2+2xy+4xy=6,5\Rightarrow y=\dfrac{6.5-2x^2}{6x}=\dfrac{13-4x^2}{12x}$.

Thể tích bể cá là $V\left(x\right)=2x^2.\dfrac{13-4x^2}{12x}=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Ta xét hàm số $V\left(x\right)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Suy ra $V'\left(x\right)=\dfrac{13-12x^2}{6}\Rightarrow V'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$ hàm số $V\left(x\right)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là $\max\limits_{\left(0;\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}V\left(x\right)=V\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=\dfrac{13\sqrt{39}}{54}\approx 1,50\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50\ \ \mathrm{m}^3$.

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

Theo cách 1, ta tính được $V\left(x\right)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}$ với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ta có $V\left(x\right)=\dfrac{x\left(13-4x^2\right)}{6}=\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)}{8}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$8x^2(13-4x^2)(13-4x^2)\le\left(\frac{8x^2+13-4x^2+13-4x^2}{3}\right)^3=\frac{26^3}{27}.$$

Suy ra $V(x) \le \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{26^3}{8.27}} = \dfrac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1{,}50$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = 13 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{13}{12}} = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1{,}50\ m^3$.

Câu 10: Chọn D

Ta có $v(t) = s'(t) = \left(-\dfrac{1}{3}t^3 + 6t^2\right)' = -t^2 + 12t$. Tập xác định $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

Vì $-t^2 + 12t = -(t-6)^2 + 36 \le 36$ với mọi $t > 0$.

Suy ra $\max\limits_{t>0} v(t) = 36$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Vậy trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36.

Câu 11: Chọn C

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga; h là chiều cao của hố ga $(x, y, h > 0)$

Ta có: $h = 2x$

$$V = xyh = 2x^2y = 3200 \Rightarrow y = \frac{1600}{x^2}$$

Diện tích bề mặt sử dụng của hố ga không nắp là $S = xy + 2xh + 2yh = 4x^2 + 5xy = 4x^2 + \dfrac{8000}{x}$

Đặt $f(x) = 4x^2 + \dfrac{8000}{x}$. Ta có $f'(x) = 8x - \dfrac{8000}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$

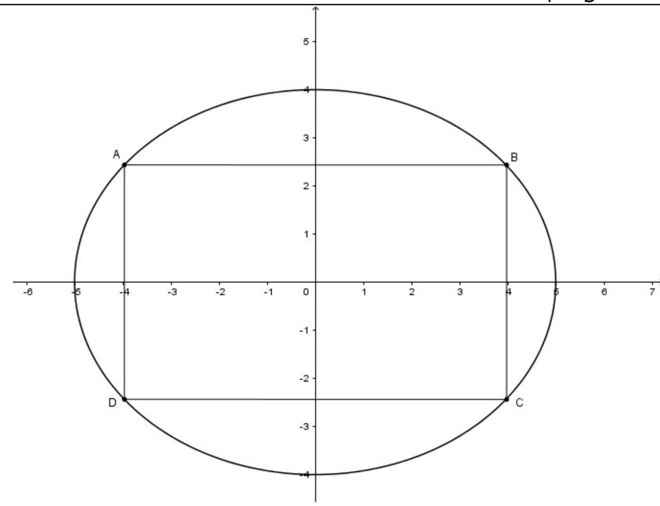
Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1200	$\nearrow$	

Vậy S nhỏ nhất khi $x = 10 \Rightarrow y = 16$.

Diện tích đáy hố ga khi đó là $160\,\mathrm{cm}^2$.

Câu 12: Chọn A



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a=5$ và $b=4$.

Phương trình của elip là: $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Diện tích của elip là: $S_{(E)}=\pi ab=20\pi$.

Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp elip. Đặt $AB=2x\ (0<x<5)\Rightarrow AD=8\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD}=16x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Diện tích phần còn lại trồng hoa là: $S_{hoa}=20\pi-16x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$T=16000000.x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}+1200000.\left(20\pi-16x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}.$$

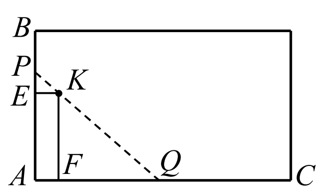
Mặt khác ta có: $16000000.\dfrac{x}{5}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\le 16000000.\dfrac{\dfrac{x^2}{25}+1-\dfrac{x^2}{25}}{2}=8000000$.

$\Rightarrow T=24000000\pi-3200000x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\ge 24000000\pi-8000000=67398223.69$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{5}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}\Leftrightarrow x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224.

Câu 13: Chọn B



Đặt $AP=a$, $AQ=b\ (a,b>0)$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE=1$, $KF=8$.

Ta có: $\dfrac{KE}{AQ}=\dfrac{PK}{PQ};\dfrac{KF}{AP}=\dfrac{QK}{PQ}\Rightarrow\dfrac{KF}{AP}+\dfrac{KE}{AQ}=1$ hay $\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}=1$.

Cách 1:

Ta có: $PQ^2=a^2+b^2$. Vì $\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}=1\Rightarrow\dfrac{8k}{a}+\dfrac{k}{b}=k\ \forall k>0$.

$$a^2+b^2+k=\left(a^2+\frac{8k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{b}\right)=\left(a^2+\frac{4k}{a}+\frac{4k}{a}\right)+\left(b^2+\frac{k}{2b}+\frac{k}{2b}\right)\geq 3\sqrt[3]{16k^2}+3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2+b^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{4k}{a}\\ b^2=\dfrac{k}{2b}\\ \dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=250\\ a=10\\ b=5\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2:

Vì $\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}=1\Rightarrow b=\dfrac{a}{a-8}$ với $a>8$. Khi đó $PQ^2=a^2+b^2=a^2+\left(\dfrac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Xét hàm số $f\left(a\right)=a^2+\left(\dfrac{a}{a-8}\right)^2$ với $a>8$.

Ta có $f'\left(a\right)=2a+\dfrac{2a}{a-8}.\dfrac{-8}{\left(a-8\right)^2}=\dfrac{2a\left[\left(a-8\right)^3-8\right]}{\left(a-8\right)^3}$; $f'\left(a\right)=0\Rightarrow a=10$.

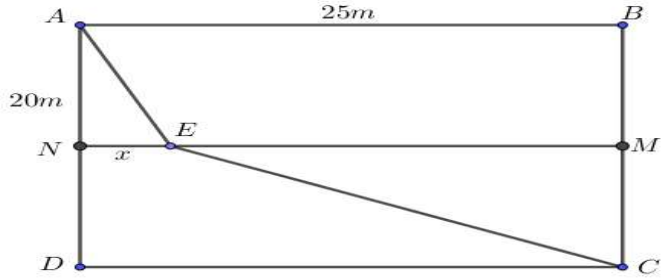
Bảng biến thiên của $f\left(a\right)$:

a	8		10		$+\infty$
$f'\left(a\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(a\right)$	$+\infty$	$\searrow$	125	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f\left(a\right)$ là 125 khi $a=10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K là $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

Câu 14: Chọn A



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.
Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE = x\left(\text{m}\right)$.

$\Rightarrow EM = 25 - x\left(\text{m}\right)$.

Ta được $\begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + \left(25 - x\right)^2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$t\left(x\right) = \dfrac{AE}{15} + \dfrac{EC}{30} = \dfrac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \dfrac{\sqrt{\left(25 - x\right)^2 + 100}}{30}\left(\text{h}\right)$

$\Rightarrow t'\left(x\right) = \dfrac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \dfrac{25 - x}{30.\sqrt{\left(25 - x\right)^2 + 100}}$.

Xét $t'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \dfrac{25 - x}{30.\sqrt{\left(25 - x\right)^2 + 100}} = 0$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{\left(25 - x\right)^2 + 100} = \left(25 - x\right)\sqrt{100 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2\left(\left(25 - x\right)^2 + 100\right) = \left(25 - x\right)^2\left(100 + x^2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2\left(25 - x\right)^2 + 400x^2 - 100\left(25 - x\right)^2 - \left(25 - x\right)^2 x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(25 - x\right)^2\left(x^2 - 25\right) + x^2\left(20^2 - \left(25 - x\right)^2\right) = 0$.

$\Leftrightarrow \left(x - 5\right)\left(4\left(25 - x\right)^2\left(x + 5\right) + x^2\left(45 - x\right)\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Ta được $\begin{cases} t\left(0\right) = \dfrac{4 + \sqrt{29}}{6} \\ t\left(5\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} \\ t\left(25\right) = \dfrac{1 + \sqrt{29}}{3} \end{cases}$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\left(\text{h}\right)$.

Cách 2:

Xét $t\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{10^2 + x^2}}{15} + \dfrac{\sqrt{\left(25 - x\right)^2 + 10^2}}{30} = \dfrac{\sqrt{20^2 + \left(2x\right)^2} + \sqrt{\left(25 - x\right)^2 + 10^2}}{30}$.

Lại có $\sqrt{20^2 + \left(2x\right)^2} + \sqrt{\left(25 - x\right)^2 + 10^2} \ge \sqrt{\left(45 - x\right)^2 + \left(2x + 10\right)^2}$ $\left(\text{do } \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \ge \left|\vec{u} + \vec{v}\right|\right)$.

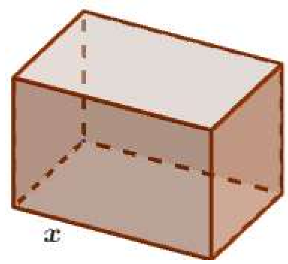
$\Leftrightarrow \sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2} \ge \sqrt{5(x-5)^2+2000}$.

Do đó $t(x) \ge \dfrac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30} \ge \dfrac{\sqrt{2000}}{30} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $t(x)_{\min} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$ khi và chỉ khi $x=5(\text{m})$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

Câu 15: Chọn C



Gọi $x(\text{m})$ là chiều dài của hình chữ nhật đáy $(x>0)$.

Khi đó chiều rộng là: $\dfrac{0{,}096}{0{,}6x} = \dfrac{4}{25x}$.

Khi đó diện tích mặt xung quanh là: $1{,}2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Chi phí để làm mặt xung quanh là: $70.1{,}2\left(x+\dfrac{4}{25x}\right) = 84\left(x+\dfrac{4}{25x}\right)$.

Diện tích mặt đáy là: $x.\dfrac{4}{25x} = \dfrac{4}{25}$.

Cho phí để làm mặt đáy là: $100.\dfrac{4}{25} = 16$.

Chi phí để làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi chi phí làm mặt bên thấp nhất

Xét hàm số $f(x) = x+\dfrac{4}{25x}, x>0; f'(x) = 1-\dfrac{4}{25x^2} = \dfrac{25x^2-4}{25x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 25x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{5}$		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó chi phí thấp nhất là: $84.\dfrac{4}{5}+16 = 83.200$ đồng.

Câu 16: Chọn C

Gọi chiều rộng của hộp là x $(x>0) \Rightarrow$ Chiều dài của hình hộp là $2x$.

Thể tích của hộp là $V = x.2x.h = 48 \Leftrightarrow h = \dfrac{24}{x^2}$.

Tổng diện tích mặt đáy và 4 mặt bên của hộp là $2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x.\dfrac{24}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{144}{x}$.

Diện tích nắp hộp là $2x^2$.

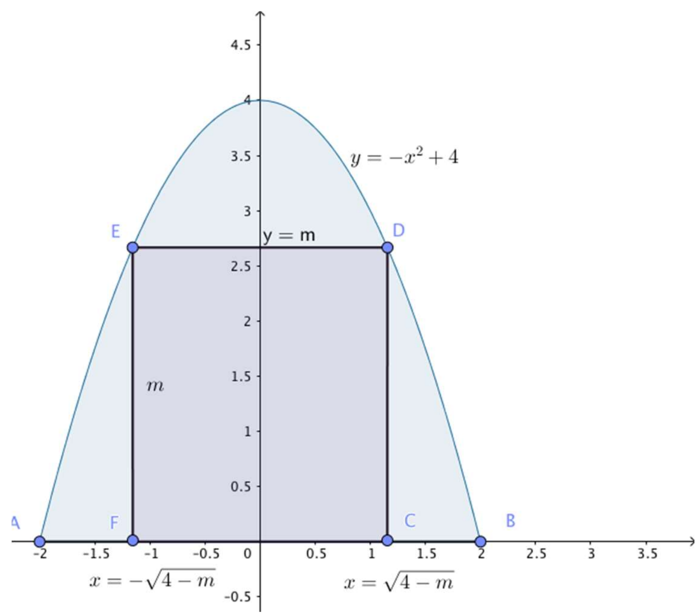
Giá thành hộp thấp nhất $\Leftrightarrow f\left(x\right) = 3\left(2x^2 + \dfrac{144}{x}\right) + 2x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x > 0$.

Ta có $f\left(x\right) = 8x^2 + \dfrac{432}{x} = 8x^2 + \dfrac{216}{x} + \dfrac{216}{x} \geq 3.\sqrt[3]{8x^2.\dfrac{216}{x}.\dfrac{216}{x}} = 216$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f\left(x\right) = 216$ xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = \dfrac{216}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow h = \dfrac{24}{9} = \dfrac{8}{3}$.

Vậy $m = 8$; $n = 3 \Rightarrow m + n = 8 + 3 = 11$.

Câu 17: Chọn D



Xét $\left(P\right): y = ax^2 + bx + c$ $\left(a \neq 0\right)$ có toạ độ đỉnh $\left(0;4\right)$ và qua điểm có toạ độ $\left(2;0\right)$.

Ta có hoành độ đỉnh: $\dfrac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$; $\left(P\right)$ qua điểm $\left(0;4\right) \Rightarrow c = 4$ và $\left(P\right)$ qua điểm $\left(2;0\right)$ $\Rightarrow a = -1$. Suy ra: $\left(P\right): y = -x^2 + 4$

Xét đường thẳng qua E, D: $y = m$. Khi đó $E\left(-\sqrt{4-m};m\right)$ và $D\left(\sqrt{4-m};m\right)$ là giao điểm của $\left(P\right)$ và đường thẳng $y = m$. Suy ra: $ED = 2\sqrt{4-m}$, $EF = m$.

Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED.EF = 2\sqrt{4-m}.m$. Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4 - m \Rightarrow m = 4 - t^2$

Khi đó: $S_{CDEF} = f\left(t\right) = 2t\left(4 - t^2\right) = -2t^3 + 8t$; $f'\left(t\right) = -6t^2 + 8 = 0 \Rightarrow t = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

–	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
$\frac{32\sqrt{3}}{9}$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

Suy ra: $MaxS_{CDEF} = \dfrac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \dfrac{8}{3}$

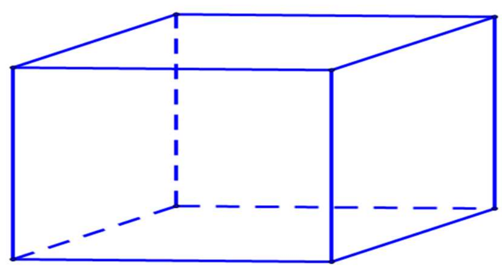
Mặt khác diện tích của chiếc cổng: $S = \int\limits_{-2}^{2} \left| -x^2 + 4 \right| = \dfrac{32}{3}$ (m^2)

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S - MaxS_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - \dfrac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4,5083$ (m^2)

Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083 \times 1.000.000 = 4.508.300$.

.

Câu 18: Chọn C



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x $(x > 0)$. Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V = 2x^2.h \Rightarrow 2x^2.h = 48 \Leftrightarrow x^2.h = 24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3\left(2x^2 + 2xh + 4xh\right) + 2x^2$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt[3]{8x^2.9xh.9xh} = 3\sqrt[3]{648\left(x^2h\right)^2} = 216$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9h}{8} \\ \dfrac{9^2}{8^2}.h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Câu 19: Chọn C

Gọi số lần tăng giá là $y\left(y \geq 0\right)$

Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá là $30000 + 1000y$ đồng/kg.

Số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y\left(y \leq 50\right)$ kg.

Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi là $1000-20y$ kg.

Tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

$P=\left(1000-20y\right).(30000+1000y)+20y.2000 \Leftrightarrow P=-20000y^2+440000y+30000000.$

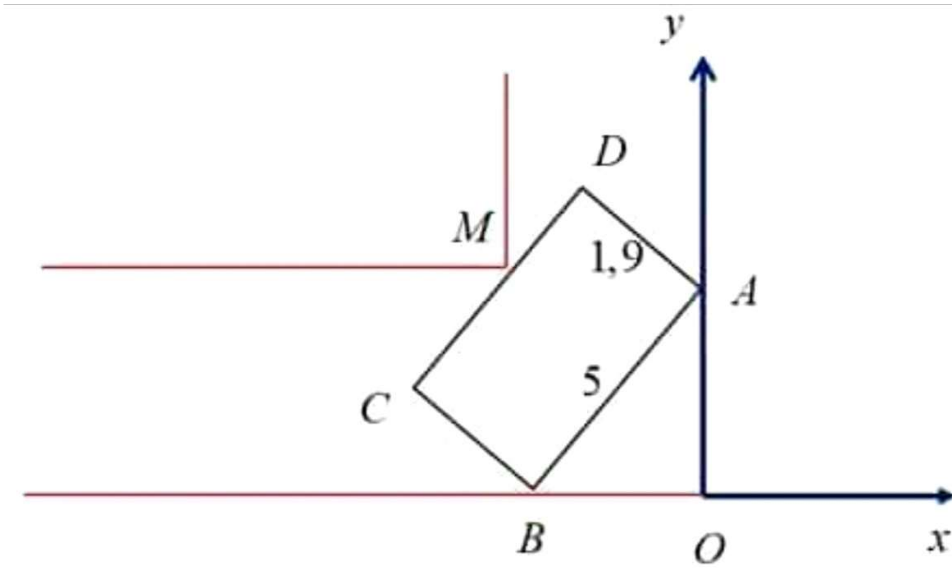
$P=32420000-20000\left(y-11\right)^2.$

Ta có:

$32420000-20000\left(y-11\right)^2 \le 32420000$ $\Rightarrow P_{\max}=324200000$ khi $y=11\left(N\right)$.

$\Rightarrow P \le 32420000.$

Câu 20: Chọn A



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M\left(-2,6\,;x\right)$.

Gọi $B\left(-a\,;0\right)$ suy ra $A\left(0\,;\sqrt{25-a^2}\right)$. Phương trình $AB:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-1=0$.

Do $CD\,//\,AB$ nên phương trình $CD:\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{\sqrt{25-a^2}}-T=0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng $1,9(m)$ nên

$$\frac{\left|T-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}}=1,9 \Rightarrow T=1+\frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M,O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD.

Suy ra: $\dfrac{-2,6}{-a}+\dfrac{x}{\sqrt{25-a^2}}-1-\dfrac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\sqrt{25-a^2}+\dfrac{9,5}{a}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-a^2}}{a}$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính **Casio570ES PLUS**.

$f(\mathrm{X})=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ với STEP = $\dfrac{5}{29}$; START = 0; END = 5.

Thấy giá trị lớn nhất của $f\left(X\right)=\sqrt{25-X^2}+\dfrac{9,5}{X}-\dfrac{2,6\times\sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ $3,698$.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị ở câu **A.**

Câu 21: Chọn C

Đồ thị $\left(C\right)$ có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$

với $J\left(x;\dfrac{2x}{x-1}\right)\in\left(C\right)\Rightarrow TJ=d\left(J;\mathrm{TCD}\right)=\left|x-1\right|, JV=d\left(J,TCN\right)=\left|\dfrac{2x}{x-1}-2\right|=\dfrac{2}{\left|x-1\right|}$

Khi đó, chu vi hình chữ nhật $ITJV$ là:

$$P=2(TJ+JV)=2\left(\left|x-1\right|+\dfrac{2}{\left|x-1\right|}\right)\ge 2.2\sqrt{\left|x-1\right|.\dfrac{2}{\left|x-1\right|}}=4\sqrt{2}$$

Dấu $"="$ xảy ra khi: $\left|x-1\right|=\dfrac{2}{\left|x-1\right|}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\\x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}J\left(1+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)\\J\left(1-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

Vậy hình chữ nhật $ITJV$ có chu vi nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 22: Chọn B

Ta có $y'=f'\left(x+2017\right)+2018$; $y'=0\Leftrightarrow f'\left(x+2017\right)=-2018$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2018	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f'\left(x+2017\right)=-2018\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2017=t\left(t<0\right)\\x+2017=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=t-2017\\x=-2015.\end{array}\right.$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x+2017\right)+2018x$

x	$-\infty$		$t-2017$		-2015		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=t-2017<-2017$.

Vậy $x_0\in\left(\infty;-2017\right).x_0$

Câu 23: Chọn B

Xét phương trình ẩn x : $y=\dfrac{ax+b}{x^2+4}\Leftrightarrow yx^2-ax+4y-b=0\ (1)$.

Trường hợp 1: $y=0\Rightarrow$ phương trình (1) trở thành: $x=-\dfrac{b}{a}$.

Trường hợp 2: $y\neq 0\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta\geq 0\Leftrightarrow a^2-4y(4y-b)\geq 0\Leftrightarrow 16y^2-4by-a^2\leq 0\Leftrightarrow y^2-\dfrac{b}{4}y-\dfrac{a^2}{16}\leq 0\ (*)$.

Vì $\max\limits_{x\in R}y=5,\min\limits_{x\in R}y=-2$ nên $-2\leq y\leq 5\Leftrightarrow (y+2)(y-5)\leq 0\Leftrightarrow y^2-3y-10\leq 0\ (*)'$.

Từ $(*)$ và $(*)'$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{b}{4}=3\\ \dfrac{a^2}{16}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=12\\ a^2=160\end{cases}\Rightarrow P=a^2b=1920$.

Câu 24: Chọn B

Hàm số $f(x)=\dfrac{34}{\sqrt{(x^3-3x+2m)^2+1}}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 2 khi và chỉ khi hàm số $y=|x^3-3x+2m|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 16.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+2m$ trên đoạn $[0;3]$, ta có $g'(x)=3(x^2-1)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$2m$	$\searrow$	$2m-2$	$\nearrow$	$2m+18$

Suy ra $\max\limits_{[0;3]}|g(x)|=\max\{|2m-2|,|2m+18|\}$.

Do đó $\max\limits_{[0;3]}|g(x)|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|2m-2|=16\\|2m+18|\leq 16\end{cases}\\ \begin{cases}|2m-2|\leq 16\\|2m+18|=16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-7\\m=-1\end{array}\right.$. Vậy $S=\{-7;-1\}$.

Câu 25: Chọn C

Ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$. Theo bài ra ta có: $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=b\\x=c\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	a		b		c
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra: $\min\limits_{[a;c]} h(x) = h(b)$.

Câu 26: Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta có $-2 \le f(x) \le 2, \forall x \in [-2;2] (*) \Rightarrow 2f(x)+4 \ge 0, \forall x \in [-2;2]$.

Vì $m \in [0;20]$ nên $2f(x)+m+4 \ge 0 \Rightarrow |2f(x)+m+4| = 2f(x)+m+4, \forall x \in [-2;2]$

Khi đó $g(x) = ||2f(x)+m+4| - f(x) - 3| = |2f(x)+m+4-f(x)-3| = |f(x)+m+1|$

Với $m = 0 \Rightarrow g(x) = |f(x)+1|, \forall x \in [-2;2]$.

$(*) \Leftrightarrow -1 \le f(x)+1 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le |f(x)+1| \le 3 \Leftrightarrow 0 \le g(x) \le 3, \forall x \in [-2;2]$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) = 0 \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m \in [1;20] \Rightarrow f(x)+m+1 \ge 0 \Rightarrow g(x) = f(x)+m+1$.

Từ (*) ta có $f(x)+m+1 \ge m-1 \Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) = m-1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min\limits_{[-2;2]} g(x) \ge 1 \Leftrightarrow m-1 \ge 1 \Leftrightarrow m \ge 2 \Rightarrow m \in [2;20]$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Chọn A

Với $m = \frac{1}{2}$: ta có $f(x) = 1, \forall x \in [0;1]$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 1 \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$ (không thỏa mãn đề bài).

Với $m \ne \frac{1}{2}$, ta có: $f'(x) = \frac{1-2m}{(x+1)^2} \ne 0, \forall x \in [0;1]$. Có $f(0) = 2m; f(1) = \frac{2m+1}{2}$.

Nếu $2m(2m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Khi đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)|$ và $\min\limits_{[0;1]} |f(x)|$ là một trong 2 giá trị $|2m|; \left|\frac{2m+1}{2}\right|$. Khi đó: $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 3 \Leftrightarrow |2m| + \left|\frac{2m+1}{2}\right| = 3 \Leftrightarrow 2|2m| + |2m+1| = 6$.

Xét $m > 0$: phương trình $\Leftrightarrow 4m + 2m + 1 = 6 \Leftrightarrow m = \frac{5}{6}$ (thỏa mãn).

Xét $m<-\dfrac{1}{2}$: phương trình $\Leftrightarrow -4m-\left(2m+1\right)=6 \Leftrightarrow m=\dfrac{-7}{6}$ (thỏa mãn).

Nếu $2m\left(2m+1\right)\le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m\le 0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;\left|2m\right|\right\}$ và $\min\limits_{[0;1]} f\left(x\right)=0$.

Ta xét $\left[\begin{array}{l}\left|2m\right|=3\\ \dfrac{\left|2m+1\right|}{2}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm\dfrac{2}{3}\\ m=\dfrac{5}{2}\\ m=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$. Ta thấy các giá trị này không thỏa mãn $-\dfrac{1}{2}\le m\le 0$.

Vậy, ta có tập $S=\left\{-\dfrac{7}{6};\dfrac{5}{6}\right\}$, do đó số phần tử của tập S bằng 2.

Câu 28: Chọn D

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$

Ta có: $f'(x)=4x^3-4x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm 1$

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	3m-1	↗	3m	↘	3m-1	↗	8+3m

$\Rightarrow \underset{[-1;2]}{Max}\, f(x)=8+3m=A; \underset{[-1;2]}{Min}\, f(x)=3m-1=a$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow A.a>0 \Leftrightarrow \left(3m-1\right)\left(8+3m\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1}{3}\\ m<-\dfrac{8}{3}\end{array}\right.$

Khi đó: $\underset{[-1;2]}{Min}\left|f(x)\right|=\dfrac{\left|A+a\right|-\left|A-a\right|}{2}=2021$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|7+6m\right|-\left|9\right|}{2}=2021 \Leftrightarrow \left|7+6m\right|=4051 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{4044}{6}\\ m=-\dfrac{4058}{6}\end{array}\right. (t/m) \Rightarrow \left|m_1-m_2\right|=\dfrac{4051}{3}$.

Câu 29: Chọn C

Ta có $\min\limits_{[-1;1]}\left|f(x)\right| > \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^4 - mx - 4}{x+2} > \dfrac{3}{4}, \forall x \in [-1;1]\ (1) \\ \dfrac{2x^4 - mx - 4}{x+2} < \dfrac{-3}{4}, \forall x \in [-1;1]\ (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow m \in \varnothing$ do (1) không thỏa với $x = 0$.

$(2) \Leftrightarrow 8x^4 - 4mx + 3x - 10 < 0 (*), \forall x \in [-1;1]$

Nhận xét $x = 0$ thỏa (*) nên $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 8x^3 + 3 - \dfrac{10}{x}, \forall x \in (0;1] \\ 4m < 8x^3 + 3 - \dfrac{10}{x}, \forall x \in [-1;0) \end{cases}$ (3)

Xét $g(x) = 8x^3 + 3 - \dfrac{10}{x}, x \in [-1;1] \setminus \{0\}$ có $g'(x) = 24x^2 + \dfrac{10}{x^2} > 0, \forall x \ne 0$

x	-1		0		1
g'		$+$	||	$+$	
g	5	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 1 \\ 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < m < \dfrac{5}{4}$. Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m = 1$.

Câu 30: Chọn C

Đặt $t = \log x$, vì $x \in \left[\dfrac{1}{10};1\right]$ nên miền giá trị của t là $[-1;0]$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = \dfrac{t+m}{t+2}$ thỏa $\max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| + \min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| = 2$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ta có $f'(x) = \dfrac{2-m}{(t-2)^2}$.

Trường hợp 1: $m = 2$. Ta có $f(t) = 1$, khi đó $\max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| + \min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| = 2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m \ne 2 \Rightarrow$ hàm số đơn điệu trên mỗi khoảng của tập xác định nên đơn điệu trên $[-1;0]$. Ta có $f(0) = \dfrac{m}{2}, f(-1) = m - 1$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-m;0)$.

Khi $\dfrac{m}{2}.(m-1) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$, ta có $\min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| = 0$, $\left[\begin{array}{l} \max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| = \dfrac{m}{2} \\ \max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| = 1 - m \end{array}\right.$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| + \min\limits_{[-1;0]}\left|f(t)\right| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{m}{2}\right| = 2 \\ \left|m-1\right| = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -4 \\ m = 3 \\ m = -1 \end{array}\right.$ (không thỏa mãn $0 \le m \le 1$).

Khi $\frac{m}{2}.(m-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$ khi đó $\max\limits_{[-1;0]}|f(t)|+\min\limits_{[-1;0]}|f(t)|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{m}{2}\right|+|m-1|=2$.

Với $m<0$, ta có $\left|\frac{m}{2}\right|+|m-1|=2 \Leftrightarrow -\frac{m}{2}+1-m=2 \Leftrightarrow -3m=2 \Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}$

Với $m>1, m \neq 2$, ta có $\left|\frac{m}{2}\right|+|m-1|=2 \Leftrightarrow \frac{m}{2}+m-1=2 \Leftrightarrow 3m=6 \Leftrightarrow m=2$ (không thỏa mãn $m>1, m \neq 2$).

Kết hợp **trường hợp 1** và **trường hợp 2** ta có $S=\left\{-\frac{2}{3};\ 2\right\}$.

Tổng số phần tử của S bằng $-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$.

Câu 31: Chọn A

Đặt $t=e^x$ thì $t \in [1;2]$. Khi đó $f(x)=g(t)=\left|3t^4-4t^3-24t^2+48t+m\right|$.

Xét $h(t)=3t^4-4t^3-24t^2+48t+m,\ t \in [1;2]$ có $h'(t)=12t^3-12t^2-48t+48$.

$\left\{\begin{array}{l} h'(t)=0 \\ t \in [1;2] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow$ $h(t)$ nghịch biến trên $[1;2]$; $g(1)=|m+23|, g(2)=|m+16|$.

Nếu $(m+16)(m+23) \leq 0$ thì $\min g(t)=0$, suy ra $0 \leq \max g(t) \leq 3\min g(t)=0$ hay $g(t)=0$ $\forall t \in [1;2]$ (vô lý).

Nếu $\left\{\begin{array}{l} m+16>0 \\ m+23>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>-16$.

Khi đó $\max g(t) \leq 3\min g(t) \Leftrightarrow m+23 \leq 3(m+16) \Leftrightarrow m \geq -12,5 \Rightarrow\ m \geq -12,5$ (1).

Nếu $\left\{\begin{array}{l} m+16<0 \\ m+23<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m<-23$

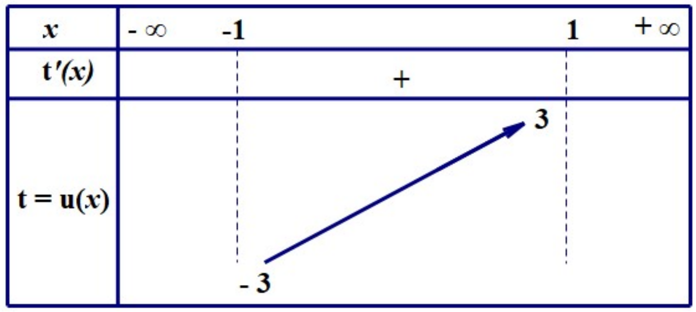
Ta không cần xét tiếp trường hợp này do đề bài chỉ yêu cầu tìm $m \geq -23$.

Từ (1) và $m \in \mathbb{Z} \cap [-23;10]$ ta có $m \in \{-12;-11;-10;-9;...;8;9;10\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa là -33.

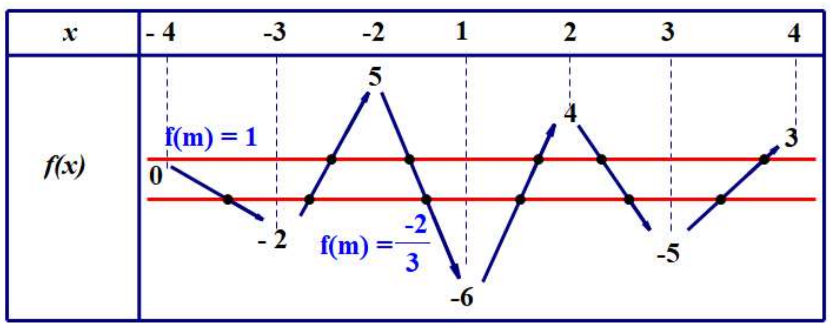
Câu 32: Chọn B

Đặt $t=u(x)=x^3+2x$ ta có $t'=u'(x)=3x^2+2>0, \forall x$ do đó $t=x^3+2x$ là một hàm số tăng vì vậy $x \in [-1;1]$ thì $t \in [-3;3]$.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ ta có $\max\limits_{[-3;3]} f(t) = 5$ và $\min\limits_{[-3;3]} f(t) = -6$.

Từ đây ta có $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right|$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right|$



Trường hợp 1: $\begin{cases} \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| = 8 \\ \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| \ge \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5 + 3f(m)| = 8 \\ |5 + 3f(m)| \ge |-6 + 3f(m)| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(m) = 1 \\ f(m) = -\dfrac{13}{3} \end{array}\right. \\ f(m) \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(m) = 1$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m) = 1$ có 5 nghiệm, như vậy trường hợp này có 5 giá trị thực của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| = 8 \\ \left|\min\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| > \left|\max\limits_{[-3;3]} f(t) + 3f(m)\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-6 + 3f(m)| = 8 \\ |-6 + 3f(m)| > |5 + 3f(m)| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(m) = -\dfrac{2}{3} \\ f(m) = \dfrac{14}{3} \end{array}\right. \\ f(m) < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(m) = -\frac{2}{3}$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m) = -\frac{2}{3}$ có 6 nghiệm, như vậy trường hợp này có 6 giá trị thực của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả là 11 giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Chọn C

Ta có: $3a^4 + 1 = a^4 + a^4 + a^4 + 1 \ge 4\sqrt[4]{a^4.a^4.a^4} = 4a^3$

$12b^4 + 1 = 4b^4 + 4b^4 + 4b^4 + 1 \ge 4\sqrt[4]{4b^4.4b^4.4b^4} = 4\left(\sqrt{2}b\right)^3$

Suy ra

$$H = \frac{3a^4 + 12b^4 + 25c^3 + 2}{\left(a + \sqrt{2}b + c\right)^3} \ge \frac{4a^3 + 4\left(\sqrt{2}b\right)^3 + 25c^3}{\left(a + \sqrt{2}b + c\right)^3} = \frac{4\left(a + \sqrt{2}b\right)\left(a^2 + \left(\sqrt{2}b\right)^2 - \sqrt{2}ab\right) + 25c^3}{\left(a + \sqrt{2}b + c\right)^3}$$

$$\ge \frac{4\left(a + \sqrt{2}b\right)\left(\dfrac{\left(a + \sqrt{2}b\right)^2}{2} - \dfrac{\left(a + \sqrt{2}b\right)^2}{4}\right) + 25c^3}{\left(a + \sqrt{2}b + c\right)^3} = \frac{\left(a + \sqrt{2}b\right)^3 + 25c^3}{\left(a + \sqrt{2}b + c\right)^3} = \frac{\left(\dfrac{a + \sqrt{2}b}{c}\right)^3 + 25}{\left(\dfrac{a + \sqrt{2}b}{c} + 1\right)^3}$$

Đặt $x = \frac{a + \sqrt{2}b}{c}, x > 0$. Xét $f\left(x\right) = \frac{x^3 + 25}{\left(x + 1\right)^3}$ với $x \in \left(0; +\infty\right)$

$$f'\left(x\right) = \frac{3x^2\left(x + 1\right)^3 - 3\left(x + 1\right)^2\left(x^3 + 25\right)}{\left(x + 1\right)^6} = \frac{3x^2\left(x + 1\right) - 3\left(x^3 + 25\right)}{\left(x + 1\right)^4} = \frac{3\left(x^2 - 25\right)}{\left(x + 1\right)^4}$$

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

x	0		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$\frac{25}{36}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left(0; +\infty\right)} f\left(x\right) = \frac{25}{36}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức H là $\dfrac{25}{36} \in \left[\dfrac{2}{3};2\right]$.

Câu 34: Chọn A

Xét hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{mx - \sqrt{x+2019}}{x+2020}$ với $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le \left|x\right| \le 2018\right\}$.

Đặt $t = \sqrt{x+2019} \Rightarrow t \in \left[1;\sqrt{2018}\right] \cup \left[\sqrt{2020};\sqrt{4037}\right]$

Ta được hàm số mới: $h\left(t\right) = \dfrac{m\left(t^2 - 2019\right) - t}{t^2+1} \Rightarrow h'\left(x\right) = \dfrac{t^2 + 4040mt - 1}{\left(t^2+1\right)^2}$

$h'\left(t\right) = 0$ cho ta hai nghiệm $\begin{cases} t_1 = -2020m - \sqrt{\left(2020m\right)^2 + 1} \\ t_2 = -2020m + \sqrt{\left(2020m\right)^2 + 1} \end{cases}$

Trường hợp 1: $m \ge 0 \Rightarrow t_1 < 0;\ t_2 = \dfrac{1}{2020m + \sqrt{\left(2020m\right)^2 + 1}} \le 1$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	t_2	1	$\sqrt{2018}$	$\sqrt{2020}$	$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0		+		
$h(t)$		$\dfrac{-2018m-1}{2}$ ↗	$\dfrac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$ ↗	$\dfrac{m-\sqrt{2020}}{2021}$ ↗	$\dfrac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề, giá trị nhỏ nhất của $h\left(t\right)$ không vượt quá $\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h\left(t\right) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+\sqrt{2018}}{2019} \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{m-\sqrt{2020}}{2021} \le \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \sqrt{2018} + \dfrac{2019}{2} \\ m \le \sqrt{2020} + \dfrac{2021}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m \le 1055$$

Kết hợp điều kiện: $0 \le m \le 1055$ (1)

Trường hợp 2: $m \le -1 \Rightarrow t_1 < 0;\ t_2 > \sqrt{4037}$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	t_2	1	$\sqrt{2018}$	$\sqrt{2020}$	$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0		$-$		
$h(t)$		$\frac{-2018m-1}{2}$ ↘	$\frac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$ ↘	$\frac{m-\sqrt{2020}}{2021}$ ↘	$\frac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề, giá trị nhỏ nhất của $h(t)$ không vượt quá $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h(t) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-m-\sqrt{2018}}{2019} \le \frac{1}{2} \\ \frac{-m+\sqrt{2020}}{2021} \le \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge -\sqrt{2018} - \frac{2019}{2} \\ m \ge \sqrt{2020} - \frac{2021}{2} \end{array}\right. \Rightarrow m \ge -1054$$

Kết hợp điều kiện: $-1054 \le m \le -1$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $-1054 \le m \le 1055$. Do đó tập nghiệm tổng cộng 2110 phần tử.

Câu 35: Chọn A

Ta có: $5x^2 + 2xy + 2y^2 = 9 \Leftrightarrow (2x+y)^2 + (x-y)^2 = 9$.

Đặt $2x + y = 3\sin t,\ x - y = 3\cos t$ với $t \in [-2\pi; 2\pi]$.

$\Rightarrow x = \sin t + \cos t$ và $y = \sin t - 2\cos t$.

$$K = \frac{6x-6}{4x-y-9} = \frac{6\sin t + 6\cos t - 6}{4(\sin t + \cos t) - \sin t + 2\cos t - 9} = \frac{6\sin t + 6\cos t - 6}{3\sin t + 6\cos t - 9}.$$

$\Rightarrow (3K-6)\sin t + (6K-6)\cos t = 9K - 6$.

Điều kiện để phương trình trên có nghiệm là $(3K-6)^2 + (6K-6)^2 \ge (9K-6)^2 \Leftrightarrow -1 \le K \le 1$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t+1}{t-2}$ trên $[-1;1]$

Ta có: $f'(t) = \frac{-5}{(t-2)^2} < 0, \forall t \ne 2$. Suy ra $\underset{[-1;1]}{Max} f(t) = f(-1) = \frac{1}{3}$.

Câu 36: Chọn A

Đặt $t = x^2 + x$, vì $x \in [-2;2] \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{4}; 6\right]$.

Khi đó $y = (t+m)^2$ $, \forall t \in \left[-\frac{1}{4}; 6\right] \Rightarrow y' = 2(t+m)$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow t = -m$.

Biện luận theo tham số m:

Trường hợp 1 : $-m \geq 6 \Leftrightarrow m \leq -6$, khi đó y nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{4};6\right]$ nên

$\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y(6) = (6+m)^2$. Ta có $(6+m)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-8 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Nhận $m=-8$.

Trường hợp 2: $-m \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$, khi đó y đồng biến trên $\left[-\frac{1}{4};6\right]$ nên

$\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}+m\right)^2$. Ta có $\left(-\frac{1}{4}+m\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{9}{4} \\ m=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$. Nhận $m=\frac{9}{4}$.

Trường hợp 3: $-\frac{1}{4} < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4}$, khi đó y đồng biến trên $(-m;6)$ và nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{4};-m\right)$, nên $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = y(-m) = 0$. Do đó không $y=g(x)$ có giá trị m thỏa $\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};6\right]} y = 4$.

Vậy tổng giá trị của tham số m thỏa $\min\limits_{[-2;2]} y = 4$ là $-8+\frac{9}{4} = -\frac{23}{4}$.