|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH THANH HÓA**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN**  **Năm học 2022-2023**  **MÔN THI: TOÁN CHUYÊN**  Thời gian làm bài : 150 phút |

**Câu I. (2 điểm)**

1. Cho là các số thực thỏa mãn điều kiện và . Chứng minh : 
2. Cho các số thực thỏa mãn . Tính giá trị của biểu thức : 

**Câu II. (2 điểm)**

1. Giải phương trình : 
2. Giải hệ phương trình : 

**Câu III. (2 điểm)**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương sao cho 
2. Tìm tất cả các số nguyên dương để là lập phương của một số nguyên tố

**Câu IV. (3 điểm)** Cho tam giác (có nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao của tam giác cắt nhau tại . Gọi M là trung điểm của cạnh tia cắt đường tròn (O) tại điểm 

1. Chứng minh rằng các điểm cùng thuộc một đường tròn
2. Lấy điểm trên đoạn thẳng sao cho gọi Q là hình chiếu của lên HP. Chứng minh rằng vuông góc với NQ
3. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác tiếp xúc với đường tròn 

**Câu V. (1 điểm)** Người ta thực hiện một trò chơi trên bảng kẻ ô vuông kích thước 5×9 (có 45ô vuông). Ban đầu, có 33 đồng xu được đặt ngẫu nhiên vào các ô vuông của bảng sao cho không có ô vuông nào chứa nhiều hơn một đồng xu. Ở mỗi bước người chơi sẽ di chuyển tất cả các đồng xu thỏa mãn đồng thời các quy định sau:

1. Các đồng xu phải được di chuyển lên hoặc xuống, trái hoặc phải sao cho mỗi lần di chuyển chỉ đến được ô kế bên nó (ô chung cạnh)
2. Nếu mỗi bước di chuyển của đồng xu đã di chuyển lên trên hoặc đi xuống dưới thì ở bước tiếp theo nó phải di chuyển sang trái hoặc sang phải; và ngược lại.

Trò chơi chỉ dừng lại khi một ô vuông nào đó trên bàn có nhiều hơn một đồng xu. Chứng minh rằng trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.

**ĐÁP ÁN**

**Câu I. (2 điểm)**

1. **Cho là các số thực thỏa mãn điều kiện và . Chứng minh : **

Từ . Khi đó :



Mặt khác, ta cũng có :



Tương tự, ta cũng có : 

Cộng vế theo vế ta được :



1. **Cho các số thực thỏa mãn . Tính giá trị của biểu thức : **

Từ 



Vì 

Do đó, từ . Khi đó :



Vậy 

**Câu II. (2 điểm)**

1. **Giải phương trình : **

ĐKXĐ: 

Đặt . Phương trình đã cho trở thành :



Vậy 

1. **Giải hệ phương trình : **

ĐKXĐ: . Ta có :





Xét phương trình



Vậy hệ phương trình có các nghiệm 

**Câu III. (2 điểm)**

1. **Tìm tất cả các cặp số nguyên dương sao cho **

Ta có:



Vì nên . Lập bảng



Vậy các cặp số nguyên dương cần tìm là 

1. **Tìm tất cả các số nguyên dương để là lập phương của một số nguyên tố**

Gọi p là số nguyên tố sao cho 

Với thì , do đó p là một số nguyên tố lẻ

là số lẻ , suy ra phải là số chẵn

Xét bảng đồng dư của và theo mod 9 nên 

Vì là số nguyên dương chẵn, nên ta xét theo mod 6. Có ba trường hợp sau :  
+TH1: Ta có :





Thay vào (\*) ta được : 

+TH2: . Ta có :



Suy ra 

Thay vào (\*) ta được : 

+Th3: . Ta có : 

Nếu 

Nếu (loại)

Nếu 

Nếu , bằng quy nạp ta chứng minh được với mọi số nguyên 

Khi đó, ta có 

Mà và là lập phương hai số nguyên liên tiếp. Suy ra không có số nguyên tố nào thỏa mãn yêu cầu

Vậy thỏa mãn đề bài

**Câu IV. (3 điểm) Cho tam giác (có nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao của tam giác cắt nhau tại . Gọi M là trung điểm của cạnh tia cắt đường tròn (O) tại điểm **

****

1. **Chứng minh rằng các điểm cùng thuộc một đường tròn**

Xét tứ giác có 

nên tứ giác nội tiếp

Nên bốn điểm cùng thuộc một đườn tròn có đường kính 

Gọi K là giao điểm của với đường tròn Ta có:

(cùng vuông góc với AC), (cùng vuông góc với AB)

Nên tứ giác là hình bình hànhthẳng hàng

hay . Vậy thuộc đường tròn đường kính 

Từ (1) và (2) suy ra : các điểm cùng thuộc đường tròn đường kính 

Từ (1) và (2) suy ra : Các điểm cùng thuộc một đường tròn có đường kính 

1. **Lấy điểm trên đoạn thẳng sao cho gọi Q là hình chiếu của lên HP. Chứng minh rằng vuông góc với NQ**

Q là hình chiếu của trên cũng thuộc một đường tròn có đường kính 

Vì nên (lần lượt đối đỉnh với và 

(trong đường tròn đường kính 

tứ giác là hình thang cân 

Ta lại có :

Tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới một góc không đổi)(cùng bù với 

Trong đường tròn (hai góc nội tiếp một đường tròn cùng chắn 1 cung)



Mà (hai góc phụ nhau) (5)

Từ (4) và (5) có : hay (với I là giao điểm của và 

Từ (3) và (6) suy ra 

1. **Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác tiếp xúc với đường tròn **

Kẻ đường cao của tam giác . Gọi J là điểm đối xứng với H qua BC

Ta có : mà (cùng phụ với 

hay .

Mặt khác :(cùng phụ với 

Vì cân tại P nên 

(hai góc đối đỉnh),

(hai góc nội tiếp một đường tròn cùng chắn 1 cung)

hay 

Từ (7) và (8) ta suy ra ba điểm thẳng hàng

Ta lại có : là tứ giác nội tiếp



cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác 

Gọi G là giao điểm của và , ta có :

thuộc đường tròn đường kính 

Qua điểm N, vẽ đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn . Ta có :



cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp 

Vậy, đường tròn ngoại tiếp tam giác tiếp xúc với đường tròn (O)

**Câu V. (1 điểm) Người ta thực hiện một trò chơi trên bảng kẻ ô vuông kích thước 5×9 (có 45ô vuông). Ban đầu, có 33 đồng xu được đặt ngẫu nhiên vào các ô vuông của bảng sao cho không có ô vuông nào chứa nhiều hơn một đồng xu. Ở mỗi bước người chơi sẽ di chuyển tất cả các đồng xu thỏa mãn đồng thời các quy định sau:**

1. **Các đồng xu phải được di chuyển lên hoặc xuống, trái hoặc phải sao cho mỗi lần di chuyển chỉ đến được ô kế bên nó (ô chung cạnh)**
2. **Nếu mỗi bước di chuyển của đồng xu đã di chuyển lên trên hoặc đi xuống dưới thì ở bước tiếp theo nó phải di chuyển sang trái hoặc sang phải; và ngược lại.**

**Trò chơi chỉ dừng lại khi một ô vuông nào đó trên bàn có nhiều hơn một đồng xu. Chứng minh rằng trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.**

Đánh số 45 ô vuông như hình bên



Theo cách đánh này, sẽ có : 15 ô số 1, 12 ô số 2, 8 ô số 3, 10 ô số 4

Đặt ngẫu nhiên 33 đồng xu vào các ô vuông của bảng sao cho không có ô vuông nào chứa nhiều hơn 1 đồng xu. Ta chia 33 đồng xu thành hai nhóm :

Nhóm I: Các đồng xu ở vị trí ô đánh số 1 và 3

Nhóm II: Các đồng xu ở vị trí ô đánh số 2 và 4

Ta thấy:

- Theo quy tắc i) thì sau mỗi bước các đồng xu ở nhóm I sẽ chuyển thành nhóm II và ngược lại   
- Theo quy tắc ii) thì sau hai bước các đồng xu ở ô đánh số 1 sẽ chuyển sang ô đánh số 3

Do đó, sau hữu hạn bước sẽ có trường hợp nhóm I có ít nhất 17 đồng xu (vì nếu nhóm II đang có ít nhất 17 đồng xu thì ở bước sau nhóm I sẽ có ít nhất 17 đồng xu)

Khi đó, theo nguyên lí Dirichlet, trong 17 đồng xu ở nhóm I sẽ có ít nhất 9 đồng xu ở ô đánh cùng một loại số (1 hoặc 3)

+ Nếu có ít nhất 9 đồng xu ở ô đánh số 3. Tuy nhiên chỉ có 8 ô đánh số 3, nên sẽ có ít nhất 1 ô có nhiều hơn một đồng xu. Trò chơi kết thúc.

+ Nếu có ít nhất 9 đồng xu ở ô đánh số 1 thì sau hai bước 9 đồng xu này nằm ở ô đánh số 3. Tuy hiện chỉ có 8 ô đánh số 3, nên sẽ có ít nhất 1 ô có nhiều hơn một đồng xu. Trò chơi kết thúc.

Vậy, trò chơi sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.