

Chủ đề 4. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

BÀI 7. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM

1) Định nghĩa

- Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .
- Định lí: Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K .

Khi đó

- a) Với mỗi hằng số C , hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K .
- b) Ngược lại với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K .

Kí hiệu: $\int f(x) dx = F(x) + C$

2) Tính chất của nguyên hàm

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì:

- $(\int f(x) dx)' = f(x)$ và $\int f'(x) dx = f(x) + C$;
- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- Với mọi số thực $k \neq 0$ ta có $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$.

3) Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

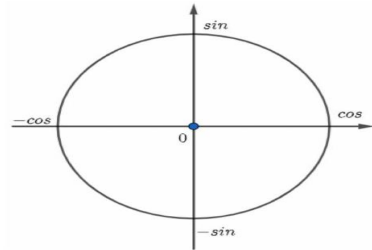
1. $\int 0 dx = C$	6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
2. $\int dx = x + C$	7. $\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	8. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + c, a \neq 0$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	9. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, a \neq 0$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	10. $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1, k \neq 0$

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Lấy đạo hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay cùng kim đồng hồ.

Lấy nguyên hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay ngược kim đồng hồ.



1. $\int \cos x dx = \sin x + C$	9. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
2. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	10. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
3. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	11. $\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + C$
4. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	12. $\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + C$
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	13. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	14. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
7. $\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	15. $\int (1 + \tan^2(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$

8. $\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	16. $\int (1 + \cot^2(ax + b)) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
---	--

4) Phương pháp tính nguyên hàm

- Phương pháp đổi biến số

Định lí 1: Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)] u'(x) dx = F[u(x)] + C.$$

***Chú ý:**

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u); f[u(x)]$ là $f(u)$ (coi du là vi phân của hàm số $u = u(x)$), nghĩa là $du = d(u(x)) = u'(x)dx$.

Khi đó công thức (1) được viết như sau:

$$\begin{aligned}\int f[u(x)] u'(x) dx &= \int f[u(x)] du(x) = \int f(u) du \\ &= F(u) + C = F[u(x)] + C\end{aligned}$$

Ta nói đã thực hiện được phép đổi biến $u = u(x)$.

- Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dạng	Đặt t	Dạng	Đặt t
$\int f(ax+b) dx$	$t = ax + b$	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$
$\int f(x^{n+1}) \cdot x^n dx$	$t = x^{n+1}$	$\int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$
$\int f(\sqrt{x}) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$t = \sqrt{x}$	$\int f(e^x) \cdot e^x dx$	$t = e^x$
$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$	$t = \sin x$	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$
$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$	$t = \cos x$		

II. TÍCH PHÂN

1) Định nghĩa tích phân

- Định nghĩa: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

- Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Nhận xét:

- Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$.
Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.
- Nếu hàm số $f(x)$ không âm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

2) Tính chất của tích phân

- Định lí: Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K . Khi đó ta có
 - $\int_a^a f(x)dx = 0$
 - $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
 - $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$;
 - $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;
 - $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$.

3) Phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến

- Định lí:

- Cho
- Hàm $t = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$;
 - Hàm hợp $f(u(x))$ được xác định trên $[a; b]$;
 - $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$

$$I = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

Khi đó:

$$I = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx$$

- Phương pháp chung

❖ **Bước 1:** Đặt $t = u(x)$

❖ **Bước 2:** Tính vi phân hai vế: $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

Đổi cận:

x	a	b

❖ **Bước 3:** Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

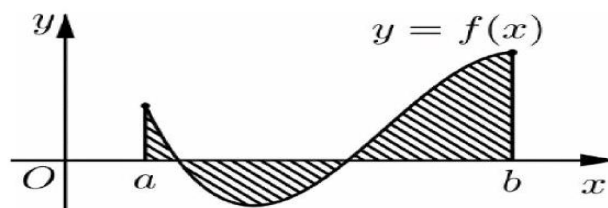
$$I = \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt = F(u(b)) - F(u(a))$$

Vậy:

III. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1) Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

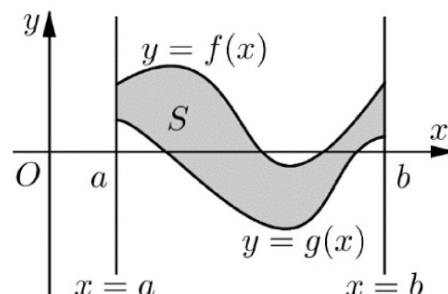


$$8. \quad S = \int_a^b |f(x)| dx$$

*Chú ý: Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

2) Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Nếu hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là



$$9. \quad S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Một số Câu toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

- Đường parabol đứng ứng với hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$
- Đường parabol nằm ngang thường gặp có phương trình $x = ay^2 (a \neq 0)$, phương trình này biến đổi thành $y = \pm \sqrt{\frac{x}{a}}$ ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.
- Đường tròn tâm $I(a, b)$ và bán kính R có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

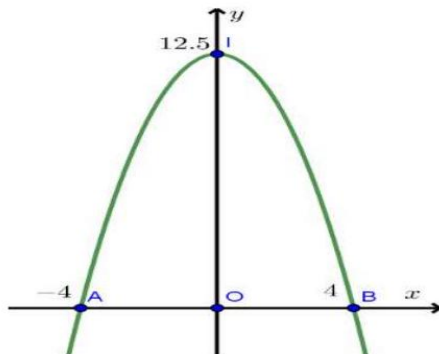
- Đường tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$, phương trình này biến đổi thành $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.
- Đường elip phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có độ dài hai trục lần lượt bằng $2a$ và $2b$. ($a > b > 0$)

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng parabol, chiều rộng 8 m, chiều cao 12,5 m. Diện tích của cổng bằng bao nhiêu?



Lời giải



Cách 1:

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

Vì (P) đi qua đỉnh $I(0;12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4;0)$ và $B(4;0)$ nên ta có

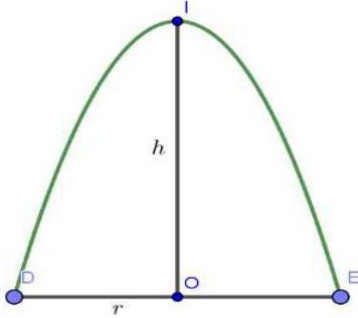
$$0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32} \quad (P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$$

. Do đó .

$$S = \int_{-4}^4 \left(-\frac{25}{32}x^2 + 12,5 \right) dx = \frac{200}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích của cổng là:

Cách 2:



Ta có parabol đã cho có chiều cao là $h = 12,5 \text{ m}$ và bán kính đáy $OD = OE = 4 \text{ m}$.

$$S = \frac{4}{3}rh = \frac{200}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Do đó diện tích parabol đã cho là:

Câu 2: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi \text{ (m)}, AD = 2 \text{ (m)}$. Tính diện tích

phần còn lại.

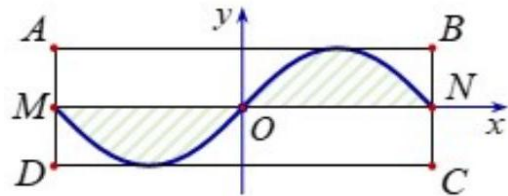
Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy (như hình bên). Khi đó

Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = 4\pi$.

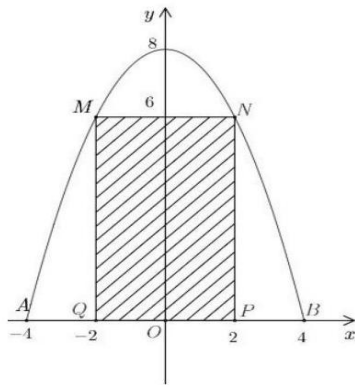
Diện tích phần đất được tô màu đen là

$$S_2 = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 4$$



Tính diện tích phần còn lại: $S = S_1 - S_2 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$.

Câu 3: Một chiếc cổng có hình dạng là một parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m. Người ta treo một tấm phong hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất như hình vẽ bên. Ở phần phía ngoài phong người ta mua hoa để trang trí với chi phí 200.000 đồng / m^2 , biết $MN = 4 \text{ m}, MQ = 6 \text{ m}$. Hỏi số tiền để mua hoa trang trí gần với số tiền nào sau đây ?



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình parabol có dạng $(P): y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} A(-4;0) \in (P) \\ B(4;0) \in (P) \\ N(2;6) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 8 \end{cases}$$

Ta có:

$$\Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

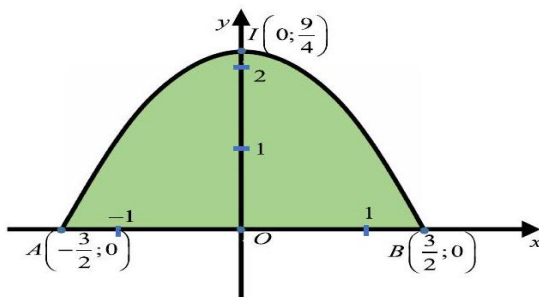
$$S = \int_{-4}^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8 \right) dx - S_{MNPQ} = \frac{128}{3} - 4 \cdot 6 = \frac{56}{3}$$

Diện tích để trang trí hoa là:

$$\frac{56}{3} \cdot 200000 \approx 3733300$$

Vậy số tiền để mua hoa trang trí: đồng.

Câu 4: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có

thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$.

$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình:

$$(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$$

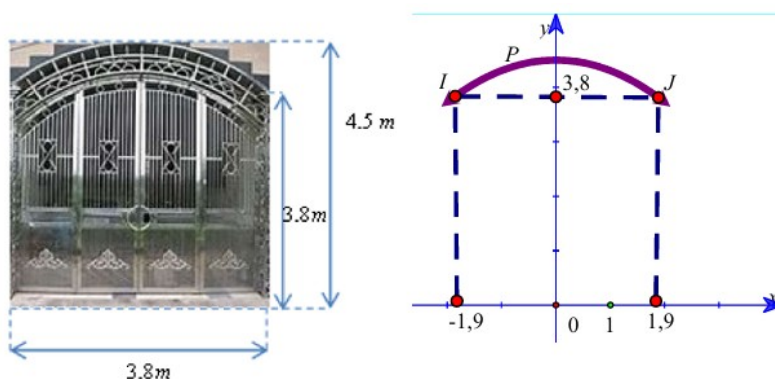
Vậy

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

Câu 5: Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một parabol, chất liệu làm là inox. Giá 1 m^2 vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy.



Lời giải

$$I\left(-\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right), J\left(\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$$

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Trong đó

Đường cong phía trên là một parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$

Do Parabol đi qua các điểm I, J và chiều cao cổng là $\frac{9}{2} \text{ m}$ nên có $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

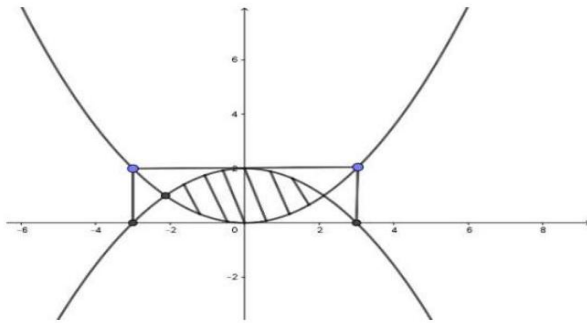
$$y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}, \text{ trục hoành và hai đường thẳng } x = -\frac{19}{10}; x = \frac{19}{10}.$$

$$S = \int_{-\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}} \left(-\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2} \right) dx = \frac{1216}{75}$$

Ta có

Vậy ông X phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là: $\frac{1216}{75} \times 1300000 \approx 21077330$ (đồng).

Câu 6: Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2 m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi đường parabol có đỉnh là trung điểm mỗi cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh dài đối diện. Tính tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta lập được phương trình các parabol là $y = \frac{2}{9}x^2$ và $y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$. Khi đó mảnh vườn

nằm ở miền trong hai parabol là hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = \frac{2}{9}x^2$ và

$$y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$$

Khi đó diện tích của mảnh vườn nằm trong hai parabol là:

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{5}} \left(-\frac{4}{9}x^2 + 2 \right) dx = 4\sqrt{2} \text{ m}^2$$

Diện tích hình chữ nhật là: 12 m^2 .

Khi đó tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần

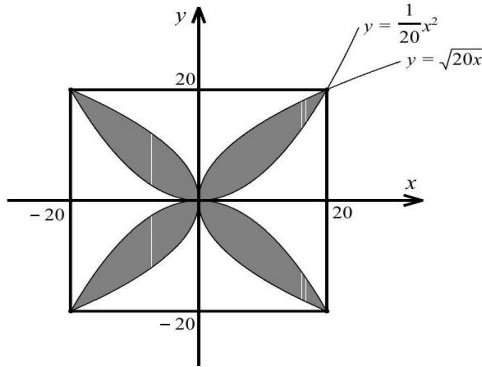
$$\frac{4\sqrt{2}}{12 - 4\sqrt{2}} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{7}$$

còn lại là:

Câu 7: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới.

a) Diện tích một cánh hoa bằng bao nhiêu?

b) Diện tích hoa văn trang trí bằng bao nhiêu?



Lời giải

a) Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$S_1 = \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right) dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{20}\sqrt{x^3} - \frac{1}{60}x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{400}{3} (\text{cm}^2)$$

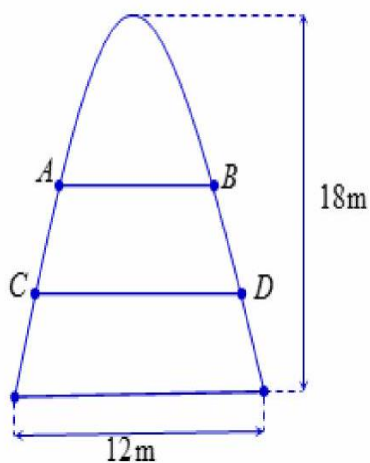
b) Diện tích hoa văn trang trí bằng bốn lần diện tích một cánh hoa được tính theo công thức sau:

$$S = 4S_1 = 4 \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right) dx = 4 \left(\frac{2}{3}\sqrt{20}\sqrt{x^3} - \frac{1}{60}x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{1600}{3} (\text{cm}^2)$$

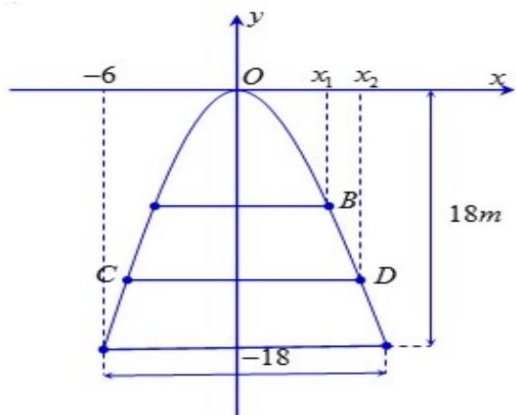
Câu 8: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m , chiều rộng chân đế 12 m .

Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới

hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Phương trình parabol có dạng $y = a \cdot x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra

$$-18 = a \cdot (-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$$

12.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right]_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

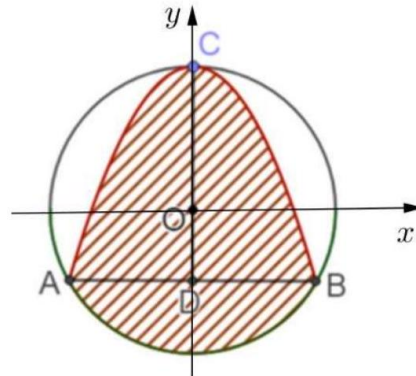
$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

$$S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Từ giả thiết suy ra

Câu 9: Một hoa văn hình tròn tâm O , ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Đường cong qua ba điểm A, B, C là một phần của parabol. Diện tích phần gạch chéo bằng bao nhiêu?

Lời giải



Do tam giác ABC là tam giác đều có cạnh $4\sqrt{3}$ cm nên

$$CD = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)} \Rightarrow OC = \frac{2}{3}CD = 4 \text{ (cm)} \quad \text{và} \quad OD = 2 \text{ (cm)}$$

Gắn trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có $A(-2\sqrt{3}; -2), B(2\sqrt{3}; -2), C(0; 4)$.

Phương trình đường parabol đi qua 3 điểm A, B, C có đỉnh C có dạng $y = ax^2 + 4(P)$.

Thay tọa độ điểm $B(2\sqrt{3}; -2)$ vào (P) suy ra $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

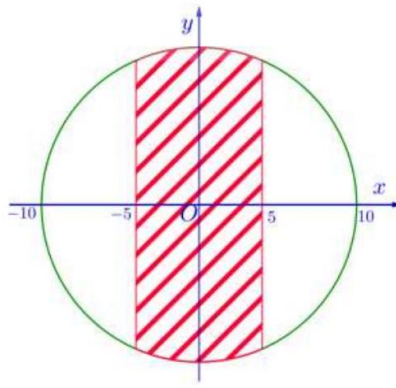
Phương trình đường tròn tâm O bán kính $OA = 4$ là $x^2 + y^2 = 16$.

$\Rightarrow$ Phương trình một phần cung nhỏ AB có dạng $y = -\sqrt{16 - x^2}$

$$\text{Vậy diện tích phần gạch chéo bằng } \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + 4 \right) - \left(-\sqrt{16 - x^2} \right) \right] dx \approx 37,54 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu 10: Một khu đất có hình dạng là một hình tròn với đường kính $d = 20$ m. Người ta muốn trồng rau trên dải đất rộng 10 m lấy tâm của đường tròn khu đất làm tâm đối xứng. Diện tích phần đất trống còn lại bao nhiêu m^2 ?

Lời giải



Ta xác định hệ tọa độ đặt vào tâm khu đất như hình vẽ. Khi đó phương trình đường tròn khu đất có tâm O và bán kính 10 m là: $x^2 + y^2 = 100$.

Ta có phần nửa cung tròn phía trên Ox có phương trình: $y = \sqrt{100 - x^2}$.

Khi đó diện tích trồng rau bằng hai lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị

$y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -5; x = 5$. Do đó: $S = 2 \int_{-5}^5 \sqrt{100 - x^2} dx$.

Đặt $x = 10 \sin t \Rightarrow dx = 10 \cos t dt$.

Đổi cận $x = -5 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 5 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

$$S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 100 \cos^2 t dt = 100 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = 100 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 50\sqrt{3} + 100 \frac{\pi}{3}$$

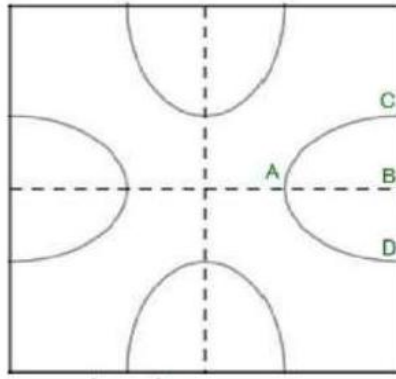
$$\pi 10^2 - S = \frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Vậy diện tích phần đất còn lại là:

Câu 11: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau đều có hình dạng một nửa elip như hình vẽ.

Biết một nửa trục lớn là $AB = 6\text{ cm}$, trục bé $CD = 8\text{ cm}$. Diện tích bề mặt của hoa văn đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi S_1 là diện tích hình vuông, S_2 là diện tích khoét đi.

Ta có $S_1 = 20^2 = 400 \text{ (cm}^2\text{)}$ và $S_2 = 2\pi ab = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

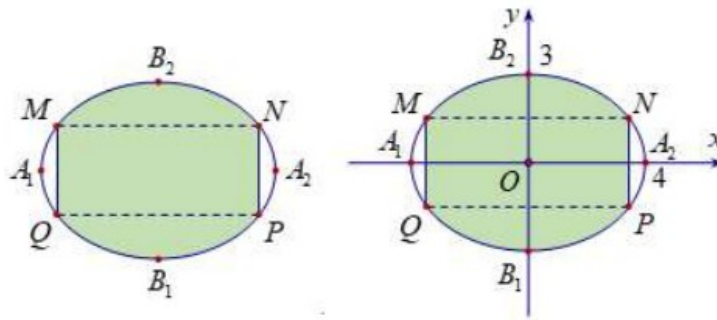
(vì mỗi phần bị khoét đi là nửa elip có $a=6, b=4$).

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = S_1 - S_2 = 400 - 48\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Câu 12: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên.

Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng $/\text{m}^2$ và phần còn lại là 100.000 đồng $/\text{m}^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8 \text{ m}$, $B_1B_2 = 6 \text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3 \text{ m}$?

Lời giải



$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Giả sử phương trình elip

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

13.

$$\Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi (\text{m}^2)$.

Ta có:
$$MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases} \quad \text{với } d: y = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right) \quad \text{và} \quad N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

$$S = 4 \int_{\frac{3}{2}}^4 \left(\frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} \right) dx = 4\pi - 6\sqrt{3} (\text{m}^2)$$

Khi đó, diện tích phần không tô màu là

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

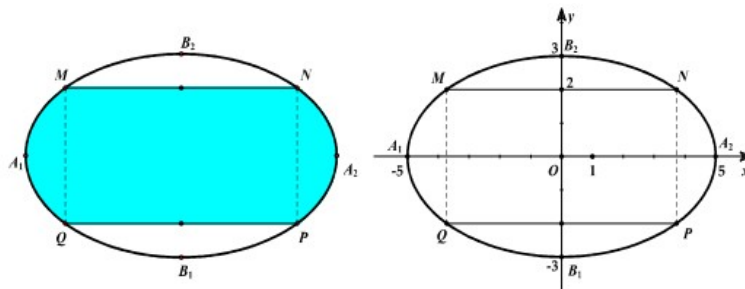
Số tiền để sơn theo yêu cầu Câu toán là

$$T = 100000 \times (4\pi - 6\sqrt{3}) + 200000 \times (8\pi + 6\sqrt{3}) \approx 7322000 \text{ đồng.}$$

Câu 13: Đáy của một bể bơi có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên.

Biết chi phí phần lát gạch xanh tô đậm là 300.000 đồng $/\text{m}^2$ và phần lát gạch trắng còn lại là 100.000 đồng $/\text{m}^2$. Hỏi số tiền để làm đáy bể bơi theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 10 \text{ m}$, $B_1B_2 = 6 \text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 4 \text{ m}$?

Lời giải



Vì elip có độ dài trục lớn $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$, độ dài trục bé $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$ nên elip có diện tích là $S_{(E)} = \pi ab = 15\pi$.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho A_1A_2 trùng Ox , B_1B_2 trùng Oy khi đó elip có

phương trình chính tắc $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$

Vì $MQ = 4 \Rightarrow d(O, MN) = 2$ nên MN có phương trình là $y = 2$ và $N(x_0; 2), x_0 > 0$.

Vì điểm $N \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{2^2}{9} = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{125}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $M\left(-\frac{5\sqrt{5}}{3}; 2\right), N\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}; 2\right)$

$$S_1 = 4 \cdot \int_0^{\frac{5\sqrt{5}}{3}} \left(\frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2} - 2 \right) dx \xrightarrow{\text{Casio}}$$

Nên diện tích phần lát gạch trắng là:

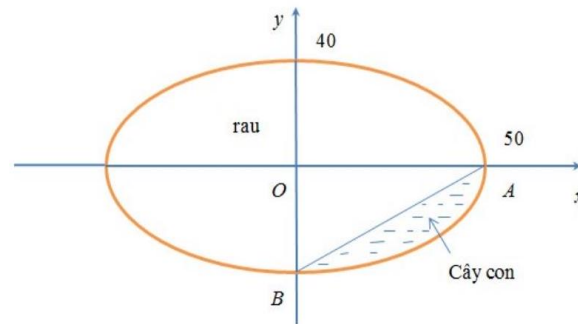
gán biến X .

Suy ra diện tích phần lát gạch xanh là $S_2 = S_{(E)} - S_1 = 15\pi - X \xrightarrow{\text{Casio}} Y$.

Vậy chi phí cần tìm là: $T = Y \cdot 300000 + X \cdot 100000 \approx 12072179$ đồng.

Câu 14: Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu?

Lời giải



Chứng minh: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là πab .

Thật vậy, phần đường elip nằm trên trục hoành có phương trình $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Do Ox, Oy là trục đối xứng của elip (E) nên

diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip (E) là $S = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$.

Đặt $x = a \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ta được $S = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} (a \cos t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \pi ab$.

Xét mảnh vườn: $a = 50, b = 40$

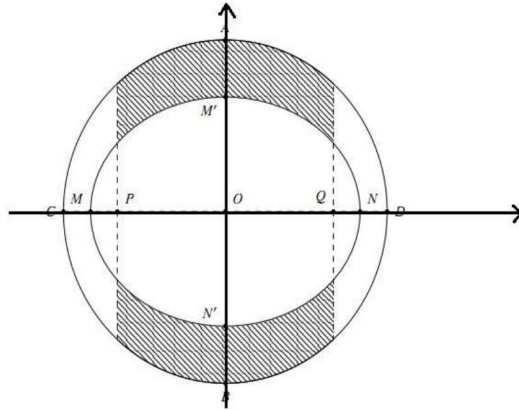
Diện tích trồng cây con là: $S_c = \frac{\pi}{4} \cdot 40 \cdot 50 - S_{\triangle OAB} = (\pi - 2)500 (\text{m}^2)$

Diện tích trồng rau là: $S_r = \pi \cdot 40 \cdot 50 - (\pi - 2)500 = (3\pi + 2)500 \text{ (m}^2\text{)}$

Thu nhập từ mảnh vườn là: $(\pi - 2)500 \cdot 2000 + (3\pi + 2)500 \cdot 4000 \approx 23991000$ (đồng).

Câu 15: Một khu vườn dạng hình tròn có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, $AB = 12 \text{ m}$. Người ta làm một hồ cá có dạng elip với bốn đỉnh M, N, M', N' như hình vẽ. Biết $MN = 10 \text{ m}$, $MN' = 8 \text{ m}$, $PQ = 8 \text{ m}$. Diện tích phần trồng cỏ (phần gạch sọc) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Khi đó phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$

Phương trình elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

Do tính đối xứng nên diện tích phần trồng cỏ sẽ là:

$$S = 4 \int_0^4 \left(\sqrt{36 - x^2} - 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right) dx \approx 30,03 \text{ (m}^2\text{)}$$