SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ ÔN TẬP
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

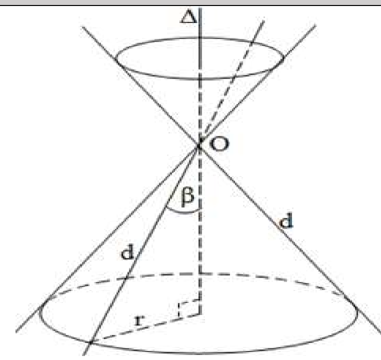
TÊN CHUYÊN ĐỀ:
BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ KHỐI TRÒN XOAY MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Người biên soạn: Nguyễn Thị Trà My
Đơn vị công tác: Trường THPT Quế Võ số 1

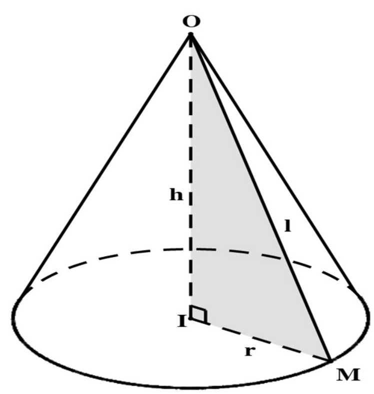
I. HỆ THỐNG KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

1.1. Mặt nón tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$, $mp\left(P\right)$ chứa d, Δ. $\left(P\right)$ quay quanh trục Δ với góc β không đổi $\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O. • Δ gọi là trục. • d được gọi là đường sinh. • Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.	

1.2. Khối nón

Nội dung	Hình vẽ
Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón. Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.	

Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

- **Diện tích xung quanh:** của hình nón: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$.
- **Diện tích đáy (hình tròn):** $\boxed{S_{đáy} = \pi r^2}$.
- **Diện tích toàn phần:** của hình nón: $\boxed{S_{tp} = \pi rl + \pi r^2}$.
- **Thể tích khối nón**: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

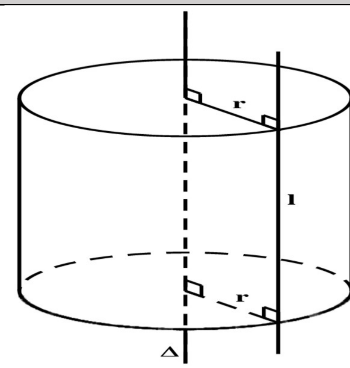
1.3. Thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng

Điều kiện	Kết quả
Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) đi qua đỉnh của mặt nón.	
• $mp(Q)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh. • $mp(Q)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường	• Thiết diện là tam giác cân. • (Q) là mặt phẳng tiếp diện của hình

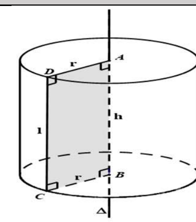
sinh.	nón.
Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) không đi qua đỉnh của mặt nón.	
• $mp(Q)$ vuông góc với trục hình nón. • $mp(Q)$ song song với 2 đường sinh hình nón. • $mp(Q)$ song song với 1 đường sinh hình nón.	• Giao tuyến là 1 đường tròn. • Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol. • Giao tuyến là một parabol.

2. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

2.1. Mặt trụ

Nội dung	Hình vẽ
Trong mặt phẳng $\left(P\right)$ cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng $\left(P\right)$ xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ. • Đường thẳng Δ gọi là trục. • Đường thẳng l là đường sinh. • r là bán kính của mặt trụ đó.	

2.2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Nội dung	Hình vẽ
Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.	

- Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.
- Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
- Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

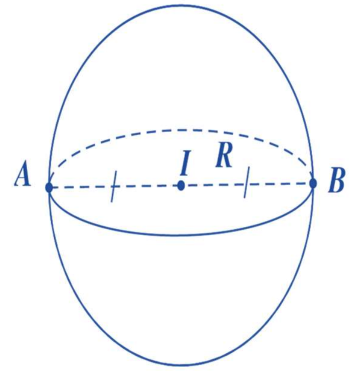
Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.Hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

- **Diện tích xung quanh:** $\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$.
- **Diện tích toàn phần:** $\boxed{S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2}$.
- **Thể tích:** $\boxed{V = \pi r^2 h}$.

3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

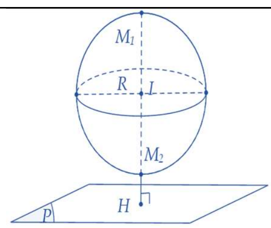
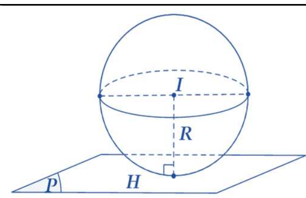
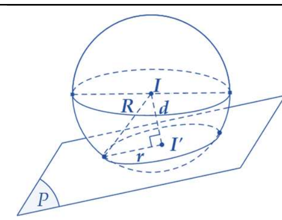
3.1. Mặt cầu

Nội dung	Hình vẽ

Cho điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. **Kí hiệu:** $S(I;R)$. Khi đó: $\boxed{S(I;R)=\{M \mid IM=R\}}$	

3.2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

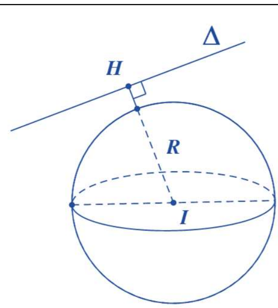
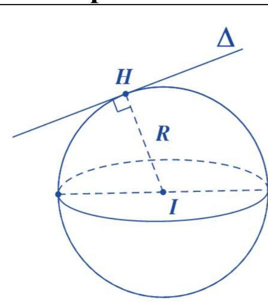
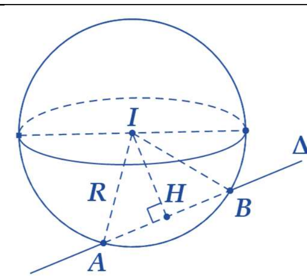
$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$
		

Lưu ý:

Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng kính** và thiết diện lúc đó được gọi là **đường tròn lớn.**

3.3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

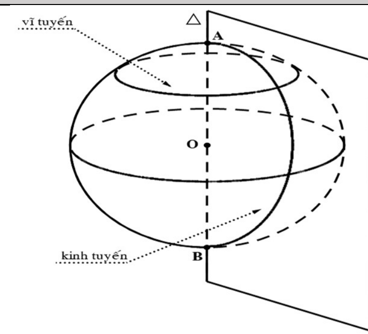
Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó:

$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ: **Tiếp tuyến** của (S) H: **tiếp điểm.**	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
		

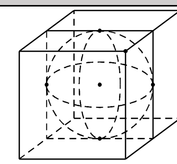
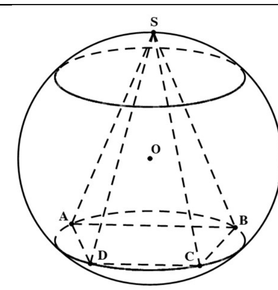
Lưu ý:

Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau: $\begin{cases} d(I;\Delta) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$.

3.4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu

Nội dung	Hình vẽ
Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến. Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu. Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu	

* Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện:

Nội dung	Hình vẽ
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu.	
Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu. Mặt cầu tâm O bán kính r ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi và chỉ khi $OA = OB = OC = OD = OS = r$	

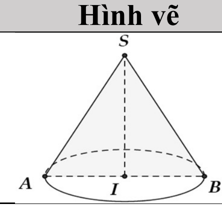
Cho mặt cầu $S(I;R)$

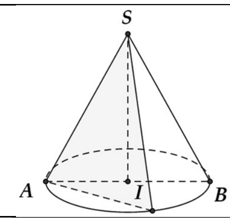
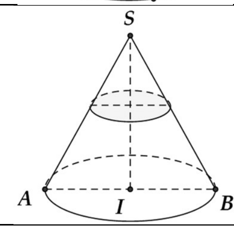
- **Diện tích mặt cầu:** $\boxed{S = 4\pi R^2}$.
- **Thể tích khối cầu:** $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$.

4. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI

4.1. Bài toán mặt nón

4.1.1.Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

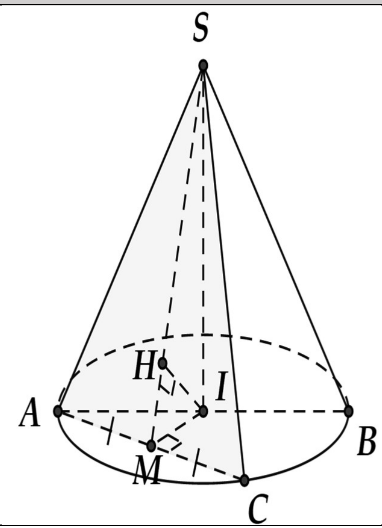
Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân.	

Thiết diện qua đỉnh của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.	
Thiết diện vuông góc với trục của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.	

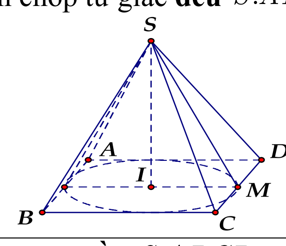
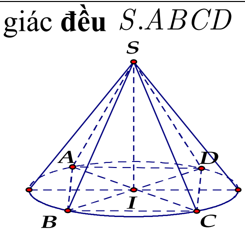
4.1.2. Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh l.

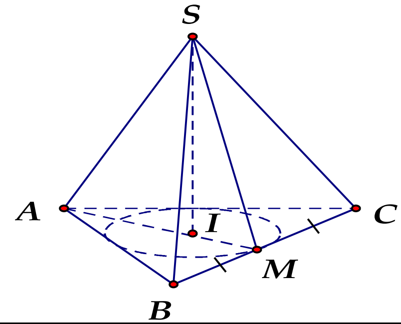
Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d.

Nội dung	Hình vẽ
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: • $AC \perp (SMI)$ • Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc $\widehat{SMI}$. • Góc giữa (SAC) và SI là góc $\widehat{MSI}$. • $d(I,(SAC)) = IH = d.$ **Diện tích thiết diện** $S_{td} = S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}\sqrt{SI^2 + IM^2}.2\sqrt{AI^2 - IM^2}$ $= \sqrt{r^2 - \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}.\sqrt{h^2 + \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}$	

4.1.3. Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

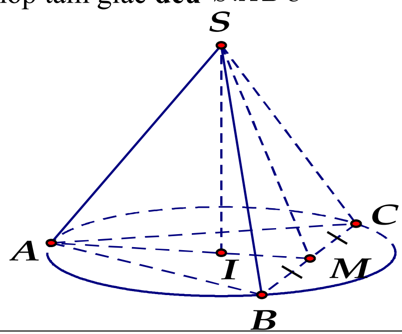
Nội dung	Hình vẽ
Hình nón **nội tiếp** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: • Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$, • Đường cao $h = SI$, đường sinh $l = SM$.	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 
Hình nón **ngoại tiếp** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: • Bán kính đáy: $r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$. • Chiều cao: $h = SI$. • Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 
Hình nón **nội tiếp** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.	Hình chóp tam giác **đều** $S.ABC$

<table>
<tr>
<td>
Khi đó hình nón có

- Bán kính đáy: $r = IM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{6}$.
- Chiều cao: $h = SI$.
- Đường sinh: $l = SM$.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Khi đó hình nón có:

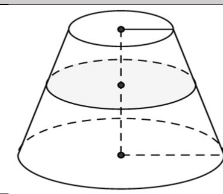
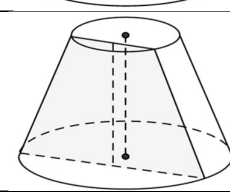
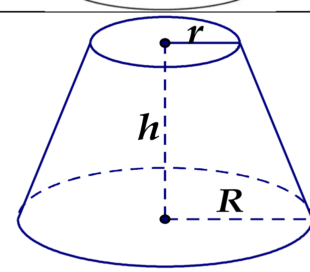
- Bán kính đáy: $r = IA = \dfrac{2AM}{3} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3}$.
- Chiều cao: $h = SI$.

Đường sinh: $l = SA$.
</td>
<td>
Hình chóp tam giác đều $S.ABC$


</td>
</tr>
</table>

4.1.4. Dạng 4. Bài toán hình nón cụt

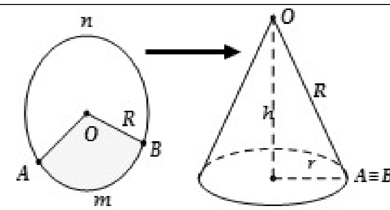
Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là **hình nón cụt**.

<table>
<tr><th>Nội dung</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr>
<td>Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
Cho hình nón cụt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao.
Diện tích xung quanh của hình nón cụt:
$$\boxed{S_{xq} = \pi l\left(R + r\right)}.$$
Diện tích đáy (hình tròn):
$$\boxed{\begin{cases} S_{đáy1} = \pi r^2 \\ S_{đáy2} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{đáy} = \pi\left(r^2 + R^2\right)}.$$
Diện tích toàn phần của hình nón cụt:
$$\boxed{S_{tp} = \pi l\left(R + r\right) + \pi r^2 + \pi R^2}.$$
Thể tích khối nón cụt:
$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}.$$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

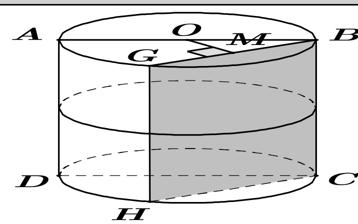
4.1.5. Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

Nội dung	Hình vẽ

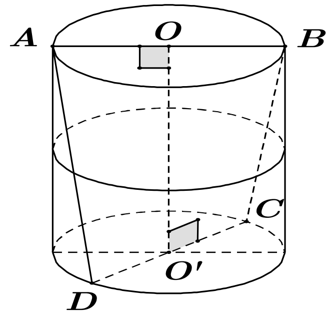
Từ hình tròn $(O;R)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung $\overset{\frown}{AnB}$ bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó. Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} l = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{2\pi}{x}. \\ h = \sqrt{l^2 - r^2} \end{cases}$	

4.2. Một số dạng toán và công thức giải bài toán mặt trụ

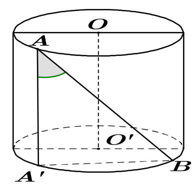
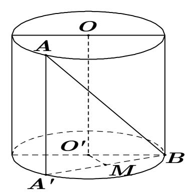
4.2.1. Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

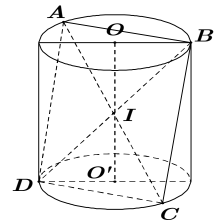
Nội dung	Hình vẽ
Thiết diện **vuông góc trục** là một đường tròn bán kính R. Thiết diện **chứa trục** là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$. Thiết diện **song song với trục** và **không chứa trục** là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d\left(OO';(BGHC)\right) = OM$	

4.2.2. Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

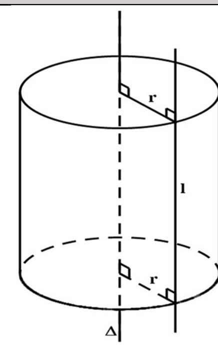
Nội dung	Hình vẽ
Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin(AB,CD)$ * Đặc biệt: Nếu AB và CD vuông góc nhau thì: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.OO'$.	

4.2.3. Dạng 3. Xác định góc khoảng cách

Nội dung	Hình vẽ
Góc giữa AB và trục OO': $\left(\widehat{AB,OO'}\right) = \widehat{A'AB}$	
Khoảng cách giữa AB và trục OO': $d(AB;OO') = OM$.	

Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là cạnh hình vuông: $AB\sqrt{2} = \sqrt{4R^2 + h^2}$.	

4.2.4. Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

Nội dung	Hình vẽ
Một khối trụ có thể tích V không đổi. • Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất: $S_{tp}\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}} \\ h = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}} \end{cases}$ • Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất: $S\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \end{cases}$	

4.2.5. Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

Cho hình lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \dfrac{4\pi V}{9}$

Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S_{xq} thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $S_{xq} = \dfrac{2S}{\pi}$

5. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT CẦU

5.1. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

5.1.1. Các khái niệm cơ bản

Trục của đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Đường trung trực của đoạn thẳng: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

Mặt trung trực của đoạn thẳng: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

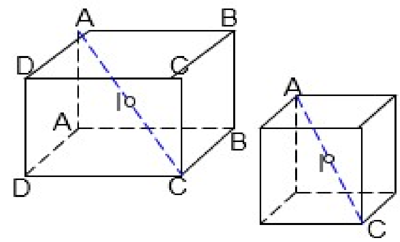
5.1.2. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

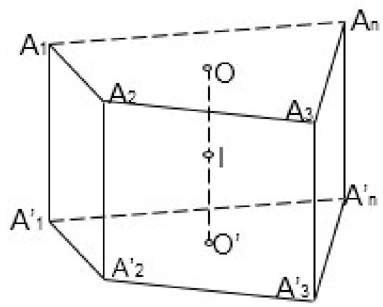
Bán kính: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

5.1.3. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

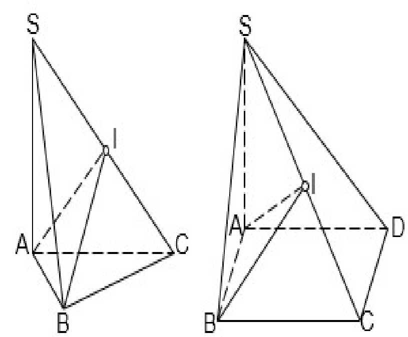
5.1.3.1. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Nội dung	Hình vẽ
Tâm: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương) $\Rightarrow$ Tâm là I, là trung điểm của AC'. **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương). $\Rightarrow$ Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.	

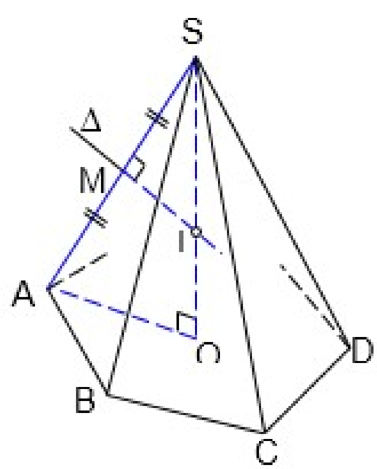
5.1.3.2. Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn

Nội dung	Hình vẽ
Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}...A_n^{'}$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}...A_n^{'}$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có: • **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'. • **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n^{'}$.	

5.1.3.3. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông

Nội dung	Hình vẽ
Hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$. • Tâm: I là trung điểm của SC. • Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$. Hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$. • Tâm: I là trung điểm của SC. • Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.	

5.1.3.4. Hình chóp đều

Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp đều $S.ABC...$ • Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow$ SO là trục của đáy. • Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu. Bán kính: Ta có: $\Delta SMI \backsim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính: $R = IS = \dfrac{SM.SA}{SO} = \dfrac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$	

5.1.3.5. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy

Nội dung	Hình vẽ

Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp (ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O.

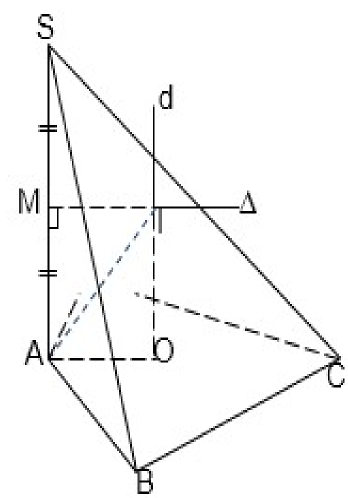
Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

- Từ tâm O ngoại tiếp của đường trònđáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O.
- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính
  $R = IA = IB = IC = IS = ...$
- Tìm bán kính

Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

Xét ΔMAI vuông tại M có:

$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

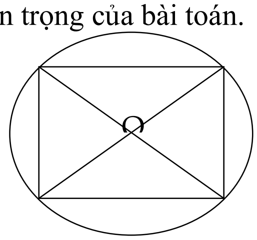


5.1.3.6. Hình chóp khác

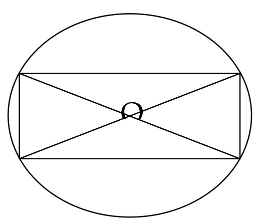
- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

5.1.3.7. Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp

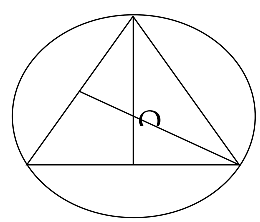
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



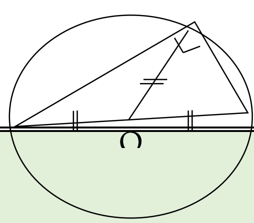
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



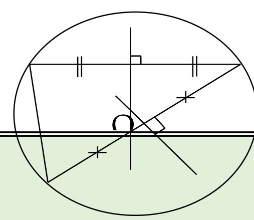
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).

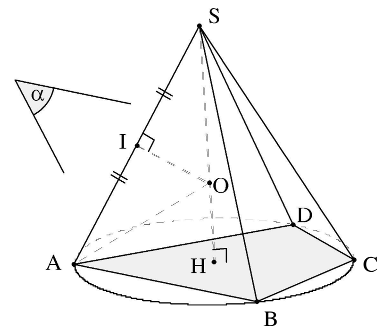


Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



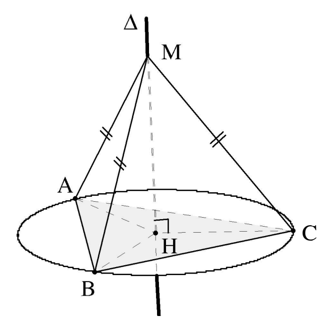
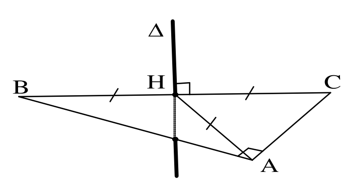
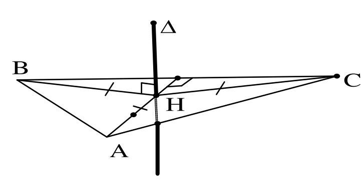
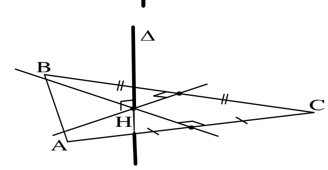
Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

5.2. Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

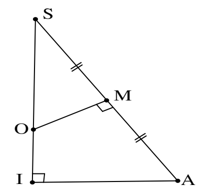
Nội dung	Hình vẽ
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước: • <u>Bước 1</u>: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. • <u>Bước 2</u>: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên. Lúc đó • Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$ • Bán kính: $R = SA\left(= SO\right)$. Tuỳ vào từng trường hợp.	

5.3. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

5.3.1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

Nội dung	Hình vẽ
Định nghĩa Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy. **Tính chất** $\forall M \in \Delta:\ MA = MB = MC$ Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$ **Các bước xác định trục** • <u>Bước 1:</u> Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. • <u>Bước 2:</u> Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.	
Một số trường hợp đặc biệt • Đáy là tam giác vuông	
• Đáy là tam giác đều	
• Đáy là tam giác thường	

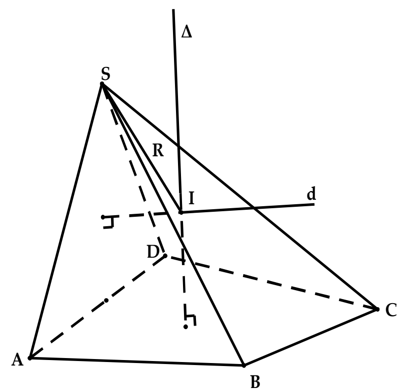
5.3.2. Kỹ năng tam giác đồng dạng

Nội dung	Hình vẽ
ΔSMO đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI}$.	

5.3.3. Nhận xét quan trọng

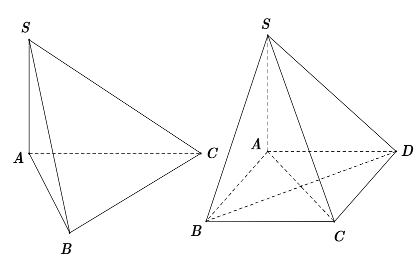
$\exists M,S : \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

5.4. Kỹ thuật sử dụng hai trục xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện

<table>
<tr><th>Nội dung</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td>
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thõa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:
• <u>Bước 1:</u>
Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
• <u>Bước 2:</u>
Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (dễ xác định) của khối chóp.
Lúc đó:
• Tâm I của mặt cầu: $\Delta \cap d = \left\{ I \right\}$
• Bán kính: $R = IA\left(= IS \right)$. Tuỳ vào từng trường hợp.
</td><td></td></tr>
</table>

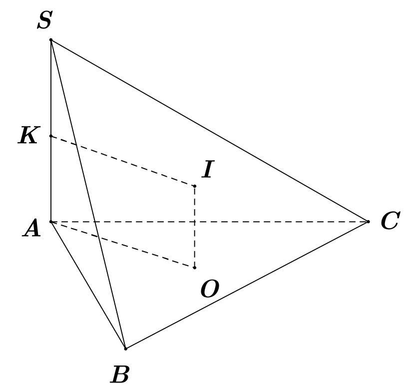
5.5. Tổng kết các dạng tìm tâm và bán kính mặt cầu

5.5.1. Dạng 1

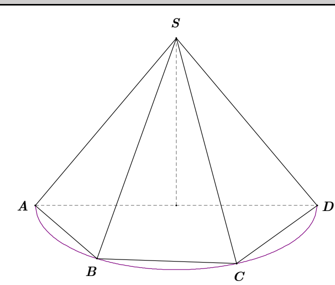
Nội dung	Hình vẽ
Cạnh bên SA vuông góc đáy và $\widehat{ABC} = 90^0$ khi đó $\boxed{R = \dfrac{SC}{2}}$ và tâm là trung điểm SC.	

5.5.2. Dạng 2

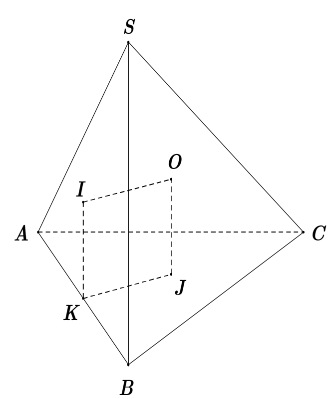
Nội dung	Hình vẽ

<table>
<tr><td>Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D, khi đó :
$$\boxed{R^2 = R_D^2 + \frac{SA^2}{4}}$$
• $\boxed{R_D = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$
(p : <u>nửa</u> chu vi).
• Nếu $\Delta\, ABC$ vuông tại A thì: $\boxed{R_D = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + AS^2\right)}$.
• Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
• nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.</td><td>
</td></tr>
</table>

5.5.3. Dạng 3

<table>
<tr><th>Nội dung</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td>Chóp có các cạnh bên bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$:
$$\boxed{R = \frac{SA^2}{2SO}}.$$
• $ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao hai đường chéo.
• ΔABC vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền.
• ΔABC đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm.</td><td>
</td></tr>
</table>

5.5.4. Dạng 4

<table>
<tr><th>Nội dung</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td>Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp:
$$\boxed{R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}$$</td><td>
</td></tr>
</table>

5.5.5. Dạng 5

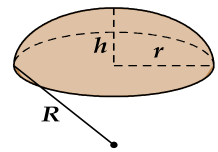
Chóp $S.ABCD$ có đường cao SH, tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O. Khi đó ta giải phương trình: $(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$. Với giá trị x tìm được ta có: $\boxed{R^2 = x^2 + R_D^2}$.

5.5.6. Dạng 6

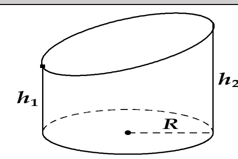
Bán kính mặt cầu nội tiếp: $\boxed{r = \dfrac{3V}{S_{tp}}}$.

6. TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY

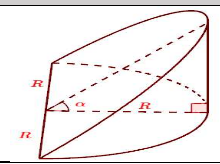
6.1. Chỏm cầu

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right) \\ V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) = \dfrac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right) \end{cases}}$	

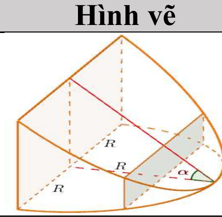
6.2. Hình trụ cụt

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right) \\ V = \pi R^2\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right) \end{cases}}$	

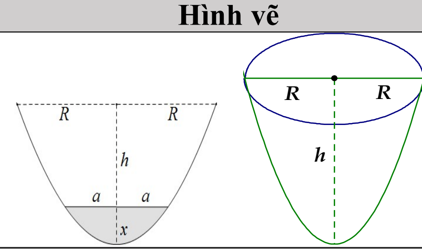
6.3. Hình nêm loại 1

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = \dfrac{2}{3}R^3 \tan\alpha}$	

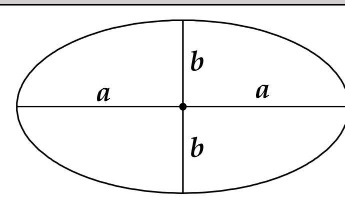
6.4. Hình nêm loại 2

Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{V = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)R^3 \tan\alpha}$	

6.5. Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay

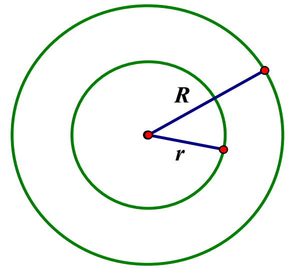
Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{parabol} = \dfrac{4}{3}Rh;\ \dfrac{S'}{S} = \left(\sqrt{\dfrac{x}{h}}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{R}\right)^3 \\ V = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h = \dfrac{1}{2}V_{trụ} \end{cases}}$	

6.6. Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip

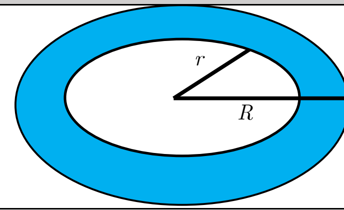
Nội dung	Hình vẽ
$\boxed{\begin{cases} S_{elip} = \pi ab \\ V_{xoay\ quanh\ 2a} = \dfrac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{xoay\ quanh\ 2b} = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}}$	

6.7. Diện tích hình vành khăn

Nội dung	Hình vẽ

$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$	

6.8. Thể tích hình xuyến (phao)

Nội dung	Hình vẽ
$V = 2\pi^2\left(\dfrac{R+r}{2}\right)\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2$	

II. CÁC DẠNG BÀI THƯỜNG GẶP

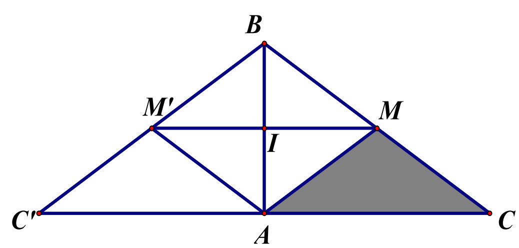
Dạng 1 : Bài toán thể tích, diện tích của khối tròn xoay được sinh ra từ việc quay 1 hình quanh cạnh nào đó.

Ví dụ 1. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 2a$ và $BC = 3a$, gọi M là trung điểm của BC. Khi quay tam giác MAC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc MAC tạo thành một hình tròn xoay. Tính thể tích của khối tròn xoay tương ứng.

A. $\dfrac{10\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{5\pi a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{5}$. Gọi C', M' là điểm đối xứng của C, M qua cạnh AB và I là trung điểm của MM', ta có $IM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Thể tích của khối nón tạo bởi tam giác ABC khi quay quanh trục AB là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi AC^2 AB = \frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{5}\right)^2 2a = \frac{10\pi a^3}{3}.$$

Gọi V_1 là thể tích của tam giác ABM quay quanh trục AB, ta có

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi IM^2 AB = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 2a = \frac{5\pi a^3}{6}.$$

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là $\dfrac{10\pi a^3}{3} - \dfrac{5\pi a^3}{6} = \dfrac{5\pi a^3}{2}$.

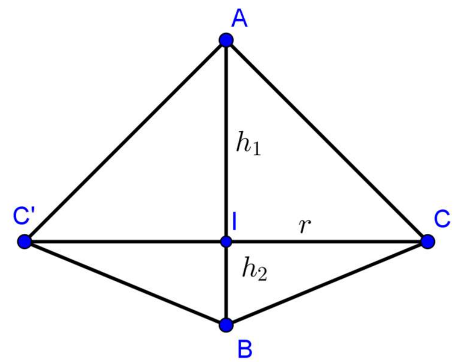
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 10\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$. Quay tam giác ABC xung quanh cạnh AB ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $200\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $\dfrac{325\pi}{2}\text{cm}^3$.

C. $\dfrac{4216\pi}{27}\text{cm}^3$. **D.** $\dfrac{550\pi}{9}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi C' là điểm đối xứng của C qua AB. Khi đó khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh AB gồm hai hình nón đỉnh A, B có chung đáy CC'. Khi đó ta có:

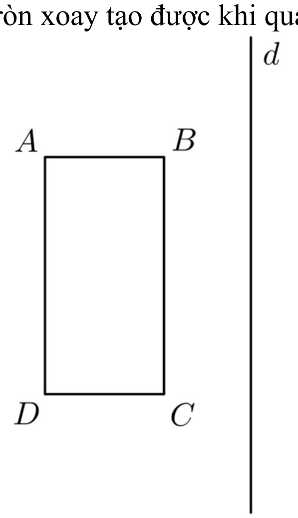
$V = \frac{1}{3}\pi r^2\left(h_1 + h_2\right) = \frac{1}{3}\pi.CI^2.AB$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d\left(C, AB\right).AB = \frac{1}{2}d\left(A, BC\right).BC$

$\Rightarrow CI = \dfrac{d\left(A, BC\right).BC}{AB}$, $d\left(A, BC\right) = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{11} \Rightarrow CI = \dfrac{5\sqrt{11}}{3}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{5\sqrt{11}}{3}\right)^2.6 = \dfrac{550\pi}{9}\text{cm}^3$.

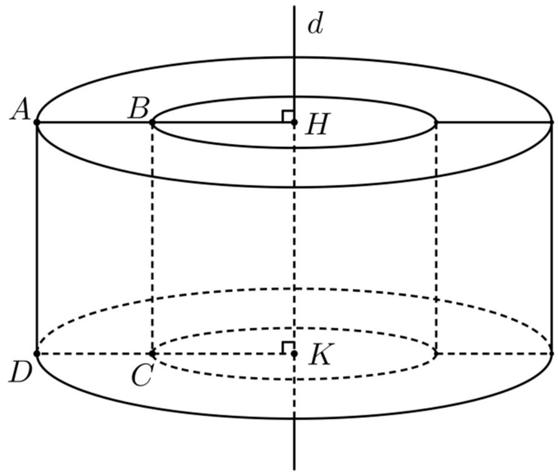
Ví dụ 3. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 3$. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$, song song AD và cách BC một khoảng bằng 2 (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích của khối tròn xoay tạo được khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh d.



A. 20π. **B.** 12π. **C.** 15π. **D.** 10π.

Lời giải

Chọn C



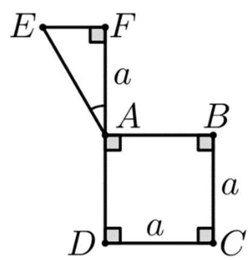
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên đường thẳng d.

Khi đó AD cách d một khoảng $AH = 2 + AB = 2 + 1 = 3$.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối trụ tròn xoay thu được khi quay các hình chữ nhật $ABCD, ADKH$ và $BCKH$ quanh đường thẳng d.

Khi đó $V = V_1 - V_2 = \pi.AH^2.AD - \pi.BH^2.AD = \pi.3.\left(3^2 - 2^2\right) = 15\pi$.

Ví dụ 4. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình như hình vẽ quanh trục DF. Biết $\widehat{EAF} = 30^\circ$.



A. $\dfrac{3\pi a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{10\pi a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn D

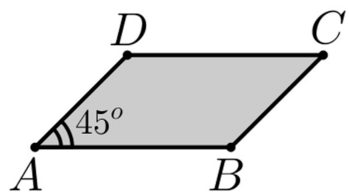
Khi quay mô hình trên quanh trục DF: Tam giác AFE tạo ra khối nón tròn xoay (N) và hình vuông $ABCD$ tạo ra khối trụ tròn xoay (T).

Khối nón (N) có $\begin{cases} h = AF = a \\ r = EF = AF.\tan 30^0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow V_{(N)} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi a^3}{9}$.

Khối trụ (T) có $\begin{cases} h = AD = a \\ r = AB = a \end{cases} \Rightarrow V_{(T)} = \pi r^2 h = \pi a^3$.

Vậy thể tích cần tính: $V = V_{(N)} + V_{(T)} = \dfrac{10\pi a^3}{9}$.

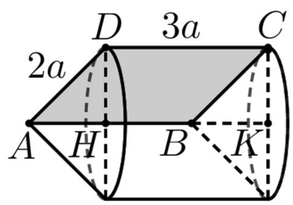
Ví dụ 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 3a$, $AD = 2a$, $\widehat{BAD} = 45^\circ$ (như hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay nhận được khi quay hình bình hành $ABCD$ quanh trục AB bằng



A. $\dfrac{5\pi a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{9\pi a^3}{2}$. **C.** $5\pi a^3$. **D.** $6\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên cạnh $AB \Rightarrow DH = a\sqrt{2}$. Khối tròn xoay nhận được khi quanh hình bình hành $ABCD$ quanh trục AB có thể tích đúng bằng thể tích khối trụ có đường sinh DC và bán kính đáy DH (hai hình nón bù trừ nhau).

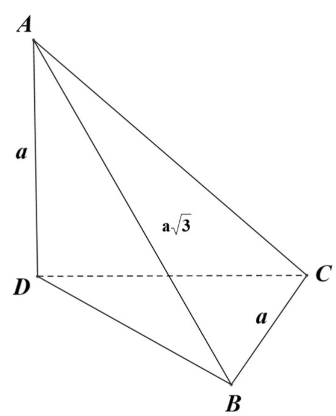
Vậy $V = \pi DH^2.HK = \pi DH^2.DC = \pi\left(a\sqrt{2}\right)^2.3a = 6\pi a^3$.

Ví dụ 6. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (DBC) và tam giác ABC vuông tại B. Biết $AD = BC = a$, $AB = a\sqrt{3}$. Quay khối tứ diện $ABCD$ xung quanh trục AD ta được khối tròn xoay (H). Thể tích của (H) bằng

A. $\dfrac{2a^3\pi}{3}$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{5a^3\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = a\sqrt{2}$.

$DC = \sqrt{BD^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi quay khối tứ diện quanh AD ta được khối nón đỉnh A, đường cao AD, đáy là đường tròn có bán kính $R = DC = a\sqrt{3}$.

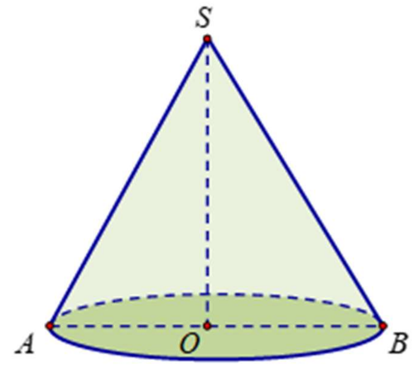
Dạng 2: Bài toán thể tích, diện tích của khối tròn xoay liên quan đến thiết diện cắt bởi một mặt phẳng

Ví dụ 1. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho, biết thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của hình nón là một tam giác đều.

A. $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = 3\pi a^3$. **D.** $V = \pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



◆ Gọi hình nón có đỉnh S, tâm đường tròn đấy là O và thiết diện qua trục SO là tam giác SAB.

Do đó tam giác SAB đều và $SO\perp AB$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có: $\tan 60^0=\dfrac{SO}{AO}\Leftrightarrow SO=AO\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của khối nón là: $S_{xq}=\pi Rl=\pi.OA.SA=\pi.OA.\sqrt{OA^2+SO^2}=\pi.2.OA^2$.

Mà $S_{xq}=6\pi a^2$ nên $\pi.2.OA^2=6\pi a^2\Leftrightarrow OA=a\sqrt{3}$. Suy ra $SO=3a$.

◆ Thể tích khối nón đã cho là: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot OA^2.SO=\dfrac{1}{3}.\pi.\left(a\sqrt{3}\right)^2.3a=3\pi a^3$.

Ví dụ 2. Một hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O và $SO=h$. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt đường tròn (O) theo dây cung AB sao cho góc $\widehat{AOB}=90°$, biết khoảng cách từ O đến (P) bằng $\dfrac{h}{2}$. Tính diện tích xung quanh hình nón theo h.

A. $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{6}$.

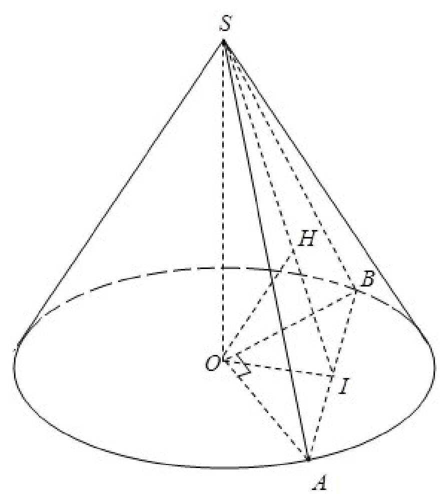
B. $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$.

C. $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$.

D. $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



◆ Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu của O trên $SI\Rightarrow OH\perp SI$.

Ta có $AB\perp OI$ và $AB\perp SO$ nên $AB\perp OH$

Do đó $OH\perp(SAB)$ tại H nên $OH=\mathrm{d}\left(O,(SAB)\right)=\dfrac{h}{2}$.

Xét tam giác SOI vuông tại O có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{4}{h^2}-\frac{1}{h^2}=\frac{3}{h^2}\Rightarrow OI=\frac{h\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác OAB vuông cân tại O nên: $AB=2OI=\frac{2h\sqrt{3}}{3}$, $R=OA=OB=\frac{h\sqrt{6}}{3}$.

- Xét tam giác SOB vuông tại O ta có: $l=SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=\sqrt{h^2+\left(\frac{h\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{h\sqrt{15}}{3}$.

- Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi R.l=\pi\cdot\frac{h\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{h\sqrt{15}}{3}=\frac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.

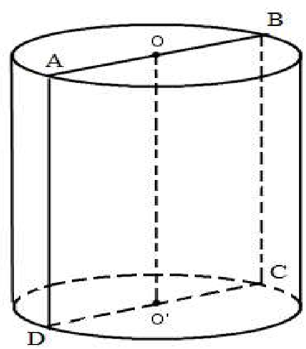
Ví dụ 3. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30\,\text{cm}^2$, chu vi bằng $26\,\text{cm}$. Biết chiều dài hình chữ nhật lớn hơn đường kính của mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là

A. $\frac{69\pi}{2}\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $69\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

C. $23\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $\frac{23\pi}{2}\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là h và r.

Do chiều dài hình chữ nhật lớn hơn đường kính của mặt đáy của hình trụ (T) nên $h>2r$.

Diện tích thiết diện là $h.2r=30\Rightarrow h.r=15$

Chu vi thiết diện là $2(h+2r)=26\Rightarrow h=13-2r$.

Ta có: $(13-2r)r=15\Leftrightarrow 2r^2-13r+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=5\\r=\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Với $r=5$ thì $h=3$ không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Với $r=\frac{3}{2}$ thì $h=10$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy diện tích toàn phần của (T) là $S_{TP}=2\pi r.h+2\pi r^2=2\pi.\frac{3}{2}.10+2\pi.\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{69\pi}{2}\left(\text{cm}^2\right)$.

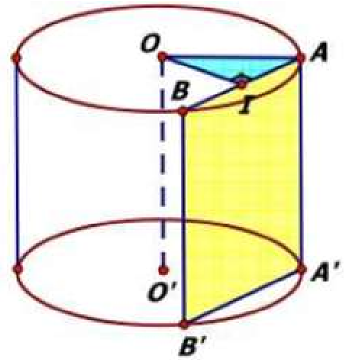
Ví dụ 4. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 2cm được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16 cm^2. Tính thể tích của khối trụ (T).

A. $32\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $16\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

C. $64\pi\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $8\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thiết diện đã cho là $AA'B'B$ (như hình vẽ) và I là trung điểm AB. Hình vuông $AA'B'B$ có diện tích bằng $16\ \left(\text{cm}^2\right) \Rightarrow$ cạnh hình vuông bằng $AA' = 4\text{cm}$.

Mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 2cm suy ra $OI = 2\ (\text{cm})$.

Ta có bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{OI^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Thể tích của khối trụ (T) là $V = \pi r^2 h = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2.4 = 32\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

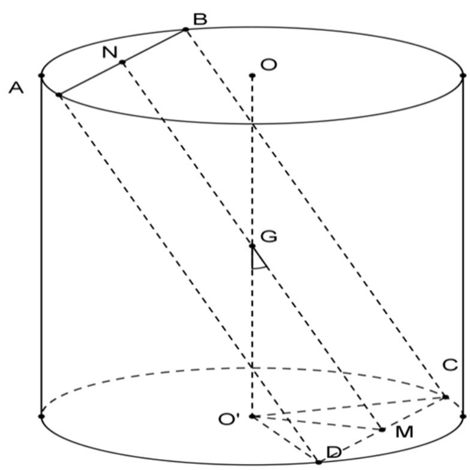
Ví dụ 5. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn có tâm lần lượt là O, O'. Gọi (α) là mặt phẳng qua trung điểm của OO' và tạo với đường thẳng OO' một góc $45°$. Biết mặt phẳng (α) cắt hai mặt đáy bởi hai đoạn AB và CD tạo thành hình vuông có diện tích 16. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

C. $S_{xq} = 8\pi$. **D.** $S_{xq} = 4\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r, h là bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình trụ, G là trung điểm của OO'.

Gọi thiết diện giữa (α) và hình trụ là hình vuông $ABCD$ như hình vẽ. M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Xét tam giác vuông $O'GM$ có $\widehat{O'GM} = 45°$, $GM = 2$ nên suy ra $\Delta O'GM$ vuông cân tại O' $\Rightarrow O'G = O'M = \sqrt{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông $O'MC$ có $O'M = \sqrt{2}$, $MC = 2 \Rightarrow r = O'C = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

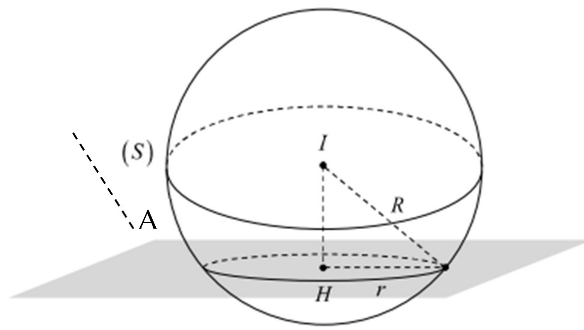
Vậy hình trụ có bán kính đáy $r=\sqrt{6}$, chiều cao $h=2\sqrt{2}$ nên có diện tích xung quanh là: $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.\sqrt{6}.2\sqrt{2}=8\sqrt{3}\pi$.

Ví dụ 6. Trong không gian cho mặt cầu (S) có bán kính $R=3$ và một điểm A nằm trong mặt cầu . Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, biết $IA=\sqrt{5}$. Bán kính đường tròn (C) là

A. 1. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có bán kính $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{5}<3$ nên A nằm trong mặt cầu (S).

Đặt h là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P), r là bán kính đường tròn (C).

Khi đó: $h\le IA=\sqrt{5}$

Thiết diện là đường tròn (C) có diện tích nhỏ nhất khi $h=\sqrt{5}$ khi và chỉ khi

$IA\perp(P)\Leftrightarrow r^2=R^2-h^2=3^2-\sqrt{5}^2=4\Rightarrow r=2$.

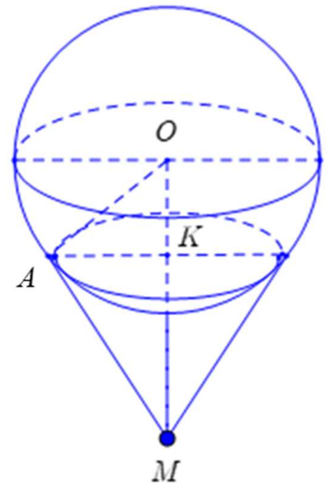
Đường tròn (C) có diện tích nhỏ nhất nên $r=2$.

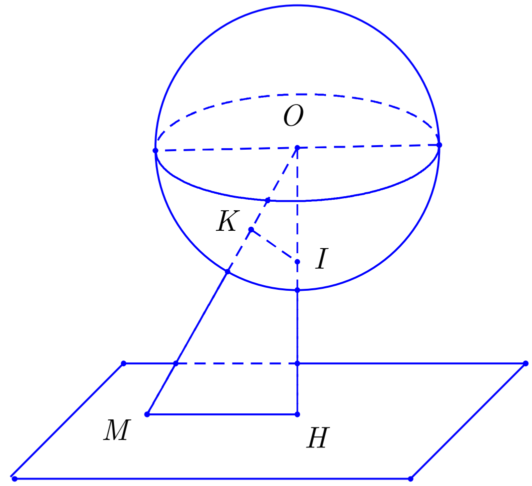
Ví dụ 7. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính bằng 3 và mặt phẳng (P). Khoảng cách từ O đến (P) bằng 6 . Từ điểm M thay đổi trên (P) kẻ các tiếp tuyến MA, MB, MC tới (S) với A, B, C là các tiếp điểm. Biết mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm I cố định. Tính độ dài đoạn OI.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D





Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (ABC) và OM.

Gọi H là hình chiếu của O trên $(P) \Rightarrow H$ cố định.

Trong mặt phẳng (OMH) kẻ $KI \perp OM$ $(I \in OH)$ tại K.

Ta có (ABC) là mặt phẳng qua K và vuông góc với OM nên $KI \subset (ABC)$.

Ta có $OA^2 = OK.OM = OI.OH \Rightarrow OI = \dfrac{OA^2}{OH} = \dfrac{3^2}{6} = \dfrac{3}{2}$.

Mặt khác I thuộc đoạn thẳng OH cố định nên I cố định.

Ví dụ 8. Cho điểm A nằm trên mặt cầu (S) tâm O bán kính $R = 9cm$. Gọi I, K là hai điểm nằm đoạn OA sao cho $OI = IK = KA$. Các mặt phẳng $(P),(Q)$ lần lượt đi qua I, K cùng vuông góc với OA và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r_1, r_2. Tính tỉ số $\dfrac{r_1}{r_2}$.

A. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{5}{3\sqrt{10}}$.

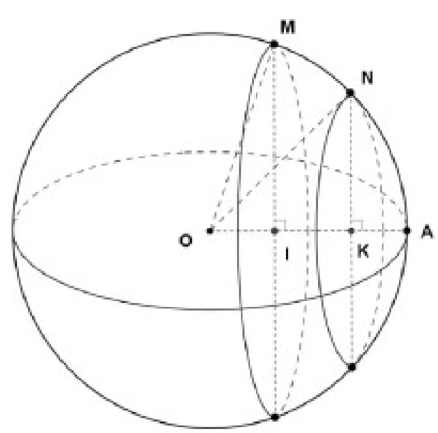
B. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

C. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

D. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Bán kính mặt cầu là $R = 9cm$ nên $OA = 9cm \Rightarrow OI = IK = KA = 3cm; OK = 6cm$.

Gọi một giao điểm của các mặt phẳng $(P),(Q)$ với mặt cầu (S) là M, N, ta có:

$$\begin{cases} IM = r_1, KN = r_2 \\ OM = ON = 9cm \end{cases}.$$

Khi đó: $r_1 = \sqrt{OM^2 - OI^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$; $r_2 = \sqrt{ON^2 - OK^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$.

Suy ra: $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Dạng 3 : Bài toán thể tích, diện tích và các yếu tố khác của khối nón, khối trụ ngoại tiếp, nội tiếp các khối khác.

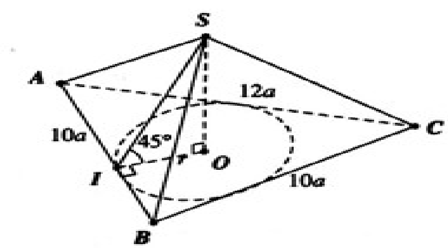
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác có $AB = BC = 10a, AC = 12a$ góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích khối nón nội tiếp hình chóp đã cho.

A. $9\pi a^3$. **B.** $27\pi a^3$. **C.** $3\pi a^3$. **D.** $12\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

Nửa chu vi tam giác ABC là $p = \dfrac{10a + 10a + 12a}{2} = 16a$.



Diện tích tam giác ABC là:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16a(16a-10a)(16a-10a)(16a-12a)} = 48a^2$.

Mà $S_{\Delta ABC} = pr \Rightarrow r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} = \dfrac{48a^2}{16a} = 3a$, với r là bán kính của đường tròn đáy nội tiếp tam giác ABC.

Lại có $\tan\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{IO} \Rightarrow SO = IO.\tan 45° = IO = 3a$.

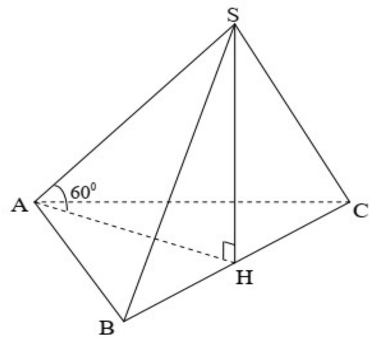
Thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}SO.\pi.r^2 = \dfrac{1}{3}.3a.\pi(3a)^2 = 9\pi a^3$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a; AC = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm BC biết SH vuông góc mặt phẳng (ABC) và SA tạo với đáy một góc $60°$. Một hình nón có đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính diện tích xung quanh của mặt nón đã cho.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{3}\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$; $AH=\dfrac{1}{2}BC=a$.

Do $SH\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{\left(SA,(ABC)\right)}=\widehat{SAH}=60^\circ$. Suy ra $SA=\dfrac{AH}{\cos 60^0}=2a$.

Hình nón có đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có $r=a; l=2a$.

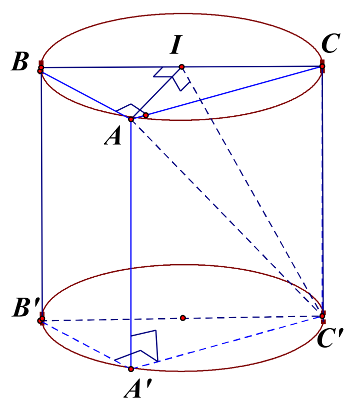
Vậy diện tích xung quanh của mặt nón đã cho là $S_{xp}=\pi rl=2\pi a^2$.

Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30°. Tính thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi bán kính của hình trụ là R, I là trung điểm BC

Ta có: $CC'\perp(ABC)\Rightarrow CC'\perp AI$.

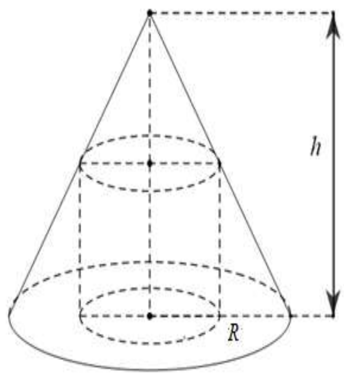
Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI\perp BC$ do đó $AI\perp(BCC'B')$ hay góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác AIC' ta có: $IC'=\dfrac{AI}{\tan\widehat{IC'A}}=R\sqrt{3}$.

Xét tam giác CIC' ta có: $IC'^2=IC^2+CC'^2\Leftrightarrow 3R^2=R^2+4a^2\Rightarrow R=a\sqrt{2}$.

Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=\pi R^2.h=4\pi a^3$.

Ví dụ 4. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng

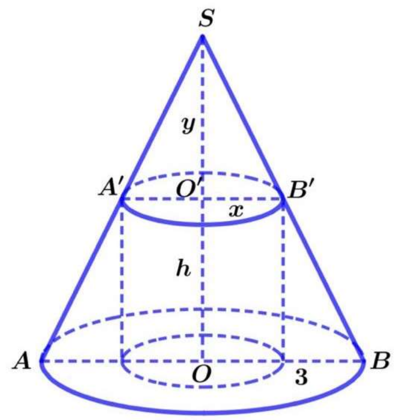


A. 10π. **B.** 6π. **C.** 8π. **D.** 4π.

Lời giải

GVSB: Cao Tung; GVPB1: Hoàng Văn Hoan GVPB2: Bùi Văn Cảnh

Chọn C



Đặt $OO' = l$, $B'O' = x$, $SO = h = 6$ và $SO' = y$.

Áp dụng định lý Talet vào tam giác SOB ta được $\dfrac{O'B'}{OB} = \dfrac{SO'}{SO} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{6} \Leftrightarrow y = 2x$.

Ta có $l = 6 - y = 6 - 2x$. Suy ra $V = \pi.x^2.(6-2x) = \pi.x.x.(6-2x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số x, x và $6-2x$ ta được

$V = \pi.x.x.(6-2x) \le \pi\left(\dfrac{x+x+6-2x}{3}\right)^3 = 8\pi$.

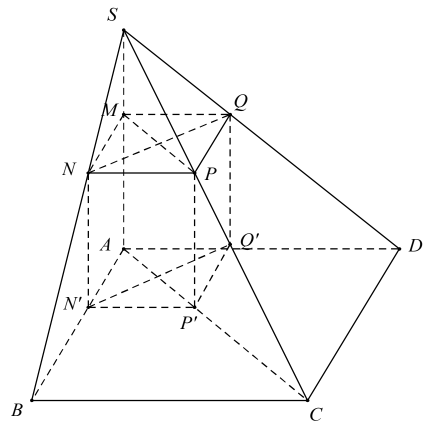
Vậy $V_{\max} = 8\pi$ khi $x = 2$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao $SA = 2a$. $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy, trong đó $M \in SA$ và $AM = x$. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và đường sinh MA. Giá trị của x để thể tích khối trụ lớn nhất là

A. $x = \dfrac{a}{3}$. **B.** $x = \dfrac{2a}{3}$. **C.** $x = \dfrac{a}{2}$. **D.** $x = \dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy $\Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Vì $MN//AB \Rightarrow \dfrac{MN}{AB}=\dfrac{SM}{SA} \Rightarrow MN=\dfrac{AB.SM}{SA}=\dfrac{a\left(2a-x\right)}{2a}=a-\dfrac{x}{2}$.

Gọi R là bán kính đáy hình trụ, ta có: $R=\left(a-\dfrac{x}{2}\right).\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thể tích hình trụ $V=\pi.R^2.x=\pi.\left[\left(a-\dfrac{x}{2}\right).\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^2.x=\pi\left(\dfrac{x^3}{8}-\dfrac{ax^2}{2}+\dfrac{a^2x}{2}\right)$

Xét $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{8}-\dfrac{ax^2}{2}+\dfrac{a^2x}{2} \Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{3x^2}{8}-ax+\dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2a \\ x=\dfrac{2}{3}a \end{array}\right.,\ x\in\left(0;2a\right)$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{2a}{3}$		2a
f'(x)		+	0	-	0
f(x)		↗		↘	

Vậy để thể tích khối trụ lớn nhất khi $x=\dfrac{2a}{3}$.

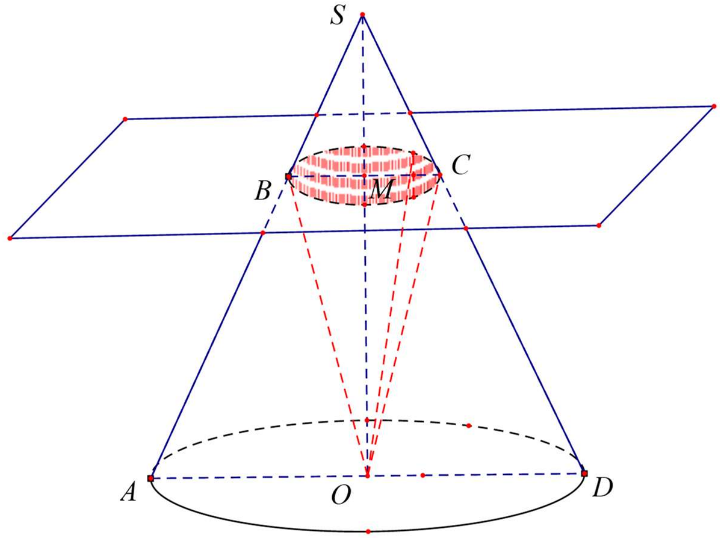
Dạng 4 : Bài toán thể tích, diện tích của khối nón trụ, hình nón trụ liên quan đến max min

Ví dụ 1. Cho hình nón $\left(N\right)$ có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x$, $0<x<h$. $\left(C\right)$ là thiết diện của mặt phẳng $\left(P\right)$ vuông góc với trục SO tại M, với hình nón $\left(N\right)$. Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là $\left(C\right)$ lớn nhất.

A. $\dfrac{h}{2}$. **B.** $\dfrac{h\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{h}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có BM là bán kính đường tròn (C).

Do tam giác $\Delta SBM \backsim \Delta SAO$ nên $\dfrac{BM}{AO}=\dfrac{SM}{SO} \Leftrightarrow BM=\dfrac{AO.SM}{SO} \Leftrightarrow BM=\dfrac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là:

$V=\dfrac{1}{3}\pi BM^2.OM=\dfrac{1}{3}\pi\left[\dfrac{R(h-x)}{h}\right]^2 x=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$, $(0<x<h)$ ta có

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x) \Leftrightarrow x=\dfrac{h}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta có :

x	0		$\dfrac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\dfrac{4\pi R^2 h}{81}$		$\searrow$

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x=\dfrac{h}{3}$.

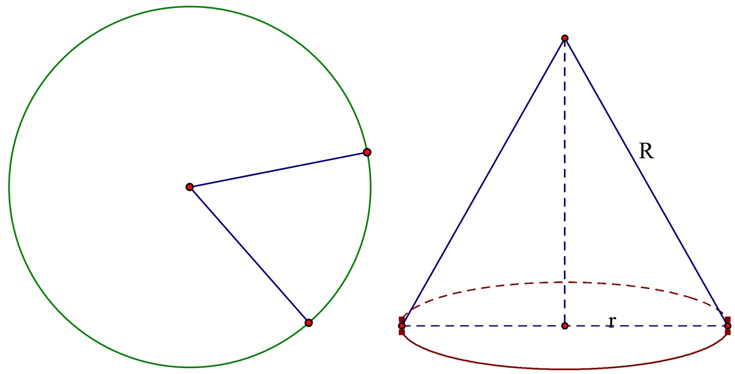
Ví dụ 2. Với một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính R, phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón. Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là x. Tìm x để thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất.

A. $x=\dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$. **B.** $x=\dfrac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$.

C. $x=\dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $x=\dfrac{\pi R\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Chu vi đường tròn đĩa là: $C = 2\pi R$.
Chu vi đường tròn đáy của hình nón là: $C' = x$

Bán kính đường tròn đáy hình nón là: $r = \dfrac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}.\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}.\pi\dfrac{x^2}{4\pi^2}.\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

$$\Rightarrow V' = \frac{1}{6\pi}x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} - \frac{1}{3}\pi\frac{x^2}{4\pi^2}\frac{\frac{1}{4\pi^2}x}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}} = \frac{1}{12\pi^2}x\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2} - \frac{1}{24\pi^2}\frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}}.$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12\pi^2}x\left(4\pi^2R^2 - x^2\right) = \frac{1}{24\pi^2}x^3 \Leftrightarrow 2\left(4\pi^2R^2 - x^2\right) = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8\pi^2R^2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$		$2\pi R$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$V_{\max}$	$\searrow$	

Vậy $x = \dfrac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$ thì thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất.

Ví dụ 3. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích 16π (m^3). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. $0,8$ m. **B.** 1,2 m. **C.** 2 m. **D.** 2,4 m.

Lời giải

Chọn C

Để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} phải nhỏ nhất.

Gọi h $(h > 0)$ là chiều cao của bồn dầu. Ta có: $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Mặt khác, theo giả thiết: $V = 16\pi \Leftrightarrow \pi r^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{16}{r^2}$

$$\Rightarrow S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi r\cdot\frac{16}{r^2} = 2\pi\left(r^2 + \frac{16}{r}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{8}{r} + \frac{8}{r}\right).$$

Áp dụng BĐT *Cauchy* cho 3 số dương: r^2, $\frac{8}{r}$, $\frac{8}{r}$, ta được: $r^2+\frac{8}{r}+\frac{8}{r}\ge 3\sqrt[3]{r^2\cdot\frac{8}{r}\cdot\frac{8}{r}}=12$

$\Rightarrow S_{\text{tp}}\ge 24\pi$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow r^2=\frac{8}{r}\Leftrightarrow r^3=8\Leftrightarrow r=2$.

$\Rightarrow \min\left(S_{\text{tp}}\right)=24\pi$.

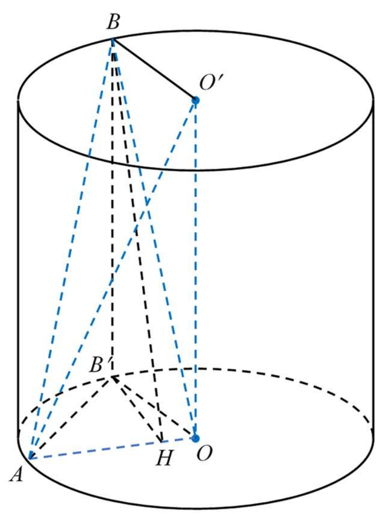
Vậy để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì $r=2$ (m).

Ví dụ 4. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $\sqrt{3}a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\alpha=90^\circ$. **B.** $\alpha=45^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O), H là hình chiếu của B' trên OA.

Suy ra $\left(\widehat{(OAB),(OAB')}\right)=\left(\widehat{HB,HB'}\right)=\widehat{BHB'}=\alpha$, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Xét tam giác OAB' cân tại O $\Rightarrow d\left(A,OB'\right)=B'H=d\left(A,(OO'BB')\right)$.

Ta có: $V_{A.OO'B}=\frac{1}{3}d\left(A,(OO'BB')\right).S_{\Delta OO'B}=\frac{1}{3}.B'H.\frac{1}{2}.\sqrt{3}a.a=\frac{\sqrt{3}a^2}{6}.B'H$.

Do đó $\max V_{A.OO'B}$ khi $\max B'H$.

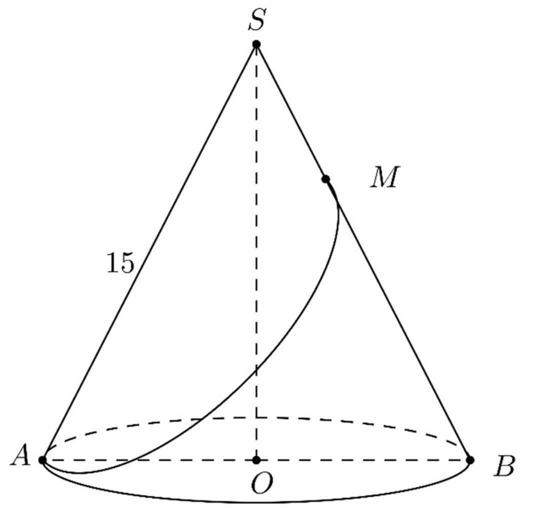
Mặt khác ta luôn có $B'H\le B'O\Rightarrow \max B'H=B'O=a$ khi $H\equiv O$.

Vậy $\max V_{A.OO'B}=\frac{\sqrt{3}a^2}{6}.a=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ khi $H\equiv O$.

Khi đó xét tam giác HBB' vuông tại B' có $\tan\widehat{BHB'}=\tan\alpha=\frac{BB'}{B'H}=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=60^\circ$.

Dạng 5 : Bài toán thể tích, diện tích của khối nón – trụ, hình nón – trụ sử dụng kỹ thuật trải phẳng.

Ví dụ 1. Cho một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $5cm$, đường sinh bằng $15cm$. Cho AB là đường kính của đường tròn đáy. Một con kiến bò từ đỉnh A trên hình nón đến một điểm M thuộc đoạn thẳng SB (tham khảo hình vẽ). Quãng đường ngắn nhất con kiến bò được bằng



A. $13cm$.

B. $11cm$.

C. $\dfrac{15}{2}cm$.

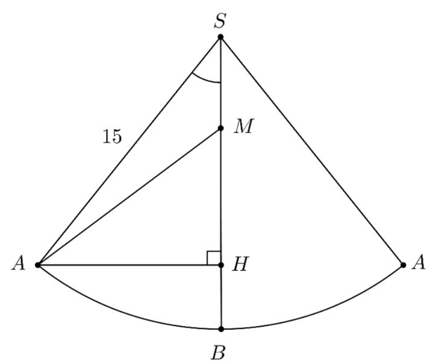
D. $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}cm$.

Lời giải

Chọn C

Khi cắt theo mép của đường sinh SA và trải phẳng như hình vẽ.

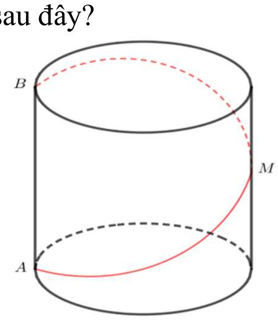
Ta có độ dài cung AB là $L_{\widehat{AB}} = \dfrac{1}{2}C_{dt} = r\pi = 5\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{L_{\widehat{AB}}}{r_q} = \dfrac{5\pi}{SA} = \dfrac{\pi}{3}$



Khi đó $AM_{\min} \Leftrightarrow AM \perp SB \Leftrightarrow M \equiv H$.

Trong tam giác SAH : $AM_{\min} = AH = SA.\sin\alpha = 15.\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\ (cm)$

Ví dụ 2. Một thùng nhựa đựng hàng hình trụ cao $2m$, bán kính đáy $0,5m$. Người ta muốn quấn một dải băng trang trí từ vị trí A đến M rồi từ M đến B như hình vẽ. Chiều dài ngắn nhất của 6 dải băng như thế gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. $22,3$ m.

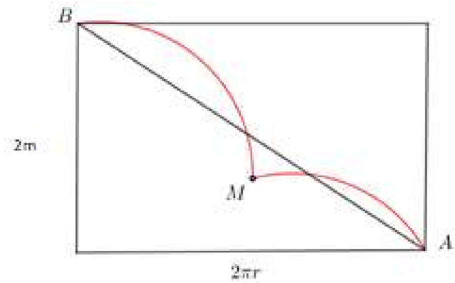
B. $23,6$ m.

C. $19,6$ m.

D. $21,6$ m.

Lời giải

Chọn A



Cắt mặt xung quanh của hình trụ theo đường sinh AB rồi đem trải trên một mặt phẳng ta được hình chữ nhật có hai kích thước là $h=2(m)$ và $d=2\pi r=2\pi.0,5=\pi\,(m)$. Đường chéo của hình chữ nhật là $AB=\sqrt{h^2+d^2}$.

Vì dải băng quấn quanh thân của hình trụ nên khi trải phẳng thì các điểm tiếp xúc giữa dải băng và mặt xung quanh của hình trụ luôn nằm trên mặt phẳng.

Do vậy, chiều dài ngắn nhất của dải băng bằng AB khi M thuộc đường chéo AB.

Vậy chiều dài ngắn nhất của 6 dải băng như thế là $6AB=6\sqrt{h^2+d^2}\approx 22,3\,m$. Nên chọn A.

Dạng 6 : Bài toán thực tế hình nón – trụ , khối nón – trụ

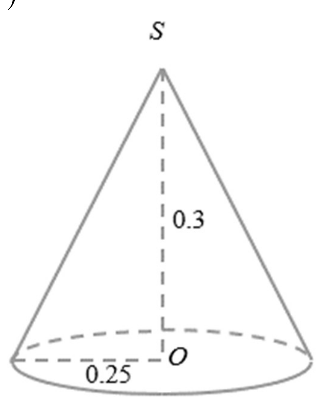
Ví dụ 1. Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13\,m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường kính vành nón $50\,cm$, chiều cao $30\,cm$ thì cần khối lượng lá gần nhất với con số nào dưới đây? (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón)

A. $50\,kg$ **B.** $76\,kg$. **C.** $48\,kg$. **D.** $38\,kg$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết mỗi chiếc nón lá là một hình nón có bán kính đáy $R=\dfrac{50}{2}=25(cm)=0,25(m)$ và đường cao $h=30(cm)=0,3(m)$.



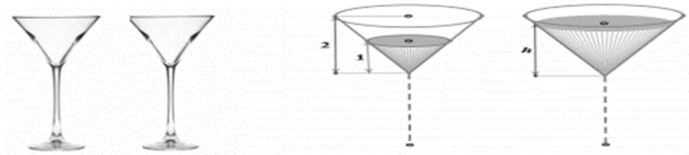
Gọi l là chiều cao của hình nón$\Rightarrow l=\sqrt{R^2+h^2}=\dfrac{\sqrt{61}}{20}\,(m)$.

Diện tích xung quanh của 1 chiếc nón lá là $S_{xq}=\pi Rl=\pi.0,25.\dfrac{\sqrt{61}}{20}=\dfrac{\pi\sqrt{61}}{80}\,(m^2)$

Tổng diện tích xung quanh của 1000 chiếc nón là $S=1000.\dfrac{\pi\sqrt{61}}{80}=\dfrac{25\pi\sqrt{61}}{2}\,(m^2)$

Do đó khối lượng lá cần dùng là $\dfrac{S}{6,13}\approx 50,03(kg)$.

Ví dụ 2. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2\,dm$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1dm$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01dm$).



A. $h \approx 1,41dm$. **B.** $h \approx 1,89dm$.
C. $h \approx 1,91dm$. **D.** $h \approx 1,73dm$.

Lời giải

Chọn C

Gọi bán kính đáy, thể tích (phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao $2dm$) của khối nón lần lượt là r; V.

Gọi bán kính đáy, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ nhất sau khi rót sang ly thứ hai) của khối nón lần lượt là r_1; V_1.

Gọi bán kính đáy, chiều cao, thể tích (tính từ đỉnh của khối nón đến mặt phẳng của chất lỏng của ly thứ hai) của khối nón lần lượt là r_2; h; V_2.

Thể tích chất lỏng ban đầu là: $V = \dfrac{2}{3}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng còn lại sau khi rót sang ly thứ hai là: $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2$.

mà $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow r_1 = \dfrac{r}{2} \Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{12}\pi r^2$.

Thể tích chất lỏng ly thứ hai là: $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h = V - V_1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h = \dfrac{7}{12}\pi r^2 \Leftrightarrow r_2^2 h = \dfrac{7}{4}r^2$.

mà $\dfrac{r_2}{r} = \dfrac{h}{2} \Leftrightarrow r_2 = \dfrac{hr}{2} \Rightarrow h^3 = 7 \Rightarrow h \approx 1,91dm.$

Kết luận: $h \approx 1,91dm.$

Ví dụ 3. Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao 4,2m. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính 40cm và 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính 26cm. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380.000 đồng/m2 thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó ?

A. 14.647.000. **B.** 13.627.000.
C. 16.459.000. **D.** 15.844.000.

Lời giải

Chọn D

Diện tích cần sơn chính là tổng diện tích xung quanh của các cây cột có dạng hình trụ.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là tổng diện tích xung quanh của 4 cây cột nhà hình trụ có đường kính $40cm$ và 6 cây cột nhà hình trụ có đường kính $26cm$.

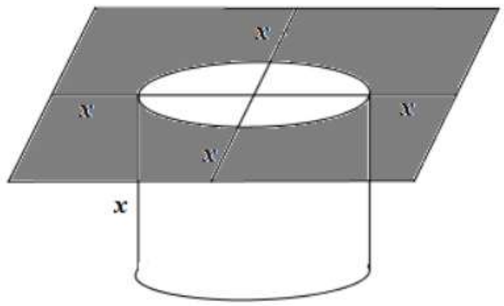
Gọi r_1, l_1 lần lượt là bán kính, độ dài đường sinh của 4 cây cột nhà hình trụ có đường kính $40cm$ và r_2, l_2 lần lượt là bán kính, độ dài đường sinh của 6 cây cột nhà hình trụ có đường kính $26cm$.

Khi đó: $r_1 = 20cm = 0,2m$, $l_1 = 4,2m$ nên $S_1 = 4.2\pi r_1 l_1 = 8\pi.0,2.4,2 = \dfrac{168\pi}{25}\left(m^2\right)$.

Lại có: $r_2 = 13cm = 0,13m$, $l_2 = 4,2m$ nên $S_2 = 6.2\pi r_2 l_2 = 12\pi.0,13.4,2 = \dfrac{819\pi}{125}\left(m^2\right)$.

Vậy số tiền người chủ biệt thự phải trả để sơn 10 cây cột nhà là $\left(\frac{168\pi}{25}+\frac{819\pi}{125}\right)\times 380.000\approx 15.844.000$.

Ví dụ 4. Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.



A. $V=13,5\pi\left(m^3\right)$.
B. $V=27\pi\left(m^3\right)$.
C. $V=36\pi\left(m^3\right)$.
D. $V=72\pi\left(m^3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9-2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\frac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V=\pi\left(\frac{9-2x}{2}\right)^2 x=\frac{\pi}{4}(9-2x)^2 x$

Xét hàm số $f(x)=(9-2x)^2 x=4x^3-36x^2+81x$ với $0<x<\frac{9}{2}$ ta có:

$$f'(x)=12x^2-72x+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{9}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

BBT:

x	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	54	$\searrow$	0

Dựa vào BBT ta thấy $Max\, f(x)=54 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max}=\frac{\pi}{4}.54=\frac{27\pi}{2}=13,5\pi\left(m^3\right)$.

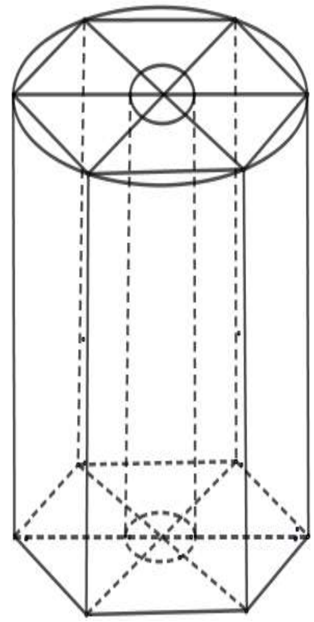
Ví dụ 5. Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định 1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng, 1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $8,45.a$ đồng.
B. $7,82.a$ đồng.

C. $84,5.a$ đồng. **D.** $78,2.a$ đồng.

Lời giải

Chọn B



$1\ m^3$ gỗ có giá a triệu đồng suy ra $1\ mm^3$ gỗ có giá $\dfrac{a}{1000}$ đồng.

$1\ m^3$ than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra $1\ mm^3$ than chì có giá $\dfrac{6a}{1000}$ đồng.

Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200.\pi.1^2 = 200\pi\left(mm^3\right)$.

Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200.6.\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi\left(mm^3\right)$.

Số tiền làm một chiếc bút chì là $\dfrac{6a.V_1 + a.V_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.

Dạng 7 : Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

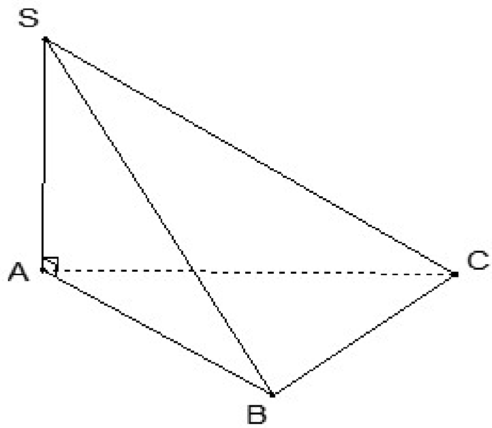
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = 2a, AB = 5a, AC = 8a$ và $\widehat{BAC} = 60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{416\sqrt{39}}{27}\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{416\sqrt{13}}{27}\pi a^3$.

C. $V = \dfrac{416\sqrt{13}}{9}\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{416\sqrt{39}}{9}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \Rightarrow BC = 7a$

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Ta có $\dfrac{BC}{\sin A} = 2r$ nên $r = \dfrac{7}{\sqrt{3}}a$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng $R = \sqrt{\dfrac{SA^2}{4} + r^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{49}{3}a^2} = \dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}a$

Vậy $V_{KC} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{416\sqrt{39}}{27}\pi a^3$

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $BC = a$, tam giác SAB cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SA = SB = a$. Biết góc β tạo bởi mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ thỏa mãn $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

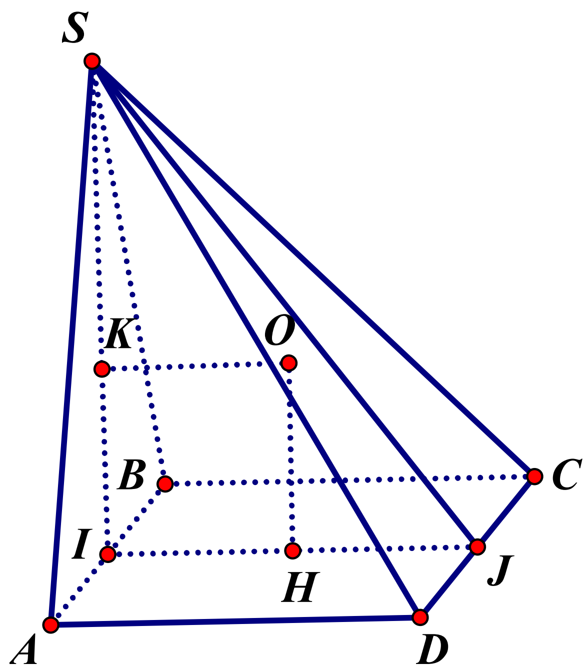
A. $V = \dfrac{7\sqrt{7}\pi}{54}a^3$.

B. $V = \dfrac{7\sqrt{21}\pi}{54}a^3$.

C. $V = \dfrac{7\sqrt{21}\pi}{27}a^3$.

D. $V = \dfrac{7\sqrt{21}\pi}{21}a^3$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AB. Vì $(SAB)\perp(ABCD)$ nên $SI\perp(ABCD)$

Gọi J là trung điểm của CD. Góc tạo bởi mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SJI}=\beta \Rightarrow \tan\beta=\dfrac{SI}{JI}=\dfrac{SI}{a}\Rightarrow SI=a.\tan\beta=a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SAB là tam giác cân có $SA=SB=a$, đường cao bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên cạnh đáy $AB=a$. Vậy tam giác SAB đều cạnh a và $ABCD$ là hình vuông cạnh a

Gọi H tâm hình vuông $ABCD$.

Từ H kẻ d_1 song song với SI.

Từ K kẻ d_2 song song với HI.

Gọi O là giao điểm của d_1 và d_2 suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Suy ra

$$R=SO=\sqrt{SK^2+KO^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$$

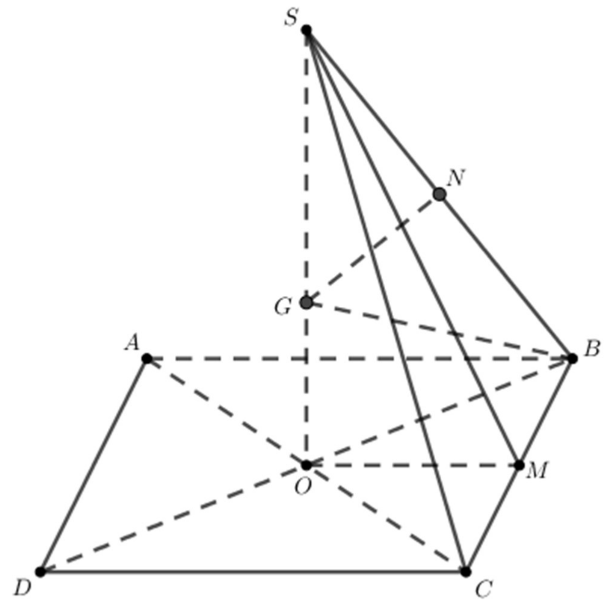
$$V=\frac{4}{3}\pi.R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\right)^3=\frac{7\sqrt{21}\pi}{54}a^3.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Diện tích đa giác $ABCD$ bằng x; mặt bên tạo với đáy một góc α. Gọi V_1 là thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích hình chóp $S.ABCD$. Xác định α nhỏ nhất để $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{27\pi}{8}$.

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 75°.

Lời giải

Chọn A



Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đa giác $ABCD$ là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên cùng tạo với đáy một góc α , $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Lấy M là trung điểm của BC $\Rightarrow \alpha = \widehat{SMO}$.

Gọi N là trung điểm của SB. Trong mặt phẳng (SOB), dựng $NG \perp SB$ và $NG \cap SO \equiv G$.

$\Rightarrow G$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có: diện tích $ABCD$ bằng $.x$.$\Rightarrow AB = BC = CD = DA = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} OM = \dfrac{\sqrt{x}}{2} \\ OB = \dfrac{\sqrt{2x}}{2} \end{cases}$.

Ta có: $\alpha = \widehat{SMO} \Rightarrow SO = \dfrac{\sqrt{x}}{2}.\tan\alpha \Rightarrow SB = \sqrt{\dfrac{x}{4}.\tan^2\alpha + \dfrac{x}{2}}$.

Đặt $SG = GB = r \Rightarrow GO^2 = r^2 - OB^2 = r^2 - \dfrac{x}{2}$

$$r = \frac{SB^2}{2SO} = \frac{\frac{x}{4}.\tan^2\alpha + \frac{x}{2}}{2.\frac{\sqrt{x}}{2}.\tan\alpha} = \frac{\sqrt{x}}{4}.\frac{\tan^2\alpha + 2}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{48}\pi x\sqrt{x}\left(\frac{\tan^2\alpha + 2}{\tan\alpha}\right)^3.$$

Mặt khác, thể tích của $S.ABCD$ là: $V_2 = \dfrac{1}{3}.x.SO = \dfrac{1}{6}x\sqrt{x}\tan\alpha$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{8}.\frac{\left(\tan^2\alpha + 2\right)^3}{\tan^4\alpha} = \frac{27\pi}{8} \Leftrightarrow \left(\tan^2\alpha + 2\right)^3 = 27\tan^4\alpha \ (1).$$

Đặt: $\tan^2\alpha = t,\ t > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (t+2)^3 = 27t^2 \Leftrightarrow t^3 - 21t^2 + 12t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx -0,39 \text{ (loại)} \\ t = 1 \\ t \approx 20.39 \end{array}\right..$$

- Với $t=1$: $\tan^2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=45^\circ$.
- Với $t\approx 20.39$: $\tan^2\alpha\approx 20.39 \Leftrightarrow \alpha\approx 77^\circ$.

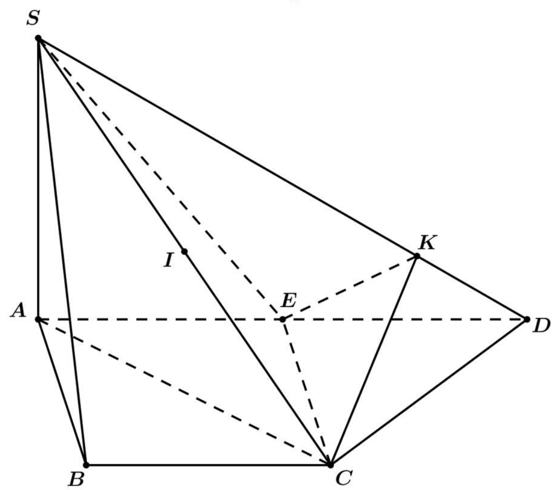
Vậy α nhỏ nhất thỏa mãn ycbt là: $\alpha=45^\circ$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK\perp SD$ tại K. Tính thể tích của mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K?

A. $V=\dfrac{\pi a^3}{6}$. **B.** $V=\sqrt{6}\pi a^3$.

C. $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Vì E là trung điểm AD nên $ABCE$ là hình vuông cạnh a, nên $CE\perp AD$ (1).

Mặt khác $SA\perp(ABCD)\Rightarrow CE\perp SA$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow CE\perp(SAD)\Rightarrow SE\perp EC$ (3).

$CE\perp(SAD)\Rightarrow CE\perp SD$ và $EK\perp SD$ nên $SD\perp(CEK)\Rightarrow SD\perp CK$ hay $SK\perp KC$ (4).

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC$ (5).

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$ và $AB\perp BC$ (do $ABCD$ là hình thang vuông tại B) nên $BC\perp(SAB)\Rightarrow SB\perp BC$ (6).

Từ (3), (4), (5), (6) có $\widehat{SEC}=\widehat{SKC}=\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^\circ$. Suy ra A, B, E, K luôn nhìn SC dưới 1 góc vuông nên S, A, B, C, E, K nằm trên mặt cầu đường kính SC.

Gọi I là trung điểm SC thì mặt cầu đi qua qua sáu điểm S, A, B, C, E, K có bán kính $R=\dfrac{SC}{2}$.

$ABCE$ là hình vuông cạnh a, nên $AC=a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông cân tại A, cạnh $AC=SA=a\sqrt{2}$ nên $SC=2a$, suy ra $R=\dfrac{SC}{2}=a$.

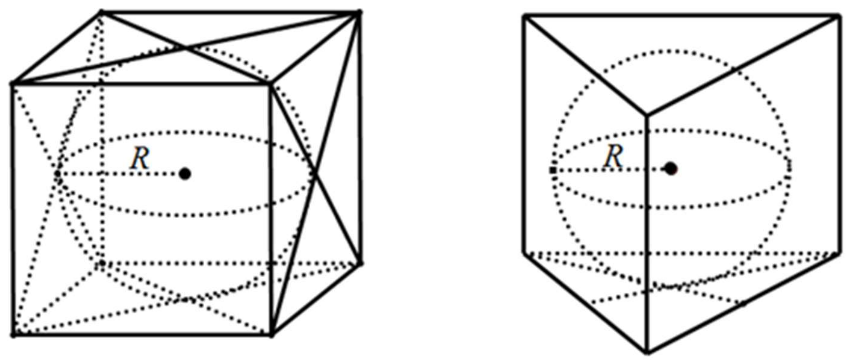
Vậy thể tích mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K là: $V=\dfrac{4\pi a^3}{3}$

Dạng 8 : Mặt cầu nội tiếp khối chóp, khối lăng trụ

PHƯƠNG PHÁP

- Điều kiện tồn tại mặt cầu nội tiếp được khối chóp: Nếu trên đáy của một hình chóp tồn tại một điểm cách đều tất cả các mặt xung quanh của hình chóp thì hình chóp đó có một hình cầu nội tiếp.

- Cách xác định tâm mặt cầu nội tiếp khối chóp có hình chiếu vuông góc của đỉnh trùng với điểm ở đáy mà cách đều tất cả các mặt bên:
    - **Bước 1:** Xác định được điểm O cách đều trên đáy.
    - **Bước 2:** Nối đỉnh hình chóp với O bằng một đoạn thẳng.
    - **Bước 3:** Dựng mặt phẳng phân giác của một góc nhị diện nào đó ở đáy. Giao điểm của mặt phẳng phân giác với đường thẳng trên là tâm hình cầu nội tiếp cần tìm.
- Nếu đặt V là thể tích khối chóp và S_{tp} là tổng diện tích mặt đáy và các mặt bên của chóp (diện tích toàn phần) thì bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là: $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$



- Khối cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a có bán kính $R = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích mặt cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a: $S = \pi a^2$.

Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a: $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

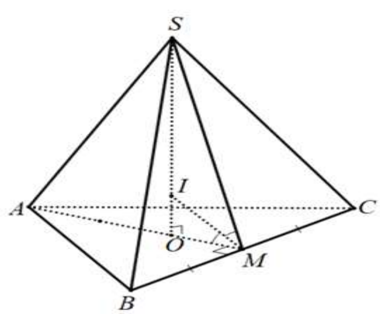
- Khối lăng trụ có mặt cầu nội tiếp khi có một điểm cách đều tất cả các mặt của khối lăng trụ. Đường cao của hình lăng trụ bằng đường kính của mặt cầu nội tiếp.

Ví dụ 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a .Tính thể tích khối cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\pi}{36\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{\pi^2}{36\sqrt{6}}$. **D.** $\dfrac{1}{36\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $ABC \Rightarrow O$ cách đều các mặt bên của hình chóp tam giác đều $S.ABC$

Suy ra mọi điểm thuộc SO cách đều các mặt bên của hình chóp tứ giác đều $S.ABC$

Trong tam giác SAM , kẻ phân giác góc $\widehat{SAM}$ cắt SO tại I .

$\Rightarrow OI = IH$ hay I cách đều mặt đáy và mặt bên (SAB)

Suy ra I cách đều các mặt của hình chóp tam giác đều $S.ABC$.

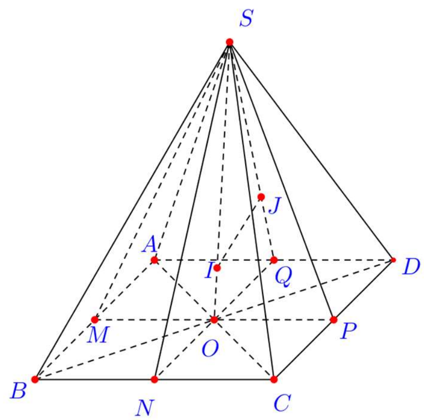
Hay I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ và đồng thời là trọng tâm của tứ diện đó. Suy ra $OI = r = \frac{1}{4}SO = \frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ (tính chất trọng tâm tứ diện đều) với r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đều $S.ABC$. Vậy suy ra $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^3 \frac{\pi}{36\sqrt{6}}$.

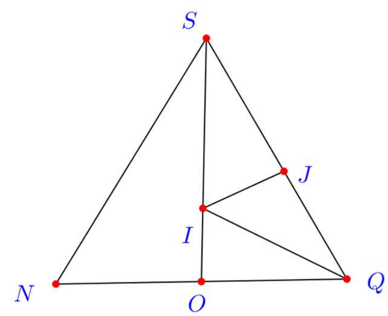
Ví dụ 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Biết diện tích mặt cầu nội tiếp khối chóp $S.ABCD$ bằng πa^2, thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{16a^3}{9}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Chọn A





Gọi O là tâm của đáy, kế tiếp gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA Giả sử: I là tâm của mặt cầu nội tiếp khối chóp $S.ABCD$ thì I phải thuộc đoạn thẳng SO. Gọi J là hình chiếu của I lên SQ khi đó bán kính mặt cầu nội tiếp cần tìm là: $r = IO = IJ = \frac{a}{2}$. Suy ra $\tan\widehat{IQO} = \frac{IJ}{QO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\widehat{IQO} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\widehat{IQO} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Hay $\sin\widehat{SQO} = \frac{4}{5}$. Do đó chiều cao của hình chóp $h = SO = \frac{4}{3}QO = \frac{4a}{3}$.

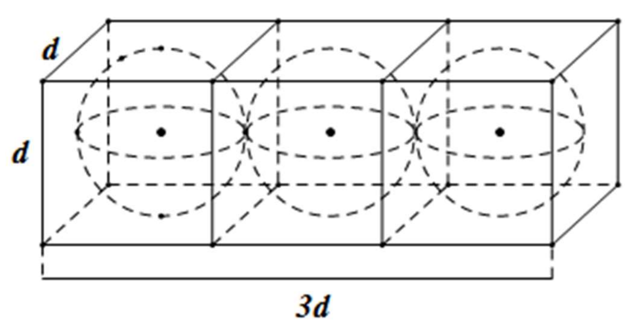
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}(2a)^2.\frac{4}{3}a = \frac{16a^3}{9}$.

Ví dụ 3. Cho một khúc gỗ có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là $24cm^3$, đáy có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng, chiều cao khối gỗ bằng chiều rộng của đáy. Người ta muốn đẽo thành 3 quả cầu có kích thước như nhau. Tính thể tích ít nhất của phần gỗ bị gọt bỏ.

A. 8π. **B.** 4π. **C.** $24-4\pi$. **D.** $24-8\pi$.

Lời giải

Chọn C



Gọi chiều rộng của đáy là d. Khi đó kích thước của hình hộp chữ nhật là $d,d,3d$.

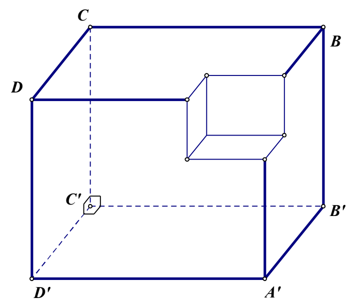
Bán kính của mỗi quả cầu là $r=\dfrac{d}{2}$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật là: $V_{hhcn}=3d^3=24\Rightarrow x=2$.

Thể tích của ba quả cầu là: $V_{3cau}=3.\dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{d}{2}\right)^3=\dfrac{\pi d^3}{2}=4\pi$.

Thể tích của phần gỗ bị gọt bỏ là: $V_{bo}=V_{hcn}-V_{3cau}=24-4\pi$

Ví dụ 4. Một khối đa diện H được tạo thành bằng cách từ một khối lập phương cạnh bằng 3, ta bỏ đi khối lập phương cạnh bằng 1 ở một "góc" của nó như hình vẽ.

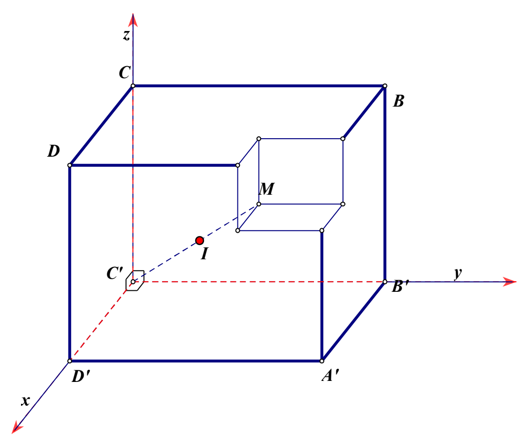


Gọi S là khối cầu có thể tích lớn nhất chứa trong H và tiếp xúc với các mặt phẳng $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$ và $(DCC'D')$. Tính bán kính của S.

A. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$. **B.** $3-\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là đỉnh của hình lập phương có cạnh bằng 1 nằm trên đường chéo AC' và nằm trên khối còn lại sau khi cắt. Gọi I là tâm của khối cầu có thể tích lớn nhất thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $d\big(I,(A'B'C'D')\big)=d\big(I,(BCC'B')\big)=d\big(I,(DCC'D')\big)$

Suy ra I thuộc đoạn thẳng $C'M$ và mặt cầu tâm I cần tìm đi qua điểm M.

Đặt $d\big(I,(DCC'D')\big)=a$, ta có $IC'=a\sqrt{3}$. Mà $C'A=3\sqrt{3}$, $AM=\sqrt{3}$. Suy ra $IM=2\sqrt{3}-a\sqrt{3}$

Ta có $d\big(I,(DCC'D')\big)=IM\Leftrightarrow a=2\sqrt{3}-a\sqrt{3}\Leftrightarrow a=\dfrac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$.

***Cách khác**:*

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $C'(0;0;0)$, $B'(0;3;0)$, $D'(3;0;0)$, $C(0;0;3)$.

Khi đó $M(2;2;2)$. Ta có phương trình đường thẳng $C'M$ là $\begin{cases} x=t \\ y=t \Rightarrow I(t;t;t) \\ z=t \end{cases}$ với $2>t>0$

do I thuộc đoạn thẳng $C'M$.

Ta có $d(I,(Oyz))=IM \Leftrightarrow |t|=\sqrt{3(t-2)^2} \Leftrightarrow t=(2-t)\sqrt{3} \Leftrightarrow t=3-\sqrt{3}$.

Suy ra $R=IM=3-\sqrt{3}$.

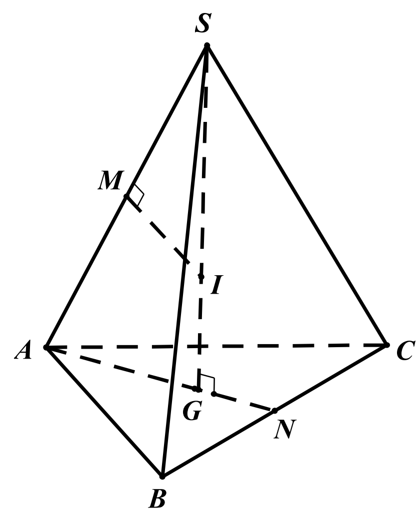
Dạng 9 : Bài toán thể tích, diện tích max min của mặt cầu, khối cầu liên quan đến khối chóp, khối lăng trụ

Ví dụ 1. Cho chóp đều $S.ABC$ có $AB=BC=AC=a$. Tính thể tích nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{27}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **D.** $\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $SG\perp(ABC)$. Đặt $SG=x \Rightarrow SA=\sqrt{x^2+\frac{1}{3}a^2}$.

Trong (SAN), đường trung trực của SA cắt SG tại I

$\Rightarrow IA=IB=IC=IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

Và bán kính $R=IS=\frac{SA^2}{2SG}=\frac{x^2+\frac{1}{3}a^2}{2x}=\frac{3x^2+a^2}{6x}$, với $x>0$.

Mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất khi và chỉ khi R nhỏ nhất

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2+a^2}{6x}$

có $f'(x)=\frac{1}{6}.\frac{3x^2-a^2}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}a}{3}$ (do $x>0$).

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ nhỏ nhất đạt tại $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

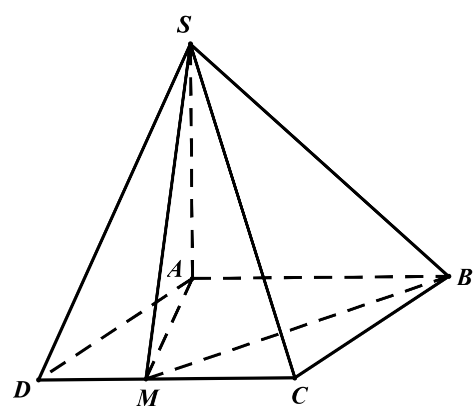
Vậy $V_c=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Điểm M là một điểm di chuyển trên cạnh CD. Diện tích nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABM$ là

A. $\frac{25\pi a^2}{16}$. **B.** $\frac{41\pi a^2}{16}$. **C.** $\frac{7\pi a^2\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\frac{45\pi a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow R^2=R_{ABM}{}^2+\frac{SA^2}{4}=R_{ABM}{}^2+\frac{a^2}{4}$, gọi $R_{ABM}=R_2$

Xét ΔABM : trong mọi tam giác ta luôn có: $R_{ABM}=\frac{AM.MB.AB}{4S_{ABM}}=\frac{MA.MB.a}{2S_{ABCD}}=\frac{MA.MB}{2a}$

Đặt $DM=x\in[0;a]$ khi đó ta có: $MA.MB=\sqrt{x^2+a^2}.\sqrt{(a-x)^2+a^2}$

Xét hàm số $f(x)=(x^2+a^2).\left[(a-x)^2+a^2\right]$ có $f'(x)=4x^3-6ax^2+6a^2x-2a^3=0$

$\Leftrightarrow 2(2x-a)(x^2-ax+a^2)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$.

Vậy min $MA.MB=\frac{5a^2}{4}$ khi $x=\frac{a}{2}$.

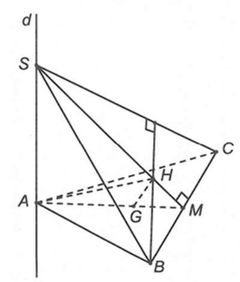
Do vậy $R_{ABM}\geq\frac{5a}{8}$ nên $R^2\geq\frac{25a^2}{64}+\frac{a^2}{4}=\frac{41a^2}{64}\Rightarrow S_{\min}=\frac{41\pi a^2}{16}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi S là điểm thay đổi trên đường thẳng d, H là trực tâm tam giác SBC. Biết rằng khi S thay đổi trên đường thẳng d thì điểm H nằm trên đường (C). Trong số các mặt cầu chứa đường (C), bán kính mặt cầu nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm BC suy ra $AM \perp BC; SM \perp BC$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MG = \frac{1}{3}MA = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ suy ra $MG.MA = \frac{a^2}{4}$.

Mặt khác H trực tâm tam giác SBC nên tam giác BMH và tam giác SMC là hai tam giác đồng dạng nên $\frac{BM}{SM} = \frac{MH}{MC} \Leftrightarrow MH.MS = BM.MC = \frac{a^2}{4}$.

Do đó $MH.MS = MG.MA$ hay $\frac{MH}{MG} = \frac{MA}{MS}$ nên tam giác MHG và tam giác MAS đồng dạng suy ra $GH \perp SM$.

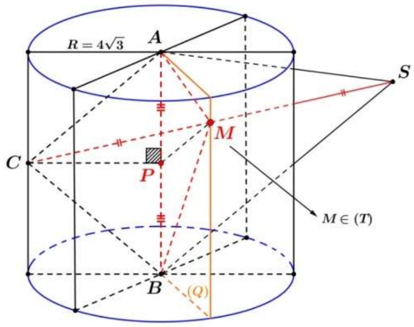
Vì H thuộc (SAM) cố định khi S thay đổi trên d và $GH \perp SM$ nên (C) là đường tròn đường kính GM do đó trong các mặt cầu chứa (C), mặt cầu có bán kính nhỏ nhất là mặt cầu nhận GM làm đường kính nên bán kính mặt cầu $R = \frac{GM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

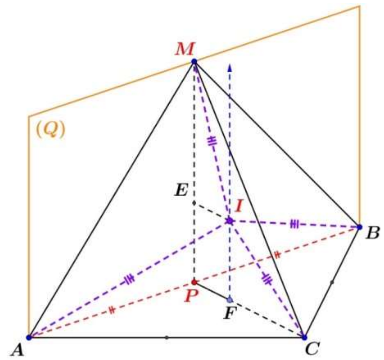
Ví dụ 4. Cho một mặt phẳng (P) bất kì trong không gian chứa ΔABC đều cạnh bằng $8a$ và một điểm S khác di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho ΔMAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3}a^2$ với M là trung điểm SC. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 đỉnh M, A, B, C. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất, bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) là

A. $\frac{16a\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\frac{4a\sqrt{39}}{3}$.

Lời giải

Chọn C





Ta có: $d(M;AB) = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = 4a\sqrt{3}$; $d(S;(ABC)) = 2d(M;(ABC))$ (M là trung điểm SC)

Như vậy suy ra quỹ tích của điểm M là một hình trụ (T) có đường sinh chính bằng đoạn AB và đường tròn đáy có bán kính bằng $4a\sqrt{3}$ với $V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}d(M;(ABC)).S_{\Delta ABC}$

Từ đó, để $V_{S.ABC}$ max $\Rightarrow V_{M.ABC}$ max $\Rightarrow d(M;(ABC))$max với $M \in (T) \cap (Q) \cap (R)$ với (Q) và (R) lần lượt là mặt phẳng chứa AB và mặt phẳng trung trực của AB

Kẻ $IE \perp MP; IF \perp PC$ với I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $MABC$, khi ấy

$$(R_{M.ABC\min})^2 = ME^2 + EI^2 = ME^2 + FP^2 = ME^2 + \left(\frac{AB\sqrt{3}}{6}\right)^2 \geq \left(\frac{AB\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{AB\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{80a^2}{3}$$

$\Rightarrow R_{M.ABC\min} = \dfrac{4a\sqrt{15}}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $MP \perp AB$ tức ΔMAB đều

III. HỆ THỐNG CÂU HỎI ÔN TẬP

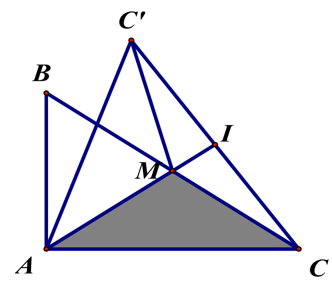
Dạng 1: Bài toán thể tích, diện tích của khối tròn xoay được sinh ra từ việc quay 1 hình quanh cạnh nào đó.

Câu 1: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $BC=2a$, gọi M là trung điểm của BC. Khi quay tam giác MAC quanh cạnh AM thì đường gấp khúc MAC tạo thành một hình tròn xoay. Tính thể tích của khối tròn xoay tương ứng.

A. $\frac{\pi a^3}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **C.** $\frac{3\pi a^3}{8}$. **D.** $\frac{3\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$. Gọi C', là điểm đối xứng của C qua cạnh AM và I là trung điểm của CC', ta có tam giác ABM đều cạnh a suy ra $IM=\cos 60^0.MC=\frac{a}{2}$,

$IC=\sin 60^0.MC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI=\frac{3a}{2}$

Thể tích của khối nón tạo bởi tam giác AIC khi quay quanh trục AM là

$$V=\frac{1}{3}\pi IC^2.IA=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{3a}{2}=\frac{3\pi a^3}{8}.$$

Thể tích của khối nón tạo bởi tam giác MIC khi quay quanh trục AM là

$$V=\frac{1}{3}\pi IC^2.IM=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{8}$$

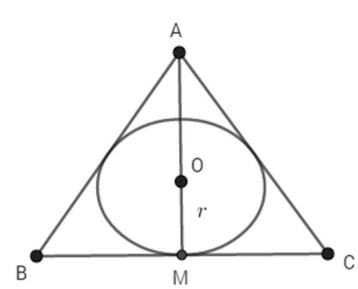
Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $\frac{3\pi a^3}{8}-\frac{\pi a^3}{8}=\frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 2: Cho tam giác đều ABC có đường tròn nội tiếp $(O;r)$, cắt bỏ phần hình tròn và cho phần hình phẳng thu được quay xung quanh OA. Tính thể tích khối tròn xoay thu được theo r.

A. πr^3. **B.** $\frac{5}{3}\pi r^3$. **C.** $\frac{4}{3}\pi r^3$. **D.** $\pi r^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC. Ta tính được $AM = 3OM = 3r$. Do đó cạnh của tam giác đều ABC bằng $2\sqrt{3}.r$

Khi quay tam giác đều ABC xung quanh OA sẽ sinh ra khối nón tròn xoay có bán kính bằng $CM = r\sqrt{3}$ và chiều cao $h = AM = 3r$. Nên thể tích khối nón đó bằng $3\pi r^3$

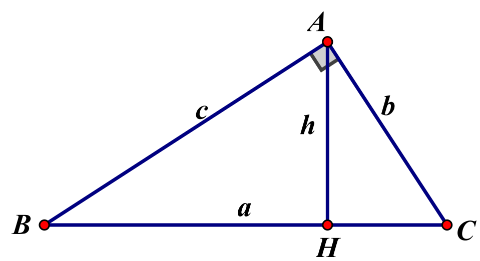
Khi quay hình tròn $(O;r)$ xung quang OA sẽ sinh ra khồi cầu $(O;r)$. Do đó thể tích khối cầu bằng $\frac{4}{3}\pi r^3$. Vậy thể tích cần tìm bằng $3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c, b < c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quanh cạnh AC, quanh cạnh AB, ta được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_a > S_c > S_b$. **B.** $S_b > S_a > S_c$. **C.** $S_c > S_a > S_b$. **D.** $S_b > S_c > S_a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A của tam giác, đặt $AH = h$

Ta có $S_a = \pi.BA.AH + \pi.CA.AH = \pi h(c+b)$

$S_b = \pi.BC.BA + \pi.BA^2 = \pi c(a+c)$

$S_c = \pi.CB.CA + \pi.CA^2 = \pi b(a+b)$

Do $b < c$ nên hiển nhiên $S_c < S_b$.

Do $c < a, h < b$ nên hiển nhiên $S_a < S_c$.

Vậy $S_a < S_c < S_b$..

Câu 4: Cho tam giác nhọn ABC, biết rằng khi quay tam giác này quanh các cạnh AB, BC, CA ta lần lượt được các hình tròn xoay có thể tích là 672π, $\frac{3136\pi}{5}$, $\frac{9408\pi}{13}$.Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S = 1979$. **B.** $S = 364$. **C.** $S = 84$. **D.** $S = 96$.

Lời giải

Chọn C

Vì tam giác ABC nhọn nên các chân đường cao nằm trong tam giác.

Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC, và a, b, c lần lượt

là độ dài các cạnh BC, CA, AB.

Khi đó

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh AB là $\frac{1}{3}.\pi.{h_c}^2.c = 672\pi$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh BC là $\frac{1}{3}.\pi.{h_a}^2.a = \frac{3136\pi}{5}$.

+ Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác quanh CA là $\frac{1}{3}.\pi.{h_b}^2.b = \frac{9408\pi}{13}$.

Do đó $\begin{cases} \frac{1}{3}c.h_c^2 = 672 \\ \frac{1}{3}a.h_a^2 = \frac{3136}{5} \\ \frac{1}{3}b.h_b^2 = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{S^2}{c} = 672 \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{a} = \frac{3136}{5} \\ \frac{4}{3}\frac{S^2}{b} = \frac{9408}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{4S^2}{3.672} \\ a = \frac{20S^2}{3.3136} \\ b = \frac{52S^2}{3.9408} \end{cases}$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812}$

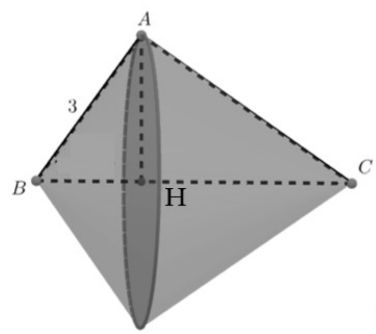
$\Leftrightarrow 16S^2 = S^8.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{9408}.\frac{1}{28812} \Leftrightarrow S^6 = 16.81.9408.28812 \Leftrightarrow S = 84$.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$ và góc $\widehat{ABC} = 60°$. Quay tam giác ABC (kể cả các điểm trong tam giác) quanh cạnh BC ta được một khối tròn xoay. Hỏi thể tích V của khối tròn xoay trên bằng bao nhiêu?

A. $V = 18\sqrt{3}\pi$. **B.** $V = \frac{27\pi}{2}$. **C.** $V = \frac{81\pi}{2}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

Khối tròn xoay trong bài toán phân chia thành hai khối nón: Khối nón (N_1) có chiều cao BH và bán kính HA và khối nón (N_2) có chiều cao CH và bán kính HA.

$HA = AB\sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. $BC = \frac{AB}{\cos 60°} = 6$.

Thể tích khối (N_1) là $V_1 = \frac{1}{3}.\pi.HA^2.BH$.

Thể tích khối (N_2) là $V_2 = \frac{1}{3}.\pi.HA^2.CH$.

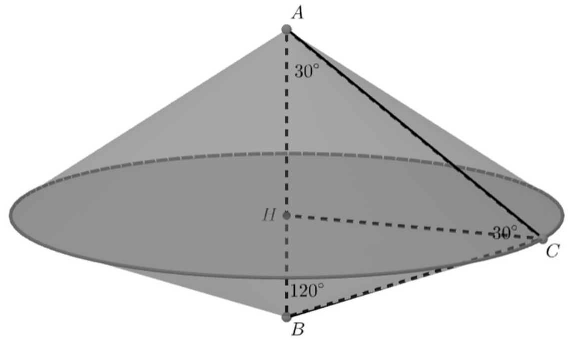
Vậy $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}.\pi.HA^2.BC = \frac{27\pi}{2}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC cân tại B có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 6$ góc $\widehat{BAC} = 30°$. Quay tam giác ABC (kể cả các điểm trong tam giác) xung quanh cạnh AB ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay đó.

A. $36\sqrt{3}\pi$. **B.** 162π. **C.** $2\sqrt{3}\pi$. **D.** 54π.

Lời giải

Chọn D



Kẻ đường cao CH của tam giác ABC.
Tam giác ABC có $A = C = 30°, B = 120°$

Do đó $\dfrac{AB}{\sin 30°} = \dfrac{BC}{\sin 30°} = \dfrac{AC}{\sin 120°} = 2R$.

Suy ra $AB = BC = 6$; $AC = 6\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 30° = 9\sqrt{3}$.

Suy ra $CH = \dfrac{2S}{AB} = 3\sqrt{3}$.

Khối tròn xoay gồm hai khối nón đỉnh A, B có chung đường tròn đáy $(H, r = CH)$.

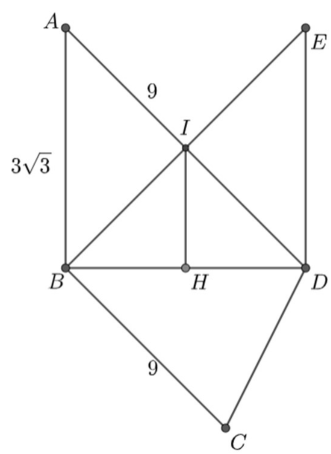
Vậy $V = \dfrac{1}{3}.\pi.CH^2.AB = 54\pi$.

Câu 7: Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, BCD là tam giác vuông tại D, $BC = AD = 9$, $AB = 3\sqrt{3}$. Quay hai hình tam giác ABD và BCD xung quanh cạnh BD ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của hai khối tròn xoay đó bằng.

A. 8π. **B.** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C.** $27\sqrt{3}\pi$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{6}\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn D



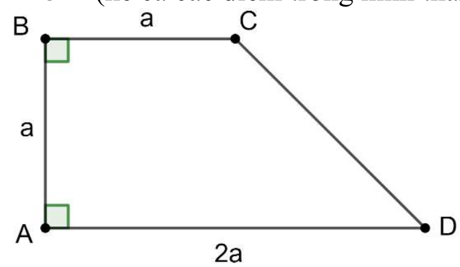
Ta có $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = 3\sqrt{6}$. $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 3\sqrt{3}$.

Khi quay tam giác BCD quanh BD đến mặt phẳng (ABD) ta được tam giác BED bằng tam giác DAB. Gọi I là giao điểm của AD và BE. Khi đó, thể tích phần chung của hai khối tròn xoay đã cho bằng thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tam giác BID quanh BD.
Kẻ đường cao IH của tam giác BID.
Tam giác BED bằng tam giác DAB nên I là tâm của hình chữ nhật $ABDE$.

Do đó $IH = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích phần chung là: $V = \frac{1}{3}.\pi.IH^2.BD = \frac{1}{3}.\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 3\sqrt{6} = \frac{27\sqrt{6}\pi}{4}$.

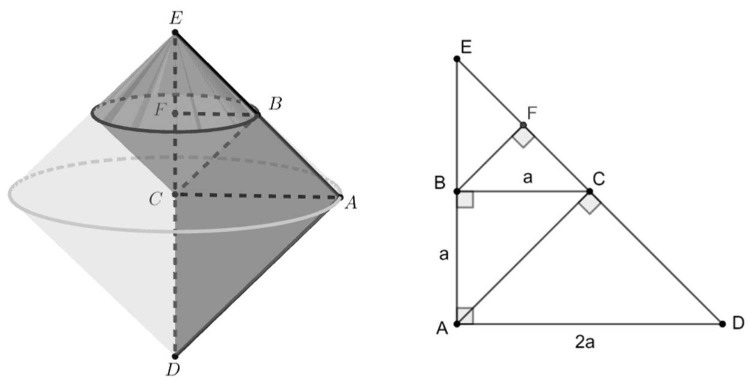
Câu 8: Cho hình thang $ABCD$ có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ (kể cả các điểm trong hình thang) xung quanh trục CD.



A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. **C.** $\frac{7\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{7\pi a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E là giao điểm của AB và CD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE.

$AC = CD = \frac{AD}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

$CF = BF = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\Delta BCF = \Delta BEF$ nên tam giác ΔBCF và ΔBEF quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1.

$\Delta ADC = \Delta AEC$ nên tam giác ΔADC và ΔAEC quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V.

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng

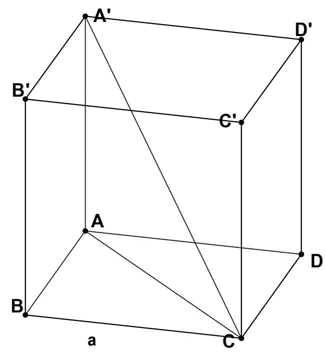
$$2V - 2V_1 = 2.\frac{1}{3}\pi\left(CD.AC^2 - CF.BF^2\right) = \frac{2}{3}\pi\left[\left(a\sqrt{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}.$$

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Diện tích toàn phần của vật tròn xoay thu được khi quay tam giác $AA'C$ quanh trục AA' bằng

A. $\pi\left(\sqrt{3}+2\right)a^2$. **B.** $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$. **C.** $2\pi\left(\sqrt{6}+1\right)a^2$. **D.** $\pi\left(\sqrt{6}+2\right)a^2$.

Lời giải

Chọn D



Quay tam giác $AA'C$ một vòng quanh trục AA' tạo thành hình nón có chiều cao $AA' = a$, bán kính đáy $r = AC = a\sqrt{2}$, đường sinh $l = A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

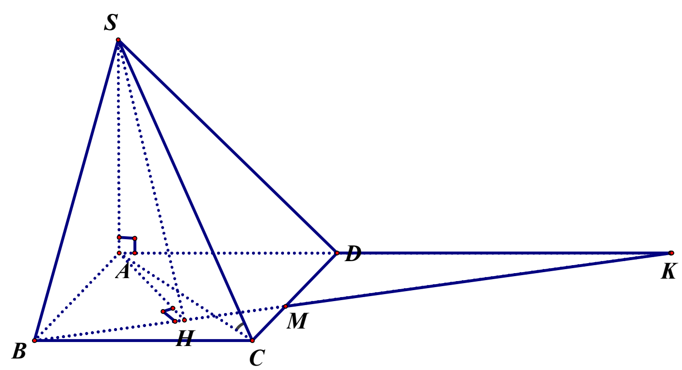
Diện tích toàn phần của hình nón: $S = \pi r\left(r + l\right) = \pi a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2} + a\sqrt{3}\right) = \pi\left(\sqrt{6} + 2\right)a^2$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SC tạo với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm thuộc cạnh CD sao cho $DM = 3MC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BM. Tính thể tích khối nón được sinh ra khi quay tam giác SAH (kể cả các điểm trong tam giác) xung quanh cạnh AH.

A. $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{17}}{17}$. **C.** $\dfrac{24\pi a^3\sqrt{17}}{17}$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{17}}{17}$.

Lời giải

Chọn B



$SA = AB.\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

SC tạo với đáy một góc $60°$ nên $\widehat{SCA} = 60° \Rightarrow SA = a\sqrt{6}$.

Ta có $\begin{cases} BM \perp SH \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp AH$.

Trong $(ABCD)$ gọi $BM \cap AD = K$.

Xét tam giác ABK có $DM // AB$.

$\Rightarrow \dfrac{KD}{KA} = \dfrac{DM}{AB} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow KA = 4KD = 4a$.

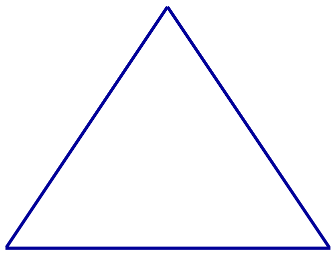
Xét tam giác ABK vuông tại A đường cao AH có

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}a$.

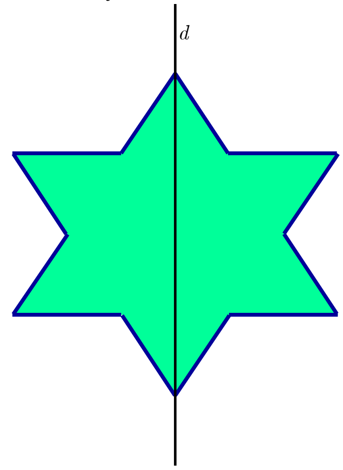
Tam giác SAH vuông tại A nên khối tròn xoay được sinh ra khi quay tam giác SAH xung quanh cạnh AH là khối nón có chiều cao là $h = AH = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}a$ và bán kính $r = SA = a\sqrt{6}$.

Vậy thể tích của khối nón đó là $V = \dfrac{1}{3}.\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{6}a\right)^2.\dfrac{4\sqrt{17}}{17}a = \dfrac{8\pi a^3\sqrt{17}}{17}$.

Câu 17 Ban đầu ta có một tam giác đều cạnh bằng 3 (hình 1). Tiếp đó ta chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bằng hai đoạn bằng nó sao cho chúng tạo với đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía bên ngoài ta được hình 2. Khi quay hình 2 xung quanh trục d ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.



Hình

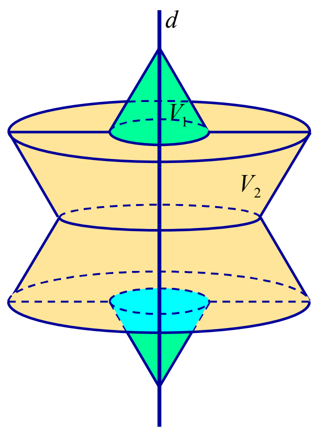


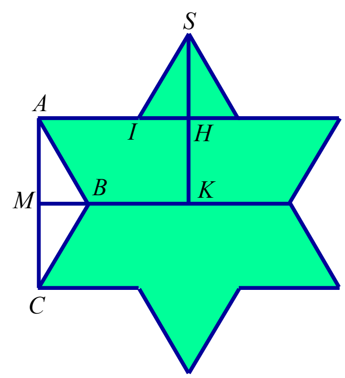
Hình

A. $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{9\pi\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A





Ta có thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng 2 lần thể tích nửa trên khi cho hình $SIABK$ quay quanh trục SK.

Tam giác SIH quay quanh trục SK tạo thành khối nón có $r_1 = IH = \dfrac{1}{2}$; $h_1 = SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón này bằng $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{1}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}$

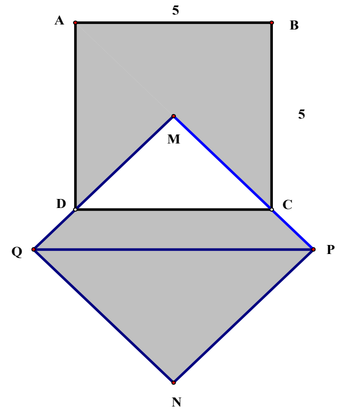
Hình thang vuông $HABK$ quay quanh trục HK tạo thành hình nón cụt có $R = AH = \dfrac{3}{2}$;

$r = BK = 1$; $h = HK = SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón cụt này bằng $V_2 = \dfrac{\pi h}{3}.\left(R^2 + r^2 + R.r\right) = \dfrac{\pi}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{9}{4} + 1 + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{19\pi\sqrt{3}}{24}$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay đã cho bằng $V = 2\left(V_1 + V_2\right) = \dfrac{5\sqrt{3}\pi}{3}$.

Câu 11: Cho hai hình vuông có cạnh đều bằng 5 được xếp lên nhau sao cho đỉnh M của hình vuông này là tâm của hình vuông kia, đường chéo MN vuông góc với cạnh CD tạo thành hình phẳng (H) (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quanh hình (H) quanh trục MN.



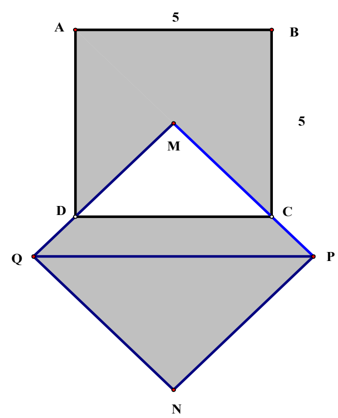
A. $V=\dfrac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. **B.** $V=\dfrac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

C. $V=\dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. **D.** $V=\dfrac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Khi quay hình phẳng (H) quanh trục MN ta được khối tròn xoay, có: phần trên là khối trụ còn phần dưới là khối nón cụt tạo bởi hình thang $CDQP$ và khối nón tạo bởi tam giác NPQ; các khối này có chung đường kính đáy PQ.



Ta có $MN=PQ=\sqrt{MQ^2+QN^2}=5\sqrt{2}$.

Chiều cao của hình nón cụt $CDQP$ là $h=\dfrac{MN}{2}-\dfrac{CD}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}-5}{2}$.

Thể tích khối trụ. $V_t=\pi\left(\dfrac{CD}{2}\right)^2 PS=\pi\left(\dfrac{5}{2}\right)^2.5=\dfrac{125\pi}{4}$.

Thể tích khối nón cụt tạo bởi hình thang $CDQP$ là

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left[\left(\frac{PQ}{2}\right)^2+\left(\frac{CD}{2}\right)^2+\frac{PQ}{2}\cdot\frac{CD}{2}\right]\cdot h$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left[\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{2}\right]\cdot\frac{5\sqrt{2}-5}{2}=\frac{125\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)}{24}$$

Thể tích khối nón tạo bởi tam giác MNQ là

$$V_2=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{PQ}{2}\right)^2\cdot\frac{MN}{2}=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Vậy thể tích V của vật thể tròn xoay khi quanh hình (H) quanh trục MN là

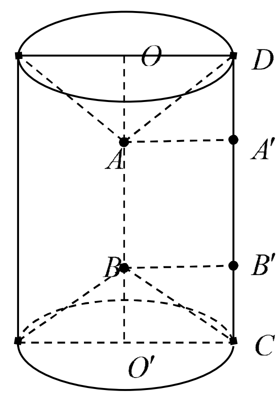
$$V=V_t+V_1+V_2=\frac{125\pi}{4}+\frac{125\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)}{24}+\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}=\frac{125\pi\left(5+4\sqrt{2}\right)}{24}.$$

Câu 12: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $BC=DA=\sqrt{2}$. Cho hình thang đó quay quanh AB thì được vật tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{4}{3}\pi$. **B.** $\frac{5}{3}\pi$. **C.** $\frac{2}{3}\pi$. **D.** $\frac{7}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn D



Gọi V là thể tích vật tròn xoay cần tìm V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và đỉnh B, V_T là thể tích khối trụ trục $O'O$ như hình vẽ.

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên cạnh CD.

Suy ra $\Delta AA'D=\Delta BB'C$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $2A'D=CD-A'B'=3-1=2$. Suy ra $A'D=B'C=1$.

Mặt khác $O'C=\sqrt{BC^2-BO'^2}=1$

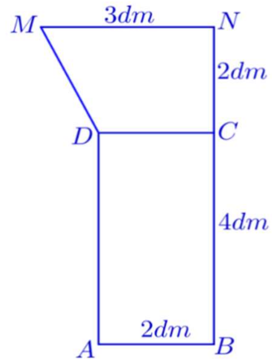
Ta có $AO=BO'=1$ và $OD=O'C=1$ nên ta có $V_1=V_2$.

Thể tích vật tròn xoay cần tìm là

$$V=V_T-2V_1=\pi\cdot R^2CD-2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2\cdot AO=\pi R^2\left(CD-\frac{2}{3}AO\right).$$

$$V=\pi\cdot 1^2\cdot\left(3-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3}\pi$$

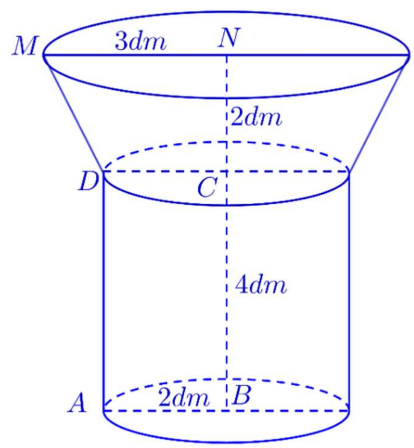
Câu 13: Hình bên bao gồm hình chữ nhật $ABCD$ và hình thang vuông $CDMN$. Các điểm B, C, N thẳng hàng, $AB=CN=2\,\text{dm}$; $BC=4\,\text{dm}$; $MN=3\,\text{dm}$. Quay hình bên xung quanh cạnh BN ta được khối tròn xoay có thể tích bằng



A. $54\pi\,\text{dm}^3$. **B.** $\dfrac{86\pi}{3}\text{dm}^3$. **C.** $\dfrac{86}{3}\text{dm}^3$. **D.** $54\,\text{dm}^3$.

Lời giải

Chọn B



Khi quay hình trên quanh cạnh BN ta được một khối tròn xoay gồm một khối trụ có bán kính đáy bằng $2\,\text{dm}$, chiều cao bằng $4\,\text{dm}$ và một khối nón cụt có bán kính hai đáy lần lượt là $2\,\text{dm}$ và $3\,\text{dm}$, chiều cao bằng $2\,\text{dm}$.

Gọi thể tích hình trụ là V_1 và thể tích hình nón cụt là V_2.

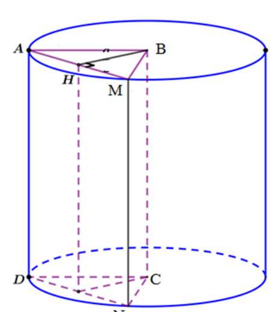
Ta có thể tích của khối tròn xoay là $V = V_1 + V_2 = 4\pi.4 + \dfrac{1}{3}\pi\left(4+9+2.3\right).2 = \dfrac{86\pi}{3}\left(\text{dm}^3\right)$.

Câu 14: Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $BC = 4a$. Khi quay $ABCD$ quanh cạnh BC ta được hình trụ (T). Biết rằng khi cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, thiết diện thu được là hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $32\pi a^3$. **B.** $\dfrac{32\pi a^3}{3}$. **C.** $32\sqrt{2}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{32\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Không mất tổng quát, giả sử thiết diện thu được là $AMND$ và gọi H là trung điểm AM.

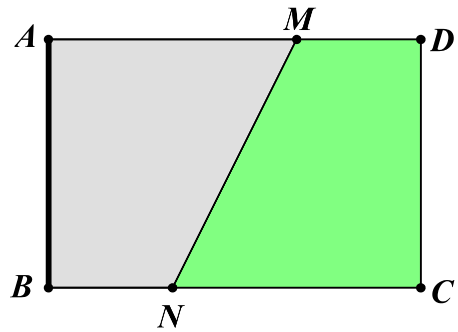
Ta có $\begin{cases} BH \perp AM \\ BH \perp AD \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AMND) \Rightarrow d\left(BC,(AMND)\right) = d\left(B,(AMND)\right) = BH = 2a$

Do $AMND$ là hình vuông nên $AM = AD = BC = 4a$

Xét tam giác ABH vuông tại H suy ra $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 2a\sqrt{2}$

Thể tích khối trụ là $V = \pi AB^2.BC = \pi\left(2a\sqrt{2}\right)^2.4a = 32\pi a^3$.

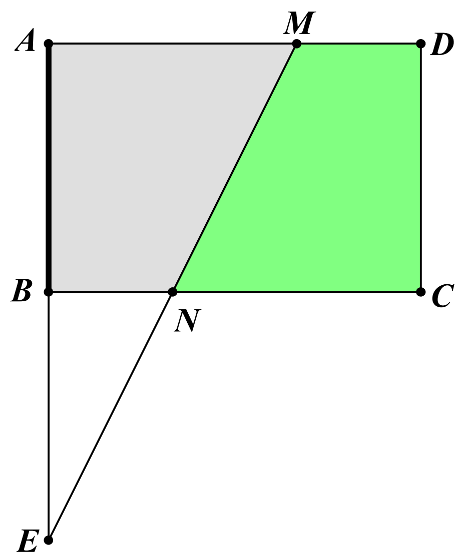
Câu 15: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $BC = 3a$. Gọi M, N là các điểm trên các cạnh AD, BC sao cho $MA = 2MD$, $NC = 2NB$. Khi quay quanh AB, đường gấp khúc $AMNB$, $ABND$ sinh ra các hình có diện tích toàn phần lần lượt là S_1, S_2. Khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ gần nhất với kết quả nào sau đây.



A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $E = AB \cap MN$. Ta có: $AM = 2a$, $BN = a$, $MN = a\sqrt{5}$, $AE = 2AB = 4a$, $EM = 2a\sqrt{5}$, $DN = 2a\sqrt{2}$.

Khi quay hình đã cho quanh cạnh AB, gọi $S_{AM}, S_{BN}, S_{MN}, S_{DN}, S_{AD}$ lần lượt là diện tích hình tròn xoay tạo thành khi quay các cạnh AM, BN, MN, DN, AD.

$S_{AM} = \pi AM^2 = 4\pi a^2$.

$S_{BN} = \pi BN^2 = \pi a^2$.

$S_{MN} = \pi.AM.EM - \pi.BN.EN = 3\sqrt{5}\pi a^2$.

$S_{AD}=\pi AD^2=9\pi a^2$.

$S_{DN}=\pi\left(AM+BN\right).DN=6\sqrt{2}\pi a^2$.

Ta có

$S_1=S_{AM}+S_{BN}+S_{MN}=\left(5+3\sqrt{5}\right)\pi a^2$

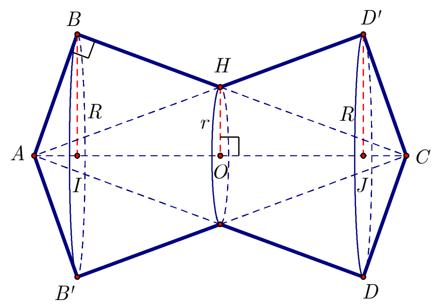
$S_2=S_{AD}+S_{DN}+S_{BN}=\left(10+6\sqrt{2}\right)\pi a^2$.

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}\approx 0,633$.

Câu 16: **(VDC&HSG mức độ 4)** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=6$, $AD=8$ (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh trục AC.

A. $V=110,525\pi$. **B.** $V=106,725\pi$. **C.** $V=100,425\pi$. **D.** $V=105,625\pi$.

Chọn B



• Khi quay hình chữ nhật quanh trục AC, ta thấy vật thể tròn xoay được tạo thành gồm hai khối nón có thể tích bằng nhau và hai khối nón cụt có thể tích bằng nhau (như hình vẽ trên).
Gọi V_1 là thể tích của mỗi hình nón và V_2 là thể tích của mỗi hình nón cụt thì ta có thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V=2\left(V_1+V_2\right)$.

• Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=6$, $AD=8$ nên $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=10$.

+ Xét tam giác vuông ABC có IB là đường cao nên ta có:

$\dfrac{1}{IB^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{8^2}=\dfrac{25}{576}\Rightarrow IB=\dfrac{24}{5}$.

+ Vì tam giác $\Delta ABC=\Delta AD'C\Rightarrow\Delta HAC$ cân tại H nên $HO\perp AC$ (O là trung điểm của AC). Suy ra $OA=OC=\dfrac{AC}{2}=5$.

+ Xét ΔABC có $AB^2=AI.AC\Rightarrow AI=\dfrac{AB^2}{AC}=\dfrac{6^2}{10}=\dfrac{18}{5}$ nên $OI=OA-AI=5-\dfrac{18}{5}=\dfrac{7}{5}$; $IC=\dfrac{32}{5}$.

+ Dễ thấy hai tam giác vuông COH, CIB đồng dạng nên ta có:

$$\frac{OH}{IB}=\frac{OC}{IC}\Rightarrow OH=\frac{IB.OC}{IC}=\frac{\frac{24}{5}.5}{\frac{32}{5}}=\frac{15}{4}.$$

• Thể tích của mỗi hình nón là $V_1=\dfrac{1}{3}\pi.IB^2.AI=\dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{24}{5}\right)^2.\dfrac{18}{5}=27,648\pi$ (đvtt).

Và thể tích của mỗi hình nón cụt là $V_2=\dfrac{1}{3}\pi.OI.\left(IB^2+OH^2+IB.OH\right)$.

$=\frac{1}{3}\pi.\frac{7}{5}.\left[\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2+\frac{24}{5}.\frac{15}{4}\right]=25,7145\pi$ (đvtt).

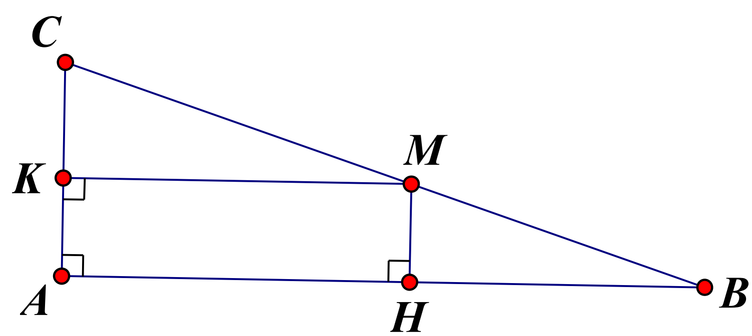
• Vậy thể tích cần tìm là $V=2\left(V_1+V_2\right)=2\left(27,648\pi+25,7145\pi\right)=106,725\pi$ (đvtt).

Câu 17: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông ở A có $AB=3, AC=1$, M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC. Điểm M cách điểm B một khoảng bằng bao nhiêu để thể tích của khối trụ được tạo bởi hình chữ nhật $MHAK$ khi quay quanh trục AB là lớn nhất?

A. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $BM=x$.

Ta có: $BC=\sqrt{10}$, $MH=MB.\frac{AC}{BC}=\frac{x}{\sqrt{10}}$, $HB=MB.\frac{AB}{BC}=\frac{3x}{\sqrt{10}}$, $AH=3-\frac{3x}{\sqrt{10}}$.

Khi quay hình chữ nhật $MHAK$ quanh trục AB ta được một khối trụ có thể tích là

$V=\pi.MH^2.AH=\frac{\pi}{10}x^2\left(3-\frac{3x}{\sqrt{10}}\right)$. Do M nằm trên cạnh BC nên $x\in[0,\sqrt{10}]$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{\pi}{10}x^2\left(3-\frac{3x}{\sqrt{10}}\right)=\frac{3\pi}{10}x^2-\frac{3\pi}{10\sqrt{10}}x^3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{10}\right]$.

Ta có $f'(x)=\frac{3\pi}{5}x-\frac{9\pi}{10\sqrt{10}}x^2$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{2\sqrt{10}}{3}\in\left[0;\sqrt{10}\right]\end{array}\right..$$

$f(0)=0$, $f\left(\sqrt{10}\right)=0$, $f\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)=\frac{4\pi}{9}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[0;\sqrt{10}\right]}f(x)=f\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)=\frac{4\pi}{9}$.

Vậy, điểm M cách điểm B một khoảng bằng $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ thì thể tích của khối trụ được tạo bởi hình chữ nhật $MHAK$ khi quay quanh trục AB là lớn nhất.

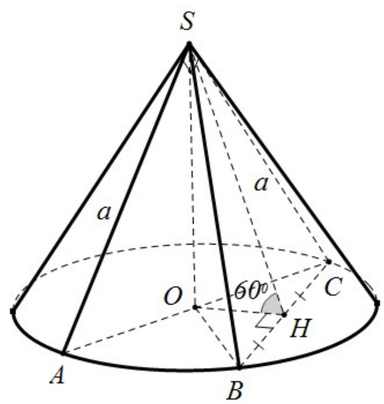
Dạng 2: Bài toán thể tích, diện tích của khối nón, hình nón liên quan đến thiết diện cắt bởi một mặt phẳng (thiết diện qua trục, qua đỉnh, vuông góc trục…)

Câu 1: Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc $60°$. Tính diện tích của thiết diện qua đỉnh đó.

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $2a^2$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



◆ Gọi hình nón đã cho có đỉnh S và tâm hình tròn đáy là O, thiết diện qua trục là ΔSAC, thiết diện qua đỉnh là ΔSBC, H là trung điểm của BC.

Suy ra góc giữa (SBC) và đáy là $\widehat{SHO}=60°$.

+ ΔSAC vuông cân tại S có cạnh góc vuông bằng $a \Rightarrow AC=a\sqrt{2}$ $\Rightarrow SO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ ΔSOH vuông tại O có. $OH=\frac{SO}{\tan 60°}=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ và $SH=\frac{SO}{\sin 60°}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

◆ Mà $OA=OB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔOBH vuông tại H có $BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC=2BH=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

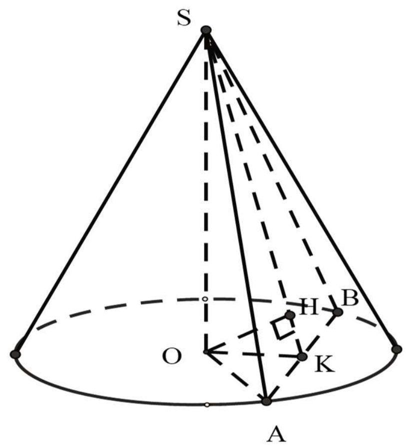
◆ Vậy diện tích thiết diện cần tính là: $S_{SBC}=\frac{1}{2}SH.BC=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2: Cho hình nón (N) đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0$, $\widehat{SAB}=60^0$. Tính thể tích khối nón.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{6}$. **B.** $\frac{a^3\pi}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3\pi}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C



◆ Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK \perp AB$.

Mà $SO \perp AB$ nên $AB \perp (SOK)$ $\Rightarrow (SOK) \perp (SAB)$ mà $\Rightarrow (SOK) \cap (SAB) = SK$ nên từ O dựng $OH \perp SK$ (H thuộc SK) thì $OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = \mathrm{d}(O,(SAB))$.

Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{SA}{2}$.

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB} = \dfrac{SK}{SA} \Rightarrow SK = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{SK^2 - SO^2} + \dfrac{1}{SO^2}$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{\dfrac{SA^2}{4}} + \dfrac{1}{\dfrac{3SA^2}{4} - \dfrac{SA^2}{4}} = \dfrac{4}{SA^2} + \dfrac{2}{SA^2} \Rightarrow \dfrac{6}{SA^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow SA = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

◆ $SO = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \sqrt{SA^2 - S0^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

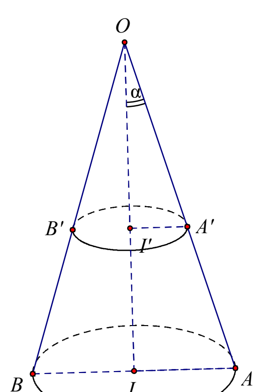
◆ Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{3a^2}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a^3\pi}{4}$.

Câu 3: Cho hình nón (N_1) có chiều cao bằng 40 cm, bán kính đáy bằng 20 cm. Người ta cắt hình nón (N_1) bằng một mặt phẳng song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ (N_2) có thể tích bằng $\dfrac{1}{8}$ thể tích (N_1). Tính diện tích toàn phần của hình nón (N_2).

A. 100π. **B.** $100\pi(1+\sqrt{5})$. **C.** $100\pi(16+\sqrt{3})$. **D.** $100\pi(1+2\sqrt{5})$.

Lời giải

Chọn B



◆ Gọi R_1, R_2, h_1, h_2 lần lượt là bán kính và chiều cao của các khối nón (N_1), (N_2).

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối nón (N_1), (N_2) và gọi 2α là góc ở đỉnh của hình nón.

Ta có: $V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1$; $V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2$.

Theo đề bài ta có $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2}{\frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{R_2^2 h_2}{R_1^2 h_1} = \frac{1}{8}$.

Mặt khác ta lại có $R_1 = h_1 \tan\alpha$, $R_2 = h_2 \tan\alpha$ $\Rightarrow \frac{h_2^3 \tan^2\alpha}{h_1^3 \tan^2\alpha} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h_2 = \frac{1}{2}h_1$.

$\Rightarrow h_2 = 20$ cm và $R_2 = 10$ cm.

Suy ra đường sinh của hình nón (N_2) là: $l_2 = \sqrt{h_2^2 + R_2^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5}$.

◆ Diện tích toàn phần của hình nón (N_2) là:

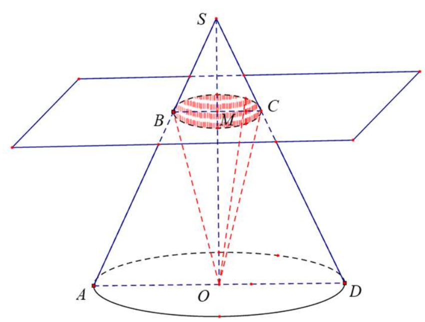
$S_{tp2} = \pi R_2^2 + \pi R_2.l_2 = \pi.10^2 + \pi.10.10\sqrt{5} = 100\pi(1+\sqrt{5})$ cm^2.

Câu 4: Cho hình nón (N) có đường cao $SO = 20$ và bán kính đáy $R = 10$, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM = x$, $0 < x < 20$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy (C) bằng $\frac{8000\pi}{81}$.

A. 5. **B.** 10. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn D



◆ Ta có BM là bán kính đường tròn (C).

Do tam giác ΔSBM đồng dạng ΔSAO nên $\frac{BM}{AO} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow BM = \frac{AO.SM}{SO}$,

hay $BM = \frac{10(20-x)}{20}$.

◆ Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là: $V = \frac{1}{3}\pi BM^2.OM = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{10(20-x)}{20}\right]^2.x$.

Mà $V = \frac{8000\pi}{81}$ do đó $\frac{1}{3}\pi\left[\frac{10(20-x)}{20}\right]^2.x = \frac{8000\pi}{81} \Leftrightarrow \frac{(20-x)^2 x}{4} = \frac{8000}{27}$

$$\Leftrightarrow x^3-40x^2+400x-\frac{32000}{27}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{20}{3}\right)^2\left(x-\frac{80}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{20}{3}\,(t/m) \\ x=\frac{80}{3}\,(l) \end{array}\right.$$

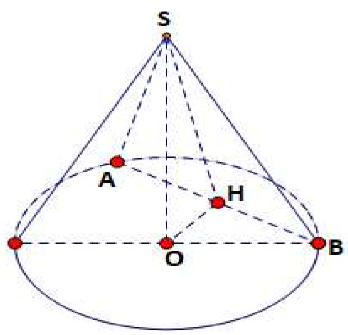
◆ Vậy $x=\frac{20}{3}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng 120^0. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=36\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq}=27\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq}=18\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq}=9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C



◆ Gọi H là trung điểm của AB.

Suy ra $OH\perp AB$ tại H và $OH\perp SO$ tại O nên $d(SO,AB)=OH=3$.

Mà SAB vuông tại S và $\widehat{BSO}=60°$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón thì đường sinh $l=SB=\frac{r}{\sin 60°}\Rightarrow l=\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $AB=SB\sqrt{2}=\frac{2r\sqrt{6}}{3} \Rightarrow BH=\frac{1}{2}AB=\frac{r\sqrt{6}}{3}$.

◆ Xét tam giác OBH vuông tại H, ta có $OH^2+HB^2=OB^2 \Leftrightarrow 9+\frac{6r^2}{9}=r^2 \Leftrightarrow r=3\sqrt{3}\Rightarrow l=6$.

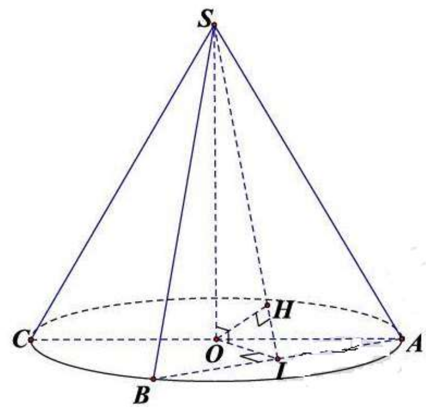
◆ Diện tích xung quanh của hình nón (N) là $S_{xq}=\pi.r.l=\pi.3\sqrt{3}.6=18\pi\sqrt{3}$.

Câu 6: Cho hình nón (N) có đỉnh S, đáy là đường tròn $(O;5)$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và B sao cho $SA=AB=8$. Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{13}}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



◆ Gọi I là trung điểm AB.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SAB) \perp (SOI)$.

Trong (SOI), kẻ $OH \perp SI$ tại H thì $OH \perp (SAB)$ tại H.

$\Rightarrow \mathrm{d}(O,(SAB)) = OH$.

◆ Xét tam giác SOA vuông tại O có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$.

Xét tam giác IOA vuông tại O có: $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Tam giác SOI vuông tại O có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \dfrac{3\sqrt{13}}{4}$.

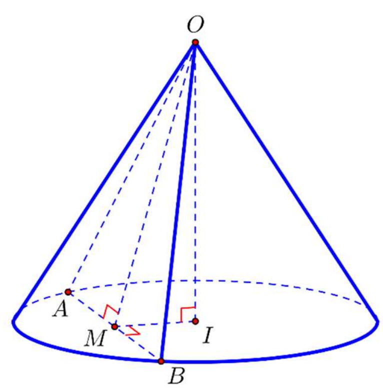
◆ Vậy $\mathrm{d}(O,(SAB)) = OH = \dfrac{3\sqrt{13}}{4}$.

Câu 7: Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh O, bán kính bằng 3. Mặt phẳng (P) đi qua O, cắt hình nón (N) theo thiết diện là một tam giác có độ dài cạnh đáy bằng 2 và tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính diện tích của thiết diện.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



◆ Gọi thiết diện cắt bởi mặt phẳng (P) với hình nón (N) là tam giác OAB, I là tâm đáy của hình nón (N), M là trung điểm của AB.

Ta có: $R = IA = IB = 3,\ AB = 2 \Rightarrow MB = 1$.

$MI \perp AB \Rightarrow AB \perp (OMI) \Rightarrow AB \perp OM$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng (OAB) với đáy hình nón là góc $\widehat{OMI} = 60^0$.

Lại có: $IM = \sqrt{IB^2 - MB^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OI = MI.\tan 60^0 = 2\sqrt{6}$.

$OM = \sqrt{IM^2 + OI^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2} = 4\sqrt{2}$.

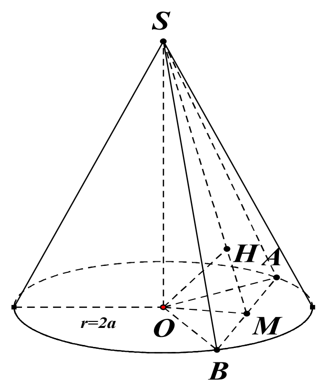
◆ Vậy diện tích tam giác OAB là: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OM.AB = \frac{1}{2}.4\sqrt{2}.2 = 4\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho hình nón đỉnh S có chiều cao h và bán kính đáy $r = a$. Mặt phẳng (P) đi qua S và cắt đường tròn đáy tại A, B sao cho $AB = \sqrt{3}a$. Biết khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến (P) bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. Tính thể tích V của khối nón.

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** πa^3. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử tâm của đường tròn đáy là O. Gọi M là trung điểm của AB $\Rightarrow AM = MB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Suy ra $MO = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông SOM kẻ $OH \perp SM$, khi đó khoảng cách từ O đến (SAB) là $OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2}$ hay $\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a$.

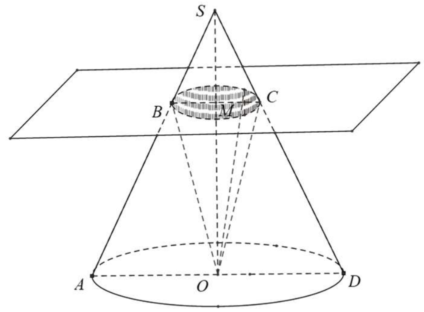
Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi.(a)^2.a = \frac{1}{3}\pi a^3$.

Câu 9: Cho hình nón (N) có đường cao $SO = 2\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng 2, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM = x$, $0 < x < 2\sqrt{3}$. Gọi (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có BM là bán kính đường tròn (C).

Do tam giác $\Delta SBM \backsim \Delta SAO$ nên

$$\frac{BM}{AO}=\frac{SM}{SO} \Leftrightarrow BM=\frac{AO.SM}{SO} \Leftrightarrow BM=\frac{2\left(2\sqrt{3}-x\right)}{2\sqrt{3}}=2-\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là:

$$V=\frac{1}{3}\pi BM^2.OM=\frac{1}{3}\pi\left(2-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2.x=\frac{\pi}{9}x^3-\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}x^2+\frac{4\pi}{3}x$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{\pi}{9}x^3-\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}x^2+\frac{4\pi}{3}x,\ \left(0<x<2\sqrt{3}\right)$

Ta có $f'(x)=\frac{\pi}{3}x^2-\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}x+\frac{4\pi}{3}$

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{3}\,(L) \\ x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\,(N) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

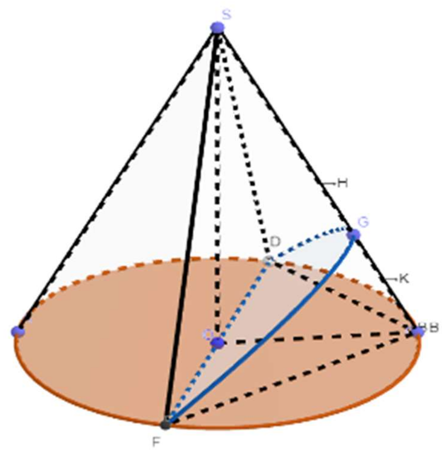
x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10: Cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R, đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích phần nhỏ nhất khi chia khối nón bởi mặt phẳng (α)?

A. $\frac{(3\pi-2)\sqrt{3}}{9}R^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}R^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}R^3$. **D.** $\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}R^3$.

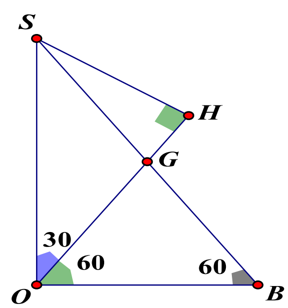
Lời giải



Khi cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R, đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60^0 thì ta được thiết diện là một đường parabol $(COFG)$.

Khi đó nữa hình nón bên phải chia thành 2 khối (H) và (K).

Theo đề ra ta có góc giữa mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy là góc $\widehat{GOB}=60°$



Xét tam giác SOB vuông tại O ta có: $\tan B=\dfrac{SO}{OB}=\dfrac{\sqrt{SB^2-OB^2}}{OB}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{SBO}=60°$.

Suy ra tam giác OGB là tam giác đều nên $GO=GB=OB=R$.

Do đó diện tích para bol $(DOFG)$ là: $S=\dfrac{4}{3}.OG.OE=\dfrac{4}{3}.R^2$.

Mặt khác gọi $SH\perp OG$, khi đó SH vuông góc với parabol, $SH=SO.\sin 30°=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích của đa diện (H) là $V_H=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{3}R^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}R=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}R^3$.

Do đó thể tích của đa diện nhỏ (K) tạo bởi thiết diện và khối nón là $V_K=\dfrac{1}{2}.V_{non}-V_H=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\pi R^2.\sqrt{3}R-=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}R^3-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}R^3=\dfrac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}R^3$.

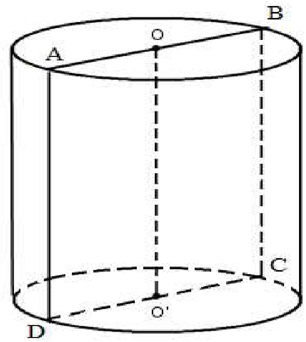
Câu 11: **(VDC&HSG mức độ 3)** Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30\,\text{cm}^2$, chu vi bằng $26\,\text{cm}$. Biết chiều dài hình chữ nhật lớn hơn đường kính của mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là

A. $\dfrac{69\pi}{2}(\text{cm}^2)$. **B.** $69\pi(\text{cm}^2)$. **C.** $23\pi(\text{cm}^2)$. **D.** $\dfrac{23\pi}{2}(\text{cm}^2)$.

Lời giải

GVSB: Trường Giang; GVPB:Kim Liên

Chọn A



Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là h và r.

Do chiều dài hình chữ nhật lớn hơn đường kính của mặt đáy của hình trụ (T) nên $h > 2r$.

Diện tích thiết diện là $h.2r = 30 \Rightarrow h.r = 15$

Chu vi thiết diện là $2(h+2r) = 26 \Rightarrow h = 13 - 2r$.

Ta có: $(13-2r)r = 15 \Leftrightarrow 2r^2 - 13r + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 5 \\ r = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Với $r = 5$ thì $h = 3$ không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Với $r = \dfrac{3}{2}$ thì $h = 10$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy diện tích toàn phần của (T) là $S_{TP} = 2\pi r.h + 2\pi r^2 = 2\pi.\dfrac{3}{2}.10 + 2\pi.\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{69\pi}{2}$ $\left(\text{cm}^2\right)$.

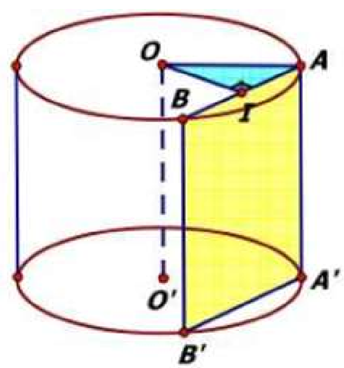
Câu 12: **(VDC&HSG mức độ 3)** Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 2cm được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16\ \text{cm}^2$. Tính thể tích của khối trụ (T).

A. $32\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $16\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $64\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $8\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

GVSB: Trường Giang; GVPB:Kim Liên

Chọn A



Gọi thiết diện đã cho là $AA'B'B$ (như hình vẽ) và I là trung điểm AB. Hình vuông $AA'B'B$ có diện tích bằng $16\ \left(\text{cm}^2\right) \Rightarrow$ cạnh hình vuông bằng $AA' = 4\text{cm}$.

Mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 2cm suy ra $OI = 2\ (\text{cm})$.

Ta có bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{OI^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

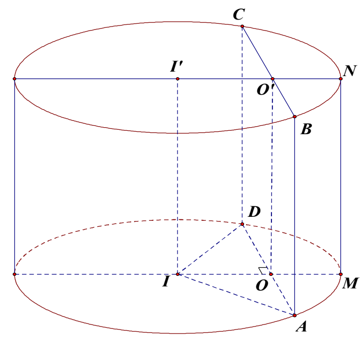
Thể tích của khối trụ (T) là $V = \pi r^2 h = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2.4 = 32\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 13: Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

A. 52π. **B.** $2\sqrt{3}\pi$. **C.** $\dfrac{52\pi}{3}$. **D.** 13π.

Lời giải

Chọn A



Cắt hình trụ theo mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 16 $\Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng $AB = AD = 4$.
Giả sử $IO \perp AD$ tại O
Khoảng cách từ tâm I đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng $3 \Rightarrow IO = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

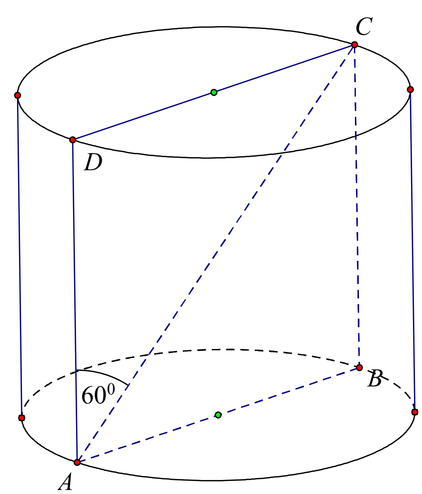
Vậy thể tích khối trụ trên là: $V = \pi.\left(\sqrt{13}\right)^2.4 = 52\pi$ (đvtt).

Câu 14: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



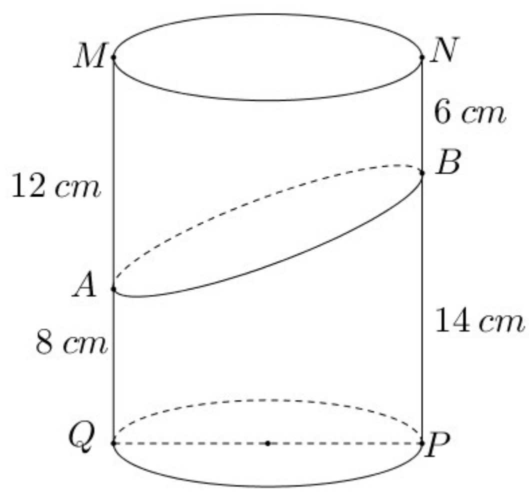
Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác ADC vuông tại D và $BD = AC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác vuông ADC có

$\sin \widehat{DAC} = \dfrac{DC}{AC} \Leftrightarrow DC = AC\sin \widehat{DAC} \Leftrightarrow DC = a\sqrt{2}.\sin 60^\circ \Leftrightarrow DC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$ bán kính mặt đáy của hình trụ là $r = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\cos \widehat{DAC} = \dfrac{AD}{AC} \Leftrightarrow AD = AC\cos \widehat{DAC} \Leftrightarrow AD = a\sqrt{2}\cos 60^\circ \Leftrightarrow AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ chiều cao của hình trụ là $h = AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 15: Cho khối trụ có chiều cao $20cm$. Cắt khối trụ bởi môt mặt phẳng được thiết diện là hình elip có độ dài truc lớn bằng $10cm$. Thiết diện chia khối trụ ban đầu thành hai nửa, nửa trên có thể tích là V_1, nửa dưới có thể tích là V_2 (như hình vẽ). Khoảng cách từ một điểm thuộc thiết diện gần đáy dưới nhất và điểm thuộc thiết diện xa đáy dưới nhất lần lượt là $8cm$ và $14cm$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A. $\dfrac{6}{11}$. **B.** $\dfrac{9}{20}$. **C.** $\dfrac{11}{20}$. **D.** $\dfrac{9}{11}$.

Lời giải

Chọn D

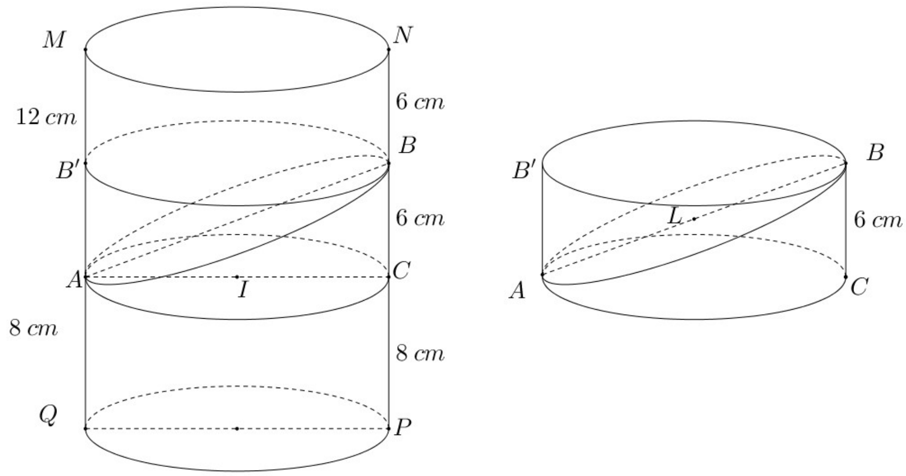
Qua A và B, dựng mặt phẳng vuông góc với đường sinh và cắt trụ theo thiết diện là một đường tròn (Kí hiệu các điểm như hình vẽ)

Theo giả thiết ta được $BC = 6cm$, $AB = 10cm$ nên đường kính AC là:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8cm.$$

Cách 1: Phân chia khối hình, sử dụng phép đối xứng tâm.

Xét khối trụ ở giữa:



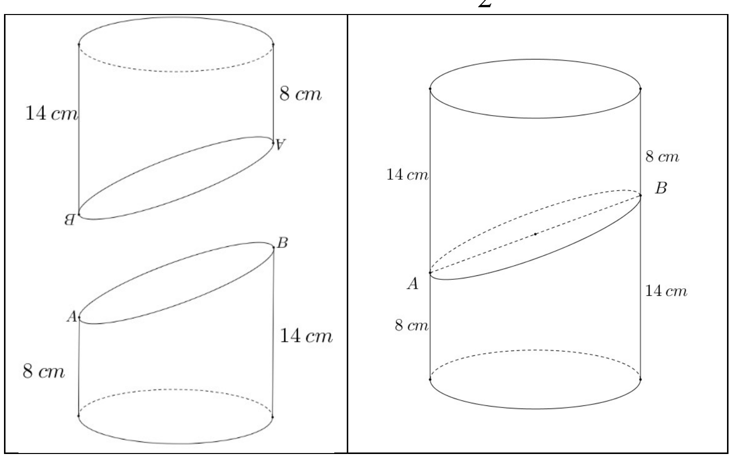
Thiết diện qua A,B cắt trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau (Phần này có được bằng phép đối xứng tâm phần kia qua tâm L, với L là trung điểm của AB) và bằng một nửa khối trụ và bằng

$\frac{1}{2}.\pi.4^2.6 = 48\pi\left(cm^2\right)$. Từ đó suy ra thể tích nửa trên là: $V_1 = \pi 4^2.6 + 48\pi = 144\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích nửa dưới là: $V_2 = \pi.4^2.8 + 48\pi = 176\pi\left(cm^2\right)$. Suy ra tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

Cách 2: Thay đổi cách ghép của khố trụ để thuận tiện việc tính tỉ số

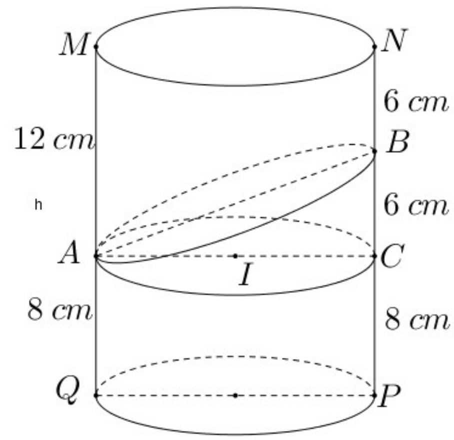
Xét nửa dưới: khi ghép hai phần giống nhau lại ta được một khối trụ có chiều cao $22cm$ (hình minh họa). Khi đó thể tích của nửa dưới bằng: $V_2 = \frac{1}{2}\pi.4^2.22 = 176\pi\left(cm^2\right)$



Thể tích nửa trên là $V_1 = \pi.4^2.20 - 176\pi = 128\pi\left(cm^2\right)$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

Cách 3: Ứng dụng tích phân.

Qua A, dựng mặt phẳng vuông góc với đường sinh và cắt trụ theo thiết diện là một đường tròn (Kí hiệu các điểm như hình vẽ)



Theo giả thiết ta được $BC = 6cm$, $AB = 10cm$ nên đường kính AC là: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$ $= 8cm$

Xét nửa dưới: Nửa dưới được chia thành hai phần:

- Phần 1: Khối trụ có chiều cao $AQ = 8cm$, bán kính đường tròn đáy $R = \frac{AC}{2} = 4\text{cm}$. Phần này có thể tích là $T_1 = \pi R^2.AQ = \pi.4^2.8 = 128\pi\left(cm^2\right)$

- Phần 2: Khối (N) Có thể tích T_2 được tính bằng cách sau:

+ Trục Ox là đường thẳng thẳng chứa đường kính AC như hình vẽ.

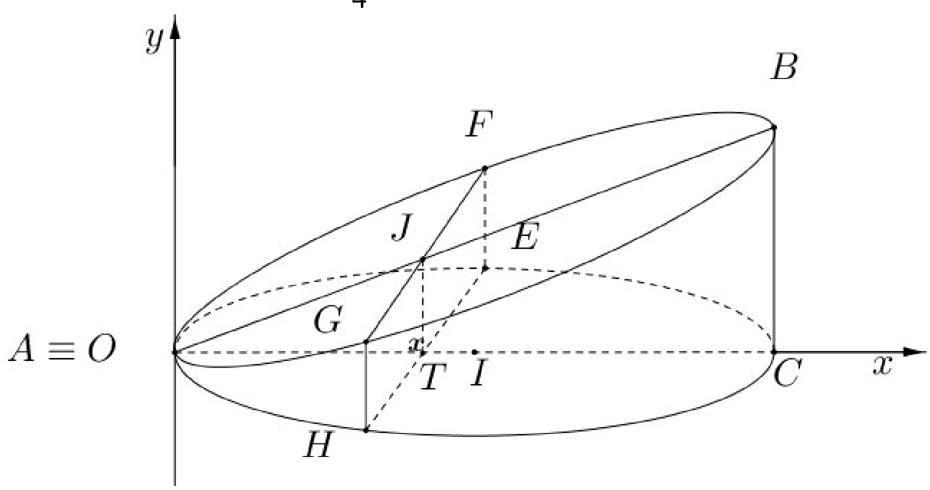
+ Khối (N) cần tính thể tích nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0; x = 8$.

+ Gọi T là điểm nằm trên trục Ox và có hoành độ x (với $0 \le x \le 8$)

Mặt phẳng qua T vuông góc với trục Ox cắt khối (N) theo thiết diện là hình chữ nhật $EFGH$ có độ dài các cạnh:

$HE = 2.HT = 2.\sqrt{IH^2 - IT^2} = \sqrt{16 - (4-x)^2}$ ($IT = 4 - x$ nếu T nằm giữa O và I hoặc $IT = x - 4$ nếu T nằm giữa I và C). $EF = JT = OT.\tan\widehat{IOT} = x.\tan\widehat{BOC} = x.\frac{BC}{AC} = \frac{3x}{4}$

Diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{3x}{4}.\sqrt{16 - (4-x)^2}$



Khi đó $T_2 = \int\limits_0^8 \frac{3x}{4}.2.\sqrt{16 - (4-x)^2}dx = 48\pi\left(cm^2\right)$. Suy ra $V_2 = T_1 + T_2 = 176\pi\left(cm^2\right)$

Thể tích khối trụ ban đầu là: $V = \pi 4^2.20 = 320\pi\left(cm^2\right)$ Suy ra $V_1 = V - V_2 = 144\pi\left(cm^2\right)$

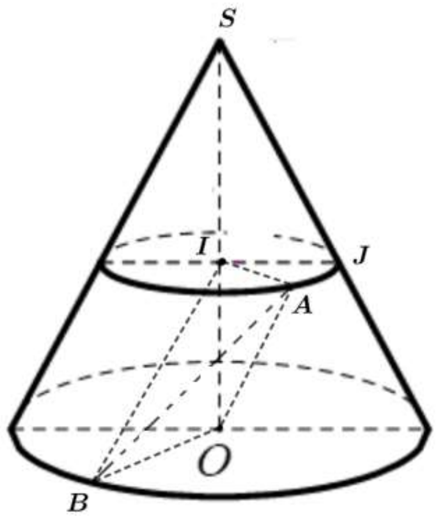
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

Câu 16: Cho hình nón (T) đỉnh S, có đáy là đường tròn (C_1) tâm O, bán kính bằng 2, chiều cao hình nón (T) bằng 2. Khi cắt hình nón (T) bởi mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn SO và song song với đáy của hình nón, ta được đường tròn (C_2) tâm I. Lấy hai điểm A và B lần lượt trên hai đường tròn (C_2) và (C_1) sao cho góc giữa $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là $60°$. Thể tích khối tứ diện $IAOB$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{24}$..

Lời giải

Chọn A



Vì khi cắt hình nón (T) bởi mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn SO và song song với đáy của hình nón, ta được đường tròn (C_2) tâm I nên $IA = JI = \frac{1}{2}r = 1$.

Ta có $IA = IJ = \sqrt{SJ^2 - SI^2} = 1$. Mặt khác, ta có: $d(IA;OB) = OI = 1$.

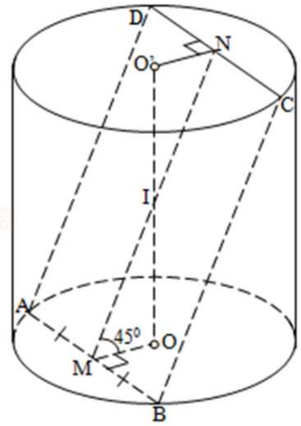
Nên khi đó $V_{OBAI} = \frac{1}{6}IA.OB.d(IA;OB).\sin(IA;OB) = \frac{1}{6}.2.1.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 17: Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc $45°$. Diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ và thể tích V của khối trụ là

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}; V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}; V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{32}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}; V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. **D.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}; V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Lời giải



Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Khi đó: $OM \perp AB$ và $O'N \perp DC$.
Giả sử I là giao điểm của MN và OO'. Đặt $R = OA,\ h = OO'$.

Trong ΔIOM vuông cân tại I nên: $OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2} IM \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

Ta có: $R^2 = OA^2 = AM^2 + MO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$.

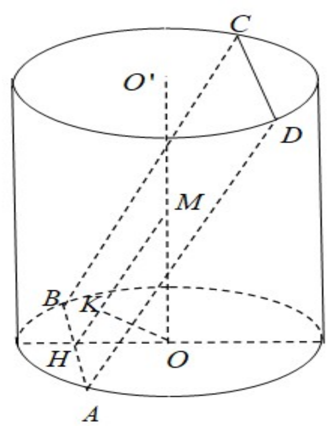
$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; $V = \pi R^2 h = \pi \frac{3a^2}{8}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Câu 18: Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $10a$ và bán kính đáy $5a$. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm M của OO' và tạo với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt khối trụ theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

A. $\frac{20a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{20a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{200a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{200a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có (α) cắt khối trụ theo một thiết diện là hình chữ nhật.

Gọi A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn (O) và H là hình chiếu của O trên $AB \Rightarrow AB \perp (MHO)$.

Trong mặt phẳng (MHO) kẻ $OK \perp MH, (K \in MH)$ khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $\widehat{OMK} = 30°$.

Xét tam giác vuông MHO ta có $HO = OM.\tan 30° = 5a.\tan 30° = \dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông AHO ta có $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{25a^2 - \dfrac{25a^2}{3}} = \dfrac{5a\sqrt{6}}{3}$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB = \dfrac{10a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $AD = 2HM = \dfrac{2OM}{\cos 30°} = \dfrac{2.5a}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{20a\sqrt{3}}{3}$.

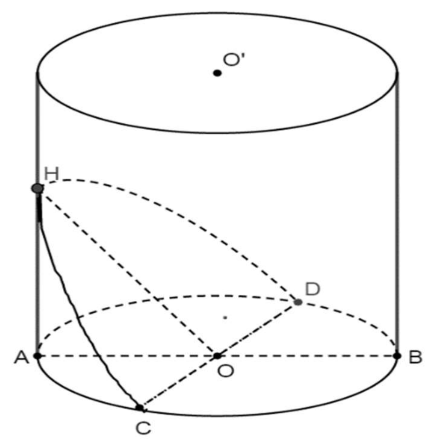
Vậy diện tích thiết diện tạo thành là: $S = AB.AD = \dfrac{20a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{10a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{200a^2\sqrt{2}}{3}$ (đvdt).

Câu 19: Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh bằng 2. Mặt phẳng (P) chứa đường kính của một mặt đáy và tạo với mặt đáy đó góc $45°$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}\pi$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện qua trục là hình vuông cạnh bằng 2, suy ra:
Chiều cao của trụ là $h = 2$, bán kính đáy $r = 1$.

Mặt phẳng (P) chính là nửa Elip qua điểm D, H, C như hình vẽ.

Vì (P) tạo với mặt đáy góc $45°$ nên $\widehat{AOH} = 45°$.

(Mặt phẳng (P) không cắt đáy trên, lí do vì: $AH = OA.\tan 45° = 1 < h$).

Hình chiếu vuông góc của thiết diện lên mặt phẳng đáy là nửa đường tròn đáy.

Vậy diện tích thiết diện là: $S = \dfrac{S'}{\cos 45°} = \dfrac{\dfrac{1}{2}\pi.1^2}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (đvdt).

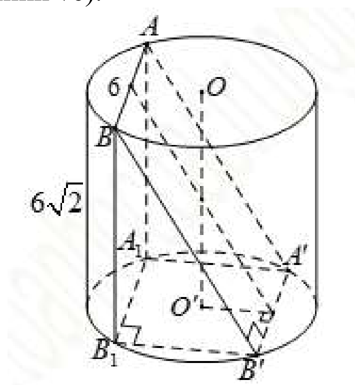
Câu 20: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}\,cm$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB, $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\,cm$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $60\,cm^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

A. $5cm$. **B.** $3\sqrt{2}\,cm$. **C.** $4cm$. **D.** $5\sqrt{2}\,cm$.

Lời giải

Chọn C

Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).



Vì $AB = A'B'$ nên $(ABB'A')$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB.AA' \Leftrightarrow 60 = 6.AA' \Rightarrow AA' = 10(cm)$.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6(cm)$,

$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1^2} = \sqrt{10^2 - (6\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}\,(cm)$

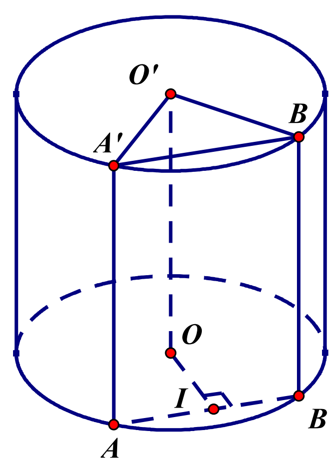
Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2R = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow R = 4(cm)$.

Câu 21: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng một nửa chiều cao. Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $AA'BB'$. Đặt α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B



Gọi R là bán kính của đường tròn tâm O. Ta có: $\alpha = \widehat{BAB'}$.

Suy ra: $AB' = 2R\cot\alpha$. Gọi I là trung điểm của $AB' \Rightarrow OI \perp AB'$.

Ta có: $OI = \sqrt{OB'^2 - IB'^2} = \sqrt{R^2 - R^2\cot^2\alpha} = R\sqrt{1-\cot^2\alpha}$.

Và: $S_{\Delta OAB'} = \dfrac{1}{2}OI.AB' = \dfrac{1}{2}R.\sqrt{1-\cot^2\alpha}.2R\cot\alpha = R^2\cot\alpha.\sqrt{1-\cot^2\alpha}$.

Suy ra: $V_{OO'AB}=\frac{1}{3}V_{OAB'.O'A'B}=\frac{1}{3}OO'.S_{\Delta OAB'}=\frac{1}{3}.2R.R^2\cot\alpha.\sqrt{1-\cot^2\alpha}$.

Ta có: $V_{OO'AB}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\cot\alpha.\sqrt{1-\cot^2\alpha}$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(t)=t.\sqrt{1-t^2}$ với $t\in[-1;1]$ có $f'(t)=\sqrt{1-t^2}+\frac{t.(-t)}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ với $t\in(-1;1)$

Xét $f'(t)=0\Leftrightarrow 1-2t^2=0\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì $0°<\alpha<90°$ nên $\tan\alpha>0\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\searrow$	0

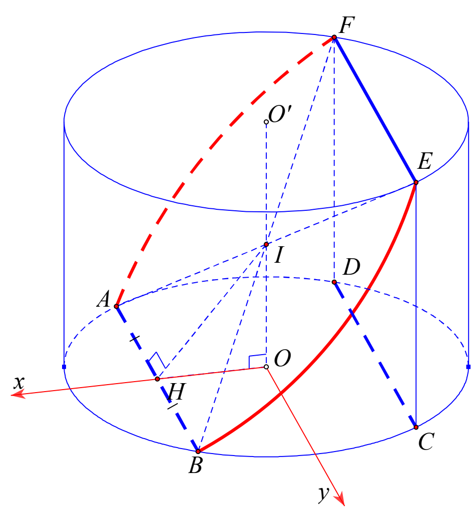
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{\max}$ khi $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay $\cot\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 22: Cho khối trụ có chiều cao $h=16$ và hai đáy là hai đường tròn tâm O, O' với bán kính $R=12$. Gọi I là trung điểm của OO' và AB là một dây cung của đường tròn (O) sao cho $AB=12\sqrt{3}$. Tính diện tích thiết diện của khối trụ với mặt phẳng (IAB).

A. $120\sqrt{3}+80\pi$. **B.** $48\pi+24\sqrt{3}$. **C.** $60\sqrt{3}+40\pi$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi d là khoảng cách từ O đến dây cung AB $\Rightarrow d=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=6$.

Gọi α là góc tạo bởi thiết diện với mặt đáy. Do đó $\tan\alpha=\frac{\frac{h}{2}}{d}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

Đưa hệ trục tọa độ Oxy vào mặt phẳng đáy, gốc trùng với tâm O, trục Ox vuông góc với AB, trục Oy song song với AB.

Do đó $S_{ABCD}=2\int\limits_{-6}^{6}\sqrt{12^2-x^2}\,\mathrm{d}x=72\sqrt{3}+\frac{144\pi}{3}$.

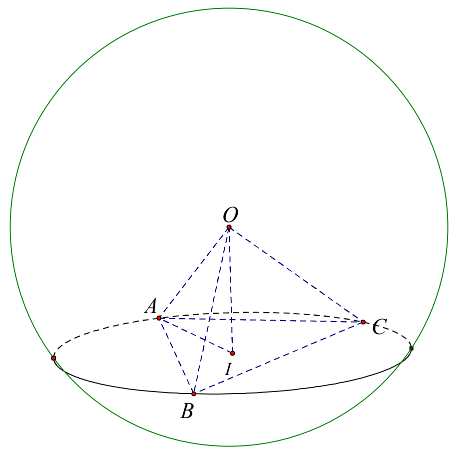
Áp dụng công thức $\cos\alpha=\frac{S_{ABCD}}{S_{td}}$ suy ra $S_{td}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha}=120\sqrt{3}+80\pi$.

Câu 23: Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB=AC=6$, $BC=8$. Khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC) bằng 2. Diện tích mặt cầu (S) bằng

A. $\frac{404\pi\sqrt{505}}{75}$. **B.** $\frac{2196\pi}{75}$. **C.** $\frac{404\pi}{5}$. **D.** $\frac{324\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do A, B, C nằm trên mặt cầu (S) nên $OI\perp(ABC)$. Theo đề bài ta có khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC) bằng 2 hay $OI=2$.

Gọi M là trung điểm của BC, do tam giác ABC cân tại A nên $AM\perp BC$

$\Rightarrow AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{20}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=\frac{1}{2}.\sqrt{20}.8=8\sqrt{5}$.

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có $r=\frac{AB.BC.CA}{4S_{\Delta ABC}}=\frac{6.6.8}{4.8\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông OIA ta có $OA^2=OI^2+IA^2=4+\frac{81}{5}=\frac{101}{5}$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=4\pi.OA^2=4\pi.\frac{101}{5}=\frac{404\pi}{5}$.

Câu 24: Cho hai đường tròn (C_1), tâm O_1, bán kính bằng 1 và (C_2), tâm O_2, bán kính bằng 2, lần lượt nằm trong các mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ mà $(P_1)//(P_2), O_1O_2\perp(P_1), O_1O_2=3$. Tính diện tích mặt cầu đi qua 2 đường tròn đó?

A. 16π. **B.** 24π. **C.** 12π. **D.** 20π.

Lời giải

Chọn D

Gọi r_1,r_2 là các bán kính của các đường tròn $(C_1),(C_2)$ và R là bán kính của mặt cầu

TH1: Tâm O của mặt cầu nằm giữa O_1,O_2. Ta có phương trình:

$\sqrt{R^2-r_1^2}+\sqrt{R^2-r_2^2}=3\Leftrightarrow\sqrt{R^2-1}+\sqrt{R^2-4}=3\Leftrightarrow 2R^2-5+2\sqrt{(R^2-1)(R^2-4)}=9$

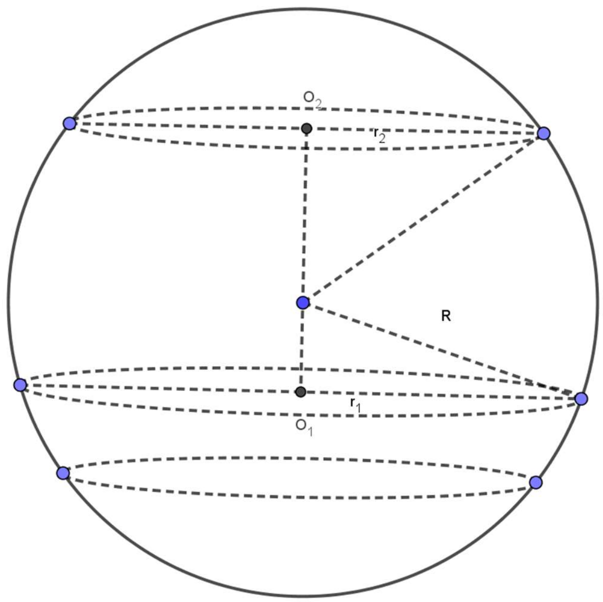
$$\sqrt{R^4-5R^2+4}=7-R^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 7-R^2 \geq 0 \\ R^4-5R^2+4=\left(7-R^2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 \leq 7 \\ 9R^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow R^2=5$$

Suy ra diện tích mặt cầu là $S_{mc}=4\pi R^2=20\pi$

TH2: Tâm O của mặt cầu nằm ngoài đoạn O_1O_2. Ta có phương trình:

$\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r_2^2}=3 \Leftrightarrow \sqrt{R^2-1}-\sqrt{R^2-4}=3 \Leftrightarrow \sqrt{R^2-1}=3+\sqrt{R^2-4}$

$\Leftrightarrow R^2-1=9+R^2-4+6\sqrt{R^2-4} \Leftrightarrow -6=6\sqrt{R^2-4}$. Phương trình vô nghiệm.

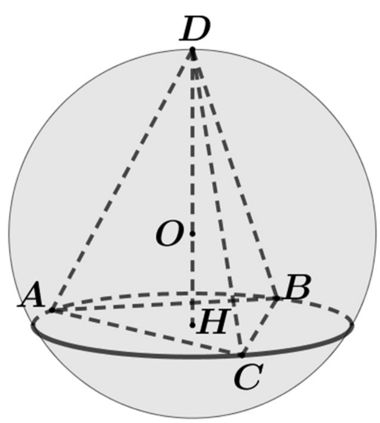


Câu 25: Cho mặt cầu (S) bán kính $R=5$ cm. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π cm. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C), điểm D thuộc (S) $(D \notin (C))$ và tam giác ABC đều. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $20\sqrt{3}$ cm^3. **B.** $32\sqrt{3}$ cm^3. **C.** $60\sqrt{3}$ cm^3. **D.** $96\sqrt{3}$ cm^3.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (P)

Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có chu vi bằng 8π cm.

Suy ra bán kính đường tròn $R=\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$ (cm).

Suy ra cạnh của tam giác ABC bằng $4\sqrt{3}\,(\text{cm})$.

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ không đổi.

Do đó thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi $d\left[D,(ABC)\right]$ lớn nhất $\Leftrightarrow D$ và O nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) và $D,\ O,\ H$ thẳng hàng $\Leftrightarrow DH = DO + OH$

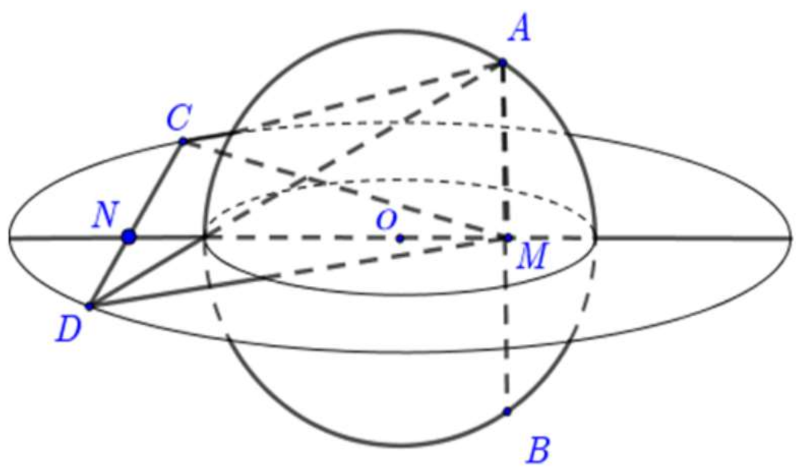
$= DO + \sqrt{OA^2 - AH^2} = 5 + \sqrt{25-16} = 8$. Khi đó $V_{\max} = \dfrac{1}{3}.12\sqrt{3}.8 = 32\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

Câu 26: Cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có cùng tâm I và bán kính lần lượt là 2 và $\sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có các điểm A, B thay đổi thuộc (S_1) còn C, D thay đổi thuộc (S_2). Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** $6\sqrt{2}$ **D.** $7\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.\sin(AB,CD).d(AB,CD) \Rightarrow V_{\max} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD)$.

Khi đó $AB \perp CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD

Đặt $AM = y, CN = x; x \in \left(0;\sqrt{10}\right]; y \in (0;2] \Rightarrow ON = \sqrt{10-x^2}; OM = \sqrt{4-y^2}$

$\Rightarrow d(AB,CD) = MN = OM + ON = \sqrt{10-x^2} + \sqrt{4-y^2}$

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD) = \frac{1}{6}2x.2y\left(\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right) = \frac{2}{3}x.y\left(\sqrt{10-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x.y\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{10-x^2}{2}} + \sqrt{1}\sqrt{4-y^2}\right) \le \frac{2}{3}x.y\sqrt{(2+1)\left(\frac{10-x^2}{2}+4-y^2\right)}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} \le \frac{2}{3}xy\sqrt{\frac{3}{2}\left(18-\left(x^2+2y^2\right)\right)} = \frac{2}{3}xy\sqrt{\frac{3}{2}\left(18-2\sqrt{2}xy\right)} = \frac{2}{3}xy\sqrt{3\left(9-\sqrt{2}xy\right)}$$

$$\Rightarrow V^2{}_{ABCD} \le \frac{4}{9}x^2y^2\left(3\left(9-\sqrt{2}xy\right)\right) = \frac{8}{3}.\frac{xy}{\sqrt{2}}.\frac{xy}{\sqrt{2}}.\left(9-\sqrt{2}xy\right) \le \frac{8}{3}\left(\frac{\frac{xy}{\sqrt{2}}+\frac{xy}{\sqrt{2}}+9-\sqrt{2}xy}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow V^2{}_{ABCD} = \frac{8}{3}.\left(\frac{9}{3}\right)^3 = 72 \Rightarrow V_{ABCD} \le 6\sqrt{2}$$

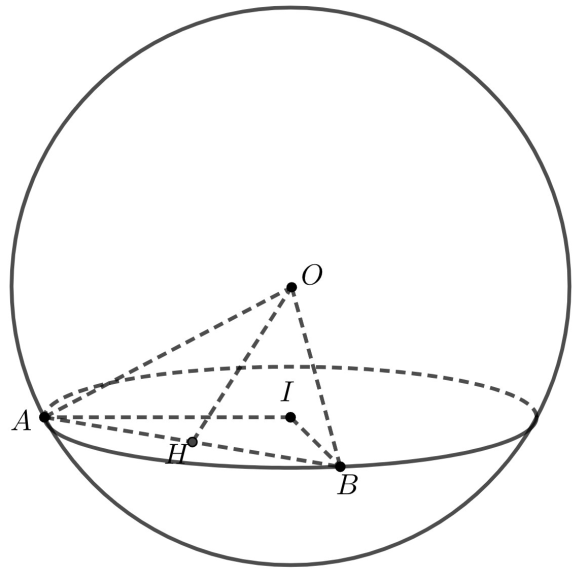
Vậy $V_{\max} = 6\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi: $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{10-x^2}{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{1} \\ \dfrac{xy}{\sqrt{2}} = 9 - \sqrt{2}xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 27: Cho mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tâm O, bán kính $2a$ theo giao tuyến là đường tròn (C) tâm I. Đường cát tuyến cắt đường tròn đó tại A, B sao cho khoảng cách từ tâm O đến AB bằng $a\sqrt{3}$. Tính diện tích đường tròn thiết diện khi thể tích khối tứ diện $OABI$ lớn nhất.

A. $\dfrac{5\pi}{2}a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $\dfrac{16\pi}{3}a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



◆ Gọi $r > 0$ là bán kính của đường tròn thiết diện (C).

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH \perp AB$ hay $\mathrm{d}(O, AB) = OH = a\sqrt{3}$.

Có $IH \perp AB$, $R = OA = 2a$.

Xét tam giác OAH vuông tại H có $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$, suy ra $AB = 2AH = 2a$.

Xét tam giác OAI vuông tại I có $OI = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4a^2 - r^2}$

Xét tam giác AIH vuông tại H có $IH = \sqrt{r^2 - a^2}$

◆ Thể tích tứ diện $OIAB$ là:

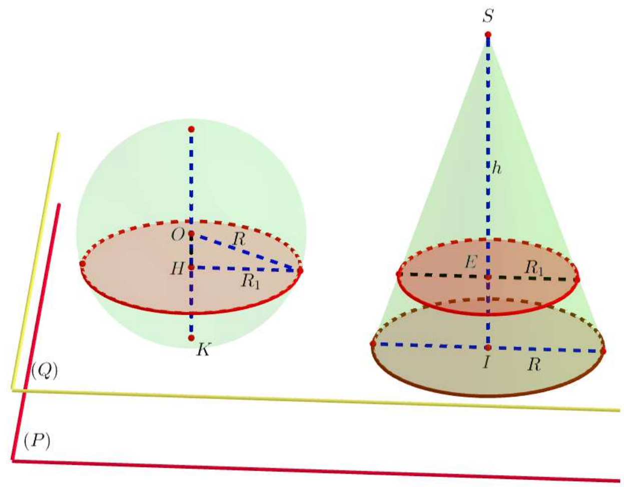
$V_{OIAB} = \dfrac{1}{3}S_{IAB}.OI = \dfrac{1}{6}OI.IH.AB = \dfrac{1}{6}\sqrt{4a^2 - r^2}.\sqrt{r^2 - a^2}.2a \le \dfrac{a}{3}.\dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

Do đó $\mathrm{Max}V_{OIAB} = \dfrac{a^3}{2}$ khi $4a^2 - r^2 = r^2 - a^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

◆ Diện tích đường tròn thiết diện là $S = \pi r^2 = \dfrac{5\pi a^2}{2}$.

Câu 28: Cho hình cầu tâm O bán kính $R = 5$, tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao $h = 15$, có bán kính đáy bằng R. Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P). Người ta cắt hai hình đó bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện có tổng diện tích là S. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q),

$(0 < x \le 5)$. Biết rằng S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a}{b}$ (phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị $T = a + b$.



A. $T = 17$. **B.** $T = 19$. **C.** $T = 18$. **D.** $T = 23$.

Lời giải

Chọn B

◆ Khi ta cắt hình cầu và hình nón bởi mặt phẳng (Q) song song với (P) thì hai thiết diện đều là hình tròn.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính, còn H, E lần lượt là tâm của hai hình tròn thiết diện đó.

Gọi K là tiếp điểm của mặt cầu với (P), còn I là tâm mặt đáy của hình nón.

Theo giả thiết $HK = EI = x,\ 0 < x \le R$ nên H nằm giữa O và K, còn E nằm giữa S và I.

Ta có: $R_1^{\ 2} = R^2 - OH^2 = R^2 - (5-x)^2 = 10x - x^2$.

$\frac{R_2}{R} = \frac{SE}{SI} = \frac{15-x}{15} \Rightarrow R_2 = \frac{15-x}{3}$.

◆ Do đó: $S = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 = \pi\left(10x - x^2\right) + \pi\left(\frac{15-x}{3}\right)^2$.

$= \frac{\pi}{9}\left(-8x^2 + 60x + 225\right) = \frac{\pi}{9}\left(-8x^2 + 60x + 225\right)$.

$= \frac{75\pi}{2} - \frac{8\pi}{9}\left(x - \frac{15}{4}\right)^2 \le \frac{75\pi}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{15}{4}$.

◆ Vậy S đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{75\pi}{2}$ khi $x = \frac{a}{b} = \frac{15}{4}$.

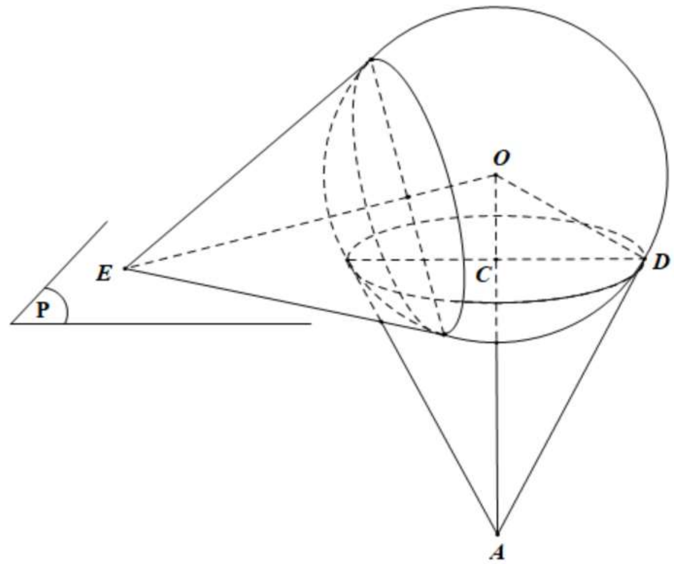
Do vậy $T = a + b = 19$.

Câu 29: Trong không gian cho mặt cầu (S) tâm O có bán kính R và một điểm A cho trước sao cho $AO = 2R$. Từ A ta kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với tiếp điểm thuộc đường tròn (C_1). Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C_1) ta lấy điểm E thay đổi nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi (N) là hình nón có đỉnh là E và đáy là đường tròn (C_2) gồm các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E đến mặt cầu (S). Biết rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) luôn cùng bán kính, khi đó quỹ tích các điểm E là một đường tròn, đường tròn này có bán kính R' bằng

A. $\frac{3R}{2}$. **B.** $\frac{R\sqrt{15}}{2}$. **C.** $\frac{R\sqrt{17}}{2}$. **D.** $\frac{R\sqrt{15}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi bán kính của (C_1), (C_2) lần lượt là r_1, r_2. Gọi C là tâm của (C_1) và D là một điểm trên (C_1). Suy ra tam giác AOD vuông tại D nên $CD.OA = DO.DA$.

Do đó $r_1 = CD = \dfrac{DO.DA}{OA} = \dfrac{R\sqrt{OA^2 - R^2}}{OA} = R\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{OA^2}}$.

Tương tự ta tính được $r_2 = R\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{OE^2}}$.

Theo giả thiết $r_1 = r_2$ suy ra $OA = OE = 2R$.

Do vậy E di động trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm O bán kính $2R$ và mặt phẳng (P), đường tròn này có tâm là **C.**

Ta tính được $OC = \dfrac{OD^2}{OA} = \dfrac{R}{2}$. Suy ra $R' = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{4R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{15}}{2}$.

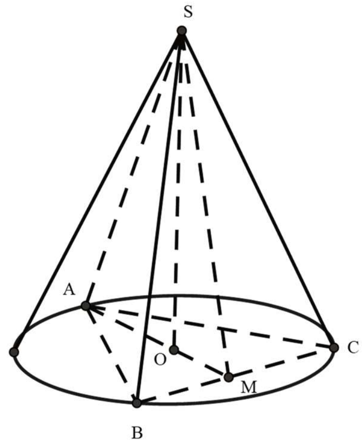
Dạng 3: Bài toán thể tích, diện tích và các yếu tố khác của khối nón, khối trụ ngoại tiếp, nội tiếp các khối khác.

Câu 1: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC.

Ta có $OM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $OA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SMO có $SO = OM.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.

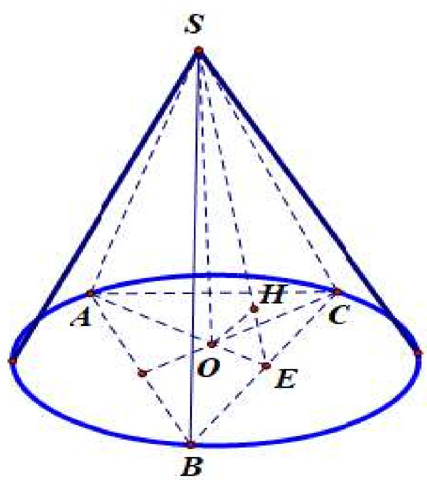
Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi.OA.SA = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 2: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy ABC đến một mặt bên là $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của BC, dựng $OH \perp SE$ tại H.

Ta dễ dàng chứng minh được $OH \perp (SBC)$ nên suy ra $d(O;(SBC)) = OH = \dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác đều ABC, ta có:

$OE=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OA=\frac{2}{3}AE=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có:

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{SO^2}\Rightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow SO=a$.

Vậy thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

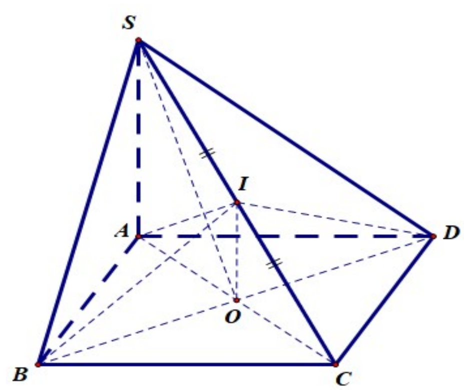
$V=\frac{1}{3}\pi.R^2.h=\frac{1}{3}\pi.OA^2.SO=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a=\frac{4\pi a^3}{9}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC; O là giao điểm của AC và BD. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối nón ngoại tiếp khối chóp $I.ABCD$.

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{24}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên suy ra $OA=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow OA$ là hình chiếu vuông góc của SO lên $(ABCD)$

$\Rightarrow\left(\widehat{SO;(ABCD)}\right)=\widehat{SOA}=60°$.

Trong tam giác SAO vuông tại A có $\tan\widehat{SOA}=\frac{SA}{OA}\Rightarrow SA=OA.\tan 60°=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong tam giác SAC có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI\perp(ABCD)$ và $OI=\frac{SA}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $R=OA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích của khối nón ngoại tiếp khối chóp $I.ABCD$ là

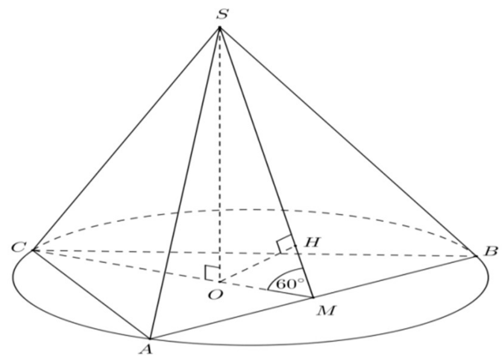
$V=\frac{1}{3}\pi.R^2h=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{4}=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{24}$.

Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc $60°$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{7}$. **B.** $S_{xq}=8\pi a^2\sqrt{7}$. **C.** $S_{xq}=4\pi a^2\sqrt{7}$. **D.** $S_{xq}=2\pi a^2\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $SO \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của AB. Kẻ OH vuông góc với SM tại H.

Do $\begin{cases} SO \perp AB \\ OM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOM) \Rightarrow (SAB) \perp (SOM)$.

Lại có $(SAB) \cap (SOM) = SM$, $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Ta thấy $d\left(C;(SAB)\right) = 3d\left(O;(SAB)\right) = 3OH$. Suy ra: $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác HOM ta có $\sin\widehat{SMO} = \dfrac{OH}{OM} \Rightarrow OM = \dfrac{OH}{\sin\widehat{SMO}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a$. Suy ra: $OC = 2a$.

Trong tam giác SOM ta có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM.\tan\widehat{SMO} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác SOC ta có: $SC^2 = SO^2 + OC^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2 = 7a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{7}$.

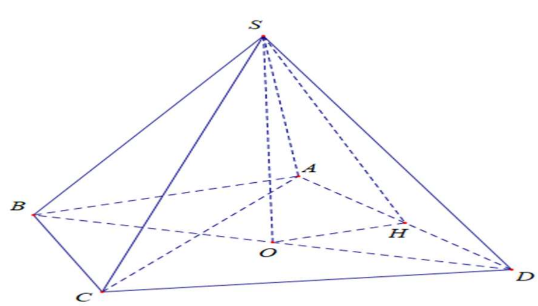
Vậy diện tích xung quanh của hình nón cần tìm là: $S_{xq} = \pi Rl = \pi.2a.a\sqrt{7} = 2\pi a^2\sqrt{7}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên bằng nhau. Đáy $ABCD$ thỏa mãn tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{ABC} = 120°$; tam giác ACD là tam giác đều. Diện tích tam giác SAD bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Thể tích của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ là

A. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{7}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$ nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Do $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90°$ $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ là trung điểm O của BD.

Ta có $SA=SB=SC=SD$ nên $SO\perp(ABCD)$. Do đó khối nón có đỉnh S, đường cao SO và bán kính đáy là $OB=\frac{1}{2}BD$.

Kẻ $SH\perp AD$ $(H\in AD)$ $\Rightarrow H$ là trung điểm của AD

$\Rightarrow OH$ là đường trung bình của tam giác ABD.

Xét tam giác ABD ta có: $AB=a,\widehat{ABD}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=60°\Rightarrow BD=\frac{AB}{\cos 60°}=2a\Rightarrow OB=a$.

Và $AD=a\sqrt{3}$, $OH=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$.

Xét tam giác cân SAD có $S_{\Delta SAD}=\frac{1}{2}AD.SH\Rightarrow SH=\frac{2S_{\Delta SAD}}{AD}=a$.

Xét tam giác vuông SOH ta có: $SO=\sqrt{SH^2-OH^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

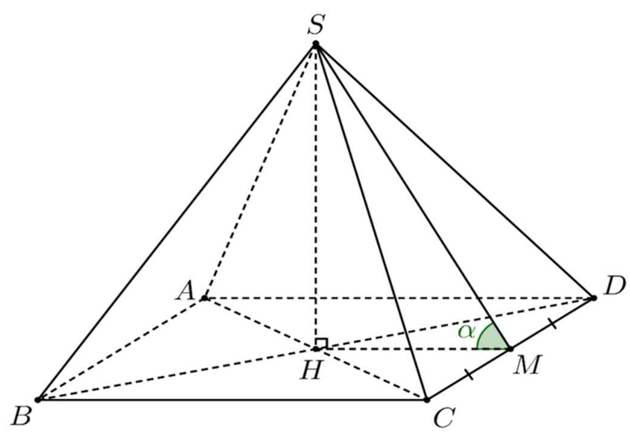
Khi đó thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi.OB^2.SO=\frac{1}{3}.\pi.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α. Khi góc α thay đổi, thể tích của khối nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{27}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{9}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi cạnh đáy hình chóp đều là $2x$ và M là trung điểm của CD.

Khi đó $\widehat{SMH}=\alpha$ và $x=SM\cos\alpha$.

Mặt khác $x=\sqrt{a^2-SM^2}$ nên $SM\cos\alpha=\sqrt{a^2-SM^2}\Rightarrow SM=\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

Suy ra $HM=\frac{BC}{2}=x=\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$ và $SH=SM.\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

Hình nón nội tiếp hình chóp đều có đỉnh hình nón chính là đỉnh S của hình chóp, đường tròn đáy hình nón chính là đường tròn nội tiếp đáy hình chóp. Vì vậy hình nón đó có đường cao là SH, bán kính đáy hình nón là HM.

Thể tích V của hình nón là $V=\frac{1}{3}\pi.HM^2.SH=\frac{\pi a^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{3(1+\cos^2\alpha)\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

Đặt $t=\sin\alpha$. Vì $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1)$.

Khi đó $V=\dfrac{\pi a^3\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{3\left(2-\sin^2\alpha\right)\sqrt{2-\sin^2\alpha}}=\dfrac{\pi a^3 t\left(1-t^2\right)}{3\left(2-t^2\right)\sqrt{2-t^2}}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t-t^3}{\left(2-t^2\right)\sqrt{2-t^2}}$ trên khoảng $\left(0;1\right)$, ta có

$$f'\left(t\right)=\dfrac{\left(1-3t^2\right)\left(2-t^2\right)\sqrt{2-t^2}-3.\dfrac{-2t\left(2-t^2\right)}{2\sqrt{2-t^2}}.\left(t-t^3\right)}{\left(2-t^2\right)^3}.$$

Cho $f'\left(t\right)=0\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $\max\limits_{t\in(0;1)} f\left(t\right)=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

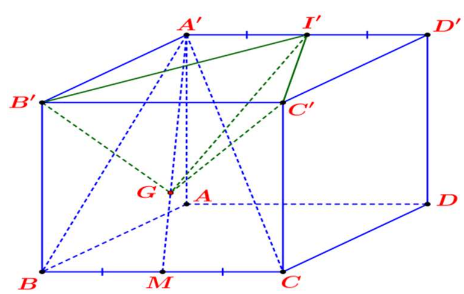
Vậy $V_{\max}=\dfrac{\pi a^3}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{9}=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có G là trọng tâm $\Delta A'BC$ và I' là trung điểm của đoạn thẳng $A'D'$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $B'C'I'$ và $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{4}{R^2}$. Tính thể tích của khối nón có đỉnh là G với đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác $B'C'I'$, biết rằng $S_{\Delta B'C'I'}=4$.

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{9}$. **D.** $\dfrac{9}{4}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có, chiều cao của hình hộp là $h=d\left(M,\left(A'B'C'D'\right)\right)$.

Suy ra $V_{M.A'B'C'D'}=\dfrac{1}{3}h.S_{A'B'C'D'}=\dfrac{V}{3}$.

Mà $GM\cap A'B'C'D'=A'\Rightarrow\dfrac{d\left(G,\left(A'B'C'D'\right)\right)}{d\left(M,\left(A'B'C'D'\right)\right)}=\dfrac{GA'}{MA'}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow d\left(G,\left(A'B'C'D'\right)\right)=\dfrac{2}{3}.d\left(M,\left(A'B'C'D'\right)\right)=\dfrac{2}{3}h$

$\Rightarrow V_{G.A'B'C'D'}=\frac{1}{3}\frac{2}{3}h.S_{A'B'C'D'}=\frac{2V}{9}$.

Mặt khác $S_{\Delta I'B'C'}=\frac{1}{2}S_{A'B'C'D'}\Rightarrow V_{G.B'C'I'}=\frac{1}{2}V_{G.A'B'C'D'}=\frac{1}{2}.\frac{2V}{9}=\frac{V}{9}=\frac{4}{9R^2}$.

Gọi V là thể tích của khối nón có đỉnh là G với đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác $B'C'I'$.

Ta có $\frac{V}{V_{G.B'C'I'}}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2.d\left(G,\left(B'C'I'\right)\right)}{\frac{1}{3}S_{B'I'C'}.d\left(G,\left(B'C'I'\right)\right)}=\frac{\pi R^2}{S_{B'I'C'}}$.

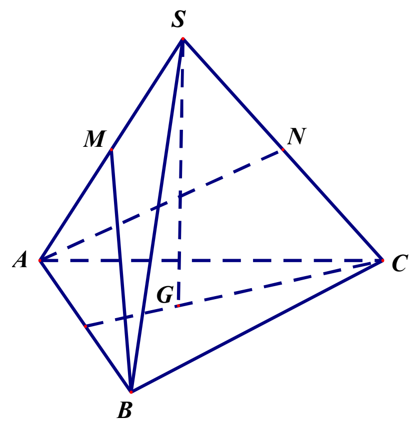
Suy ra $V=V_{G.B'C'I'}.\frac{\pi R^2}{S_{B'I'C'}}=\frac{4}{9R^2}.\frac{\pi R^2}{4}=\frac{\pi}{9}$.

Câu 8: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Biết rằng BM vuông góc với AN. Thể tích khối nón đỉnh S ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{14}}{8}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{42}}{54}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$, do đó $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$.

Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$.

Theo giả thiết $BM\perp AN\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AN}=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}=0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-2\overrightarrow{SA}^2=0$

$\Leftrightarrow 3.SA.SC.\cos\widehat{ASC}-2SA^2=0$

$\Leftrightarrow\cos\widehat{ASC}=\frac{2}{3}$.

Xét tam giác ASC, theo định lý côsin ta có

$AC^2=SA^2+SC^2-2SA.SC.\cos\widehat{ASC}=SA^2+SA^2-2.SA^2.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}SA^2\Rightarrow SA=\frac{AC\sqrt{6}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có $SG \perp (ABC)$ và $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{42}}{6}$.

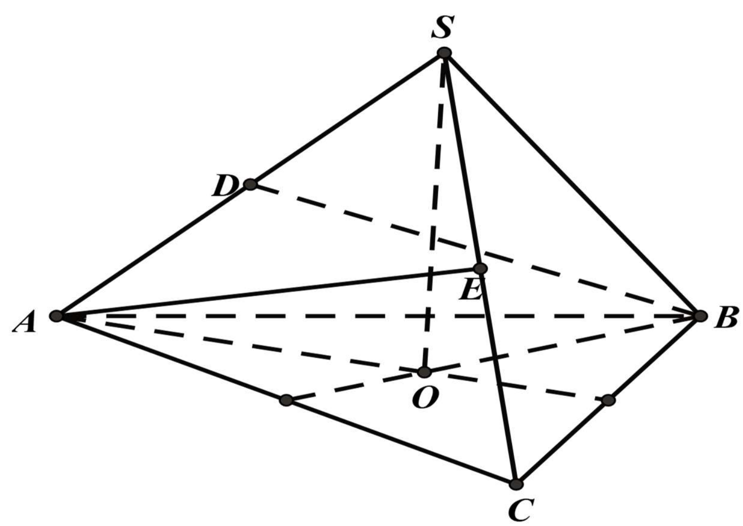
Vậy, $V_{nón} = \frac{1}{3}.\pi.\left(r_{ngoai\,tiep}\right)^2.SG = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{a\sqrt{42}}{6} = \frac{\pi a^3\sqrt{42}}{54}$.

Câu 9: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC. Tính thể tích của khối nón nội tiếp khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

A. $\frac{4\sqrt{7}\pi}{81}$. **B.** $\frac{16\sqrt{7}\pi}{9}$. **C.** $\frac{16\sqrt{7}\pi}{21}$. **D.** $\frac{16\sqrt{7}\pi}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm tam giác đều ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên ta có $SO \perp (ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$.

Đặt $\widehat{ASC} = \widehat{BSC} = \widehat{ASB} = \alpha$.

$BD \perp AE \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha - 2 - 2\cos\alpha + 4\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Áp dụng định lý hàm số côsin trong tam giác SAC, ta có:

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$AO = \frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Thể tích khối nón nội tiếp khối chóp là: $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2.\frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{4\pi\sqrt{7}}{81}$.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$. Biết cosin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ bằng

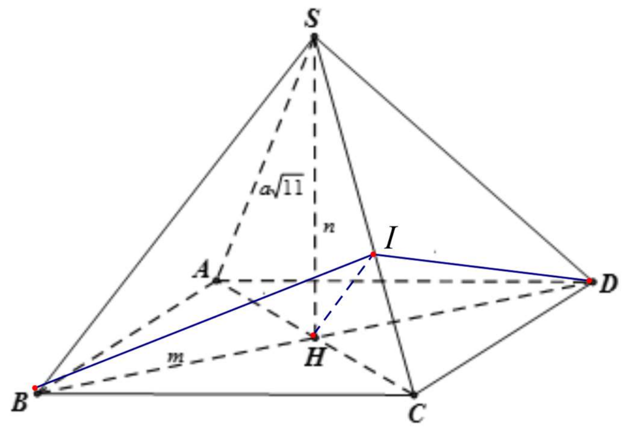
A. πa^3. **B.** $2\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $6\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Dùng hình học thuần túy



Ta có $(SBC)\cap(SCD) = SC$, $BD \perp (SHC) \Rightarrow BD \perp SC$, kẻ $HI \perp SC$ khi đó $SC \perp (BID)$.

Do đó: $\widehat{((SBC),(SCD))} = \widehat{(BI, ID)}$ (bằng hoặc bù với góc BID).

TH1: Nếu $\widehat{BID}$ là góc tù thì $\cos\widehat{BID} = -\frac{1}{10}$.

Đặt $t = \tan\widehat{BIH}$, ta có: $\frac{1-t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{10} \Leftrightarrow t^2 = \frac{11}{9} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{11}}{3} \Rightarrow \tan\widehat{BIH} = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

Đặt $HB = HC = x$ ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{11a^2 - x^2}$, $HI = \frac{SH.HC}{SC} = \frac{\sqrt{11a^2 - x^2}.x}{\sqrt{11}a}$.

Xét tam giác BHI có $\tan\widehat{BIH} = \frac{HB}{HI} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{HB}{HI} \Leftrightarrow \sqrt{11}HI = 3HB$

$\Leftrightarrow 3a = \sqrt{11a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow HB = a\sqrt{2}, SH = 3a$.

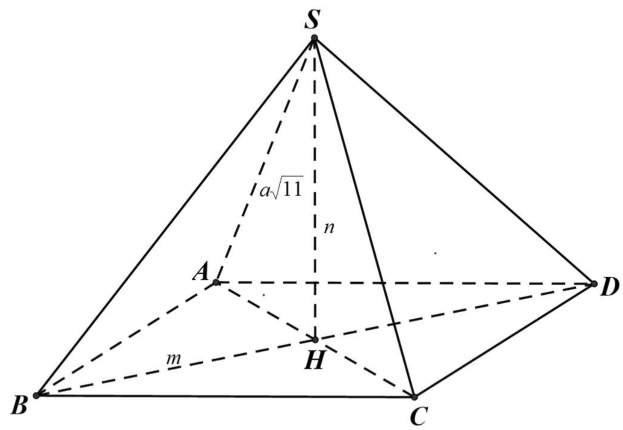
Vậy thể tích của khối nón ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}\pi.\left(a\sqrt{2}\right)^2.3a = 2\pi a^3$.

TH2: Nếu $\widehat{BID}$ là góc nhọn thì $\cos\widehat{BID} = \frac{1}{10}$.

Giải tương tự ta thấy không xảy ra.

Bình luận: Nếu chứng minh được góc $\widehat{BID}$ là góc tù thì không cần phải xét hai trường hợp.

Cách 2: Dùng phương pháp áp dụng tọa độ trong không gian $Oxyz$



Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $SH \perp (ABCD)$. Đặt $m = HA$, $n = SH$.

Do tam giác SAH vuông tại H nên $m^2 + n^2 = 11a^2$.

Xây dựng hệ trục tọa độ như sau: $H(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(-m;0;0)$, $C(0;m;0)$, $S(0;0;n)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (SBC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$ hay véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_1} = (n;n;m)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (SCD) là: $\frac{x}{-m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$ hay véctơ pháp tuyến của mặt phẳng

(SBC) là $\overrightarrow{n_2} = (n;-n;-m)$.

Do cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$ nên $\frac{1}{10} = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}$ hay

$\frac{m^2}{2n^2 + m^2} = \frac{1}{10}$ mà $n^2 = 11a^2 - m^2$.

Nên suy ra $\frac{m^2}{2n^2 + m^2} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{m^2}{22a^2 - m^2} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow m^2 = 2a^2 \Rightarrow m = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = 3a$.

Ta có $m = HA = a\sqrt{2}$ nên $AB = 2a$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy khi đó $R = a\sqrt{2}$.

Chiều cao của hình chóp là $SH = 3a$.

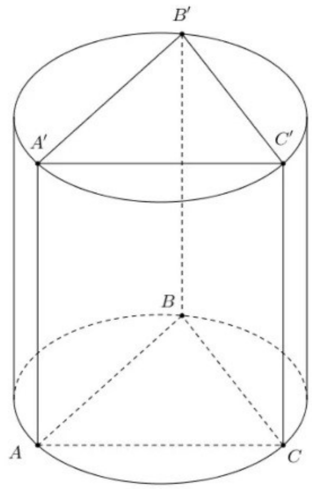
Thể tích của khối nón ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}\pi.\left(a\sqrt{2}\right)^2.3a = 2\pi a^3$.

Câu 11: Cho khối trụ có thể tích V. Hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ nội tiếp hình trụ. Mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ chia khối trụ làm hai phần có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 biết $\left(V_1 < V_2\right)$. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V} = \frac{a\pi - b\sqrt{b}}{12\pi}$ với $\left(a, b \in \mathbb{N}\right)$. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = 16$. **B.** $T = 11$. **C.** $T = 7$. **D.** $T = 14$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AB = x$, $AA' = h$, điều kiện $x > 0, h > 0$. Gọi V_3 là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_3 = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}h$.

Ta có bán kính đường tròn đáy của khối trụ đã cho là $R = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$. Khi đó thể tích của khối trụ đã cho là: $V = \pi R^2 h = \pi\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 h = \dfrac{\pi x^2 h}{3}$.

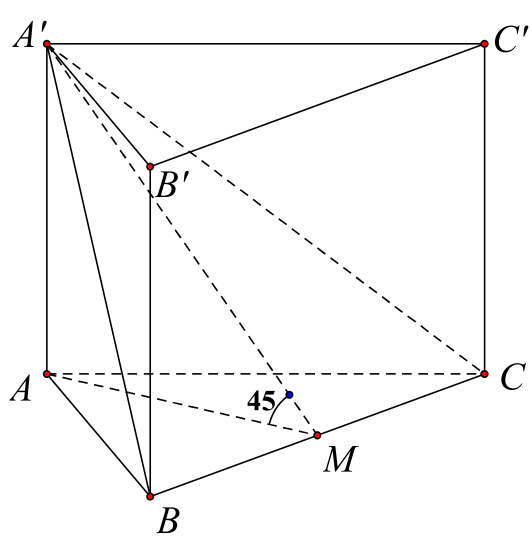
Từ giả thiết có: $V = 3V_1 + V_3 \Rightarrow V_1 = \dfrac{V - V_3}{3} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V - V_3}{3V} = \dfrac{\dfrac{\pi x^2 h}{3} - \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}h}{3\dfrac{\pi x^2 h}{3}} = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 45^o, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC, khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$, do đó góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 45^o$.

Tam giác $A'AM$ vuông cân tại A nên $A'M = AM\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \dfrac{BC\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}A'M.BC = \dfrac{1}{2}\dfrac{BC\sqrt{6}}{2}.BC = \dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4}$.

Theo đề $\dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a$.

Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp ABC có bán kính $r = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, đường cao $h = AA' = AM = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

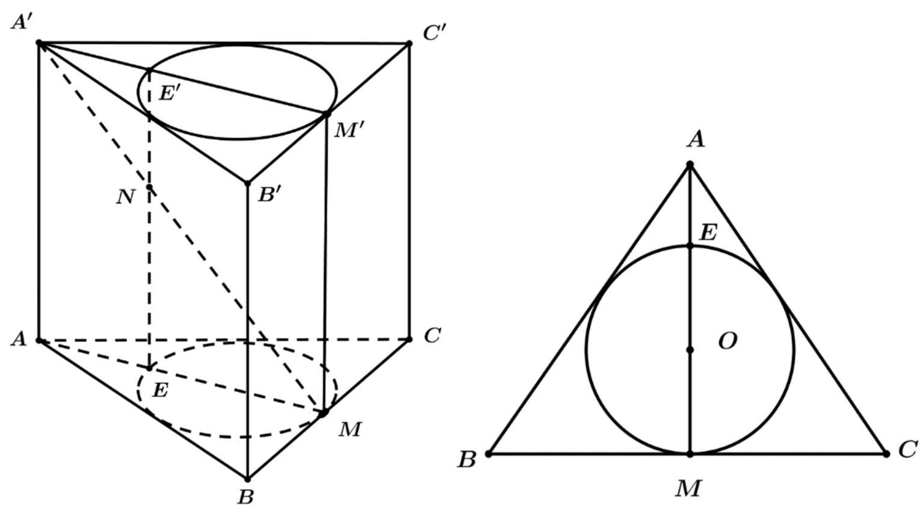
Diện tích xung quanh $S = 2\pi rh = 2\pi\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Câu 13: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $3a$. Một hình trụ (T) có hai đáy nội tiếp hai tam giác ABC, $A'B'C'$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng $A'M$ cắt mặt xung quanh của hình trụ (T) tại N (N khác M). Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $MN = \dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **B.** $MN = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. **C.** $MN = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$. **D.** $MN = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M' là trung điểm của $B'C'$. Gọi E, E' lần lượt là giao điểm của AM, $A'M'$ với đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

Trong mặt phẳng $(AA'M'M)$: Gọi N là giao điểm của $A'M$ và $EE' \Rightarrow N$ là giao điểm của $A'M$ với mặt xung quanh của hình trụ (T).

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Do ΔABC đều cạnh bằng a nên $OM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow OM = OE = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Áp dụng định lý Pythago cho tam giác $A'AM$ vuông tại A có $A'M = \sqrt{AA'^2 + AM^2}$

$\Rightarrow A'M = \sqrt{(3a)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{2}$.

Do $EN // AA'$ nên theo định lý Thales ta có $\dfrac{MN}{MA'} = \dfrac{EM}{AM} = \dfrac{2}{3}$

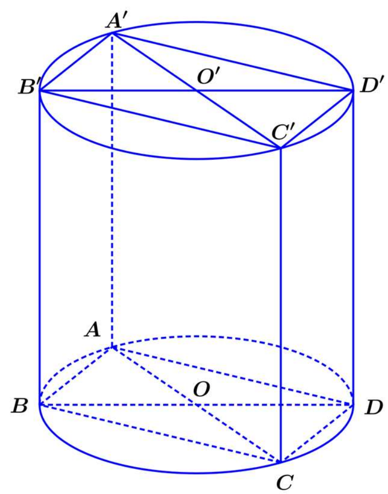
$\Rightarrow MN = \dfrac{2}{3}.MA' = \dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 14: Một khối trụ có bán kính đáy bằng r và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Gọi V là thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ và V' là thể tích khối trụ. Hãy tính tỉ số $\dfrac{V}{V'}$.

A. $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{2}{\pi}$. **B.** $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{V}{V'} = 2$. **D.** $\dfrac{V}{V'} = \pi$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow$ $ABCD$ là hình vuông

Theo giả thiết $OB = r \Rightarrow BD = 2r \Rightarrow AB = r\sqrt{2}$

Vì thiết diện qua trục là một hình vuông $\Rightarrow$ $BB' = BD = 2r$

Nên $\begin{cases} V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = BA.BC.BB' = r\sqrt{2}.r\sqrt{2}.2r = 4r^3 \\ V' = V_T = \pi r^2.BB' = \pi r^2.2r = 2\pi r^3 \end{cases}$

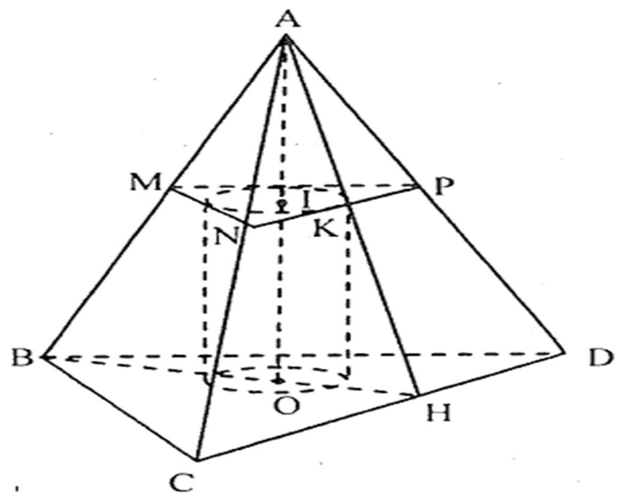
Vậy $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{2}{\pi}$.

Câu 15: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3. Gọi O là tâm của tam giác BCD, dựng (P) vuông góc với AO tại một điểm I thuộc đoạn AO, (P) cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P. Cho một hình trụ có một đáy là hình tròn (I) nội tiếp tam giác (MNP) và đáy kia nằm trên (BCD). Khi khối trụ có thể tích lớn nhất, tính tỉ số thể tích của khối trụ và khối tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{81}{4\pi\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{81}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}\pi}{9}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $ABCD$ là tứ diện đều, O là tâm của tam giác BCD nên $AO \perp (BCD)$

(P) vuông góc với AO, suy ra $(P)//(BCD)$ hay $(MNP)//(BCD)$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{NP}{CD} = \dfrac{MP}{BD} \Rightarrow AMNP$ là tứ diện đều.

Gọi $H = BO \cap CD$, $K = MI \cap NP$

Đặt $IK = x$, vì $AMNP$ là tứ diện đều nên $KM = KA = 3IK = 3x$.

$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.

Suy ra $AI = \sqrt{AK^2 - KI^2} = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = x\sqrt{8} \Rightarrow IO = \sqrt{6} - x\sqrt{8}$, vì $IO > 0 \Rightarrow x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của khối trụ là $V = IO.s_d = \pi IK^2.IO = -\pi\sqrt{8}x^3 + \pi\sqrt{6}x^2$

Ta xem V là hàm số theo biến số x, với $x \in \left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$V' = -3\pi\sqrt{8}x^2 + 2\pi\sqrt{6}x;\ V' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

BBT

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$
V'		+	0	−	
V		↗		↘	

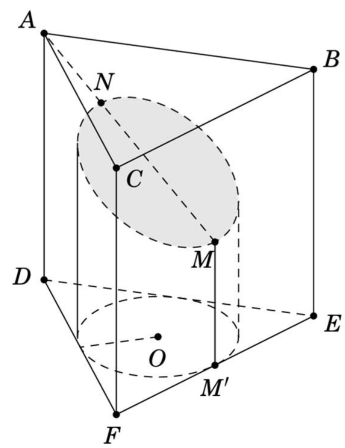
Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Khi đó $V = \dfrac{\pi}{9}\left(\sqrt{54} - \sqrt{24}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{9}$.

Thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$ bằng $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

Vậy tỉ số cần tìm là $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}:\frac{9\sqrt{2}}{4}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{81}$.

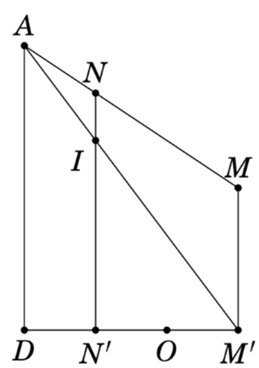
Câu 16: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có tất cả các cạnh bằng a. Xét (T) là hình trụ nội tiếp lăng trụ. Gọi M là tâm của mặt bên $BCFE$, mặt phẳng chứa AM và song song với BC cắt (T) như hình vẽ bên dưới. Thể tích phần còn lại (như hình) của khối (T) bằng



A. $\frac{\pi a^3}{18}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{54}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{27}$. **D.** $\frac{2\pi a^3}{54}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử AM cắt mặt trụ tại điểm thứ hai là N. Gọi M', N' là hình chiếu của M, N lên (DEF).

Ta có $DM'=\frac{a\sqrt{3}}{2}, OM'=ON'=\frac{1}{3}DM'=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Gọi I là giao điểm của AM' và NN'. Khi đó ta có

$\frac{IN'}{AD}=\frac{M'N'}{DM'}=\frac{2}{3}\Rightarrow IN'=\frac{2}{3}AD=\frac{2a}{3}$;

$\frac{IN}{MM'}=\frac{AI}{AM'}=\frac{DN'}{DM'}=\frac{1}{3}\Rightarrow IN=\frac{1}{3}MM'=\frac{a}{6}$.

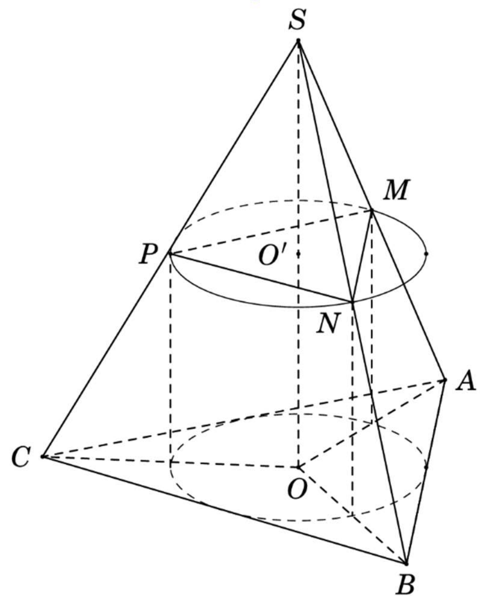
$\Rightarrow NN'=IN+IN'=\frac{5a}{6}$.

Suy ra thể tích phần còn lại của khối (T) là $V=\frac{NN'+MM'}{2}\cdot\pi\cdot OM'^2=\frac{\pi a^3}{18}$.

Câu 17: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 6. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC. Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và đáy còn lại nằm trên mặt phẳng (ABC). Biết rằng $S_{\Delta SAB} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\pi} S_1$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 3\sqrt{3}$. **B.** $V = 9\sqrt{3}$. **C.** $V = \sqrt{3}$. **D.** $V = 4\sqrt{3}$.

Lời giải



Đặt h là chiều cao của hình chóp. Gọi O là tâm của tam giác ABC và E là trung điểm AB, ta có $OE = \sqrt{3}$, do đó $SE = \sqrt{h^2 + 3}$. Suy ra $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SE = 3\sqrt{h^2 + 3}$.

Ta có $MN = 3$, nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP là $r = \sqrt{3}$, do đó diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = \dfrac{h}{2} \cdot \pi r = \dfrac{\sqrt{3}h\pi}{2}$.

Mà $S_{\Delta SAB} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\pi} S_1$, nên ta có $3\sqrt{h^2 + 3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\pi} \cdot \dfrac{\sqrt{3}h\pi}{2} \Leftrightarrow h = 1$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} h \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$.

Dạng 4 : Bài toán thể tích, diện tích của khối nón trụ, hình nón trụ liên quan đến max min

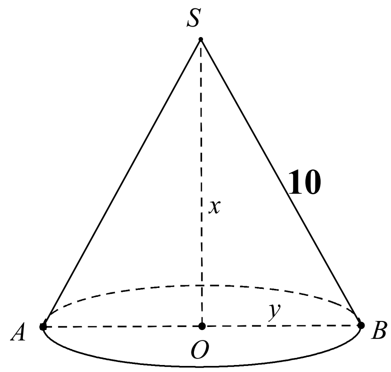
Câu 1: Xét các hình nón có đường sinh với độ dài đều bằng $10\,\text{cm}$. Tính chiều cao của hình nón có thể tích lớn nhất.

A. $5\sqrt{3}$ cm. **B.** $10\sqrt{3}$ cm. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. **D.** $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Lời giải

Chọn D

Xét hình nón có chiều cao là x cm và bán kính đáy là y cm (x, y dương).



Ta có $x^2+y^2=10^2 \Rightarrow y^2=100-x^2$, ta có điều kiện: $x, y \in (0;10)$.

Thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(100-x^2\right)x$.

Xét hàm số $f(x)=\left(100-x^2\right)x=100x-x^3$, $x \in (0;10)$

$f'(x)=100-3x^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên :

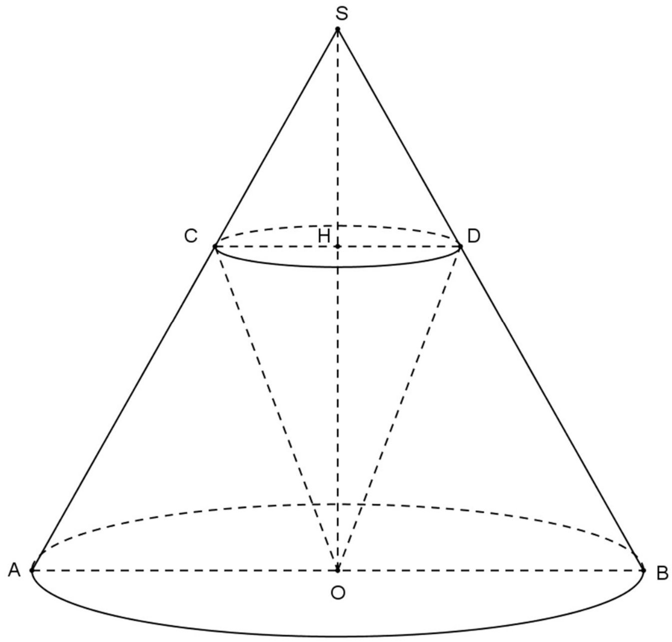
x	0		$\frac{10\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Câu 2: Cho hình nón (N) đỉnh S, có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{21}$, góc ở đỉnh bằng 2α sao cho $\sin\alpha=\frac{2}{5}$. Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H, cắt hình nón (N) theo giao là một đường tròn tâm H, bán kính r. Gọi V là thể tích khối nón đỉnh O, đáy là đường tròn tâm H, bán kính r. Biết V đạt giá trị lớn nhất khi $SH=m$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (6;8)$. **B.** $m \in (4;6)$. **C.** $m \in (8;10)$. **D.** $m \in (2;4)$.

Lời giải

Chọn A



Mặt phẳng (Q) chứa SH, cắt đường tròn tâm O, bán kính R tại A và B, cắt đường tròn tâm H, bán kính r tại C và D như hình vẽ.

Ta có: $\widehat{ASO} = \widehat{BSO} = \alpha$.

Đặt $SH = x \Rightarrow SO = OA.\cot\alpha = R.\cot\alpha \Rightarrow OH = R.\cot\alpha - x$.

$\Rightarrow r = HD = SH.\tan\alpha = x.\tan\alpha$.

Do đó: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.OH = \dfrac{\pi}{3}\tan^2\alpha.\left(R\cot\alpha - x\right)x^2 =$

$= \dfrac{\pi}{6}\tan^2\alpha.\left(2R\cot\alpha - 2x\right)x^2 \le \dfrac{\pi}{6}\tan^2\alpha.\left(\dfrac{2R\cot\alpha - 2x + x + x}{3}\right)^3 = \dfrac{4}{81}\pi R^3\cot\alpha$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 2R\cot\alpha - 2x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}R\cot\alpha \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}R\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1} \Leftrightarrow x = 7 \in (6;8)$.

Câu 3: Giả sử đồ thị hàm số $y = \left(m^2+1\right)x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là A; B; C mà $x_A < x_B < x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây

A. $(4;6)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

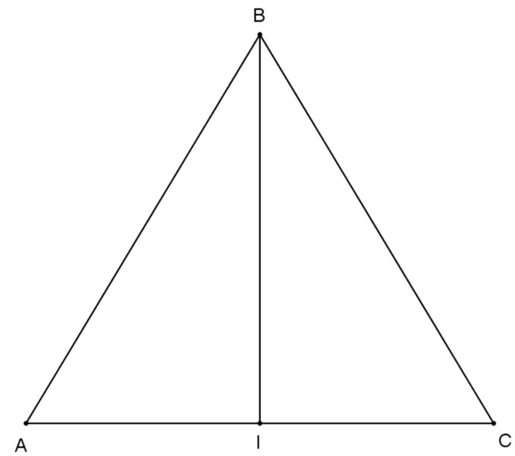
Ta có: $y' = 4\left(m^2+1\right)x^3 - 4mx = 4x\left[\left(m^2+1\right)x^2 - m\right]$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left[\left(m^2+1\right)x^2 - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}} \end{array}\right.$

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A < x_B < x_C$) là:

$$A\left(-\sqrt{\frac{m}{m^2+1}};-\frac{m^2}{m^2+1}+m^2+1\right);\ B\left(0;m^2+1\right);\ C\left(\sqrt{\frac{m}{m^2+1}};-\frac{m^2}{m^2+1}+m^2+1\right).$$



Quay tam giác ABC quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích bằng hai lần thể tích khối nón đỉnh A, đáy là đường tròn bán kính $r = BI = \dfrac{m^2}{m^2+1}$, trong đó $I\left(0; -\dfrac{m^2}{m^2+1} + m^2 + 1\right)$ là trung điểm AC. Khối nón này có chiều cao $h = \dfrac{1}{2}AC = \sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}}$.

Do đó thể tích khối tròn xoay là $V = 2.\dfrac{1}{3}.\pi r^2 h = \dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{m^2}{m^2+1}\right)^2.\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}} = \dfrac{2}{3}\pi\sqrt{\dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}}$.

Xét hàm số $f(m) = \dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}$ trên $(0;+\infty)$.

$$f'(m) = \frac{m^8\left(9-m^2\right)}{\left(m^2+1\right)^6}$$

$f'(m) \Leftrightarrow m = 3$ (Do $m > 0$).

Bảng biến thiên:

m	0		3		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{19683}{100000}$	$\searrow$	0

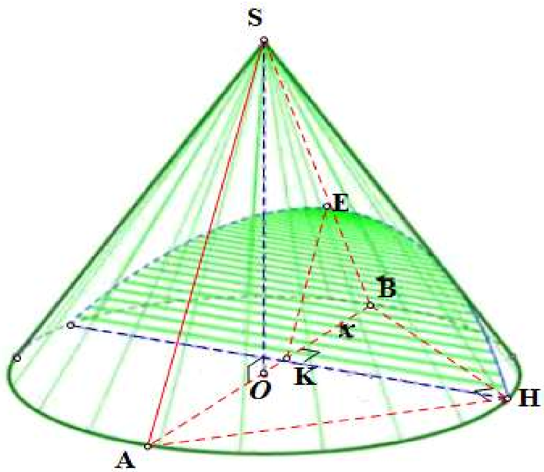
Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m = 3 \in (2;4)$.

Câu 4: Cắt hình nón có chiều cao $4\ cm$ và đường kính đáy $6\ cm$ bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất là

A. $S = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\ cm^2$. **B.** $S = \dfrac{21\sqrt{3}}{2}\ cm^2$. **C.** $S = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^2$. **D.** $S = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\ cm^2$.

Lời giải

Chọn D



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE//SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. (Thiết diện này song song với đường sinh SA)

Đặt $BK = x$ (với $0 < x < 6$).

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK.AK = x(6-x)$.

Trong tam giác SAB có: $\dfrac{KE}{SA} = \dfrac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \dfrac{BK}{BA}.SA \Leftrightarrow KE = \dfrac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \dfrac{4}{3}KH.KE$.

Ta có: $S^2 = \dfrac{16}{9}KH^2.KE^2 = \dfrac{16}{9}.x(6-x).\dfrac{25x^2}{36} = \dfrac{100}{81}.(6x^3 - x^4) \Rightarrow S = \dfrac{10}{9}.\sqrt{6x^3 - x^4}$.

Đặt $f(x) = 6x^3 - x^4$, với $0 < x < 6$.

Ta có: $f'(x) = 18x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{9}{2}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\frac{2187}{16}$	$\searrow$	

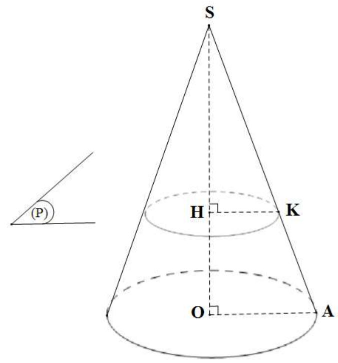
Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $S = \dfrac{10}{9}.\sqrt{\dfrac{2187}{16}} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\ cm^2$.

Câu 5: Cho một hình nón (N) có đáy là đường tròn tâm O, bán kính bằng a và đường cao $SO = a\sqrt{3}$. Cho điểm H thay đổi trên đường thẳng SO. Mặt phẳng (P) đi qua (H) và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh O và có đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng

A. $\dfrac{4}{81}a^3$. **B.** $\dfrac{4\pi}{81}a^3$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{81}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{81}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $HK = R$ với $0 < R < a$.

Vì $\Delta SHK \backsim \Delta SOA$ nên $\dfrac{SH}{SO} = \dfrac{HK}{OA} \Rightarrow SH = \dfrac{SO}{OA}.HK = \sqrt{3}R \Rightarrow OH = \sqrt{3}(a-R)$.

Thể tích khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn (C) là:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2.h = \frac{1}{3}\pi R^2.\sqrt{3}(a-R) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi.\frac{R}{2}.\frac{R}{2}.(a-R) \le \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi\left(\frac{\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+a-R}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{81}\pi a^3.$$

Dấu bằng khi $\dfrac{R}{2} = a - R \Leftrightarrow R = \dfrac{2a}{3}$.

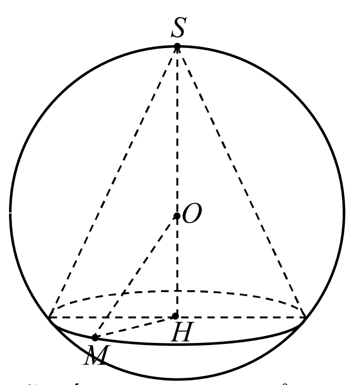
Vậy, thể tích khối nón đỉnh O và có đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng $\dfrac{4\sqrt{3}}{81}\pi a^3$ khi bán kính đường tròn (C) bằng $\dfrac{2a}{3}$.

Câu 6: Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

A. $\dfrac{2R}{3}$. **B.** $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{4R}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi chiều cao của hình nón là x, dễ thấy hình nón có thể tích lớn nhất thì $R \le x < 2R$.

Gọi bán kính đáy của hình nón là r.

Ta có $r^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - (x-R)^2 = 2Rx - x^2 = x(2R-x)$.

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi x^2 \left(2R - x\right)$.

Mặt khác ta lại có $\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.\left(2R-x\right) \le \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2R-x}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}\left(2R-x\right) \le \frac{8R^3}{27}$

$V = \frac{1}{3}\pi x^2\left(2R-x\right) \le \frac{32\pi R^3}{81}$.

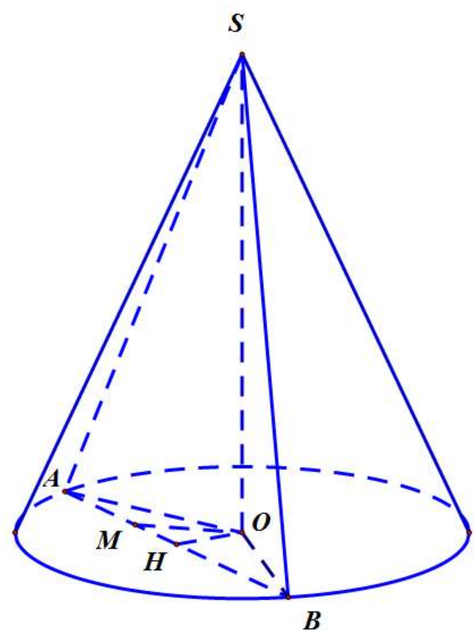
Vậy $\max V = \frac{32\pi R^3}{81}$. Dấu $"="$ xảy ra khi $\frac{x}{2} = 2R - x \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$

Câu 7: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính $R = 2$, chiều cao h. Gọi M là điểm cố định nằm trong đường tròn $\left(O\right)$ sao cho $OM = 1$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ thay đổi chứa đường thẳng SM cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Biết thể tích lớn nhất của khối chóp $S.OAB$ là $\frac{\sqrt{15}}{3}$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. 2π . **B.** $\sqrt{31}\pi$. **C.** $2\sqrt{5}\pi$. **D.** 6π.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB, đặt $OH = x$, $0 < x \le 1$.

Diện tích tam giác OAB là $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = OH.AH = x.\sqrt{4-x^2}$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = x\sqrt{4-x^2}, 0 < x \le 1$; $f'\left(x\right) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0, \forall x \in \left(0;1\right]$.

Hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;1\right] \Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(1\right) = \sqrt{3}, \forall x \in \left(0;1\right]$

Thể tích khối chóp $S.OAB$ là $V = \frac{1}{3}h.S_{\Delta OAB} \le \frac{1}{3}h.\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.OAB$ lớn nhất bằng $\frac{1}{3}h.\sqrt{3}$, khi $x = 1$ hay $H \equiv M$.

Suy ra $\frac{1}{3}.h.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow h = \sqrt{5}$.

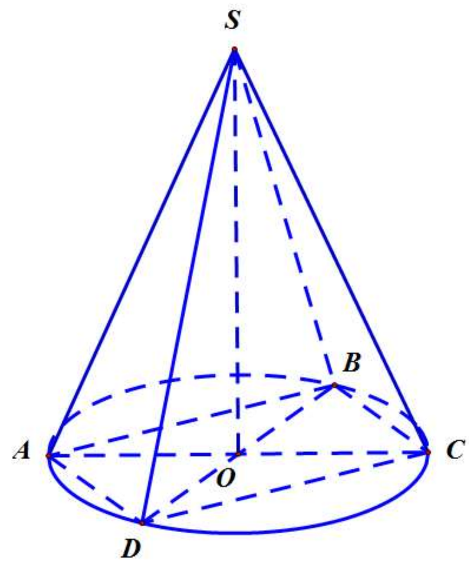
Độ dài đường sinh của hình nón là $l=\sqrt{R^2+h^2}=3$.
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi Rl=6\pi$.

Câu 8: Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường sinh bằng 3, đáy là đường tròn tâm O ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=2$. Khi thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất, diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng

A. $S=4\sqrt{5}$. **B.** $S=2\sqrt{6}$. **C.** $S=2\sqrt{5}$. **D.** $S=4\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi R là bán kính của hình nón. Do hình nón có đôh dài đường sinh bằng 3 nên $0<R<3$.
Chiều cao của hình nón là $h=\sqrt{9-R^2}$

Thể tích của khối nón là: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}\pi R^2\sqrt{9-R^2}$

Xét hàm số $f(x)=x^2\sqrt{9-x^2}, x\in(0;3)$; $f'(x)=\dfrac{18x-3x^3}{\sqrt{9-x^2}}$

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{18x-3x^3}{\sqrt{9-x^2}}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{6}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{6}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	0

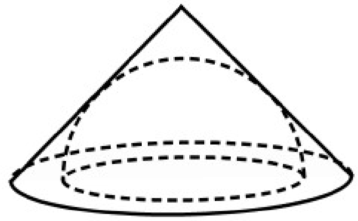
Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)$ đạt GTLN bằng $6\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$ Thể tích khối nón đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{3}\pi$. Dấu bằng xảy ra khi $x=\sqrt{6}$.

Khi đó $R=\sqrt{6}\Leftrightarrow AD=2\sqrt{5}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S=AB.AD=2.2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.

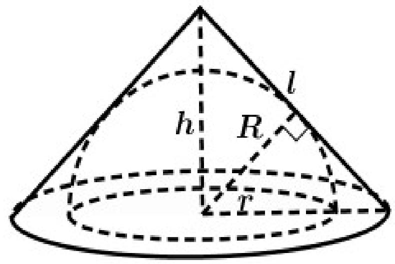
Câu 9: Cho nửa hình cầu bán kính R không đổi. Một hình nón có chiều cao h, bán kính đáy là r tiếp xúc với nửa hình cầu như hình vẽ. Khi diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất, chiều cao h của hình nón theo r là



A. $h=2\sqrt{3}r$. **B.** $h=r$. **C.** $h=\sqrt{3}r$. **D.** $h=\sqrt{2}r$.

Lời giải

Chọn D



- Gọi l là độ dài đường sinh của hình nón. Ta có $Rl=hr\Rightarrow \pi rl=\dfrac{\pi hr^2}{R}\Rightarrow S_{xq}=\dfrac{\pi hr^2}{R}$.
- Mặt khác $\dfrac{1}{R^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{r^2}\Rightarrow r^2=\dfrac{R^2h^2}{h^2-R^2}\Rightarrow S_{xq}=\dfrac{\pi Rh^3}{h^2-R^2}$.
- Xét $y=f\left(h\right)=\dfrac{\pi Rh^3}{h^2-R^2}\Rightarrow y'=f'\left(h\right)=\dfrac{\pi Rh^2\left(h^2-3R^2\right)}{\left(h^2-R^2\right)^2}$.
- $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=0 \\ h=\pm R\sqrt{3} \end{array}\right.$. Ta có BBT:

h	R		$R\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{3\pi\sqrt{3}R^2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Vậy diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất khi $h=R\sqrt{3}$, thay vào được

$$r^2=\frac{3R^2}{2}\Rightarrow r=\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow h=r\sqrt{2}.$$

Câu 10: Cho khối trụ có thể tích bằng $32\pi^2\ dm^3$ và diện tích toàn phần bằng $24\pi\ dm^2$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối trụ là

A. $\sqrt[6]{1024\pi^2}\ dm$. **B.** $\sqrt[6]{2048\pi^2}\ dm$. **C.** $\sqrt[3]{128\pi}\ dm$. **D.** $\sqrt[3]{64\pi}\ dm$.

Lời giải

Chọn B

Gọi R, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của khối trụ. Ta có $l=h$.

Thể tích của khối trụ là: $V=\pi R^2h=32\pi^2\ (dm^3)$.

Diện tích toàn phần của khối trụ là: $S_{tp}=2\pi Rl+2\pi R^2=\pi Rh+\pi Rh+2\pi R^2$

Áp dụng BĐT *Cauchy* cho 3 số dương: $2\pi R^2$, πRh, πRh ta được:

$S_{tp}=\pi Rh+\pi Rh+2\pi R^2\geq 3\sqrt[3]{\pi Rh.\pi Rh.2\pi R^2}=3\sqrt[3]{2\pi.\pi R^2h.\pi R^2h}=3\sqrt[3]{2\pi.32\pi^2}=24\pi$.

Dấu "=" xảy ra khi $\pi Rh=\pi Rh=2\pi R^2\Leftrightarrow h=2R$.

Vậy khối trụ đã cho có $h = 2R$.

Do đó: $V = \pi R^2.2R = 32\pi^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{16\pi} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{16\pi}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối trụ là:

$$R_C = \sqrt{\frac{h^2}{4} + R^2} = \sqrt{\frac{\left(2\sqrt[3]{16\pi}\right)^2}{4} + \left(\sqrt[3]{16\pi}\right)^2} = \sqrt{2}.\sqrt[3]{16\pi} = \sqrt[6]{2048\pi^2}\ (dm).$$

Câu 11: Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn. Phải làm bồn dầu đó như thế nào để tiết kiệm nguyên liệu mà thể tích lại lớn nhất?

A. Bồn dầu có đường cao bằng đường kính đáy.

B. Bồn dầu có đường cao bằng hai lần đường kính đáy.

C. Bồn dầu có đường cao bằng bán kính đáy.

D. Bồn dầu có đường cao bằng một nửa bán kính đáy.

Lời giải

Chọn A

Gọi h, r, S lần lượt là đường cao, bán kính và diện tích toàn phần của hình trụ.

Để tiết kiệm nguyên liệu thì S phải nhỏ nhất.

Ta có $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi\left(r^2 + rh\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{rh}{2} + \frac{rh}{2}\right)$

$$\geq 2\pi \times 3 \times \sqrt[3]{r^2 \times \frac{rh}{2} \times \frac{rh}{2}} = 2\pi \times 3 \times \sqrt[3]{\frac{r^4h^2}{4}} = \frac{6\pi}{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}.$$

Từ đó suy ra thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h \leq \sqrt{\frac{4S^3}{6^3\pi}}$.

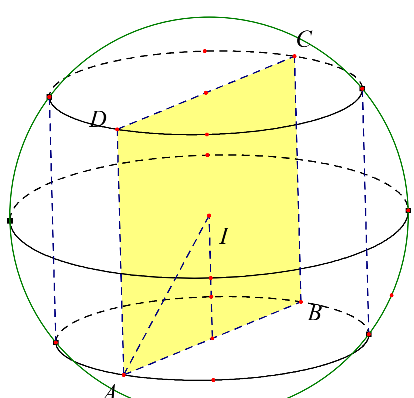
Dấu đẳng thức xảy ra khi $r^2 = \frac{rh}{2} \Leftrightarrow 2r = h$.

Câu 12: Xét hình trụ (T) nội tiếp một mặt cầu bán kính R và S là diện tích thiết diện qua trục của (T). Tính diện tích xung quanh của hình trụ (T) biết S đạt giá trị lớn nhất.

A. $S_{xq} = \pi R^2$. **B.** $S_{xq} = \frac{2\pi R^2}{3}$. **C.** $S_{xq} = \frac{\pi R^2}{3}$. **D.** $S_{xq} = 2\pi R^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi x là bán kính đáy của hình trụ $0 < x < R$.

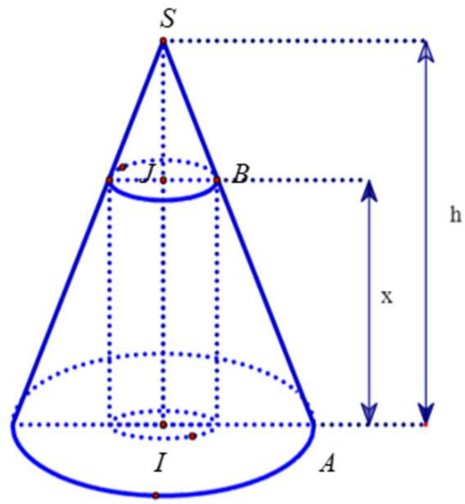
Khi đó diện tích thiết diện là $S = AB \times AD = 2x \times 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$.

Vì $4x\sqrt{R^2 - x^2} \leq 2\left(x^2 + R^2 - x^2\right)$ nên $S \leq 2R^2$.

Vậy $S_{\max} = 2R^2$ khi $x = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi\times\frac{R\sqrt{2}}{2}\times2\times\frac{R\sqrt{2}}{2}=2\pi R^2$.

Câu 13: Cho hình nón đỉnh S chiều cao là h. Một khối trụ khác có tâm của đáy trùng với tâm đáy của hình nón và đáy còn lại là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh S đã cho (hình vẽ).



Khi khối trụ này có thể tích lớn nhất, biết $0<x<h$ thì tỉ số k giữa thể tích của khối nón và khối trụ là:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối nón là $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

Từ hình vẽ ta có $\frac{JB}{IA}=\frac{SJ}{SI}=\frac{h-x}{h}\Rightarrow JB=\frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối trụ cần tìm là: $V_2=\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2x$.

Xét hàm số $V(x)=\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2x,\ 0\le x\le h$.

Ta có $V'(x)=\pi\frac{R^2}{h^2}\left[-2(h-x)x+(h-x)^2\right]$.

$V'(x)=0\Leftrightarrow x=h$ hoặc $x=\frac{h}{3}$.

Có $V(0)=0;\ V(h)=0;\ V\left(\frac{h}{3}\right)=\frac{4\pi R^2h}{27}$.

Suy ra GTLN của thể tích khối trụ là $V_2=\frac{4\pi R^2h}{27}$.

Lúc đó $k=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2h}{\frac{4\pi R^2h}{27}}=\frac{9}{4}$.

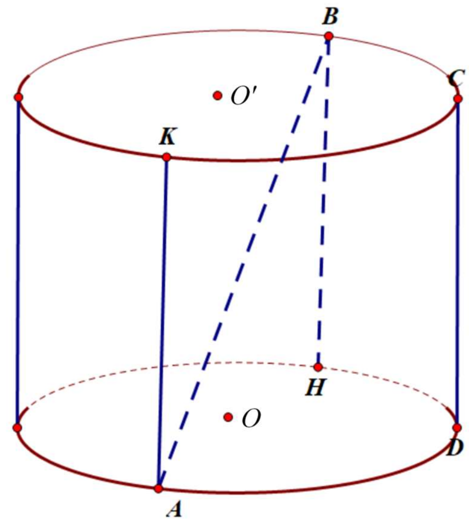
Câu 14: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A,D sao cho $AD=2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB

chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\sqrt{3}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\alpha=1$. **D.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{HAD.BKC}=\frac{1}{3}.2a.S_{\Delta HAD}=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.AD.d\left(H;AD\right)=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a\sqrt{3}.d\left(H;AD\right).$$

$\left(V_{ABCD}\right)_{\max}\Leftrightarrow\left(d\left(H;AD\right)\right)_{\max}\Leftrightarrow H$ là điểm chính giữa cung lớn AD của đường tròn (O).

Theo định lý sin ta có $\frac{AD}{\sin\widehat{AHD}}=2.2a\Leftrightarrow\sin\widehat{AHD}=\frac{AD}{4a}=\frac{2\sqrt{3}a}{4a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{AHD}=60°$.

Do đó xảy ra khi ΔAHD đều $\Leftrightarrow AH=AD=2\sqrt{3}a$.

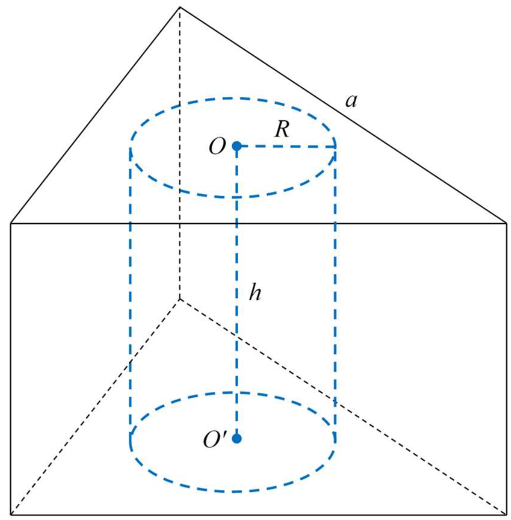
Khi đó $\tan\alpha=\frac{BH}{AH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15: Người ta thiết kế một đồ vật trang trí hình trụ có diện tích thiết diện qua trục bằng 6 cm^2, và đặt đồ vật này nằm hoàn toàn trong khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cm, sao cho tâm của đáy hình trụ trùng với tâm của đáy khối lăng trụ. Biết chi phí sản xuất đồ vật hình trụ là 90.000 đ/cm^3 và chi phí sản xuất khối lăng trụ là 40.000 đ/cm^3. Xác định bán kính đáy của hình trụ theo a để tổng chi phí sản xuất là nhỏ nhất.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{\pi}}{\pi}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt[4]{3}}{\pi}$. **D.** $R=\frac{a\sqrt[4]{3\pi^2}}{3\pi}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi R , h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và chiều cao hình trụ.

Ta có: $0 < R \le \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $Rh = 3$; h cũng là chiều cao của khối lăng trụ.

Thể tích của đồ vật trang trí hình trụ: $V_1 = \pi R^2 h = 3\pi R$.

Thể tích của khối lăng trụ: $V_2 = S.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3}{R} = \dfrac{3\sqrt{3}.a^2}{4R}$.

Tổng chi phí sản xuất (đơn vị 10.000 đ/cm^3):

$T = 3\pi R.90 + \dfrac{3\sqrt{3}.a^2}{4R}.40 = 270.\pi R + \dfrac{30\sqrt{3}.a^2}{R}$ (coi T là hàm số theo biến R).

$T' = 270.\pi - \dfrac{30\sqrt{3}.a^2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{\sqrt{3}.a^2}{9\pi} \Leftrightarrow R = \dfrac{\sqrt[4]{3\pi^2}.a}{3\pi} \in \left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right]$.

Trên nửa đoạn $\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right]$, T' đổi dấu từ $-$ sang $+$ qua $R = \dfrac{\sqrt[4]{3\pi^2}.a}{3\pi}$.

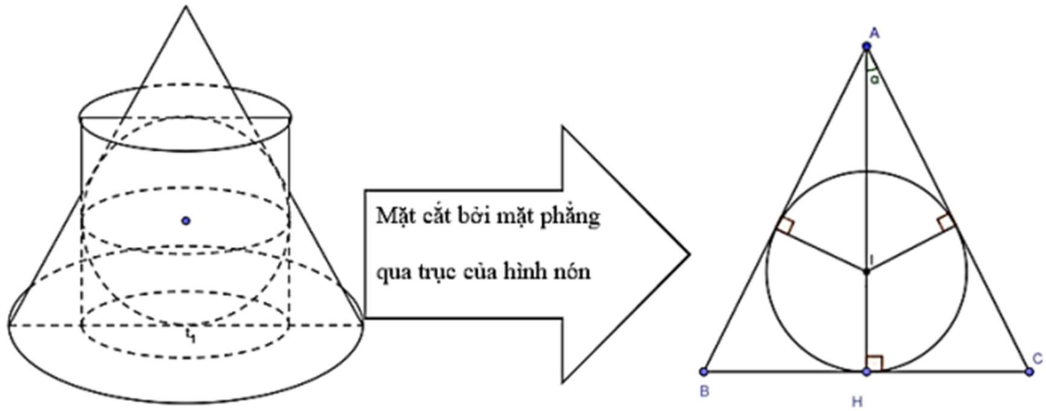
Vậy $\min T = T\left(\dfrac{\sqrt[4]{3\pi^2}.a}{3\pi}\right) = 180\sqrt[4]{3}.\pi a$ khi $R = \dfrac{\sqrt[4]{3\pi^2}.a}{3\pi}$.

Câu 16: Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α, bán kính đáy là R và chiều cao là h. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối nón và khối trụ, biết rằng $V_1 \ne V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P = 48M + 25$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(40;60)$. **B.** $(60;80)$. **C.** $(80;100)$. **D.** $(20;40)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r là bán kính hình cầu, khi đó r cũng là bán kính đường tròn đáy của hình trụ đã cho, chiều cao của hình trụ bằng $2r$. Ta có $\begin{cases} V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \\ V_2 = \pi r^2.2r \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{6r^3}{R^2 h}$.

Xét mặt cắt qua trục của hình nón là một tam giác cân ABC có diện tích là $S = \frac{1}{2}h \cdot 2R = Rh$.

Tam giác cân có chiều dài cạnh bên $AB = AC = \frac{R}{\sin\alpha}$.

Mặt khác áp dụng công thức $S = pr$ với p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Ta có $p = \frac{1}{2}\left(2R + 2\frac{R}{\sin\alpha}\right) \Rightarrow S = Rh = \left(R + \frac{R}{\sin\alpha}\right)r \Leftrightarrow r = \frac{h.\sin\alpha}{\sin\alpha + 1}$.

Khi đó $\frac{V_2}{V_1} = \frac{6h^3\sin^3\alpha}{R^2 h(\sin\alpha+1)^3} = \frac{6\sin^3\alpha}{(\sin\alpha+1)^3}\cdot\left(\frac{h}{R}\right)^2$

$= \frac{6\sin^3\alpha}{(\sin\alpha+1)^3}\cdot\cot^2\alpha = \frac{6\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{(\sin\alpha+1)^3} = \frac{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(\sin\alpha+1)^2}$.

Xét hàm số $y = \frac{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(\sin\alpha+1)^2}$

Đặt $t = \sin\alpha,\ t \in (0;1)$ ta có $y = \frac{6t(1-t)}{(t+1)^2},\ t \in (0;1)$.

Ta có $y' = \frac{-6(3t-1)}{(t+1)^3};\ y' = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$.

t	0		$\frac{1}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

Suy ra $M = \frac{3}{4}$.

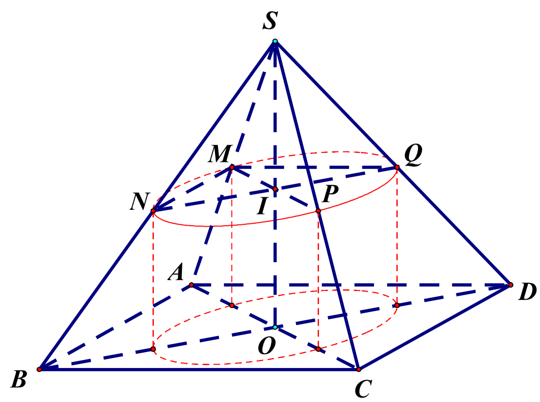
Vậy $P = 48M + 25 = 48\cdot\dfrac{3}{4} + 25 = 61$.

Câu 17: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Gọi $O = AC \cap BD$, điểm I thuộc đoạn SO và $OI = x$. Mặt phẳng (α) đi qua I và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Xét hình trụ có đáy ngoại tiếp $MNPQ$ và trục là OI. Tìm x để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông.

$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$, $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Ta có $MP // AC \Rightarrow \dfrac{MP}{AC} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SO - x}{SO} = 1 - \dfrac{x}{\frac{a\sqrt{14}}{2}} = 1 - \dfrac{2x}{a\sqrt{14}} \Rightarrow MP = a\sqrt{2} - \dfrac{2x}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow IM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{x}{\sqrt{7}}$.

Khi đó thể tích khối trụ là $V = \pi IM^2.OI = \pi.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{x}{\sqrt{7}}\right)^2.x = \dfrac{\pi}{112}\left(a\sqrt{14} - 2x\right)^2.4x$

$\le \dfrac{\pi}{112}\left(\dfrac{a\sqrt{14} - 2x + a\sqrt{14} - 2x + 4x}{3}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{14}}{27}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a\sqrt{14} - 2x = 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{14}}{6}$.

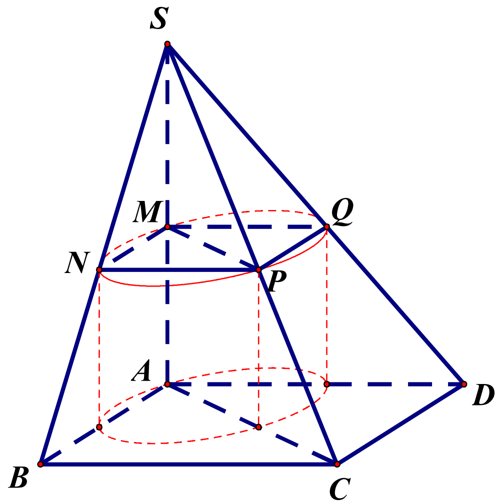
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy, điểm M thuộc đoạn SA. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Xét hình trụ có đáy ngoại tiếp $MNPQ$ và đường sinh là MA. Khối trụ có thể tích lớn nhất là

A. $\dfrac{16\pi a^3}{81}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{27}$. **C.** $\dfrac{16\pi a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{8\pi a^3}{81}$.

Lời giải

GVSB: Hoàng Nhàn; GVPB1: Nguyễn Thanh Bang; GVPB2: Tu Duy

Chọn B



Đặt $MA = x,\ 0 < x < 2a$.

$ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do $MP // AC$ nên $\dfrac{MP}{AC} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SA - MA}{SA} = \dfrac{2a - x}{2a} \Rightarrow MP = \dfrac{2a - x}{\sqrt{2}}$.

Suy ra bán kính đáy của hình trụ là $r = \dfrac{MP}{2} = \dfrac{2a - x}{2\sqrt{2}}$.

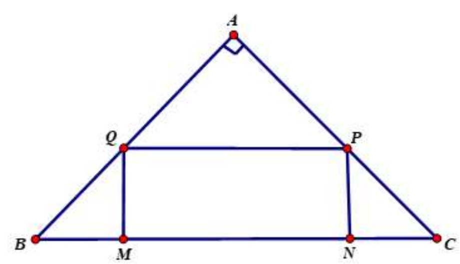
Khi đó thể tích khối trụ là $V = \pi r^2.MA = \pi\dfrac{(2a - x)^2}{8}.x = \dfrac{\pi}{16}(2a - x)(2a - x)2x$

$\leq \dfrac{\pi}{16}\left(\dfrac{2a - x + 2a - x + 2x}{3}\right)^3 = \dfrac{4\pi a^3}{27}$.

Dấu "=" xảy ra khi $2a - x = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất bằng $\dfrac{4\pi a^3}{27}$.

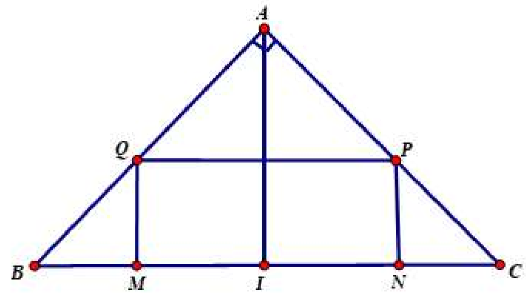
Câu 19: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = 10\sqrt{2}\ (cm)$. Hình chữ nhật $MNPQ$ có P, Q lần lượt thuộc cạnh AB, AC và M, N thuộc cạnh BC. Quay hình chữ nhật $MNPQ$ (và miền trong của nó) quanh trục đối xứng của tam giác ABC được một khối tròn xoay. Tính độ dài đoạn PQ để thể tích khối tròn xoay lớn nhất.



A. $PQ = 5\,cm$.　　**B.** $PQ = 10\,cm$.　　**C.** $PQ = \dfrac{20}{3}\ cm$.　　**D.** $PQ = \dfrac{40}{3}\ cm$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow I$ là trung điểm MN.

Có $AB = 10\sqrt{2}\,(cm) \Rightarrow BC = 20\,(cm) \Rightarrow BI = AI = 10\,(cm)$.

Đặt $PQ = 2x$ $\left(0 < x < 10\right) \Rightarrow BM = BI - IM = 10 - x$.

Do $MQ\,//\,IA \Rightarrow \dfrac{MQ}{AI} = \dfrac{BM}{BI} \Rightarrow MQ = \dfrac{AI.BM}{BI} = \dfrac{10\left(10-x\right)}{10} = 10 - x$.

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R = MI = x$

$\Rightarrow V_T = \pi R^2 h = \pi x^2\left(10 - x\right) = \pi\left(-x^3 + 10x^2\right)$.

Xét $f\left(x\right) = \pi\left(-x^3 + 10x^2\right)$ với $0 < x < 10$.

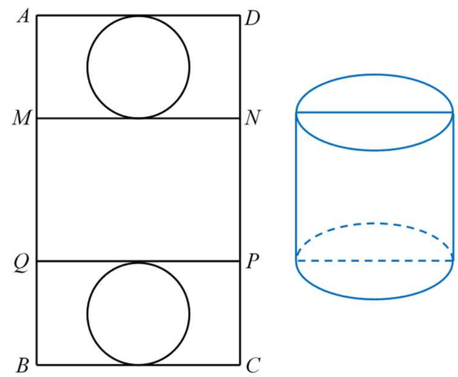
Khi đó: $f'\left(x\right) = \pi\left(-3x^2 + 20x\right) \Rightarrow f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{20}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{20}{3}$		10
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4000}{27}$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{x\in(0;10)} f\left(x\right) = \dfrac{4000}{27}$ khi $x = \dfrac{20}{3} \Rightarrow PQ = \dfrac{40}{3}(cm)$.

Câu 20: Cho một tấm bìa hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $1\ m^2$ và cạnh $BC = x$ $\left(m\right)$ để làm một hình trụ có hai đáy, theo quy trình như sau: chia hình chữ nhật $ABCD$ thành ba hình chữ nhật $AMND$, $MNPQ$ và $BCPQ$. Trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được ghép thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng MQ; phần hình chữ nhật $AMND$ và $BCPQ$ được cắt ra mỗi hình thành một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần bìa còn thừa được bỏ đi). Tham khảo hình vẽ dưới đây:

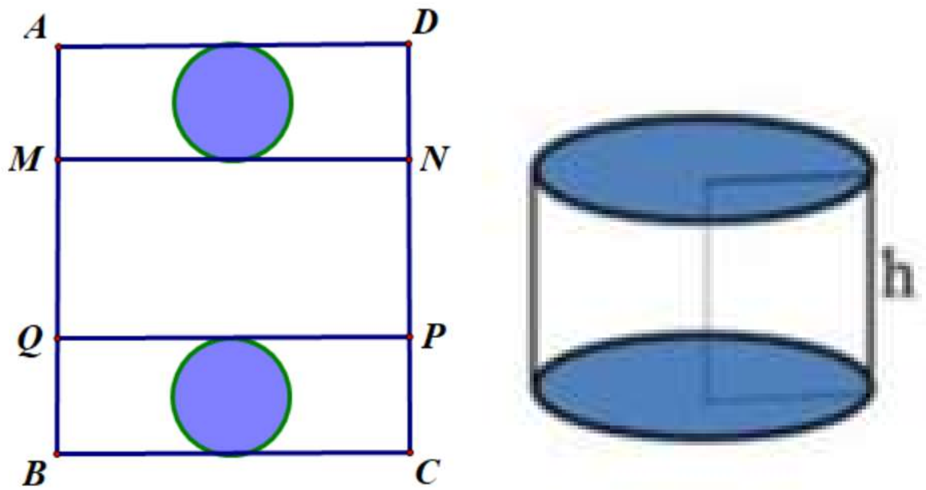


Tính x để thể tích hình trụ là lớn nhất.

A. $\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC = x, x > 0 \Rightarrow AB = \dfrac{1}{x}$.

Gọi R là bán kính hình trụ.

Chu vi của đường tròn đáy hình trụ là $BC = 2\pi R \Rightarrow R = \dfrac{x}{2\pi} \Rightarrow BQ = AM = 2R = \dfrac{x}{\pi}$.

Đường cao hình trụ $h = AB - 2BQ = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{\pi} = \dfrac{\pi - 2x^2}{\pi x}$.

Thể tích khối trụ tạo thành $V = \pi R^2 h = \pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \dfrac{\pi - 2x^2}{\pi x} = \dfrac{1}{4\pi^2}.x.\left(\pi - 2x^2\right)$.

Đặt $f(x) = x.\left(\pi - 2x^2\right) \Rightarrow f'(x) = \pi - 6x^2$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{\dfrac{\pi}{6}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\ (\mathrm{L}) \end{array}\right.$$.

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có $\max f(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{6\pi}}{9}$.

$\Rightarrow V_{\max} = \dfrac{1}{4\pi^2}.\dfrac{\pi\sqrt{6\pi}}{9} = \dfrac{\sqrt{6\pi}}{36\pi}$ khi $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$.

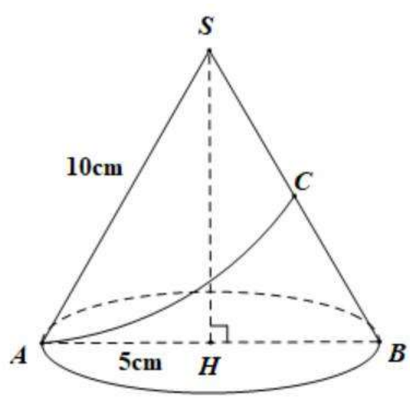
✎Dạng 5: Bài toán thể tích, diện tích của khối nón – trụ, hình nón – trụ sử dụng kỹ thuật trải phẳng.

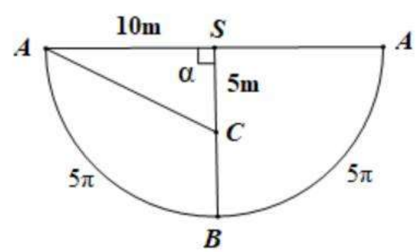
Câu 1: Tại trung tâm một thành phố người ta tạo ra điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l = 10m$, bán kính đáy $R = 5m$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

A. $10m$. **B.** $15m$. **C.** $5\sqrt{5}m$. **D.** $5\sqrt{3}m$.

Lời giải

Chọn C





Cắt hình nón theo đường sinh SA và trải phẳng ra ta được hình quạt có bán kính $SA = 10m$.

Gọi góc $\widehat{ASB} = \alpha$.

Ta có độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ là $5\pi = 10.\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

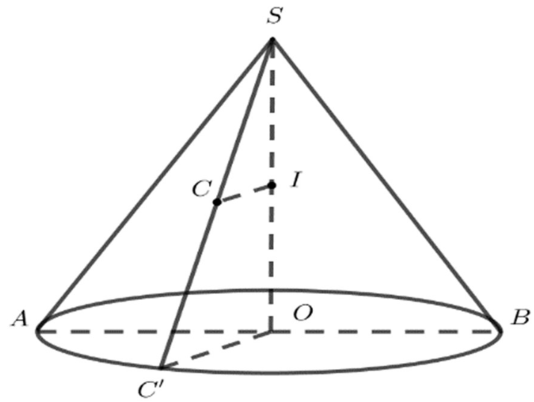
Suy ra $AC_{\min} = \sqrt{AS^2 + SC^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ (m).

Câu 2: Cho hình nón đỉnh S, I là trung điểm đường cao SO và AB là đường kính đáy. Điểm C nằm trên mặt nón sao cho IC vuông góc mặt phẳng (SAB). Biết rằng tam giác SAB đều cạnh $AB = 2020km$. Tính quãng đường ngắn nhất để một con kiến đi từ A đến C trên mặt nón.

A. $1010\sqrt{5-2\sqrt{2}}km$. **B.** $1010\sqrt{2}km$. **C.** $2020\sqrt{5-2\sqrt{2}}km$. **D.** $1010km$.

Lời giải

Chọn B



Gọi C' là giao của SC với đường tròn tâm O.

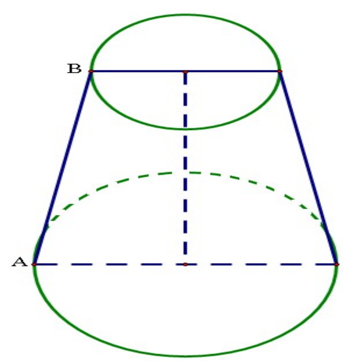
Ta có $OA = OC' = \dfrac{AB}{2} = 1010\ km$. Vì $IC \perp (SAB) \Rightarrow IC//OC'$ mà I là trung điểm SO suy ra $IC = \dfrac{1}{2}OC' = 505\ km$.

Mặt khác tam giác SAB đều suy ra $SO = \dfrac{2020\sqrt{3}}{2} = 1010\sqrt{3} km$.

$\Rightarrow IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(505\sqrt{3}\right)^2 + 1010^2} km$.

Xét tam ICA vuông tại I có $AC = \sqrt{IA^2 + IC^2} = \sqrt{3.505^2 + 1010^2 + 505^2} = 1010\sqrt{2} km$.

Câu 3: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20\,\text{cm}$, bán kính đáy cốc là $4\,\text{cm}$, bán kính miệng cốc là $5\,\text{cm}$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?



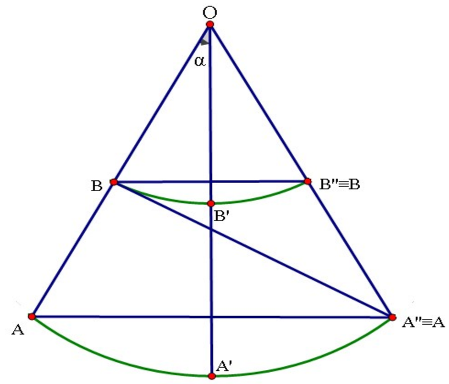
.

A. $58,80\,\text{cm}$. **B.** $58,67\,\text{cm}$. **C.** $59,93\,\text{cm}$. **D.** $59,98\,\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Do con kiến bò **hai** vòng, nên ta "trải phẳng" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA''.

Áp dụng định lí hàm số cosin ta được: $l=\sqrt{BO^2+OA''^2-2BO.OA''.\cos 2\alpha}$ (*).

$B''A''=AB=\sqrt{(a-b)^2+h^2}$.

$\frac{a}{b}=\frac{4\pi a}{4\pi b}=\frac{l(\overparen{BB''})}{l(\overparen{AA''})}=\frac{OA}{OB}=\frac{OB+AB}{OB}=1+\frac{AB}{\frac{2\pi b}{\alpha}}=1+\frac{AB.\alpha}{2\pi b}$.

$\Rightarrow \alpha=\frac{2\pi(a-b)}{AB}=\frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+h^2}}$ (1).

$\frac{AB}{OB}=\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}\Rightarrow OB=\frac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}$ (2).

$OA''=OB+BA=\frac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}+\sqrt{(a-b)^2+h^2}$ (3).

Thay (1), (2), (3) vào (*) ta tìm được $l\approx 58,79609cm\approx 58,80$.

Ghi chú: Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA'' phải không cắt cung $\overparen{BB''}$ tại điểm nào khác B, tức là BA'' nằm dưới tiếp tuyến của $\overparen{BB''}$ tại B Điều này tương đương với $2\alpha<\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

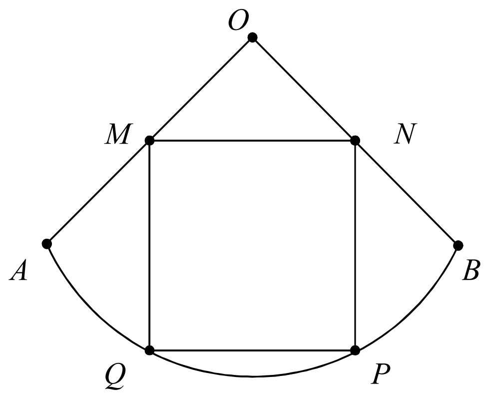
Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).

Câu 4: Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r=\frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l=2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB. Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường PN trùng MQ (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{8\pi}$. **B.** $\frac{3(\sqrt{13}-1)}{4\pi}$. **C.** $\frac{5(\sqrt{13}-1)}{12\pi}$. **D.** $\frac{\pi(\sqrt{13}-1)}{9}$.

Lời giải

Chọn A.



Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ trong hình quạt trên bằng chu vi đáy của hình nón và bằng $2\pi.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$.

Số đo góc $\widehat{AOB}$: $\widehat{AOB}=\dfrac{l_{AB}}{2\pi}=\dfrac{4\pi}{3.2\pi}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB, ta được

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos\widehat{AOB}=4+4-8.\cos\dfrac{2\pi}{3}=12$.

Ta có $AB=2\sqrt{3}$ $AB=2\sqrt{3}\Rightarrow MN=\sqrt{3}$.

Ta có $\widehat{ONM}=30°\Rightarrow\widehat{ONP}=120°$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ONP, ta được

$OP^2=ON^2+NP^2-2ON.NP.\cos\widehat{ONP}\Leftrightarrow 4=1+NP^2+NP$

$\Leftrightarrow NP^2+NP-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}NP=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\\ NP=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow NP=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

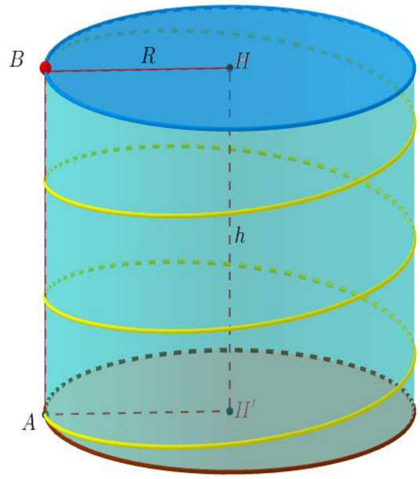
Khi đó hình chữ nhật $MNPQ$ được cuốn thành mặt trụ có chiều cao $NP=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$, bán kính đáy: $R=\dfrac{MN}{2\pi}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$. Suy ra thể tích khối trụ: $V=h.\pi.R^2=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}.\pi.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2=\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}$.

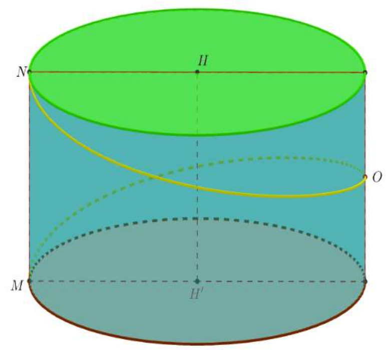
Câu 5: Một con kiến bò đều lên quanh cái cốc hình trụ (từ mặt đáy dưới lên mặt đáy trên), bán kính mặt đáy hình trụ $R=\dfrac{1}{8\pi}(dm)$ và chiều cao hình trụ $h=\sqrt{5}\,(dm)$. Gọi n là số vòng nhỏ nhất để sao cho đoạn đường kiến đi là số nguyên dm. Tính $P=n^2+1$.

A. 65. **B.** 50. **C.** 37. **D.** 17.

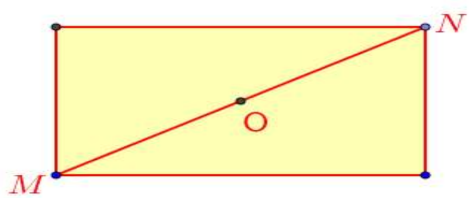
Lời giải

Chọn A

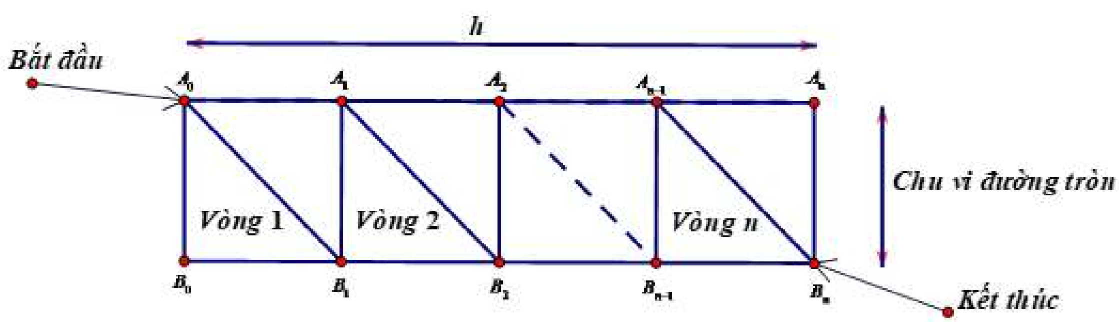




Trải 1 phần mặt xung quanh của chiếc cốc hình trụ (chứa vừa hết 1 vòng đi của con kiến) lên một mặt phẳng ta được hình dưới.



Trải toàn bộ mặt xung quanh của chiếc cốc hình trụ lên một mặt phẳng ta được hình sau:



Gọi "điểm bắt đầu" là vị trí ở mặt đáy dưới của cái cốc mà kiến xuất phát;"điểm kết thúc" là vị trí ở mặt đáy trên của cái cốc mà kiến kết thúc hành trình di chuyển.

Gọi $n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ là số vòng mà con kiến bò được trong suốt hành trình di chuyển.

Ta trải phẳng hình vẽ bài toán bằng cách cắt hình trụ bởi một đường thẳng đi qua "điểm bắt đầu" và "điểm kết thúc". Ta ký hiệu các điểm như hình vẽ.

Chu vi đường tròn đáy: $A_0B_0 = A_1B_1 = \cdots = A_nB_n = 2\pi R = 2\pi.\dfrac{1}{8\pi} = \dfrac{1}{4}$

Ta có: $A_0A_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}A_n = \dfrac{\sqrt{5}}{n}$

Khi đó độ dài đoạn đường mỗi vòng kiến đi được:

$$d = A_0B_1 = A_1B_2 = \cdots = A_{n-1}B_n = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{n^2} + \frac{1}{16}}$$

Từ đó suy ra độ dài đoạn đường kiến đi được trong suốt hành trình:

$$S = nd = n\sqrt{\frac{5}{n^2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{5 + \frac{n^2}{16}}$$

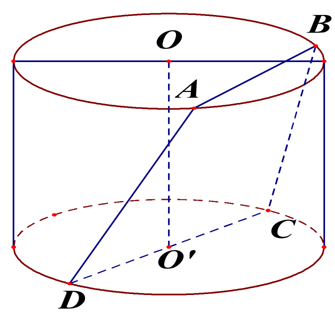
Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} \sqrt{5 + \dfrac{n^2}{16}} \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}^*, n \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Leftrightarrow n = 8$. Vậy $P = 65$.

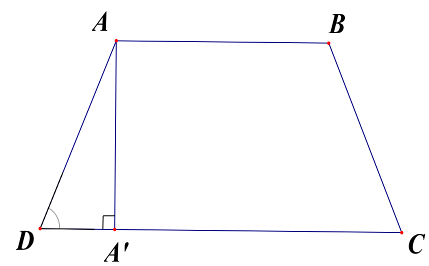
Câu 6: Cho hình trụ có tâm 2 đáy là O và O', CD là đường kính đường tròn tâm O', dây cung AB nằm trên đường tròn tâm O sao cho $AB // CD$ và $AD = 2\pi\ (cm)$, chiều cao hình trụ bằng $\sqrt{3}\pi\ (cm)$. Mặt phẳng $(ABCD)$ chia mặt xung quanh hình trụ thành 2 phần, phần nhỏ hơn có diện tích bằng $3\sqrt{3}\pi^2\ (cm^2)$. Diện tích S của một mặt đáy hình trụ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $50{,}2\ (\text{cm}^2)$. **B.** $50{,}6\ (\text{cm}^2)$. **C.** $48{,}6\ (\text{cm}^2)$. **D.** $51{,}2\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn A





Khi trải phẳng phần mặt xung quanh có diện tích nhỏ hơn lên một mặt phẳng nào đó ta được hình thang cân $ABCD$. Giả sử bán kính đáy hình trụ là R thì hình thang cân $ABCD$ có đáy $CD = \pi R$, chiều cao $AA' = \sqrt{3}\pi\ (cm)$, $AD = 2\pi\ (cm)$.

Ta có $A'D = \dfrac{CD - AB}{2}$ mà theo định lí Pitago:

$$A'D = \sqrt{AD^2 - AA'^2} = \sqrt{(2\pi)^2 - (\sqrt{3}\pi)^2} = \pi (cm)$$

Suy ra $AB = CD - 2\pi$.

Diện tích hình thang $ABCD$:

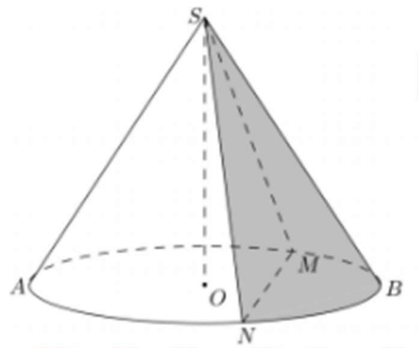
$$S_{ABCD} = \frac{AA'(CD + AB)}{2} = \frac{AA'(2CD - 2\pi)}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi(2\pi R - 2\pi)}{2} = \sqrt{3}\pi^2(R-1).$$

Mà theo giả thiết: $S_{ABCD} = 3\sqrt{3}\pi^2\ (cm^2)$ nên $\sqrt{3}\pi^2(R-1) = 3\sqrt{3}\pi^2$ hay $R = 4(cm)$.

Khi đó diện tích S của một mặt đáy hình trụ bằng $S = \pi R^2 = 16\pi \approx 50{,}24 (cm^2)$

Dạng 6 : Bài toán thực tế hình nón – trụ, khối nón – trụ

Câu 1: Một chiếc nón lá có dạng hình nón có bán kính đáy bằng $20cm$ và đường sinh bằng $32cm$. Mặt xung quanh được chia thành hai phần để sơn bởi mặt phẳng qua đỉnh S của nón và một dây cung MN trên đáy (như hình vẽ dưới). Biết rằng $MN = 20cm$, phần sơn đậm có chi phí 200.000 đồng mỗi mét vuông và phần sơn nhạt có thi phí 100.000 đồng mỗi mét vuông. Số tiền cần dùng để sơn mặt xung quanh của nón gần nhất với số nào dưới đây?



A. 26.808 đồng. **B.** 33.510 đồng. **C.** 36.861 đồng. **D.** 23.457 đồng.

Lời giải

Chọn D

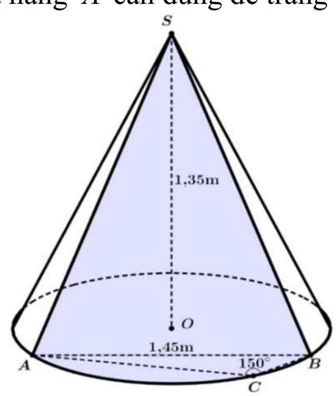
Ta có $OM = ON = MN$ nên tam giác OMN đều suy ra $\widehat{MON} = 60^0$.

Do đó diện tích phần sơn đậm chiếm $\dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ diện tích xung quanh của hình nón, diện tích phần sơn nhạt chiếm $\dfrac{5}{6}$ diện tích xung quanh của hình nón.

Số tiền sơn cần dùng là:

$T = \dfrac{1}{6}\pi.0,2.0,32.200000 + \dfrac{5}{6}\pi.0,2.0,32.100000 \approx 23.457$ đồng.

Câu 2: Cửa hàng A có đặt trước sảnh một cái nón lớn với chiều cao $1,35$ m và sơn cách điệu hoa văn trang trí một phần mặt ngoài của hình nón ứng với cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ như hình vẽ. Biết $AB = 1,45$ m, $\widehat{ACB} = 150°$ và giá tiền trang trí là 2.000.000 đồng mỗi mét vuông. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà cửa hàng A cần dùng để trang trí là bao nhiêu?



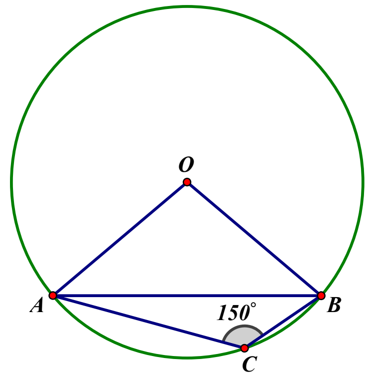
A. 4.215.000 đồng. **B.** 4.510.000 đồng. **C.** 3.021.000 đồng. **D.** 3.008.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Bán kính đáy của hình nón là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ta có: $R = \dfrac{AB}{2\sin\widehat{ACB}} = \dfrac{1,45}{2\sin 150°} = 1,45 \Rightarrow \Delta OAB$ đều, tức là $\widehat{AOB} = 60°$. Do đó diện tích mặt được sơn chiếm $\dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ diện tích mặt xung quanh của nón.



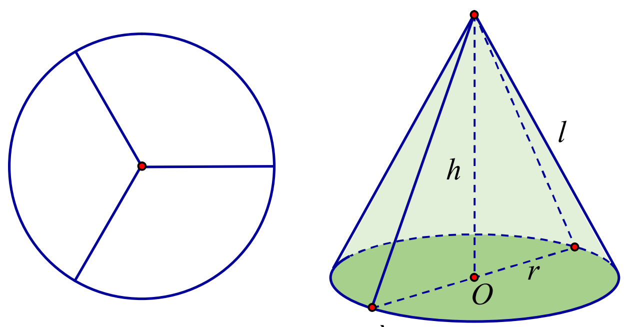
Vì vậy số tiền cần sơn là $\frac{1}{6}\pi rl.2.10^6 = \frac{1}{6}\pi.1,45.\sqrt{(1,45)^2+(1,35)^2}.2.10^6 \approx 3008000$ đồng.

Câu 3: Người ta cắt một tấm bìa hình tròn thành ba tấm bìa hình quạt bằng nhau. Với mỗi tấm bìa hình quạt, người ta quấn và dán thành một cái phễu hình nón **(giả sử diện tích mép dán không đáng kể)**. Biết bán kính tấm bìa hình tròn là $60\,\text{cm}$. Tính thể tích V của mỗi cái phễu.

A. $V = \frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. **B.** $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **C.** $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **D.** $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ lít.

Lời giải

Chọn B



◆ Gọi R, r lần lượt là bán kính của đường tròn ban đầu và bán kính đường tròn đáy của hình nón; h, l là chiều cao và đường sinh của hình nón.

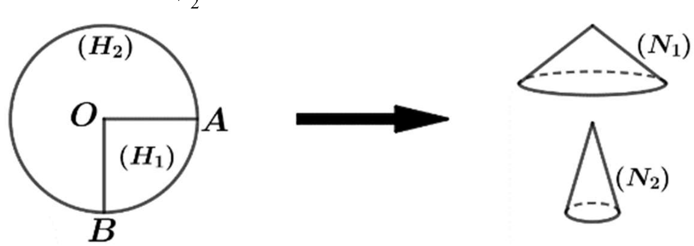
Ta có: $R = 60\,\text{cm} = 6$ dm, $l = R = 6$ dm.

◆ Chu vi đường tròn đáy của hình nón: $2\pi r = \frac{2\pi R}{3} \Rightarrow r = 2\,\text{dm}$.

◆ Chiều cao hình nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4\sqrt{2}$ dm.

Thể tích của mỗi khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.2^2.4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 4: Một tấm tôn hình tròn tâm O, bán kính R được chia thành hai hình (H_1) và (H_2) như hình vẽ. Cho biết góc $\widehat{AOB} = 90°$. Từ hình (H_1) gò tấm tôn để được hình nón (N_1) không đáy và từ hình (H_2) gò tấm tôn để được hình nón (N_2) không đáy. Ký hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón (N_1), (N_2). Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng



A. 2 . **B.** 3 . **C.** $\dfrac{3\sqrt{105}}{5}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{105}}{9}$.

Lời giải

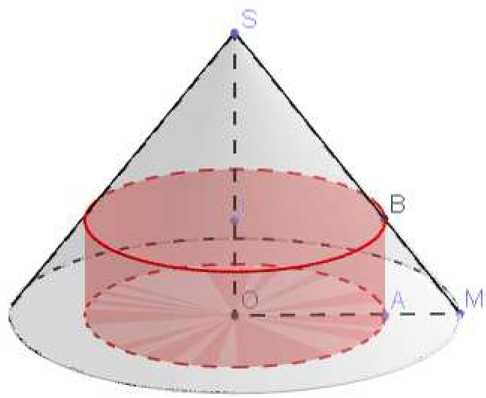
Chọn C

Hai hình nón có độ dài đường sinh bằng nhau: $\ell_1 = \ell_2 = R$.

Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính đáy của hình nón (N_1), (N_2).

Ta có $\begin{cases} 2\pi r_1 = \dfrac{3}{4}.2\pi R \\ 2\pi r_2 = \dfrac{1}{4}.2\pi R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{3R}{4} \\ r_2 = \dfrac{R}{4} \end{cases}$ Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{1}{3}\pi r_1^2\sqrt{\ell_1^2 - r_1^2}}{\dfrac{1}{3}\pi r_2^2\sqrt{\ell_2^2 - r_2^2}} = \dfrac{3\sqrt{105}}{5}$.

Câu 5: Cho một hình nón đỉnh S, mặt đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R = 6(cm)$ và có thiết diện qua trục là tam giác đều. Cho một hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;r)$ và $(I;r)$, có thiết diện qua trục là hình vuông, biết đường tròn $(O;r)$ nằm trên mặt đáy của hình nón, đường tròn $(I;r)$ nằm trên mặt xung quanh của hình nón (I thuộc đoạn SO).



Tính thể tích khối trụ.

A. $432\pi\left(26\sqrt{3}-45\right)\left(cm^3\right)$. **B.** $1296\pi\left(26\sqrt{3}-45\right)\left(cm^3\right)$.

C. $1296\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(cm^3\right)$. **D.** $432\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hình nón có bán kính đường tròn đáy $R = 6(cm)$ và có thiết diện qua trục là tam giác đều nên có

$SM = 2R = 12cm$

$SO = \dfrac{SM\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}cm$

Đặt $SI = x$, vì $BI // AO$ nên ta có: $\dfrac{BI}{OM} = \dfrac{SI}{SO} \Rightarrow \dfrac{r}{6} = \dfrac{x}{6\sqrt{3}} \Rightarrow r = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

Chiều cao của hình trụ là: $h = OI = SO - SI = 6\sqrt{3} - x$

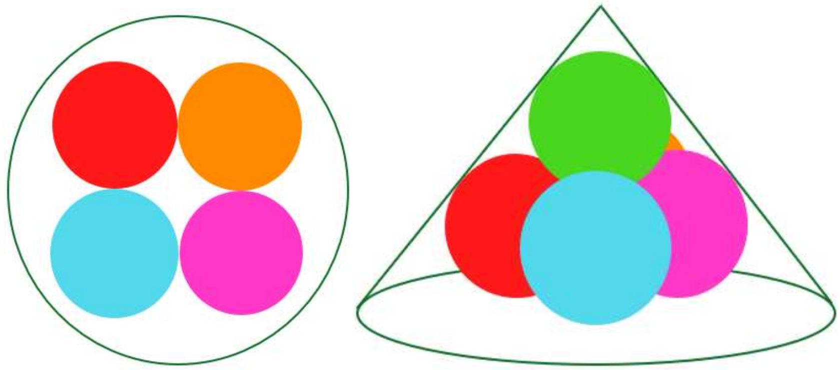
Do đó, thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông khi và chỉ khi: $h = 2r \Leftrightarrow 6\sqrt{3} - x = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{18}{2+\sqrt{3}} = 18\left(2-\sqrt{3}\right)$

Khi đó:

$h = 6\sqrt{3} - x = 12\left(2\sqrt{3}-3\right); r = \dfrac{h}{2} = 6\left(2\sqrt{3}-3\right)$

$$V=\pi r^2h=\pi\left[6\left(2\sqrt{3}-3\right)^2\right].12\left(2\sqrt{3}-3\right)=1296\pi\left(26\sqrt{3}-45\right)\left(cm^3\right)$$

Câu 6: Cho hình nón chứa năm mặt cầu cùng có bán kính là 1, trong đó bốn mặt cầu tiếp xúc với đáy, tiếp xúc đôi một với nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón. Mặt cầu thứ năm tiếp xúc với bốn mặt cầu kia và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón.

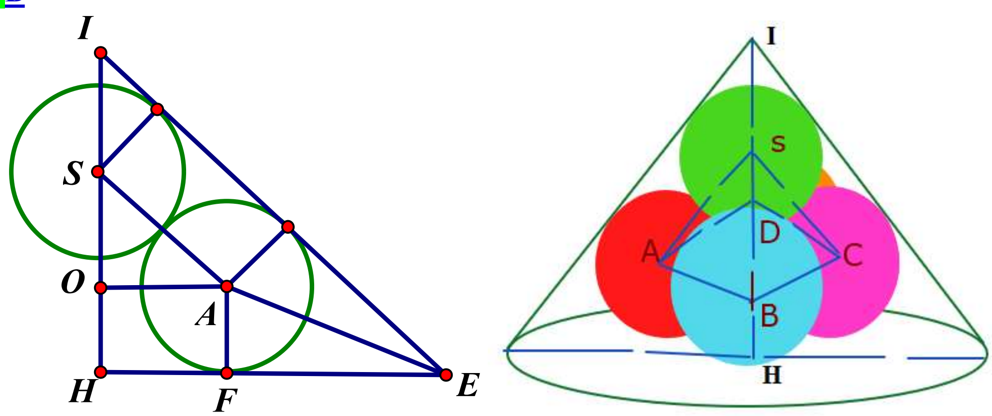


Tính bán kính đáy hình nón.

A. $2\sqrt{3}+1$. **B.** $2\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $3\sqrt{2}+1$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S,A,B,C,D lần lượt là tâm 5 mặt cầu như hình vẽ.

Suy ra $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng 2, đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O.

Ta có $OA=\sqrt{2}$, $\widehat{SAO}=\widehat{IEH}=2\widehat{AEH}=\alpha$.

$$\cos\alpha=\frac{OA}{SA}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^\circ\Rightarrow\widehat{AEH}=22,5^\circ$$

$$\Rightarrow EF=\frac{AF}{\tan\widehat{AEH}}=\sqrt{2}+1\Rightarrow R=HE=HF+FE=2\sqrt{2}+1.$$

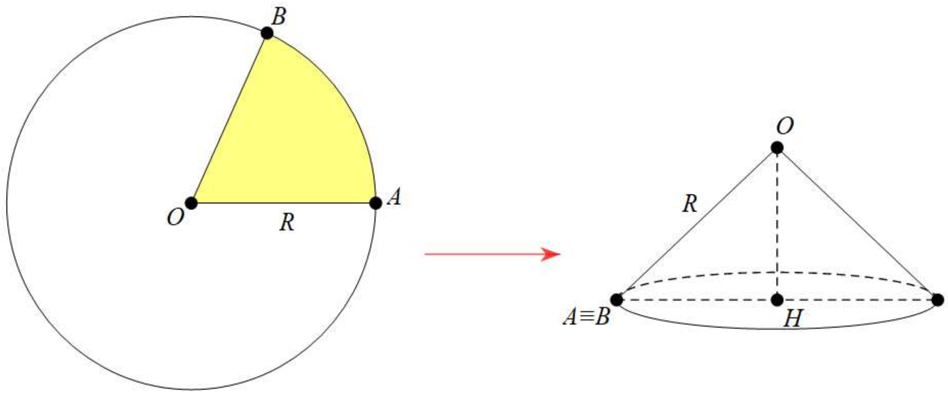
Câu 7: Cho một miếng tôn hình tròn tâm O, bán kính R. Cắt bỏ một phần miếng tôn theo một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không có đáy (OA trùng với OB). Gọi S và S' lần lượt là diện tích của miếng tôn hình tròn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tìm số đo góc ở tâm của mảnh tôn cắt bỏ để để thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất.

A. $120\sqrt{6}$ độ. **B.** 120 độ. **C.** $\frac{120\sqrt{6}}{2}$ độ. **D.** $360-120\sqrt{6}$ độ.

Lời giải

GVSB: Trần Thị Thu Khuyên; GVPB1: Thien Pro;GVPB2: Giang Trần

Chọn D



Ta có, diện tích của miếng tôn ban đầu là $S = \pi R^2$.

Gọi góc ở tâm của mảnh tôn còn lại là $\alpha\left(0^0 < \alpha < 360^0\right)$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần tôn còn lại là: $S' = \dfrac{\alpha}{360}.\pi R^2$.

Mặt khác, xét hình nón đỉnh O có chu vi đáy là $C = \dfrac{\alpha}{360}.2\pi R = \dfrac{\alpha}{180}.\pi R$.

$\Rightarrow$Bán kính đáy của hình nón đỉnh O là $R' = \dfrac{\alpha R}{360}$ và chiều cao $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2}$

$= \sqrt{R^2 - R'^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{\alpha R}{360}\right)^2} = \dfrac{R}{360}.\sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

$\Rightarrow$Thể tích của khối nón đỉnh O là $V = \dfrac{1}{3}.\pi R'^2.OH = \dfrac{1}{3}.\pi.\left(\dfrac{\alpha R}{360}\right)^2.\dfrac{R}{360}.\sqrt{360^2 - \alpha^2}$

$= \dfrac{\pi R^3}{3.360^3}.\alpha^2.\sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

Xét hàm số $f(\alpha) = \alpha^2.\sqrt{360^2 - \alpha^2}$ với $\left(0^0 < \alpha < 360^0\right)$.

Ta có $f'(\alpha) = 2\alpha.\sqrt{360^2 - \alpha^2} - \dfrac{\alpha^3}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}} = \dfrac{\alpha\left(2.360^2 - 3\alpha^2\right)}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}$.

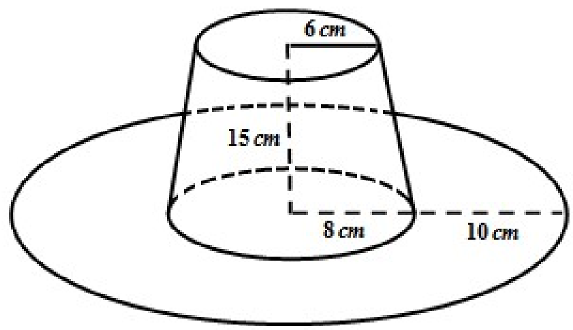
$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = \pm 120\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = 120\sqrt{6}$ do $\left(0^0 < \alpha < 360^0\right)$

Bảng biến thiên:

α	0		$120\sqrt{6}$		360
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	$f(120\sqrt{6})$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{(0;360)} f(\alpha) = f\left(120\sqrt{6}\right) \Rightarrow V$ max khi và chỉ khi $\alpha = 120\sqrt{6}$.

Câu 8: Một chiếc mũ bằng vải với kích thước như hình vẽ. Biết rằng một m^2 vải có giá 120000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mua vải (không tính viền, mép, phần thừa) để may mũ là bao nhiêu?



A. 19000 đồng. **B.** 18000 đồng. **C.** 17000 đồng. **D.** 16000 đồng.

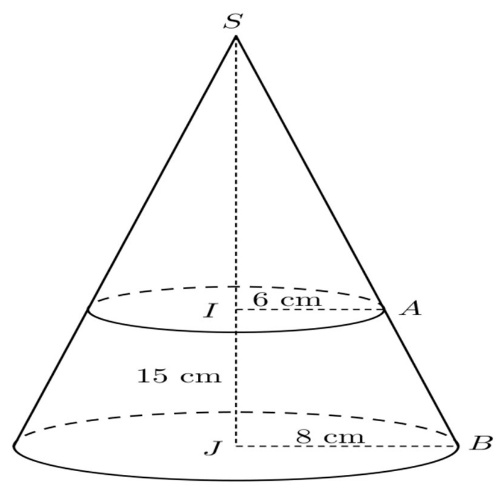
Lời giải

Chọn A

◆ Diện tích của phần vành mũ: $S_1 = \pi 18^2 - \pi 8^2 = 260\pi$ (cm^2).

◆ Diện tích xung quanh của hình nón cụt:

◆ Gọi (N) là hình nón có đỉnh S và bán kính là $JB = 8cm$, và (N_1) là hình nón có đỉnh S và bán kính $IA = 6cm$. S_2 là diện tích xung quanh của hình nón cụt; S_N là diện tích xung quanh của hình nón (N); S_{N_1} là diện tích xung quanh của hình nón (N_1).



◆ Xét tam giác SJB có $\frac{SI}{SJ} = \frac{IA}{JB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{SI}{15+SI} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow SI = 45\ cm$

◆ Suy ra $SA = \sqrt{SI^2 + IA^2} = \sqrt{45^2 + 6^2} = 3\sqrt{229}\ cm$

và $SB = \sqrt{SJ^2 + JB^2} = \sqrt{60^2 + 8^2} = 4\sqrt{229}\ cm$

◆ Ta có $S_2 = S_N - S_{N_1} = \pi.JB.SB - \pi.IA.SA = \pi\left(8.4\sqrt{229} - 6.3\sqrt{229}\right) = 14\sqrt{229}\pi$ (cm^2).

◆ Diện tích của đáy mũ: $S_3 = \pi 6^2 = 36\pi$ (cm^2).

◆ Tổng diện tích vải cần có để làm chiếc cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa) là:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = (14\sqrt{229} + 296)\pi \text{ (cm}^2) = \frac{(14\sqrt{229}+296)\pi}{100^2} \text{(m}^2)$$

Vậy số tiền cần mua vải là $\frac{(14\sqrt{229}+296)\pi}{100^2}.120000 \approx 19145{,}81225$ đồng.

Câu 9: Một cuộn đề can hình trụ có đường kính 44,9 cm. Trong thời gian diễn ra AFF cup 2018, người ta đã sử dụng để in các băng rôn, khẩu hiệu cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam, do đó đường kính của cuộn đề can còn lại là 12,5 cm. Biết độ dày của tấm đề can là 0,06 cm, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $L = 24395cm$. **B.** $L = 97377cm$. **C.** $L = 848cm$. **D.** $L = 7749\,cm$.

Lời giải

Chọn A

Ta có mỗi lần sử dụng một vòng đề can thì bán kính của cuộn đề can giảm đi số cm là: $0,06cm$

Bán kính lúc đầu là 22,45 cm, bán kính lúc sau là 6,25 cm. Số vòng đề can đã bán đi là:

$$\frac{(22,45-6,25)}{0,06}=270$$

Chu vi một vòng đề can bán kính r là chiều dài của vòng đề can đó. Nó bằng: $L_i=2\pi r_i$.

Chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng bằng $L=L_1+L_2+...+L_{270}$ với L_1 là độ dài vòng đầu tiên của cuộn đề can, bán kính là $r_1=22,45cm$. L_1 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_1=22,45cm \Rightarrow L_1=2\pi.r_1$. Vòng thứ 2, bán kính giảm đi 0,06cm do đó nó sẽ có bán kính bằng $r_2=22,45-0,06=22,39cm$, L_2 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_2=22,39cm \Rightarrow L_2=2\pi.r_2$.

Suy ra $L=2\pi r_1+2\pi r_2+...+2\pi r_{270}=2\pi(r_1+r_2+...+r_{270})$

Trong đó $r_1,r_2,...,r_{270}$ là một cấp số cộng có $u_1=22,45; d=-0,06$, suy ra $u_{270}=u_1+269d=22,45-269.0,06=6,25+0,06=6,31cm$

Tổng $r_1+r_2+...+r_{270}=\frac{(r_1+r_{270})\times 270}{2}=\frac{(22,45+6,31)270}{2}=3882,6\text{ cm}$

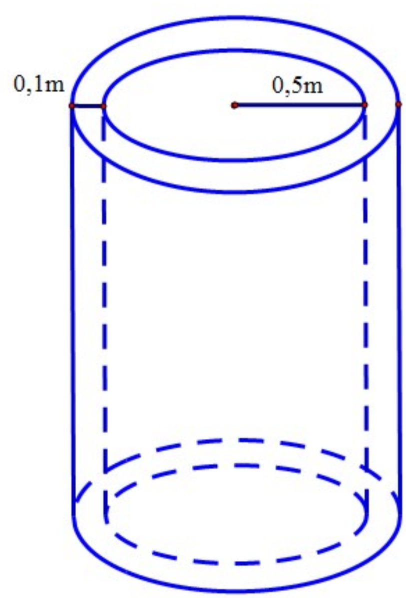
Suy ra $L=2\pi.3882,6\approx 24395cm$.

Câu 10: Một công ty A dự kiến làm một đường ống thoát nước thải hình trụ dài $1(\text{km})$, đường kính trong của ống (không kể lớp bê tông) bằng $1(\text{m})$, độ dày của lớp bê tông bằng $10(\text{cm})$. Biết rằng cứ một mét khối bê tông phải dùng 8 bao xi măng. Số bao xi măng công ty A phải dùng để xây dựng đường ống thoát nước là

A. 2765. **B.** 2262. **C.** 5278. **D.** 3000.

Lời giải

Chọn A



Đường kính của đường ống thoát nước là $(1+0,1.2)=1,2(\text{m})$

Thể tích của đường ống thoát nước là $V=\pi r^2h=\pi.(0,6)^2.1000=360\pi(\text{m}^3)$.

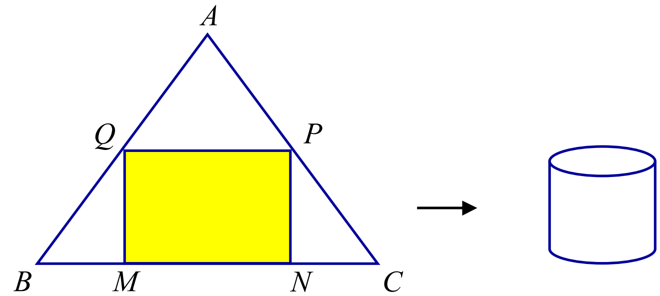
Thể tích của khối trụ không chứa bê tông (phần rỗng) là

$V_1=\pi r^2 l=\pi.(0,5)^2.1000=250\pi(\text{m}^3)$.

Thể tích phần bê tông là $V_2 = V - V_1 = 360\pi - 250\pi = 110\pi\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Vậy số bao xi măng công ty A cần phải dùng để xây dựng đường ống là $110\pi.8 \approx 2765$ (bao).

Câu 11: Ông An muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng $3\left(\mathrm{m}\right)$. Ông muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M, N thuộc cạnh BC; P, Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ.

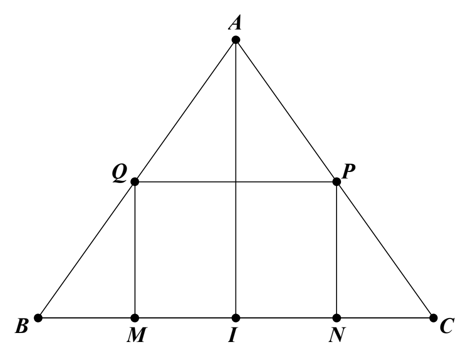


Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà Ông An có thể làm được là

A. $\dfrac{600000\sqrt{3}}{\pi}\left(\mathrm{cm}^3\right)$. **B.** $\dfrac{500000\sqrt{3}}{\pi}\left(\mathrm{cm}^3\right)$. **C.** $\dfrac{700000\sqrt{3}}{\pi}\left(\mathrm{cm}^3\right)$. **D.** $\dfrac{800000\sqrt{3}}{\pi}\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN và $AI = \dfrac{300\sqrt{3}}{2}\ cm$.

Đặt $MN = PQ = x\ (cm)$, $\left(0 < x < 300\right)$.

Ta có: $\dfrac{MQ}{AI} = \dfrac{BQ}{BA} = \dfrac{AB - AQ}{AB} = 1 - \dfrac{AQ}{AB} = 1 - \dfrac{PQ}{BC} \Rightarrow MQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(300 - x\right)$.

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R = \dfrac{x}{2\pi}$.

Thể tích của khối trụ là: $V_T = \pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(300 - x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-x^3 + 300x^2\right)$

Xét $f\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-x^3 + 300x^2\right)$ với $0 < x < 300$.

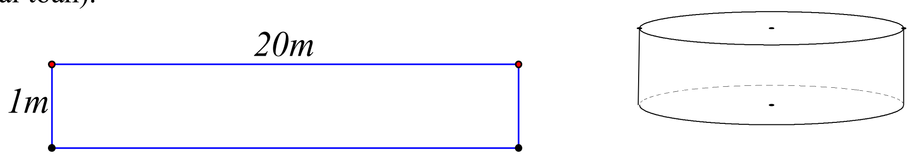
$f'\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-3x^2 + 600x\right)$, $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 200 \end{array}\right.$.

Khi đó suy ra $V_{\max} = \max\limits_{x \in (0;300)} f\left(x\right) = f\left(200\right) = \dfrac{500000.\sqrt{3}}{\pi}$

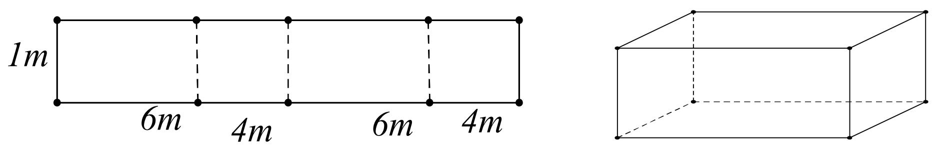
Câu 12: Một cô giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 15 tấm tôn có kích thước $1m \times 20m$ (biết giá $1m^2$ tôn là 100000 đồng) bằng 2 cách:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.
Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.
Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mức nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là $9955 dong/m^3$. Chi phí trong tay thầy hiệu trưởng là 2,2 triệu đồng. Hỏi cô giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

Hình 1



Hình 2



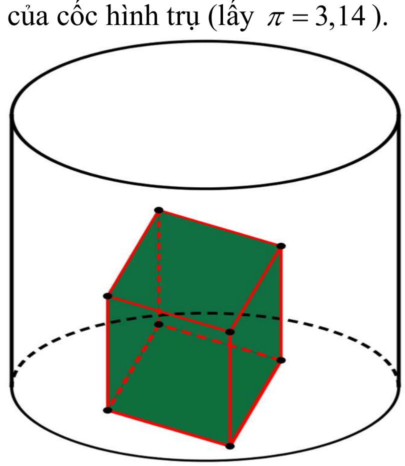
A. Cả 2 cách như nhau **B.** Không chọn cách nào
C. Cách 1 **D.** Cách 2

Lời giải

Chọn D

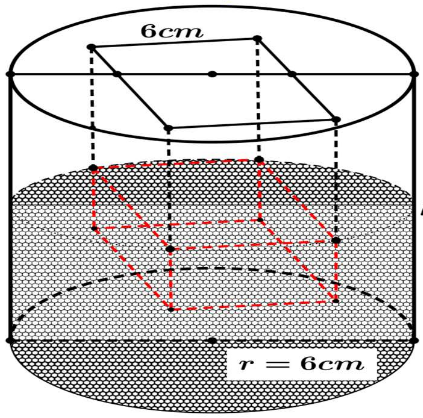
Ở cách 1:
$20m^2 \to 2.000.000$
Ta có $20 = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{10}{\pi} \Rightarrow V_{nuoc} = h\pi r^2 = 0,8.\pi.\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \approx 25,46m^3$
Do đó tổng tiền ở phương án 2 là $25,46.9955 + 20.100000 = 2.253.454$
Ở cách 2:
$1m^2 \to 100.000$
$20m^2 \to 2.000.000$
Ta có $V_{nuoc} = 0,8.6.4 = 19,2m^3$
Do đó tổng tiền ở phương án 1 là $19,2.9955 + 20.100000 = 2.191.136$.
Vậy cô nên chọn cách 2.

Câu 13: Một chiếc cốc hình trụ có bán kính đáy bằng $6\,cm$ và chiều cao $h\,$cm bên trong có một khối lập phương cạnh $6\,$cm như hình minh họa. Khi đổ nước vào cốc, khối lập phương sẽ nổi $\dfrac{2}{3}$ thể tích của nó lên trên mặt nước (mặt trên khối lập phương song song với mặt nước). Biết lượng nước đổ vào cốc là $1296\left(cm^3\right)$ để mặt trên của khối lập phương ngang bằng với miệng cốc khi nó nổi lên. Tính chiều cao h của cốc hình trụ (lấy $\pi = 3,14$).



A. $h=\dfrac{2528}{157}(cm)$. **B.** $h=\dfrac{1900}{157}(cm)$. **C.** $h=\dfrac{628}{157}(cm)$. **D.** $h=\dfrac{4428}{157}(cm)$.

Lời giải



Chọn A

Thể tích lượng nước đổ vào cốc là $V_1=1296\,cm^3$.

Thể tích khối lập phương chìm trong nước là $V_2=6\times6\times2=72\,cm^3$.

Khi mặt trên của khối lập phương ngang bằng với miệng cốc thì lượng nước trong cốc cách thành trên $4\,cm$.

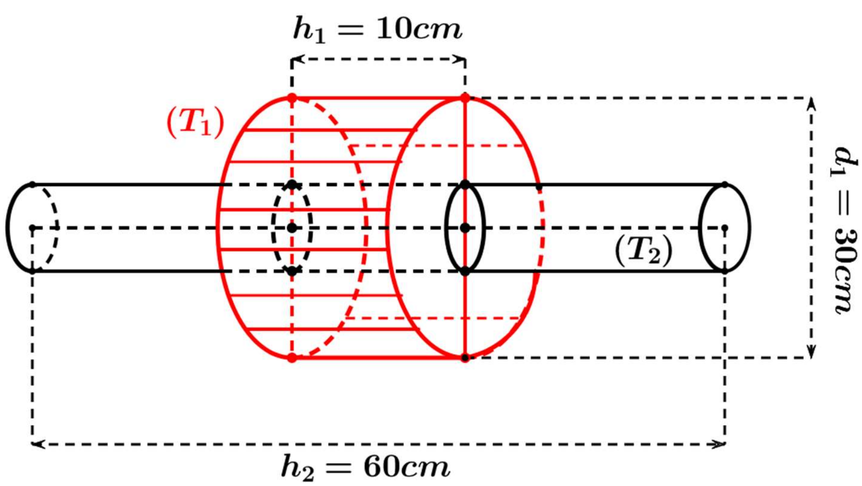
Tổng thể tích lượng nước và phần khối lập phương chìm trong nước là:

$V=3{,}14\times6^2\times(h-4)=\dfrac{2826}{25}(h-4)\,cm^3$.

Vậy ta có: $V=V_1+V_2\Leftrightarrow\dfrac{2826}{25}(h-4)=1368\Rightarrow h=\dfrac{2528}{157}\,cm$.

Câu 14: Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 2 khối trụ (T_1) và (T_2) được lồng vào nhau (khép kín). Khối trụ (T_2) được dùng làm hai tay cầm khi tập và khoảng cách giữa hai đáy của khối trụ (T_2) đến hai đáy tương ứng của khối trụ (T_1) là bằng nhau (tham khảo hình vẽ).

Biết thể tích của khối tạ tay $V=2350\pi\left(cm^3\right)$. Tính tổng diện tích S các bề mặt của chiếc tạ tay.



A. $S=\left(300+100\sqrt{2}\right)\pi(cm)$. **B.** $S=\left(750+100\sqrt{2}\right)\pi(cm)$.

C. $S=\left(754+100\sqrt{2}\right)\pi(cm)$. **D.** $S=\left(758+100\sqrt{2}\right)\pi(cm)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi r_1,r_2 lần lượt là bán kính đáy của hai khối trụ (T_1) và (T_2).

V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối trụ (T_1) và (T_2).

Ta có: $d_1 = 30\,cm \Rightarrow r_1 = 15\,cm$

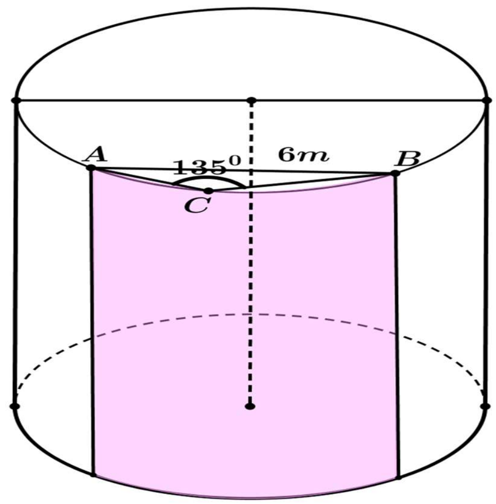
$V_1 = \pi r_1^2 h_1 - \pi r_2^2.10 = 2250\pi - 10\pi r_2^2$

$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 60\pi r_2^2$

$V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow 2350\pi = 2250\pi - 10\pi r_2^2 + 60\pi r_2^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{2}\,cm$.

Vậy tổng diện tích các bề mặt $S = 2\pi.15.10 + 2\pi.\sqrt{2}.50 + 2\pi.15^2 = \left(750 + 100\sqrt{2}\right)\pi\,(cm)$.

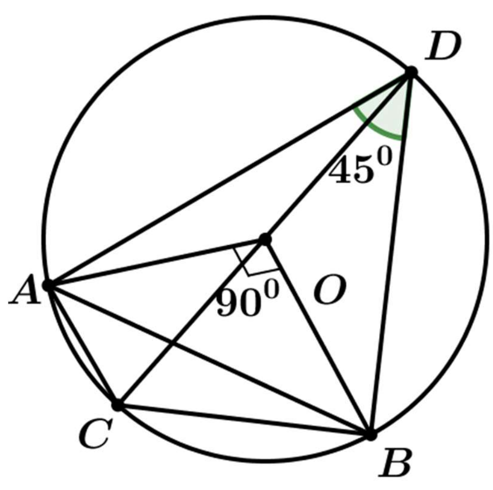
Câu 15: Một công ty X sản xuất bồn chứa xăng dầu hình trụ có thể tích thực $90\,m^3$. Để quảng bá LOGO của công ty, người ta sơn một phần mặt xung quanh của hình trụ để trang trí (tham khảo hình vẽ). Biết mỗi mét vuông bề mặt lượng sơn tiêu hao là $0,3$ lít. Công ty X cần bao nhiêu lít sơn (làm tròn đến hàng phần trăm) để trang trí một bồn chứa xăng dầu? Biết khi đo được dây cung $AB = 6\,m$ và góc $\widehat{ACB} = 135^0$.



A. $34,1(l)$. **B.** $348,93(l)$. **C.** $h = 31,4(l)$. **D.** $104,68(l)$.

Lời giải

Chọn C



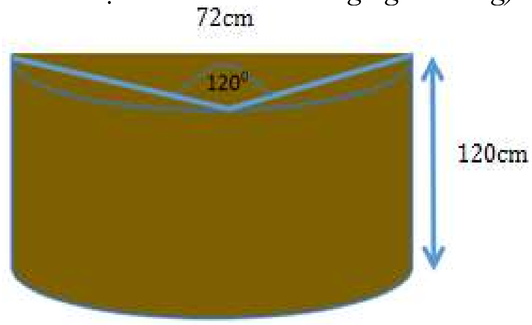
Xét đường tròn đáy tâm O, ta có góc $\widehat{AOB} = 90^0$. Từ đó suy ra bán kính $r = OA = 3\sqrt{2}$

Ta có: độ dài cung nhỏ $l_{AB} = 3\sqrt{2} \times \dfrac{\pi}{2}$ và khối trụ có thể tích $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = 5\pi$

Diện tích xung quanh của mặt cần sơn là $S = 3\sqrt{2}.\dfrac{\pi}{2}.l = 104,68\left(m^2\right)$

Vậy số lít sơn cần dùng: $104,68 \times 0,3 = 31,4$ *lít.*

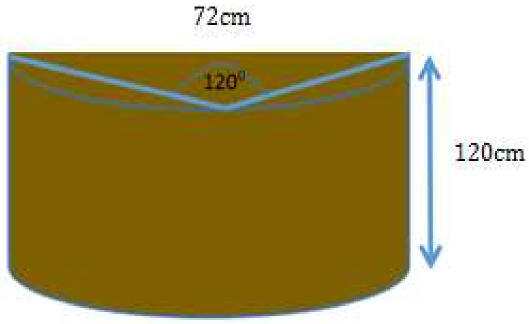
Câu 16: Ông Bình mua một khúc gỗ có hình dạng là một phần của khối trụ có kích thước như hình vẽ. Biết rằng giá của 1 m^3 gỗ có giá là 3200000 đồng. Hỏi số tiền mà ông Bình phải trả để mua khúc gỗ là bao nhiêu? *(số tiền được làm tròn đến hàng nghìn đồng)*

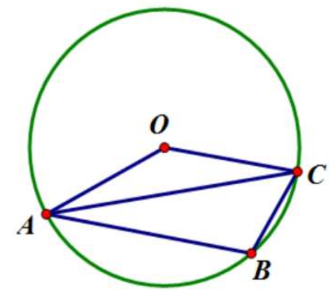


A. 982000 đồng. **B.** 120000 đồng. **C.** 1270000 đồng. **D.** 408000 đồng.

Lời giải

Chọn D





Gọi R là bán kính đường tròn đáy của khối trụ nên R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$$\Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{0,72}{2\sin 120^0} = \frac{6\sqrt{3}}{25}(m)$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AOC} = \frac{R^2 + R^2 - AC^2}{2R^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOC} = \frac{2\pi}{3}.$$

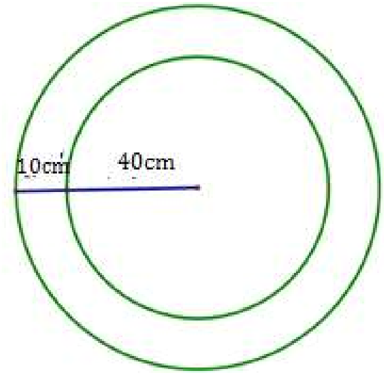
Gọi S_q là diện tích của hình quạt có cung là $\overset{\frown}{ABC}$.

Diện tích mặt đáy của khúc gỗ: $S_g = S_q - S_{OAC} = \frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin \widehat{AOC} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}\left(m^2\right)$.

Thể tích của khúc gỗ: $V = S_g.h = \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}\right).1,2\left(m^3\right)$.

Số tiền ông Bình dùng để mua khúc gỗ: $T = V.3200000 = 407543 \simeq 408000$ đồng.

Câu 17: Dự án công trình cống thoát nước của công ty Sewer.cop. Chủ đầu tư cần sản suất 1200 chiếc cống dẫn nước như nhau có dạng hình trụ từ bê tông. Mỗi chiếc cống có chiều dài 1m, bán kính bên trong bằng 40 cm và độ dày của bê tông bằng 10 cm (xem hình minh họa). Nếu giá bê tông là 480.000 đồng/ m^3 thì để xản suất được 1200 chiếc cống như trên thì chủ đầu tư phải tốn bao nhiêu tiền bê tông? *(số tiền làm tròn đến hàng nghìn đồng)*



A. 162860000 đồng. **B.** 289529000 đồng. **C.** 452389000 đồng. **D.** 741919000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi V_1 là thể tích của hình trụ có đáy là đường tròn lớn, V_2 là thể tích của khối trụ có đáy là đường tròn nhỏ.

$V_1 = \pi R_1^2 h = \pi\left(0,1+0,4\right)^2.1 = 0,25\pi\left(m^3\right)$.

$V_2 = \pi R_2^2 h = \pi\left(0,4\right)^2.1 = 0,16\pi\left(m^3\right)$.

Thể tích bê tông của một chiếc cống: $V = V_1 - V_2 = 0,09\pi\left(m^3\right)$.

Số tiền $T = V.1200.480.000 = 162860163,2 \approx 162.860.000$ đồng.

Câu 18: Lon bia Hà Nội có hình trụ còn cốc uống bia thì có hình nón cụt (như hình vẽ dưới đây). Khi rót bia từ lon ra cốc thì chiều cao h của phần bia còn lại trong lon và chiều cao của phần bia có trong cốc là như nhau. Hỏi khi đó chiều cao h của bia trong lon gần nhất là số nào sau đây?

A. $8,58$ cm. **B.** $14,2$ cm. **C.** $7,5$ cm. **D.** $9,18$ cm.

Lời giải

Chọn A

Gọi phần nước trong cốc là nón cụt có bán kính đáy dưới bằng 2, bán kính đáy trên bằng r.

Khi đó thể tích bia trong cốc là: $V_1 = \dfrac{\pi h}{3}(r^2+2r+4)$.

Thể tích bia rót ra từ lon là: $V_2 = \pi 3^2(15-h) = 135\pi - 9\pi h$.

Phần bia trong cốc bằng phần bia rót ra từ lon bia nên ta có:

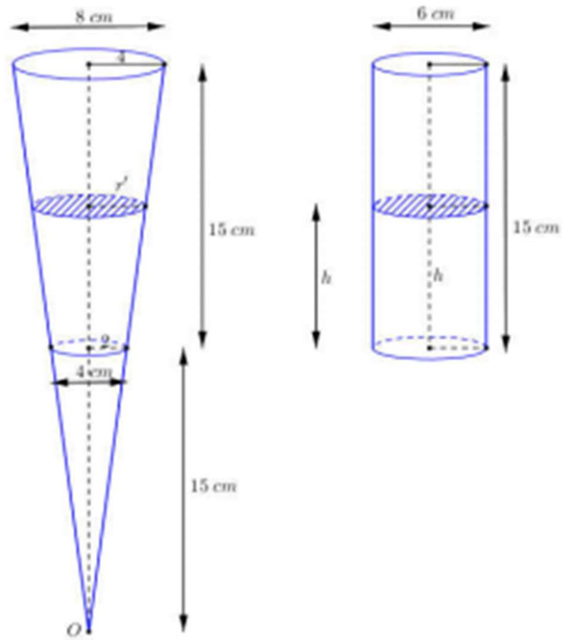
$V_1 = V_2 \Leftrightarrow 135\pi - 9\pi h = \dfrac{\pi h}{3}(r^2+2r+4) \Leftrightarrow h(r^2+2r+31) = 405$ (1).

Lại có: $\dfrac{r}{2} = \dfrac{15+h}{15} \Rightarrow r = \dfrac{30+2h}{15}$ (2).

Thay vào (1) vào (2) ta được: $h\left(\left(\dfrac{30+2h}{15}\right)^2 + 2\dfrac{30+2h}{15} + 31\right) = 405$

$\Leftrightarrow h\left(900+120h+4h^2+900+60h+6975\right) = 91125$

$\Leftrightarrow 4h^3+180h^2+8775h-91125 = 0 \Leftrightarrow h \simeq 8,58$



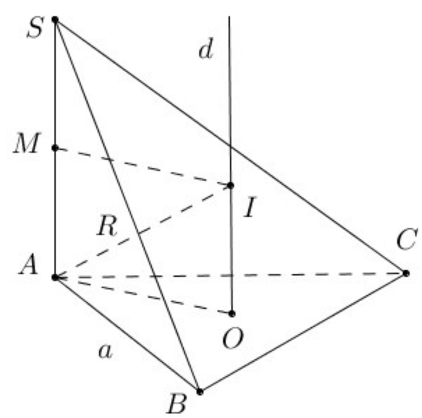
↳Dạng 7 : Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có diện tích là $2\pi a^2$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, ta có $4\pi R^2 = 2\pi a^2 \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là tâm của đáy ABC, dựng đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại O, dựng đường trung trực của SA cắt d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC \Rightarrow R = IA$ và $SA = 2OI$.

Trong tam giác ABC có $OA = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $OI = \sqrt{IA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

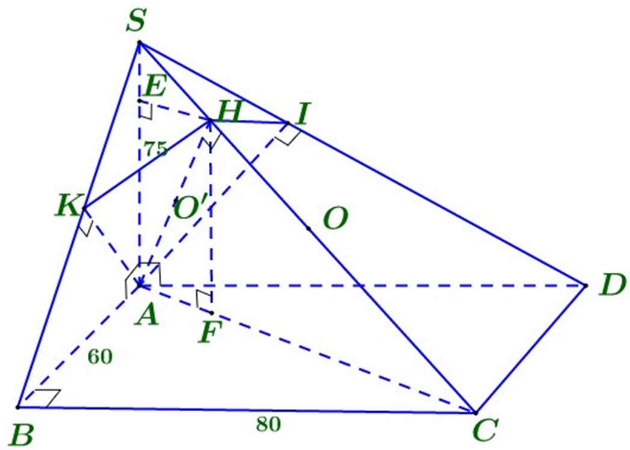
Do đó $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 60\ cm, BC = 80\ cm$, cạnh bên SA vuông góc mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = 75\ cm$, Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại các điểm K, H, I. Điểm E, F lần lượt thuộc các đoạn thẳng SA, AC thỏa $SE = 27\ cm, AF = 36\ cm$. Tìm tỉ số của diện tích S' của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $FAKHIE$ và diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{196}{625}$. **B.** $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{144}{625}$. **C.** $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{4}{25}$. **D.** $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{256}{625}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB; \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$

Gọi O là trung điểm SC : $\begin{cases} \widehat{SBC} = 90^o \\ \widehat{SDC} = 90^o \\ \widehat{SAC} = 90^o \end{cases} \Rightarrow$ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm O đường kính SC. $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = \dfrac{125}{2}\ (cm)$

Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại các điểm K, H, I.

$\begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp KH$; $\begin{cases} AI \perp CD \\ AI \perp SC \end{cases} \Rightarrow AI \perp IH$

Trong tam giác vuông SAC, đường cao AH: $SH.SC = SA^2 \Rightarrow \dfrac{SH}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{75^2}{125^2} = \dfrac{9}{25}$

Mặt khác $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{27}{75} = \dfrac{9}{25}; \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{36}{100} = \dfrac{9}{25}$

$\Rightarrow \begin{cases} EF // AC \\ HF // SA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EH \perp SA \\ HF \perp AC \end{cases}$

Gọi O' là trung điểm AH: $\widehat{AKH} = \widehat{AIH} = \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^o \Rightarrow$ Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $FAKHIE$ có tâm O' đường kính AH.

$\Rightarrow R' = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{\sqrt{AE^2 + AF^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{48^2 + 36^2}}{2} = 30\ (cm)$

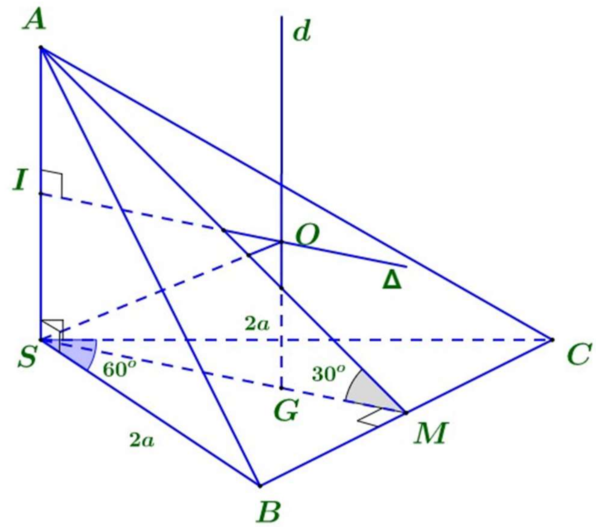
$\Rightarrow \dfrac{S'}{S} = \dfrac{4\pi (R')^2}{4\pi R^3} = \dfrac{(R')^2}{R^2} = \dfrac{144}{625}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = SC = 2a$, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, góc giữa (SBC) và đáy (ABC) bằng 30^o. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

A. $\dfrac{43\pi a^2}{3}$. B. $\dfrac{28\pi a^2}{3}$. C. $\dfrac{19\pi a^2}{3}$. D. $\dfrac{25\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết ta có SBC là tam giác đều cạnh $2a$ và $SA \perp SC$, $SA \perp SB$ nên $SA \perp (SBC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow \left(\widehat{(ABC),(SBC)}\right) = \widehat{ASM} = 30^o$

Giả sử O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Vì O cách đều các đỉnh của hình chóp nên O là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC (đường thẳng d vuông góc với (SBC) tại trọng tâm G của (SBC)) và đường trung trực Δ của AS trong mặt phẳng (SAM).

$SM = \dfrac{SB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $SA = SM.\tan 30^o = a$.

Xét tam giác SIO: có $IO = SG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $SI = \dfrac{a}{2}$

nên $R = OS = \sqrt{IS^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{57}}{6}$.

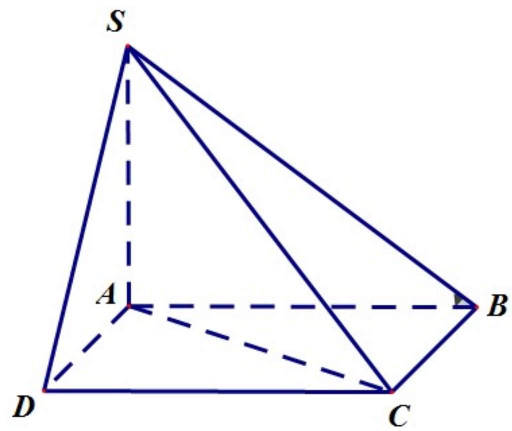
Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{57}}{6}\right)^2 = \dfrac{19\pi a^2}{3}$.

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, SA vuông góc với mặt đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{7\sqrt{7}}{6}\pi a^3$. B. $V = \dfrac{7\sqrt{7}}{6}a^3$. C. $V = 7\pi a^2$. D. $V = \dfrac{7\sqrt{7}}{24}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Mà $BC \perp BA \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Do đó góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA} = 45°$.

Ta có tam giác SAB vuông cân tại A nên $SA = AB = a\sqrt{3}$;

$AC = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a \Rightarrow SC = \sqrt{4a^2 + 3a^2} = a\sqrt{7}$.

Vì $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp SB$. Tương tự ta cũng có $CD \perp SD$.

Vì các điểm A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên các điểm S, A, B, C, D cùng thuộc mặt cầu đường kính SC.

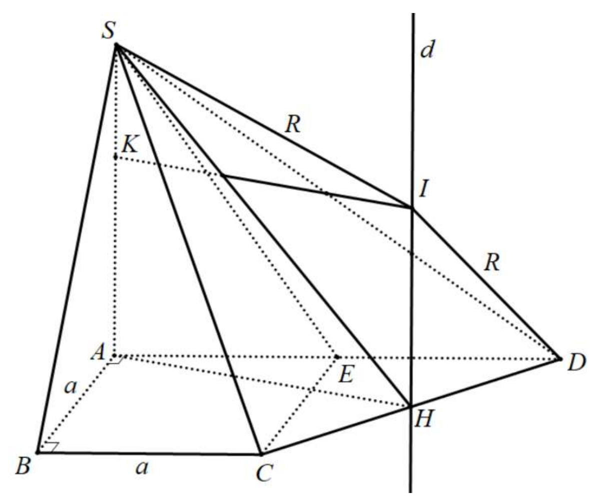
Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{SC}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^3 = \frac{7\sqrt{7}}{6}\pi a^3$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên $SA = 1$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E là trung điểm AD. Diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ là

A. $S_{mc} = 5\pi$. **B.** $S_{mc} = 3\pi$. **C.** $S_{mc} = 11\pi$. **D.** $S_{mc} = 2\pi$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AB = BC = a, AD = 2a, SA = a$ với $a = 1$.

Gọi H là trung điểm của CD và d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với đáy. Gọi I và R là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$. Suy ra I thuộc d. Đặt $IH = x$. Trong mp $(ASIH)$ kẻ đường thẳng đi qua I và song song với AH cắt AS tại K.

Ta thấy tứ giác $ABCE$ là hình vuông vì $AE // BC, AE = BC = AB = a, \widehat{ABC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{CED} = 90°, CE = a \Rightarrow CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có $ID^2 = IH^2 + HD^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{2}$.

Mặt khác vì $AE = CE = ED = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$.

Khi đó $IS^2 = IK^2 + KS^2 = AH^2 + KS^2 = AC^2 + CH^2 + KS^2 = 2a^2 + \dfrac{a^2}{2} + (a-x)^2$.

Suy ra: $x^2 + \dfrac{a^2}{2} = 2a^2 + \dfrac{a^2}{2} + (a-x)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ là $R = ID = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

$\Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = 11\pi a^2 = 11\pi$.

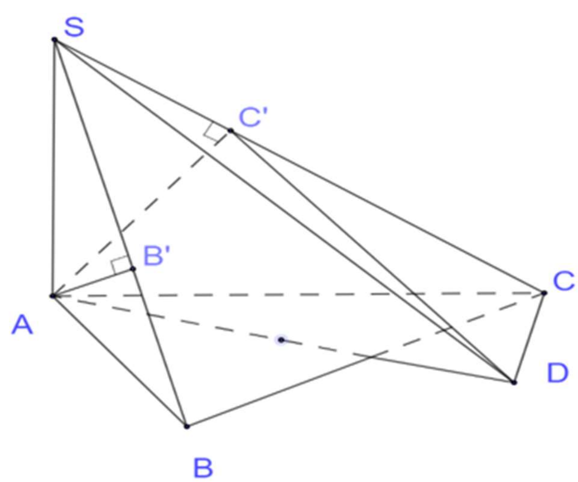
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 30°$ Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB, SC. Tính diện tích xung quanh của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, B', C'.

A. $S_{xq} = (3-\sqrt{2})\pi a^2$. **B.** $S_{xq} = 24\pi a^2$.

C. $S_{xq} = (20-8\sqrt{3})\pi a^2$. **D.** $S_{xq} = 4(3-\sqrt{2})\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



Xét hai tam giác vuông SAC, SAB

Ta có $\begin{cases} SA^2 = SB.SB' \\ SA^2 = SC.SC' \end{cases} \Rightarrow SB.SB' = SC.SC'$. Suy ra B, C, B', C' cùng thuộc một đường tròn.

Vậy hình chóp $A.BCB'C'$ với đáy $BCB'C'$ có đường tròn ngoại tiếp nên hình chóp đó có mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi AD là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $CD \perp AC$, mặt khác $CD \perp SA$, suy ra $CD \perp (SAC)$.Vậy $CD \perp AC'$.

Theo giả thiết, $AC' \perp SC$ nên $AC' \perp C'D$

Tương tự như trên ta có $\widehat{ABD} = 90°, \widehat{AB'D} = 90°$. Vậy AD là đường kính của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, B', C'.

Bán kính R của mặt cầu đó cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do đó $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$

Mặt khác

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A \Rightarrow BC = \sqrt{a^2 + (2a)^2 - 2a.2a.\cos 30°} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}.a$

Ta có $R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2.\sin 30^\circ}=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

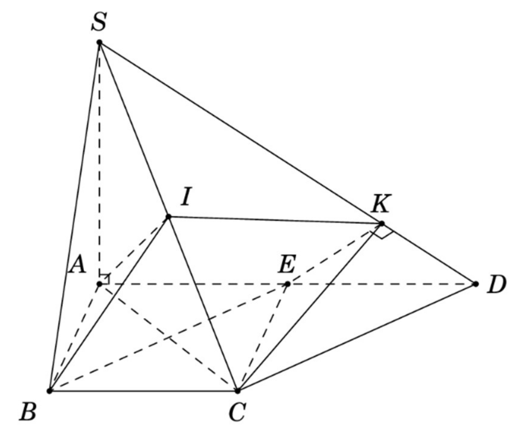
Vậy $S_{xq}=4.\pi.R^2=4.\pi\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}a\right)^2=\left(20-8\sqrt{3}\right)\pi.a^2$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tại A và B, $AB=BC=a$ và $AD=2a$, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=2a$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK\perp SD$ tại K. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $SABK$.

A. $6\pi a^3$. **B.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$. **D.** $3\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của SC.

Trong $\Delta SAC: SC=\sqrt{(2a)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{6}$.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại **B.**

Ta có $\begin{cases}CE\perp AD\\ CE\perp SA\end{cases}\Rightarrow CE\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CE\perp SD$.

Lại có $\begin{cases}SD\perp EK\\ SD\perp CE\end{cases}\Rightarrow SD\perp\left(CEK\right)\Rightarrow SD\perp CK\Rightarrow\Delta SKC$ vuông tại K.

Như vậy các tam giác SBC, SAC, SKC nhìn cạnh SC một góc 90° nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SBCK$ là trung điểm I của SC.

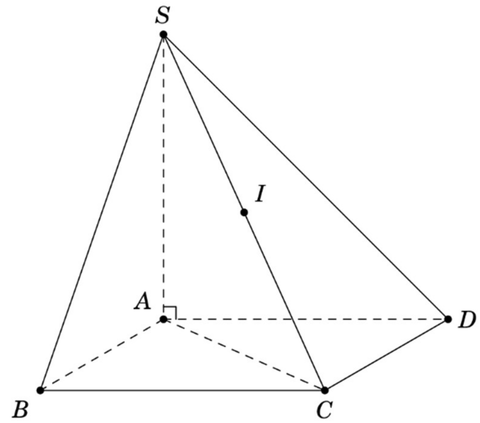
Do đó $R=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow V_{kc}=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\sqrt{6}\pi a^3$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA\perp\left(ABCD\right)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAD\right)$ và $\left(SBC\right)$ bằng 60° và thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $3\sqrt{3}a^3$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $27\pi a^2$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **C.** $27a^2$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left((SAD);(SBC)\right) = \widehat{BSA} = 60^\circ$.

Đặt $AB = x$, suy ra $SA = \dfrac{AB}{\tan\widehat{ASB}} = \dfrac{x}{\tan 60^\circ} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3}{3\sqrt{3}}$.

Lại có $V_{S.ABCD} = 3\sqrt{3}a^3$ nên $\dfrac{x^3}{3\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}a^3 \Leftrightarrow x^3 = 27a^3 \Leftrightarrow x = 3a$.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Suy ra $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$.

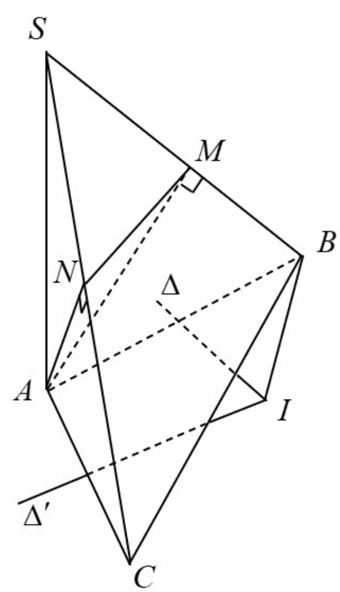
Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 27\pi a^2$.

Câu 9: Cho hình chóp có $AC = a, AB = a\sqrt{3}, BAC = 150^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Thế tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A \cdot BCNM$ bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Trong $mp(ABC)$, gọi Δ và Δ' lần lượt là trung trực của các đoạn thẳng AB và AC.

Gọi I là giao điểm của Δ và Δ'.

Vì $\begin{cases}\Delta \perp AB\\ \Delta \perp SA\end{cases}$ nên $\Delta \perp (AMB)$, mà tam giác AMB vuông tại M suy ra Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB

Có $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IM$

Chứng minh tương tự ta được Δ' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC.

Do đó $IA = IN = IC$

Từ và suy ra $IA = IB = IM = IN = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ với bán kính $R = IA$

Mặt khác trong tam giác ABC, I là giao điểm của hai đường trung trực nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = IA = \frac{BC}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}}}{2\sin\widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 150^\circ} = \sqrt{7}a$$

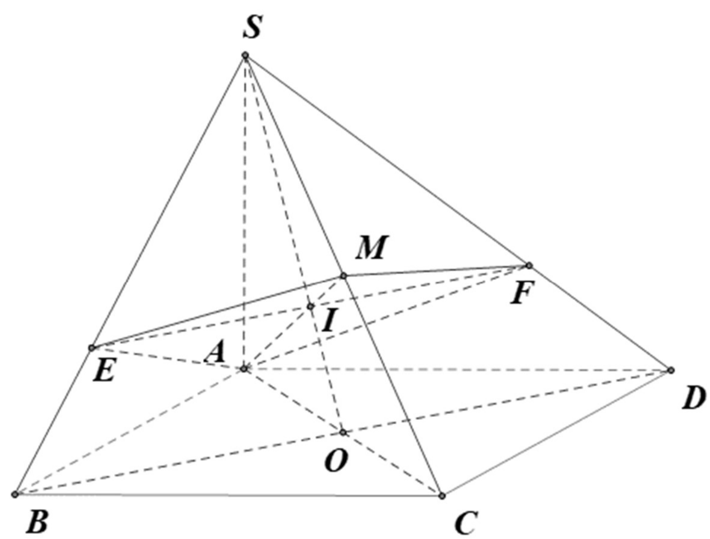
Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A\cdot BCNM$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Diện tích mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F là:

A. $4\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(\alpha)//BD\\ (SBD)\cap(\alpha) = FE\end{cases} \Rightarrow BD//EF$. Gọi I là giao điểm của AM và SO

Dễ thấy I là trong tâm tam giác SAC

$$\frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SF = \frac{2}{3}SD \Rightarrow SF.SD = \frac{2}{3}SD^2 = \frac{2}{3}\left(SA^2 + AD^2\right) = 2a^2 \Rightarrow SF.SD = SA^2$$

Xét tam giác vuông SAD và $SF.SD = SA^2 \Rightarrow AF$ là đường cao của tam giác $\Rightarrow AF \perp SF$, chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow AE \perp SB$

Tam giác $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác $SAC \Rightarrow AM \perp SM$

Ta có $\begin{cases} AF \perp SF \\ AE \perp SE \\ AM \perp SM \end{cases}$ nên mặt cầu đi qua năm điểm $S,\ A,\ E,\ M,\ F$ có tâm là trung điểm của SA và bán kính $R = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

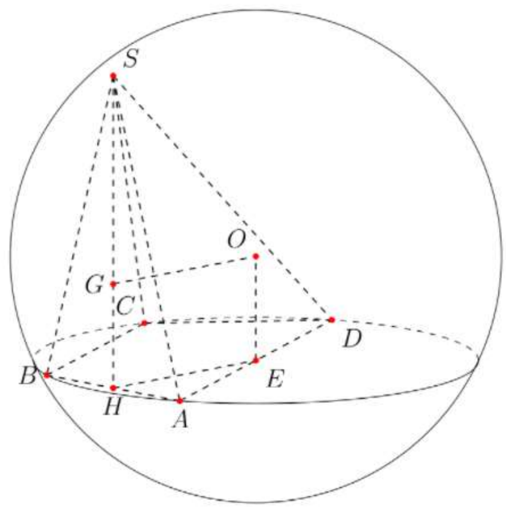
Vậy diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 2\pi a^2$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SAB là tam giác đều, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và có diện tích bằng $\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có $BC//AD$ và $AC = 3, AD = \sqrt{13}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S_{mc} = \dfrac{43\pi}{3}$. **B.** $S_{mc} = \dfrac{4\pi}{3}$. **C.** $S_{mc} = \dfrac{129\pi}{27}$. **D.** $S_{mc} = \dfrac{29\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $S_{SAB} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2$. Mà $\begin{cases} AB = 2 \\ AC = 3 \\ AD = \sqrt{13} \end{cases}$ suy ra tam giác ΔACD vuông tại C.

Gọi E, H lần lượt là trung điểm AD, AB. Vì $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Gọi G là trọng tâm ΔSAB, (α) là mặt phẳng đi qua S, H, E. Từ E kẻ đường thẳng d song song với SH, từ G kẻ d' song song với HE. Ta thấy $d, d' \subset (\alpha)$. $O = d \cap d'$ như vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SABCD$ là $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$. Ta có $\begin{cases} r_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ r_2 = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{129}}{6}$

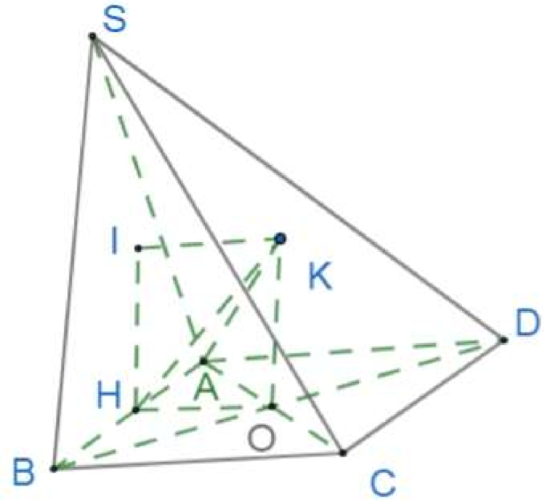
$\Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = \dfrac{43\pi}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = 2a$, $CB = a\sqrt{5}$ và $\widehat{ASB} = 60°$. Tính diện tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S=\dfrac{31\pi a^2}{2}$. **B.** $S=\dfrac{31\pi a^2}{3}$. **C.** $S=10\pi a^2$. **D.** $S=\dfrac{29\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi R_1, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác (SAB). Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Khi đó $R_1=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+5a^2}=\dfrac{3a}{2}$ và $R_2=IA=\dfrac{AB}{2\sin\widehat{ASB}}=\dfrac{2a}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Gọi I, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (SAB) và hình chữ nhật $ABCD$, H là trung điểm AB. Từ I, O vẽ các đường thẳng vuông góc với các mặt (SAB) và $(ABCD)$, các đường thẳng này cắt nhau tại K thì K là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Vì hình chóp đã cho có mặt bên (SAB) vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên bán kính mặt cầu hình chóp $S.ABCD$ nên ta có: $R^2=AK^2=HK^2-AH^2=HO^2+HI^2-AH^2=R_1^2+R_2^2-\dfrac{AB^2}{4}=\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{4a^2}{3}-a^2=\dfrac{31a^2}{12}$.

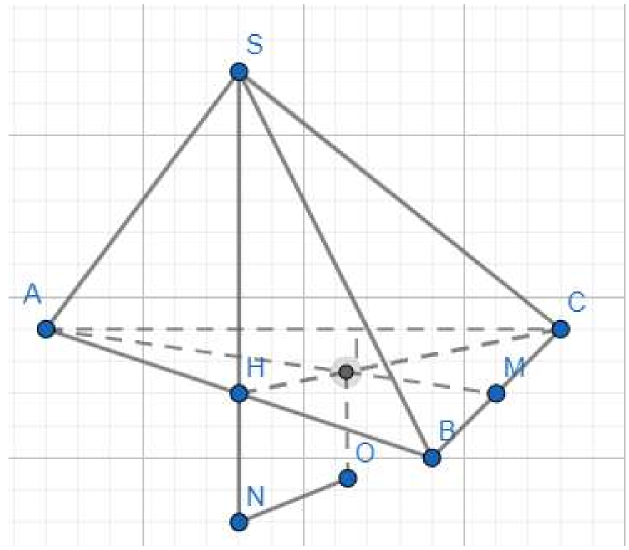
Diện tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là: $S=4\pi R^2=\dfrac{31\pi a^2}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho biết $\widehat{ASB}=120^\circ$.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi a^3}{54}$. **B.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **C.** $V=\dfrac{5\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{13\sqrt{78}\pi a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB, do $(SAB)\perp(ABC)$, tam giác ABC đều và tam giác SAB cân tại S nên $SH\perp(ABC)$ và $CH\perp(SAB)$.

Gọi I và N là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác SAB.

Dựng đường thẳng $Ix//SH$ và $Ny//CH$ thì $Ix\perp(ABC)$ và $Ny\perp(SAB)$ nên Ix là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và Jy là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Khi đó $Ix\cap Ny=O$ thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có $ON=IH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. $R_{(SAB)}=SJ=\dfrac{SA.SB.AB}{4.\frac{1}{2}.SA.SB.\sin 120^\circ}=\dfrac{AB}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $R=SO=\sqrt{\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{a^2}{12}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}a$ nên $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{15}}{6}a\right)^3=\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với đáy $ABCD$. Biết rằng $AB=2a$ và đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ có bán kính bằng x và đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB có bán kính là y sao cho thỏa mãn $x+2y=3a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{4a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Công thức bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy:

$R_{S.ABCD}=\sqrt{R^2_{ABCD}+R^2_{\Delta SAB}-\dfrac{AB^2}{4}}=\sqrt{x^2+y^2-\dfrac{(2a)^2}{4}}=\sqrt{x^2+y^2-a^2}$. (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$9a^2=(x+2y)^2\le(1^2+2^2)(x^2+y^2)=5(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^2+y^2\ge\dfrac{9a^2}{5}$. (2)

Thế (2) vào (1), ta được: $R_{S.ABCD}=\sqrt{x^2+y^2-a^2}\ge\sqrt{\dfrac{9a^2}{5}-a^2}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}\\ x+2y=3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3a}{5}\\ y=\dfrac{6a}{5}\end{cases}$.

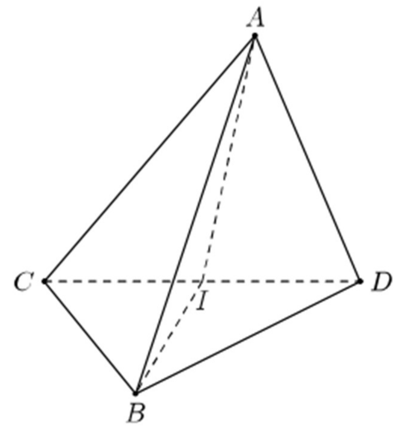
Suy ra giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $R_{S.ABCD} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a$, $AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{64\pi a^2}{27}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^2}{27}$. **C.** $\dfrac{16\pi a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{64\pi a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của CD. Do $BC = BD$ nên $BI \perp CD$. Theo bài ra $(ACD) \perp (BCD)$ nên $BI \perp (ACD)$.

Xét các tam giác vuông AIB và DIB có: BI chung và $AB = BD = 2a$ nên hai tam giác đó bằng nhau, suy ra $AI = ID$.Do đó tam giác ACD vuông tại A. Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thuộc đường thẳng BI.

Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

Áp dụng định lí Pitago ta có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$.

Diện tích ΔBCD là $\begin{cases} S_{BCD} = \sqrt{p(p-BC)(p-CD)(p-BD)} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{4} \\ p = \dfrac{BC+CD+DB}{2} \end{cases}$ (công thức Hê-rông)

Bán kính ngoại tiếp tam giác BCD là $R = \dfrac{BC.CD.DB}{4S_{BCD}} = \dfrac{4a}{3}$.

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $R = \dfrac{4a}{3}$

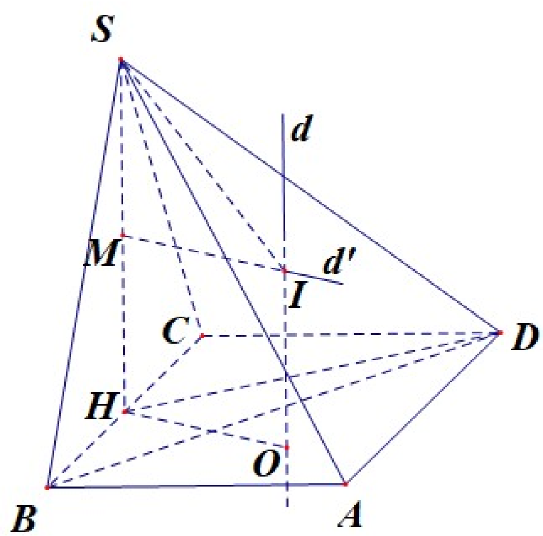
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{64\pi a^2}{9}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SBC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H là trung điểm cạnh BC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BHD$.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD và M là trung điểm đoạn thẳng SH.
Qua O dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng đáy, khi đó d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD.
Trong mặt phẳng (SH, d), dựng đường thẳng d' là trung trực của đoạn thẳng SH.
Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng d và d'.
Ta có $I \in d$ nên $IB = IH = ID$ (1). Đồng thời $I \in d'$ nên $IS = IH$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $IB = IH = ID = IS$, hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BHD$.

$HD = \sqrt{CH^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $BD = a\sqrt{2}$.

Ta có $S_{\Delta HBD} = \frac{HB.HD.BD}{4OH}$.

Do đó $OH = \frac{HB.HD.BD}{4S_{\Delta HBD}} = \frac{HB.HD.BD}{4.\frac{1}{2}HB.CD} = \frac{HD.BD}{2CD} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Xét tam giác SMI vuông tại M: $SM = \frac{1}{2}SH = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{4}$; $MI = OH = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

nên $SI = \sqrt{SM^2 + MI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$.

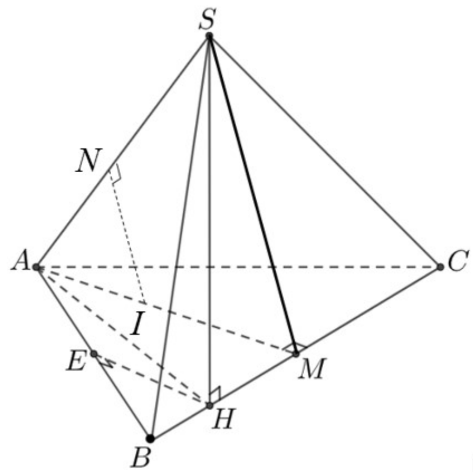
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BHD$ bằng $\frac{a\sqrt{11}}{4}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, mặt bên (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = SB = AB = AC = a$; $SC = a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. πa^2. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $10\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $BC = x$ ($x > 0$).

Kẻ $SH \perp BC$, $(H \in BC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Mà $SA = SB \Rightarrow HA = HB$.

Gọi E là trung điểm AB, M là trung điểm BC.

Ta có ΔBHE đồng dạng ΔBAM, suy ra $\dfrac{BH}{BA} = \dfrac{BE}{BM} \Rightarrow BH = \dfrac{BA.BE}{BM} = \dfrac{a^2}{x} \Rightarrow CH = x - \dfrac{a^2}{x}$.

Trong tam giác vuông SBH có: $SH^2 = SB^2 - HB^2 = a^2 - \dfrac{a^4}{x^2}$.

Trong tam giác vuông SHC có: $SC^2 = SH^2 + HC^2 \Rightarrow 2a^2 = a^2 - \dfrac{a^4}{x^2} + \left(x - \dfrac{a^2}{x}\right)^2 \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

Do $SB = a; SC = a\sqrt{2}; BC = a\sqrt{3} \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại S.

Mặt khác $\left.\begin{matrix} AM \perp BC \\ AM \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBC)$, suy ra AM là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

Kẻ mặt phẳng trung trực (P) của SA cắt AM tại I và SA tại N. Khi đó: $IA = IB = IC = IS = R$

Xét hai tam giác đồng dạng ΔANI và ΔAMS ta có: $\dfrac{AI}{AS} = \dfrac{AN}{AM} \Rightarrow AI = \dfrac{AN.AS}{AM} = \dfrac{AS^2}{2.AM}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là $R = \dfrac{AS^2}{2.AM} = \dfrac{a^2}{2.\dfrac{a}{2}} = a$

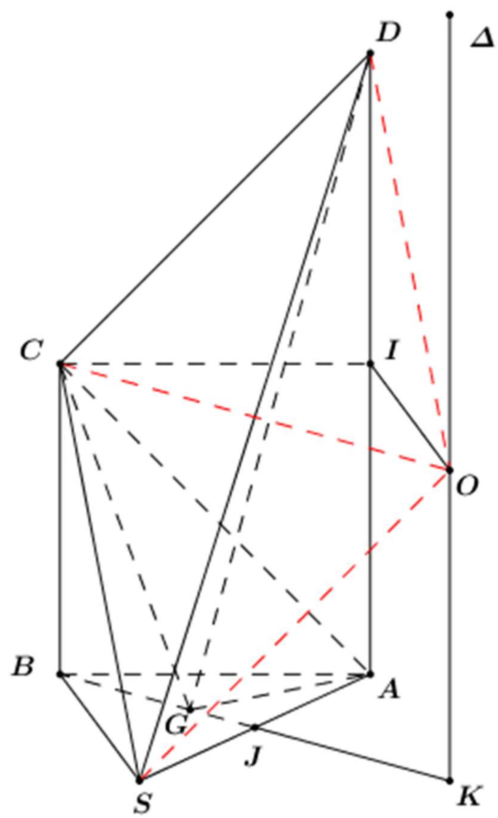
Vậy diện tích mặt cầu là: $S_{mc} = 4\pi.R^2 = 4\pi a^2$.

Câu 18: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AD = 2AB = 2BC = 2a$. Biết rằng tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Cho G là trọng tâm tam giác SAB. Từ đó tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $D.SGC$.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Nhận xét: Ta thấy không có mặt phẳng nào của tứ diện $D.SGC$ nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên không thể dùng được công thức tính nhanh dựa trên các trường hợp đặc biệt.

Hướng làm: xét khối chóp $D.SGA$:

Lấy J là trung điểm SA, I là trung điểm AD. Ta nhận thấy $S.DGC$ và $S.GAD$ chung mặt phẳng (SDG). (1)

$R_{GAS} = \dfrac{GA^2}{2GJ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.GAD$

$R_{SGAD} = \sqrt{(R_{GAS})^2 + \dfrac{AD^2}{4}} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \dfrac{AD^2}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow OG = OD = OA = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow OK = \sqrt{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

Suy ra lăng trụ $COI.BKA$ tạo thành một lăng trụ đúng

$\Rightarrow AK = OI = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; OC = BK = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow C \in$ mặt cầu ngoại tiếp $S.GAD$ (2)

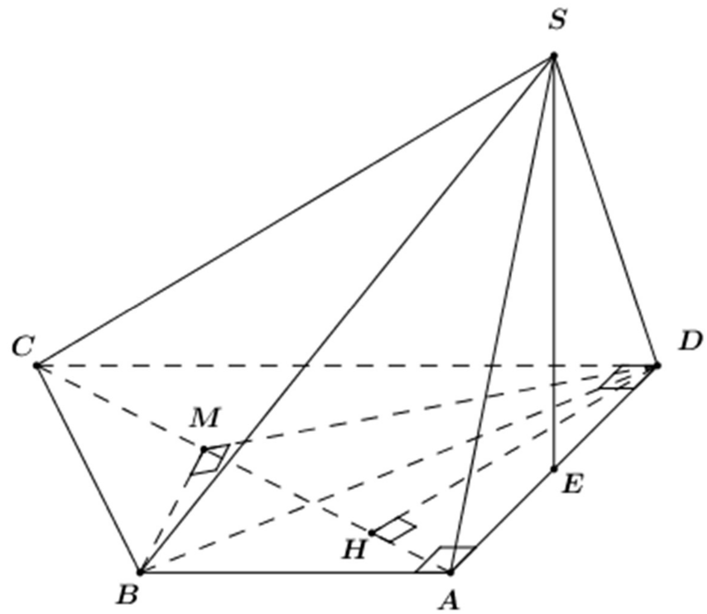
Từ (1) và (2) suy ra $R_{(SDGC)} = R_{SGAD} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 19: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $AB = AD = \dfrac{AC}{2} = 1$. Gọi M là trung điểm CH với $DH \perp AC$. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $S.BDM$. Biết rằng ΔSAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

A. $\sqrt{\frac{7}{12}}$.　　**B.** $\sqrt{\frac{17}{12}}$.　　**C.** $\sqrt{\frac{13}{12}}$.　　**D.** $\sqrt{\frac{11}{12}}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $BD=\sqrt{2}; HC=\frac{CD^2}{AC}=\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow HM=MC=\frac{2}{\sqrt{5}}; DH=\frac{DC.DA}{AC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow DM=\sqrt{DH^2+HM^2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; BM=\frac{\sqrt{10}}{5};$

Nhận thấy: $BM^2+MD^2=BD^2 \Rightarrow \Delta BMD$ vuông tại M.

Mặt khác:

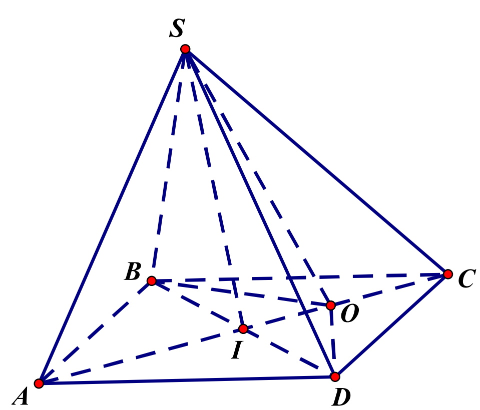
$\widehat{BMD}=\widehat{BAD}=90^\circ \Rightarrow R_{SBDM}=R_{SBDA}=R_{B.SAD}=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+R_{SAD}{}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{AD}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{12}}$

Câu 20: Cho khối chóp $S.ABCD$ có cạnh SD thay đổi và các cạnh còn lại đều bằng a. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất, hãy tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.　　**B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.　　**C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.　　**D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $SD=x$.

Do $AB=BC=CD=DA=a$ nên $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC\perp BD$.

Gọi $I = AC \cap BD \Rightarrow I$ là trung điểm của AC và BD.
Ta có $\Delta BAC = \Delta SAC$ nên $SI = BI$
$\Rightarrow SI = BI = ID \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S.
Do $SA = SC \Rightarrow SI \perp AC$.
Mặt khác $BD \perp AC$ nên $AC \perp (SBD)$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = V_{A.SBD} + V_{C.SBD} = \frac{1}{3}AI.S_{SBD} + \frac{1}{3}CI.S_{SBD} = \frac{1}{3}AC.S_{SBD}$.

Ta có $BI = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{SD^2 + SB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + a^2}$.

$\Rightarrow AC = 2AI = 2\sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{3a^2 - x^2}$.

$S_{SBD} = \frac{1}{2}SB.SD = \frac{1}{2}ax$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{6}ax.\sqrt{3a^2 - x^2} \le \frac{a}{6}.\frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{a^3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABCD}$ có giá trị lớn nhất khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ thì $CI = AI = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Do ΔSBD vuông tại S nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD.
Mà $CI \perp (SBD)$ nên CI là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD.
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta CBD \Rightarrow OB = OD = OC = R$.

$\Rightarrow R = \frac{CB.CD.BD}{4S_{BCD}} = \frac{CB.CD.BD}{4.\frac{1}{2}CI.BD} = \frac{a.a}{2.\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Mà ΔCBD cân tại C nên $O \in CI \Rightarrow OS = OB = OD$
$\Rightarrow OS = OB = OD = OC \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.BCD$ là $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

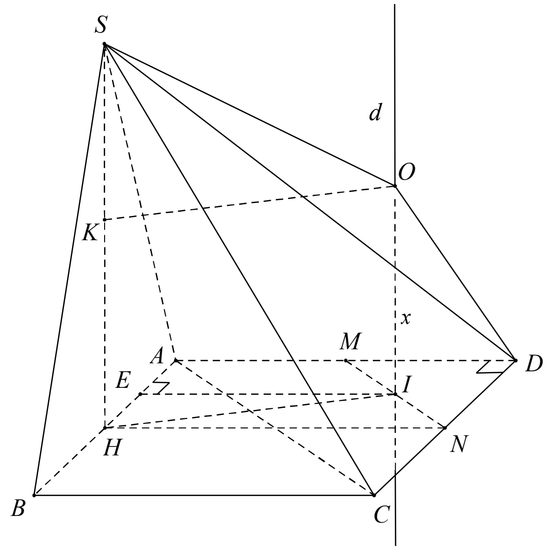
Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$ tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC. Gọi $S = \frac{\pi a^2 m}{n}, (m;n) = 1;\ m, n \in \mathbb{N}$ là diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$. Khi đó, giá trị biểu thức $P = m + 2n$ là

A. 40. **B.** 46. **C.** 50. **D.** 72.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của MN. Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.
d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.
E là hình chiếu của I lên AB.
O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.DMN$. K là hình chiếu của O lên SH.



Đặt $OI = x$.

Ta có $DI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{5}}{4} \Rightarrow OD^2 = ID^2 + OI^2 = \frac{5a^2}{16} + x^2$

$SK = SH - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x; KO = HI;\ EI = \frac{AM + HN}{2} = \frac{3a}{2}.$

$HI^2 = EI^2 + HE^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{37a^2}{16}$

Suy ra $SO^2 = SK^2 + KO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \frac{37a^2}{16} = \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2$.

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên:

$SO = DO \Leftrightarrow SO^2 = DO^2 \Leftrightarrow \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2 = \frac{5a^2}{16} + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{11a\sqrt{3}}{12}$.

$\Rightarrow$ bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$ là $R = OD = \frac{a\sqrt{102}}{6}$.

Vậy diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$ là

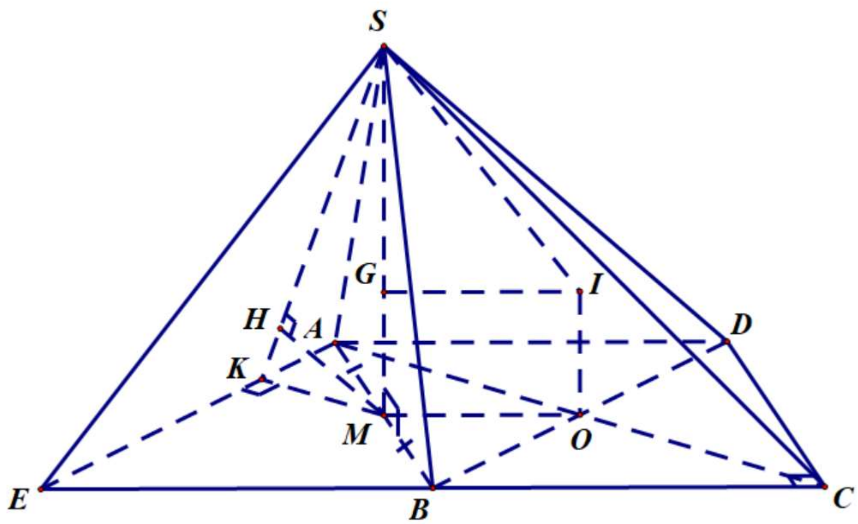
$S = 4\pi R^2 = \frac{34\pi a^2}{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 34 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow P = m + 2n = 40$.

Câu 22: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích $336\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Gọi $d = \frac{m\sqrt{21}}{n}, (m;n) = 1;\ m,n \in \mathbb{N}$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD. Khi đó, giá trị biểu thức $P = 2m - 3n$ là

A. 12. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của AB. Do tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $\Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và $OM \perp (SAB)$.

d là đường thẳng qua O và vuông góc với $(ABCD) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, Δ là đường thẳng qua G và vuông góc với $(SAB) \Rightarrow \Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Gọi $I = d \cap \Delta \Rightarrow$ mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm là I và bán kính $R = SI$.

Ta có, diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $336\pi\left(\text{cm}^2\right)$

$\Rightarrow 4\pi R^2 = 336\pi\left(\text{cm}^2\right) \Leftrightarrow R = 2\sqrt{21}(\text{cm})$.

Đặt $AB = x\ (\text{cm}) \Rightarrow GI = \dfrac{x}{2}; SG = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SGI vuông tại G nên $SI^2 = SG^2 + GI^2 \Rightarrow AB = x = 12\ (\text{cm})$.

Dựng hình bình hành $ADBE$. Ta có

$d(SA, BD) = d(BD,(SAE)) = d(B,(SAE)) = 2d(M,(SAE))$.

Trong $(ABCD)$ kẻ $MK \perp AE$, $K \in AE$ kẻ $MH \perp SK, H \in SK \Rightarrow MH = d(M,(SAE))$.

$MH = \dfrac{SM.MK}{\sqrt{SM^2 + MK^2}}$.

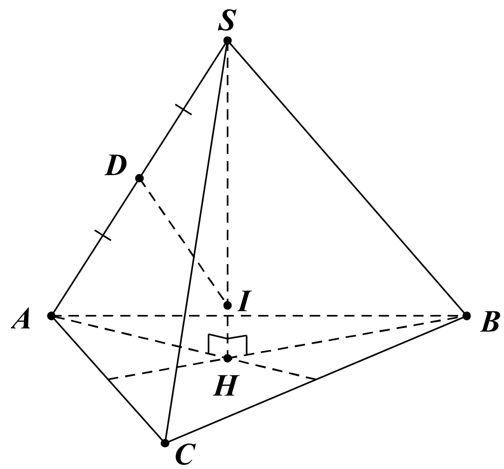
Ta có $SM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $MK = \dfrac{x\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2} \Rightarrow d(M,(SAE)) = MH = \dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

Vậy khoảng cách giữa SA và BD là $\dfrac{12\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ n = 7 \end{cases} \Rightarrow P = 2m - 3n = 3$.

Câu 23: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp. Biết bán kính mặt cầu ngoại tiếp này bằng $\dfrac{5}{6}$ lần khoảng cách từ S đến (ABC). Tính tỉ số giữa cạnh bên và cạnh đáy của hình chóp.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC.

Vì $S.ABC$ là chóp tam giác đều nên $SH \perp (ABC)$ và $I \in SH$.

Cho ABC là tam giác đều với cạnh bằng a. Ta có: $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi D là trung điểm của SA. Ta có $ID \perp SA$ và $SI = \dfrac{SA.SD}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH}$.

Theo đề bài $SI = \dfrac{5}{6}SH \Leftrightarrow \dfrac{5}{6}SH = \dfrac{SA^2}{2SH} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}SH^2 = SA^2 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}\left(SA^2 - AH^2\right) = SA^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}SA^2 = \dfrac{5}{3}AH^2 \Leftrightarrow SA = \sqrt{\dfrac{5}{2}}.AH = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

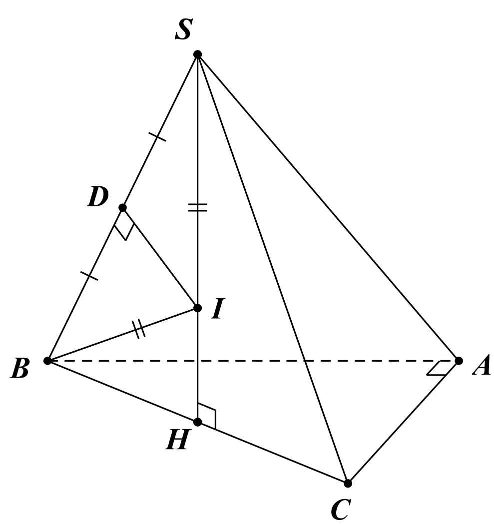
Suy ra $\dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{30}}{6}}{a} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau và đáy là tam giác ABC vuông tại A. Biết $BC = 2a$, mặt cầu tâm I ngoại tiếp hình chóp. Tính chiều cao của hình chóp khi diện tích mặt cầu nhỏ nhất.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{4}{3}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó $HA = HB = HC$ và $SA = SB = SC$.

Suy ra $SH \perp (ABC)$, $I \in SH$ và bán kính mặt cậu ngoại tiếp hình chóp là $R = SI$.

Diện tích mặt cầu $S_{mc} = 4\pi R^2$. Như vậy S_{mc} nhỏ nhất khi R nhỏ nhất.

Gọi D là trung điểm của SB. Ta có $ID \perp SB$ và $R = SI = \dfrac{SB.SD}{SH} = \dfrac{SB^2}{2SH}$.

$$R = \frac{SH^2 + HB^2}{2SH} = \frac{1}{2}\left(SH + \frac{a^2}{SH}\right) \geq a.$$

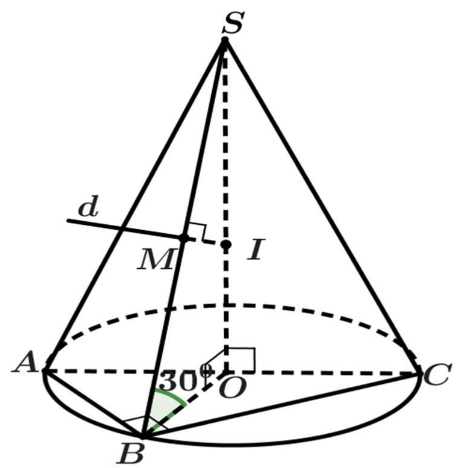
Suy ra $R_{\min} = a$ khi $SH = \dfrac{a^2}{SH} \Leftrightarrow SH = a$.

Câu 25: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân, $AB = BC = a\sqrt{2}$ và $SA = SB = SC$. Biết góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 30°. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a.$ **B.** $R = 4\sqrt{3}\,a.$ **C.** $R = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a.$ **D.** $R = 2\sqrt{3}\,a.$

Lời giải

Chọn A



Gọi O là trung điểm của AC.

Ta có $\begin{cases} OA = OB = OC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABC)$. Từ đó ta suy ra $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,OB}\right) = \widehat{SBO} = 30^0$.

Gọi M là trung điểm của SB, trong $mp(SBO)$ dựng đường trung trực d của SB và cắt trục SO tại điểm $I \Rightarrow IS = IB = IA = IC$.

Vậy mặt cầu (S) tâm I, bán kính $R = IS$ ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có $AC = 2a \Rightarrow OB = a$ và $SO = OB \times \tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SB = \dfrac{SO}{\sin 30^0} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

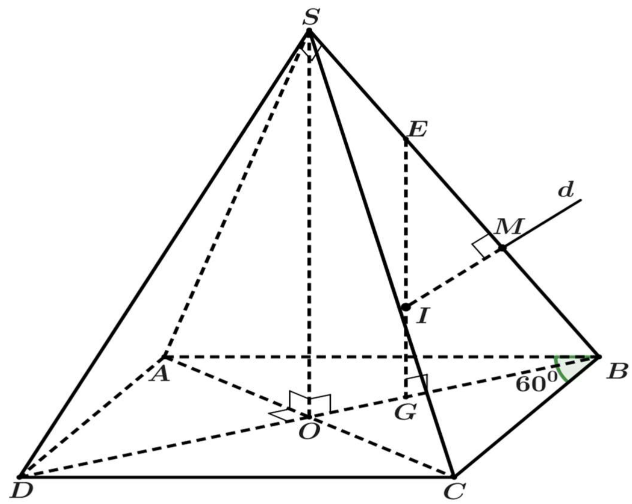
Mặt khác: $\Delta SMI \backsim \Delta SOB \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SB} \Rightarrow SI = \dfrac{SM.SB}{SO} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a.$

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Biết $BD = a\sqrt{3}$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $SB \perp SD$. Gọi E là điểm trên cạnh SB sao cho $EB = 2ES$. Tính diện tích xung quanh S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $E.ABC$ theo a.

A. $S = \dfrac{1}{3}\pi a^2.$ **B.** $S = \dfrac{4}{3}\pi a^2.$ **C.** $S = 3\pi a^2$. **D.** $S = \dfrac{3}{4}\pi a^2.$

Lời giải

Chọn B



Ta có: ΔSBD vuông cân tại $S \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $EG // SO \Rightarrow EG \perp (ABCD) \Rightarrow EG = \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì ΔABC đều và G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow GA = GB = GC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy mặt cầu (S) tâm G, bán kính $R = EG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ ngoại tiếp hình chóp $E.ABC$.

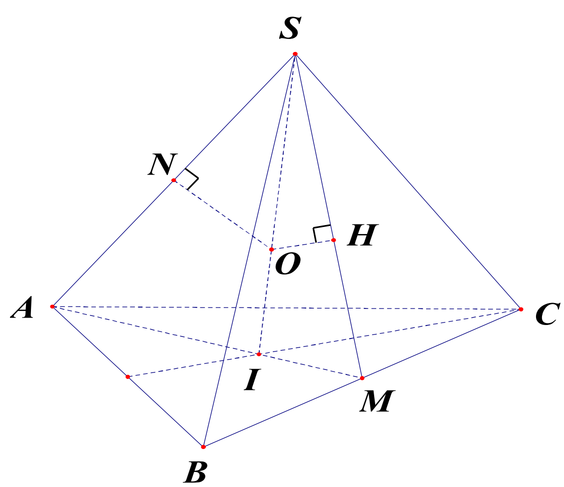
Ta có: $S_{xq} = 4\pi R^2 = \dfrac{4}{3}\pi a^2$.

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABC$, cạnh bên $SA = 5$, O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Biết diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng $\dfrac{625\pi}{16}$, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\dfrac{75\sqrt{73}}{584}$. **B.** $\dfrac{75\sqrt{73}}{580}$. **C.** $\dfrac{75\sqrt{73}}{586}$. **D.** $\dfrac{75\sqrt{71}}{580}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC, I là trọng tâm tam giác ABC, do hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SI \perp (ABC)$. Gọi N là trung điểm của SA, kẻ $NO \perp SI$ ($O \in SI$) ta có $OS = OA = OB = OC$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Gọi H là hình chiếu của O lên SM.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$ mà $OH \subset (SAM)$ suy ra $OH \perp BC$ mặt khác $OH \perp SM$ nên $OH \perp (SBC)$ hay khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng OH.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi.SO^2$ theo đầu bài diện tích mặt cầu bằng $\frac{625\pi}{16}$ suy ra $4\pi SO^2 = \frac{625\pi}{16} \Leftrightarrow SO = \frac{25}{8}$.

Ta có $\Delta SNO \backsim \Delta SIA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SN}{SI}$ suy ra $SI = \frac{SA.SN}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = 4$.

Tam giác SIA vuông tại I suy ra $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = 3$, I trọng tâm tam giác ABC nên ta có $IM = \frac{1}{2}AI = \frac{3}{2}$.

Tam giác SIM vuông tại I nên $SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

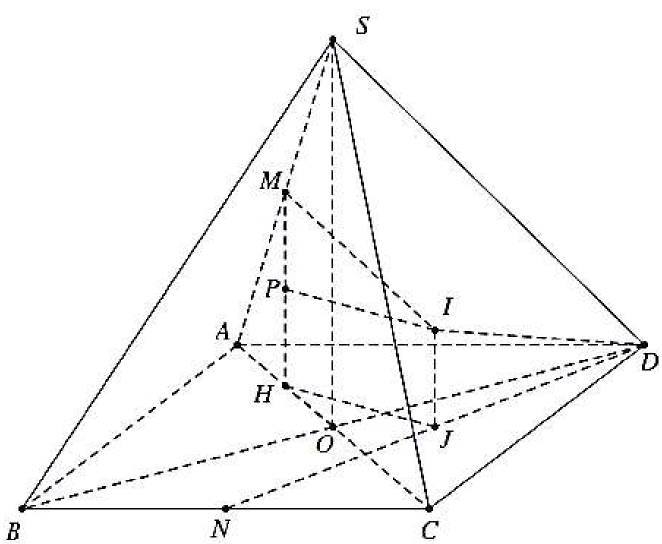
Ta có $\Delta SHO \backsim \Delta SIM \Rightarrow \frac{OH}{MI} = \frac{SO}{SM}$ hay $OH = \frac{SO.IM}{SM} = \frac{\frac{25}{8}.\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{73}}{2}} = \frac{75\sqrt{73}}{584}$.

Câu 28: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AB = 4$. Gọi O là tâm của đáy và $SO = 4$; hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối đa diện $CDMN$.

A. $8\pi\sqrt{2}$. **B.** $8\pi\sqrt{6}$. **C.** $8\pi\sqrt{3}$. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn B



Gọi J là trung điểm DN. Suy ra J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DCN và $DJ = \frac{DN}{2} = \sqrt{5}$.

Gọi H là trung điểm của $AO \Rightarrow MH // SO$, $MH = \frac{SO}{2} = 2$.

$\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow HJ^2 = \frac{AB^2}{16} + \frac{AD^2}{4} = 5 \Rightarrow HJ = \sqrt{5}$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CDMN \Rightarrow IJ // SO$, $IC = ID = IN = IM$.

Gọi P là hình chiếu của I lên MH.

Giả sử P thuộc đoạn MH. Ta có:

$IM^2 = ID^2 \Leftrightarrow IP^2 + PM^2 = IJ^2 + JD^2 \Leftrightarrow JH^2 + \left(MH - IJ\right)^2 = IJ^2 + JD^2$.

$\Rightarrow IJ = 1 \Rightarrow HP = 1 < MH$ (thỏa mãn). Khi đó: $R = ID = \sqrt{6}$.

(Trường hợp P không thuộc đoạn MH, làm tương tự như trên ta thấy không tìm được điểm P thoả mãn).

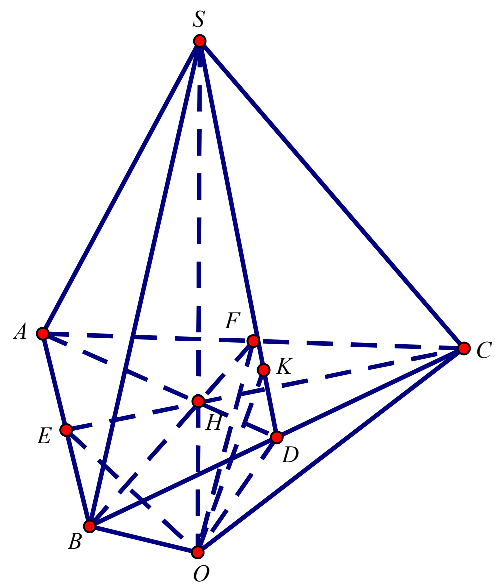
Vậy thể tích khối cầu cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi 6\sqrt{6} = 8\pi\sqrt{6}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là ΔABC đều, đường cao SH với H nằm trong ΔABC và $BC = 2SH$, $\left(SBC\right)$ tạo với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ một góc 60°. Biết rằng có một điểm O nằm trên đường cao SH sao cho $d\left(O;AB\right) = d\left(O;AC\right) = d\left(O;\left(SBC\right)\right) = 1$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\dfrac{256\pi}{81}$. **B.** $\dfrac{125\pi}{162}$. **C.** $\dfrac{500\pi}{81}$. **D.** $\dfrac{343\pi}{48}$

Lời giải

Chọn D



Giả sử E, F là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB, AC. Khi đó ta có $HE \perp AB, HF \perp AC$. Do $OE = OF = 1$ nên $HE = HF$. Do đó AH là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Khi đó $AH \cap BC = D$ là trung điểm của BC.

Do $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp \left(SAD\right)$. Kẻ $OK \perp SD$ thì $OK \perp \left(SBC\right)$. Do đó $OK = 1$ và $\widehat{SDA} = 60^\circ$.

Đặt $AB = BC = CA = 2a\left(a > 0\right)$ thì $SH = a, HD = a.\cot 60^\circ = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Do đó $AD = a\sqrt{3} = 3HD$ nên H là tâm tam giác đều $ABC \Rightarrow S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và E, F là trung điểm AB, AC.

Mặt khác trong tam giác SOK có : $SO = \dfrac{OK}{\sin 30^\circ} = 2$. Do ΔDEF đều có $OH \perp \left(DFE\right)$ nên $OE = OF = OD = 1 \Rightarrow K \equiv D$.

Khi đó ΔDSO vuông tại D và có $DH \perp SO$. Từ đó $DH^2 = HS.HO \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3} = a\left(2 - a\right)$

$. \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}. \Rightarrow AB = 3, SH = \dfrac{3}{2}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ thì $R=\frac{SA^2}{2SH}=\frac{7}{4}$.

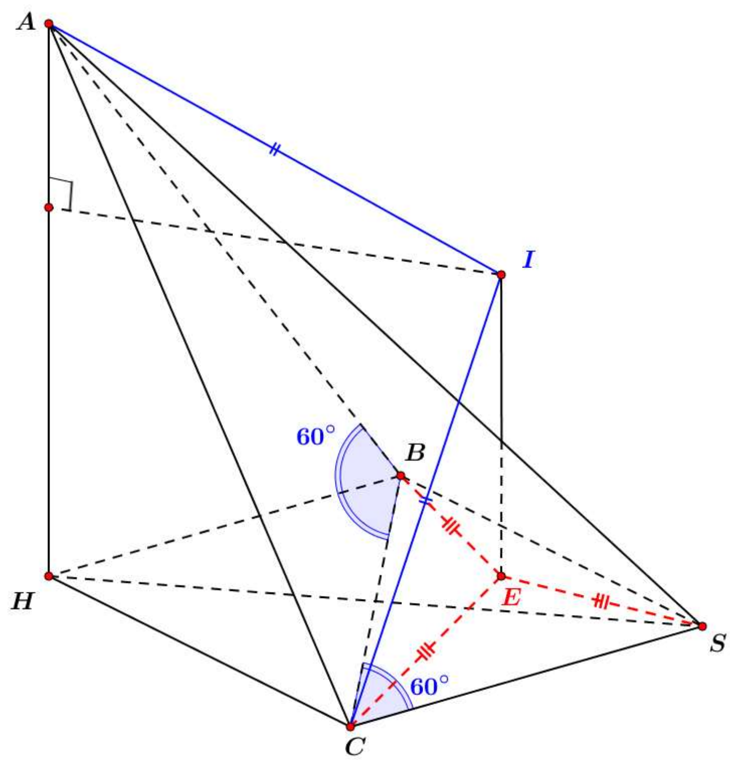
$V_{m/c}=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{7}{4}\right)^3=\frac{343}{48}\pi$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=2a, BC=a, \widehat{SBA}=90^\circ, \widehat{ABC}=\widehat{SCB}=60^\circ$. Biết rằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ với điểm C và hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (SBC) cùng phía với đường thẳng SB. Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là

A. $\frac{11\pi a^2}{2}$ **B.** $\frac{11\pi a^2}{4}$ **C.** $\frac{43\pi a^2}{12}$ **D.** $\frac{7\pi a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A



Đầu tiên ta đặt $SC=x$ và chuẩn hóa cho $a=1\Rightarrow AB=2, BC=1$

Dùng định lí Cosin, suy ra độ dài $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$. Suy ra tam giác ΔABC vuông tại C vì $AB^2=AC^2+BC^2$

Ta lại có: $SB=\sqrt{SC^2+CB^2-2.SC.CB.\cos\widehat{SCB}}=\sqrt{x^2-x+1}$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBC). Suy ra $AH\perp BC$ và $AH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Lại có: $BC\perp AC\Rightarrow BC\perp(AHC)\Rightarrow BC\perp CH$

Từ đó ta suy ra $\widehat{SCH}=150^\circ\Rightarrow SH=\sqrt{SC^2+CH^2-2SC.CH.\cos 150^\circ}=\sqrt{x^2+x+\frac{1}{3}}$

Do tam giác ΔSHA vuông tại H và ΔSAB vuông tại B, nên suy ra ta có:

$$SA^2=SH^2+AH^2=AB^2+SB^2\Leftrightarrow\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+x^2+x+\frac{1}{3}=2^2+x^2-x+1\Leftrightarrow x=1$$

Ta nhận thấy $SC = BC = 1$ và $\widehat{SCB} = 60^\circ$ nên suy ra ΔSCB đều $\Rightarrow R_{(SCB)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$HE = \sqrt{HC^2 + CE^2 - 2HC.CE.\cos 120^\circ} = 1$.

Kẻ $IK \perp AH$ và đặt $HK = EI = y$. Ta có: $IA^2 = IC^2 \Leftrightarrow IK^2 + KA^2 = IE^2 + EC^2$

$\Leftrightarrow HE^2 + (AH - y)^2 = y^2 + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 1 + \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3} - y\right)^2 = y^2 + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y = HK = \dfrac{5\sqrt{6}}{12}$

Suy ra $R_{S.ABC} = IA = \sqrt{EH^2 + (AH - HK)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{cau} = 4\pi (R_{S.ABC})^2 = \dfrac{11\pi}{2}$.Vậy

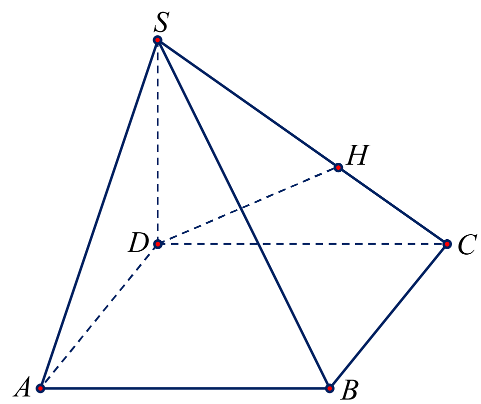
$S_{cau} = \dfrac{11\pi a^2}{2}$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B. Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $12\pi a^2$. **B.** $16\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ hay A, C nhìn SB dưới một góc vuông.

Suy ra S, A, B, C cùng nội tiếp mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD$ và $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD$.

Tam giác ABC vuông cân tại B suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Trong ΔSCH, kẻ $DH \perp SC$ $(H \in SC)$.

Ta có $BC \perp SD$ và $BC \perp SC$ nên $BC \perp DH$. Suy ra $DH \perp (SBC)$ hay $d(D,(SBC)) = DH$.

Ta có $AD // (SBC)$ suy ra $d(A,(SBC)) = d(D,(SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DC^2} + \dfrac{1}{SD^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6}$; $SC = \sqrt{SD^2 + CD^2} = \sqrt{6a^2 + 3a^2} = 3a$;

$SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2a\sqrt{3}$.

Khi đó bán kính mặt cầu ngoài tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $R = \dfrac{SB}{2} = a\sqrt{3}$.

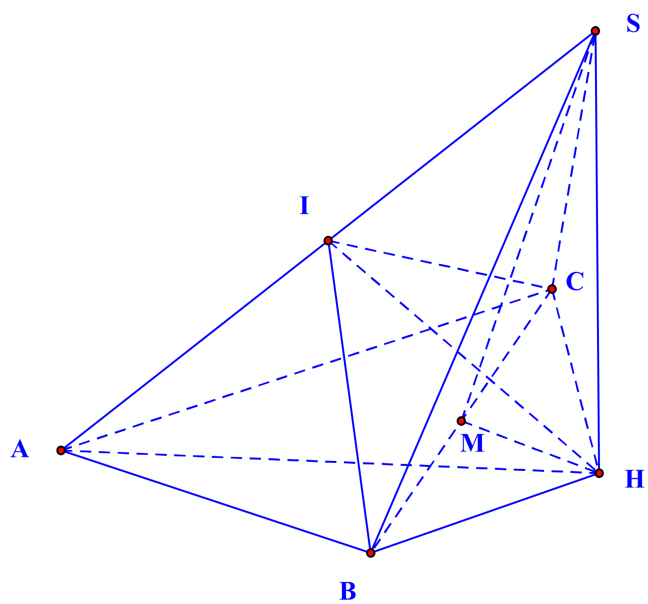
Vậy diện tích mặt cầu bằng $S = 4\pi R^2 = 12\pi a^2$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt bên (SAB), (SCA) lần lượt là các tam giác vuông tại B, C. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $R = a\sqrt{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = \frac{3a}{2}$. **D.** $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) thì SH là đường cao của hình chóp.

Mặt khác thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{2}{3}a^3$ nên ta có $\frac{1}{3}\frac{1}{2}AB.SH = \frac{2}{3}a^3 \Leftrightarrow SH = 2a$.

Dễ thấy năm điểm A, B, H, C, S cùng thuộc mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Mặt khác A, B, H, C cùng thuộc một mặt phẳng nên tứ giác $ABHC$ nội tiếp đường tròn.

Mà $\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0 \Rightarrow HM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SM = \sqrt{HM^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$SM^2 = \frac{SB^2 + SC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow \frac{SB^2 + SC^2}{2} = SM^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{13a^2}{2}$.(1)

$R^2 = CI^2 = \frac{CA^2 + SC^2}{2} - \frac{SA^2}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{4a^2 + SC^2}{2} - R^2$. (2)

$R^2 = BI^2 = \frac{BA^2 + SB^2}{2} - \frac{SA^2}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{a^2 + SB^2}{2} - R^2$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $4R^2 = \frac{a^2 + SB^2}{2} + \frac{4a^2 + SC^2}{2} = \frac{5a^2}{2} + \frac{SB^2 + SC^2}{2} = \frac{5a^2}{2} + \frac{13a^2}{2} = 9a^2$.

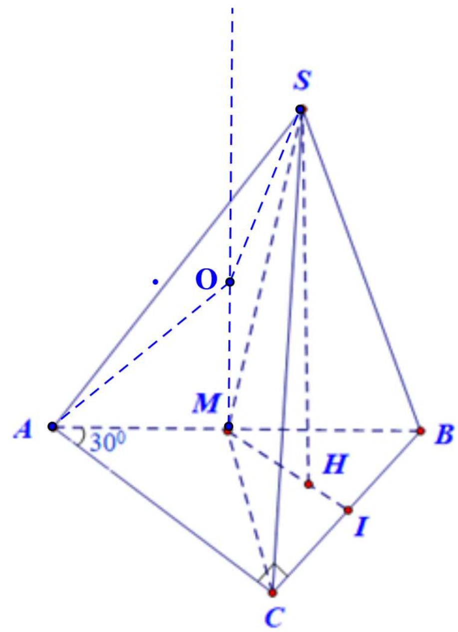
$\Rightarrow R = \frac{3a}{2}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 30^0$, $SC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M là trung điểm AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của ΔBCM. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ có bán kính là

A. $R=\dfrac{a\sqrt{35}}{7}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{37}}{6}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{39}}{6}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{43}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $\widehat{BAC}=30^0$ nên ΔBCM là tam giác đều cạnh bằng a

$\Rightarrow CH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SC^2-CH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a$.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (ABC) suy ra tâm O của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ thuộc d và thỏa mãn $OA^2=OS^2$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OS}^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)^2=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HS}\right)^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}^2+2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{HS}^2+2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MH}+2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{HS}+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HS}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{HS}=-\dfrac{1}{3}a^2\Leftrightarrow OM=\dfrac{a}{6}\Leftrightarrow OA=\sqrt{OM^2+AM^2}\Leftrightarrow OA=\sqrt{\left(\dfrac{a}{6}\right)^2+a^2}\Leftrightarrow OA=\dfrac{a\sqrt{37}}{6}$

.

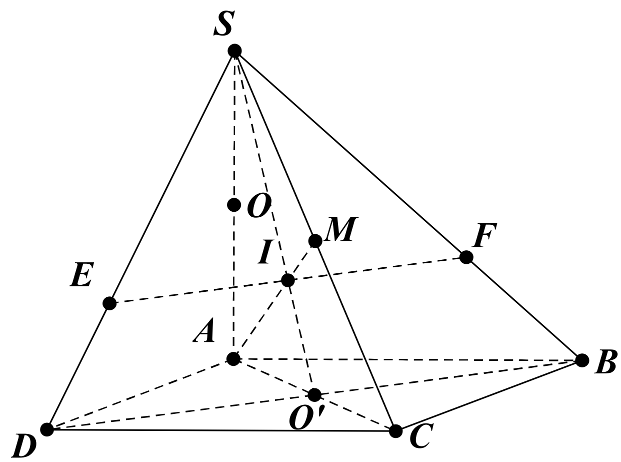
Vậy $R=\dfrac{a\sqrt{37}}{6}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O' cạnh bằng a. Đường thẳng $SA=a\sqrt{2}$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) qua AM song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.AEMF$.

A. $2\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $8\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,BD\\(SBD)\cap(\alpha)=FE\end{cases}\Rightarrow EF\,//\,BD.$

Tam giác SAC ta có $SA=AC=a\sqrt{2}$ và M là trung điểm SC nên $AM\perp SC\Rightarrow\Delta SMA$ vuông tại M.

Gọi O là trung điểm của SA, suy ra $OM=OA=OS\ (1)$.

Gọi I là giao điểm của AM và SO'.

Suy ra I là trọng tâm tam giác SAC.

$\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO'}=\frac{2}{3}\Rightarrow SF=\frac{2}{3}SD\Rightarrow SF.SD=\frac{2}{3}SD^2=\frac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2\Rightarrow SF.\,SD=SA^2.$

Tam giác SAD vuông tại A có $SF.\,SD=SA^2$ nên AF là đường cao của tam giác

$\Rightarrow AF\perp SD\Rightarrow\Delta SFA$ vuông tại $F\Rightarrow OF=OS=OA\ (2)$.

Tượng tự có

$\frac{SE}{SB}=\frac{SI}{SO'}=\frac{2}{3}\Rightarrow SE=\frac{2}{3}SB\Rightarrow SE.SD=\frac{2}{3}SB^2=\frac{2}{3}\left(SA^2+AB^2\right)=2a^2\Rightarrow SE.\,SB=SA^2.$

Tam giác SAB vuông tại A có $SE.\,SB=SA^2$ nên AE là đường cao của tam giác

$\Rightarrow AE\perp SB\Rightarrow\Delta SEA$ vuông tại $E\Rightarrow OE=OA=OS\ (3)$.

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $OE=OA=OS=OF=OM$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.AEMF$ có tâm O, bán kính $R=\frac{SA}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

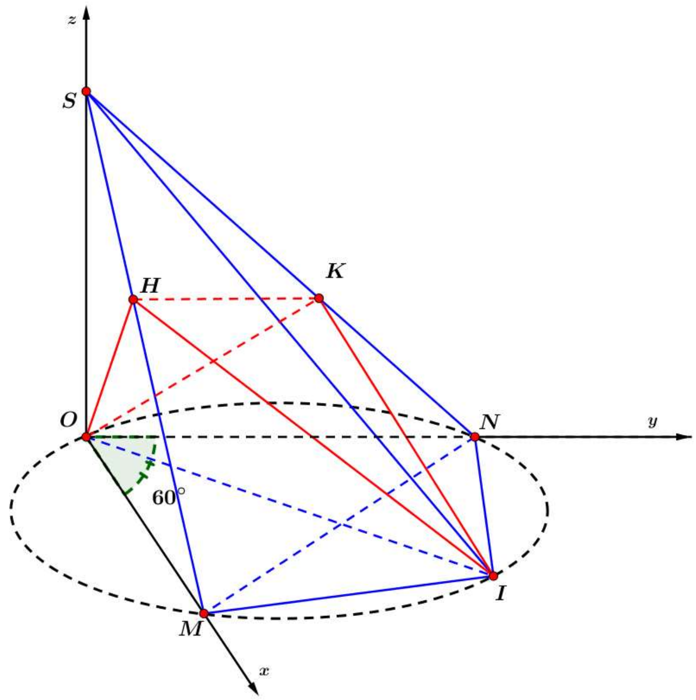
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.AEMF$ là $S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\pi a^2$.

Câu 35: Trong mặt phẳng (α) cho hai tia Ox,Oy, góc $\widehat{xOy}=60^\circ$. Trên tia Oz vuông góc với mặt phẳng (α) tại O, lấy điểm S sao cho $SO=a$. Gọi M,N là các điểm lần lượt di động trên hai tia Ox,Oy sao cho $OM+ON=a$ ($a>0$ và M,N khác O). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của O trên hai cạnh SM,SN. Khi M,N di động trên hai tia Ox,Oy mặt cầu ngoại tiếp đa diện $MNHOK$ có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$. **B.** πa^2. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $\frac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta gọi: OI là đường kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác OMN

Khi đó, ta có: $IM\perp OM$ tại M và $IN\perp ON$ tại N (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{OMI}=\widehat{ONI}=90^\circ$ (1)

Mà $\begin{cases} SO\perp MI \\ SO\perp NI \end{cases};\left(SO\perp\left(OMN\right)\right)$ nên suy ra $\begin{cases} IM\perp\left(SOM\right) \\ IN\perp\left(SON\right) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \widehat{SMI}=\widehat{SNI}=90^\circ \\ OH\perp MI, OK\perp NI \end{cases}$

Mà mặt khác: $\begin{cases} OH\perp SM \\ OK\perp SN \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} OH\perp\left(SMI\right) \\ OK\perp\left(SNI\right) \end{cases}\Rightarrow\widehat{OHI}=\widehat{OKI}=90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2), với 4 điểm M,H,K,N cùng nhìn đoạn thẳng OI dưới góc vuông, suy ra $R_{(MNOHK)}=R_{\Delta OMN}$

Như vậy suy ra mặt cầu ngoại tiếp đa diện $MNHOK$ có diện tích nhỏ nhất khi OI nhỏ nhất

Ta có: $2R_{\Delta OMN}=\dfrac{MN}{\sin\widehat{MON}}=\dfrac{MN}{\sin 60^\circ}\Rightarrow R_{\Delta OMN}=\dfrac{MN}{\sqrt{3}}$

$MN=\sqrt{OM^2+ON^2-2.OM.ON.cos60^\circ}$

$\Rightarrow MN^2=\left(OM+ON\right)^2-OM.ON\ge a^2-\left(\dfrac{OM+ON}{2}\right)^2=a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow MN_{\min}=\dfrac{a}{2}R_{\Delta OMN}=\dfrac{a}{2}R_{(MNOHK)}=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp đa diện $MNHOK$ có diện tích nhỏ nhất bằng

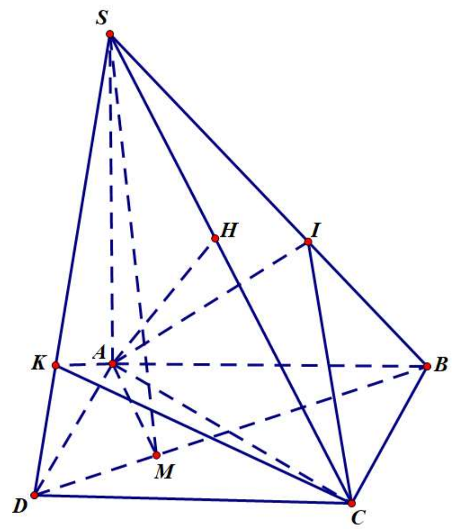
$S_{\min}=4\pi\left(\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{\pi a^2}{3}$

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=a, AB=2a$, góc giữa $\left(SBD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 30^0. Gọi I,H,K lần lượt là hình chiếu của A trên SB,SC,SD. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A,B,C,D,I,H,K là

A. $R=2a$. **B.** $R=\dfrac{1}{2}a$. **C.** $R=a$. **D.** $R=4a$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AI$ (1)

Mà $\begin{cases} AI \perp SB \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SCB) \Rightarrow AI \perp CI$ (2)

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp CK$ (3)

Mà theo giả thiết ta có $\widehat{ADC} = \widehat{AHC} = \widehat{ABC} = 90^0$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra các điểm B, D, I, H, K cùng nhìn AC dưới một góc vuông.

Vậy các điểm A, B, C, D, I, H, K nằm trên mặt cầu đường kính AC.

Từ A kẻ $AM \perp BD$, suy ra góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMA} = 30^0$.

Suy ra $AM = \dfrac{SA}{\tan 30^0} = a\sqrt{3}$.

Lại có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Leftrightarrow AD = 2a\sqrt{3}$.

Suy ra $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 4a$.

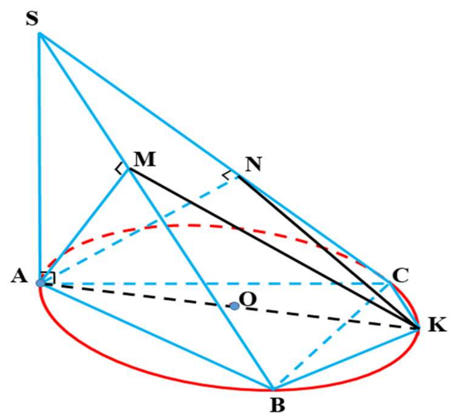
Vậy bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, D, I, H, K là: $R = \dfrac{1}{2}AC = 2a.$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc với đáy, $AB = 3, AC = 2, \widehat{BAC} = 60°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$.

A. $R = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **B.** $R = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $R = 1$. **D.** $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Kẻ đường kính AK của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

+ $\begin{cases} BK \perp AB \\ BK \perp SA \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAB) \Rightarrow BK \perp AM$.

+) $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BK \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBK) \Rightarrow AM \perp MK$.

+ Chứng minh tương tự ta có $AN \perp NK$.

+) Ta thấy M, N, B, C cùng nhìn đoạn AK dưới một vuông. Vậy AK là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$. Do đó bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Áp dụng định lý Côsin trong ΔABC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.cos\widehat{BAC} \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

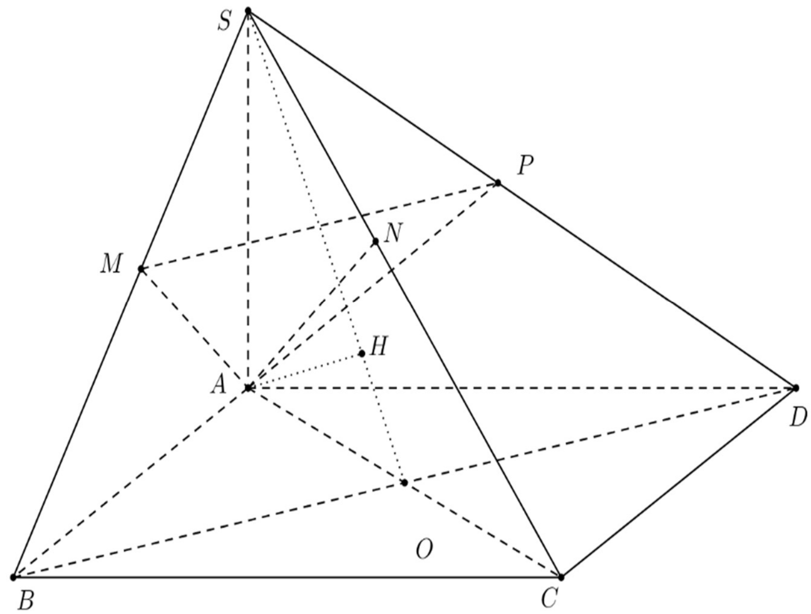
Áp dụng định lý Sin trong $\Delta ABC : \dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2.\sin A} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp $S.MNP$ biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

A. $V = 3\pi$. **B.** $V = \dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{9\pi}{2}$. **D.** $V = \dfrac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C



$SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AN \Rightarrow \widehat{SNA} = 90^\circ \ (1)$.

Lại có $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Từ $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp SC \quad (SC \perp (\alpha)) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB \Rightarrow \widehat{SMA} = 90^\circ \ (2)$.

Tương tự $\widehat{SPA} = 90^\circ \ (3)$.

Từ (1), (2), (3) suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.MNP$ có đường kính là $SA \Rightarrow$ Bán kính là $R = \dfrac{SA}{2}$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$.

$\begin{cases} (SBD) \perp (SAO) \\ (SBD) \cap (SAO) = SO \\ AH \perp SO \\ AH \subset (SAO) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d\left(A;(SBD)\right) = AH = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

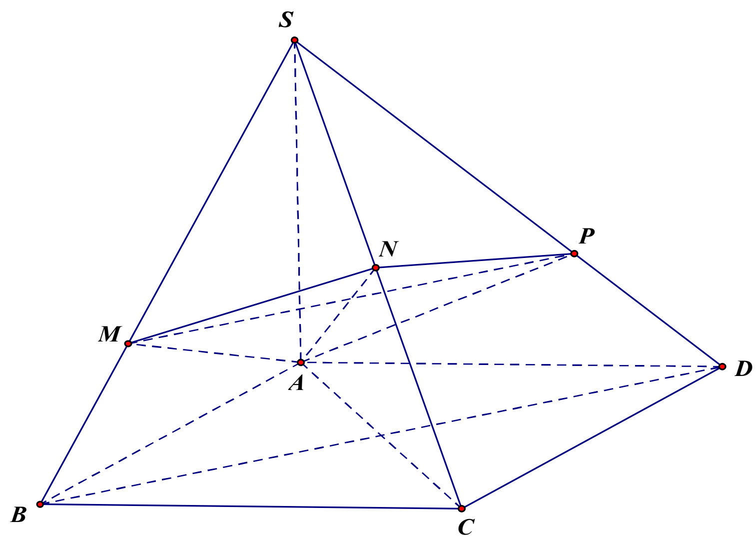
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AO^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = 3 . \Rightarrow R = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}.\pi.\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{9\pi}{2}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho mặt phẳng (α) qua điểm A, vuông góc với SC và cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính hai khối cầu ngoại tiếp hai khối đa diện $SAMNP$ và $ABCDMNP$, biết $R_1 + \sqrt{2}R_2 = 3$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{12-4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải



Đặt $AB = x$.

Ta có $(\alpha) \perp SC \Rightarrow$ các điểm M, N, P, B, D cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tiếp khối đa diện $ABCDMNP$ bằng $R_2 = \frac{1}{2}AC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác các điểm M, N, P cùng nhìn đoạn SA dưới một góc vuông $SA \Rightarrow$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp tiếp khối đa diện $SAMNP$ bằng $R_1 = \frac{1}{2}SA$.

$$R_1 + \sqrt{2}R_2 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}SA + x = 3 \Rightarrow SA = 6 - 2x$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.x^2.(6-2x)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}.x^2.(6-2x),\quad 0 < x < 3$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(12x - 6x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\frac{8}{3}$	↘	

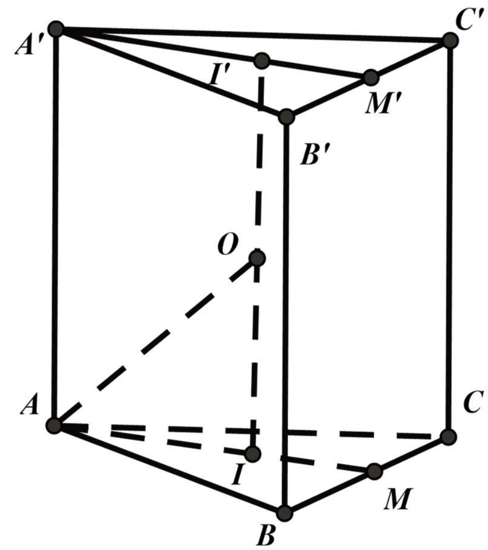
Vậy giá trị lớn nhất của $V_{S.ABCD} = \frac{8}{3}$.

Câu 40: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = 2;\ \widehat{BAC} = 120°$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{64\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$. **D.** $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M,M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Gọi I,I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi đó, II' là trục đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, suy ra tâm mặt cầu là trung điểm O của II'.

Ta có $BM = AB.\sin 60° = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$.

$\dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2.IA \Rightarrow IA = \dfrac{2\sqrt{3}}{2.\sin 120°} = 2$; $OI = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = 2\sqrt{2}$.

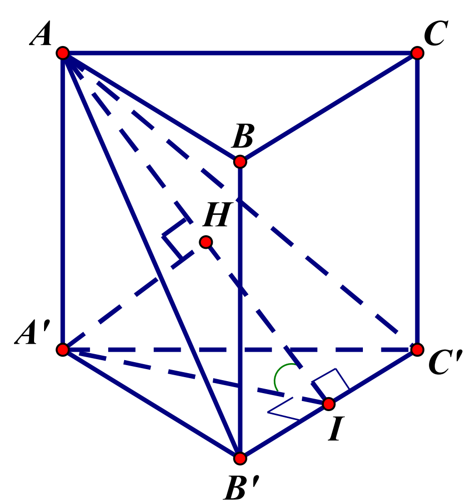
Bán kính mặt cầu $R = OA = 2\sqrt{2}$. Thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^3 = \dfrac{64\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 41: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\cdot$ Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

A. $\dfrac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{11\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{17\pi a^2}{3}$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow \begin{cases} A'I \perp B'C' \\ AI \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'C')$

Gọi $A'H$ là đường cao của $\Delta A'AI \Rightarrow A'H \perp AI \Rightarrow A'H \perp (AB'C')$

$\Rightarrow A'H$ là khoảng cách từ A' tới $\left(AB'C'\right) \Rightarrow A'H = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

Xét $\Delta A'AI$ vuông tại A' có $A'H$ là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'I^2} \Rightarrow A'A = \frac{A'I.A'H}{\sqrt{A'I^2 - A'H^2}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)^2}} = 2a$$

Gọi O, O' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và $\Delta A'B'C' \Rightarrow OO'$ là trục của hai tam giác ABC, $A'B'C'$. Gọi E là trung điểm của $OO' \Rightarrow EA = EB = EC = EA' = EB' = EC'$

Suy ra E là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ. Ta có, bán kính $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2}$.

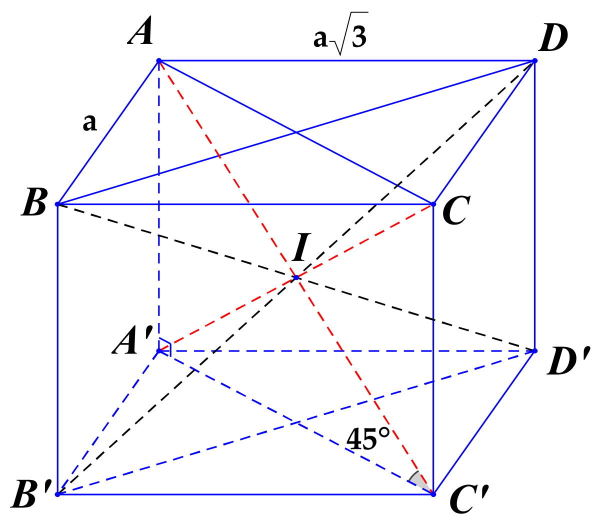
Vì tam giác ABC đều có cạnh bằng a nên có $OA = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OI = \dfrac{1}{2}AA' = a$

$$\Rightarrow R = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{16\pi a^2}{3}.$$

Câu 42: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{AC'A'} = 45°$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đó bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **<u>C</u>.** $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{16\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$ khi đó I là trung điểm của AC' và I là tâm khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có: $A'C' = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow AC' = \dfrac{A'C'}{\cos 45°} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{AC'}{2} = a\sqrt{2}$.

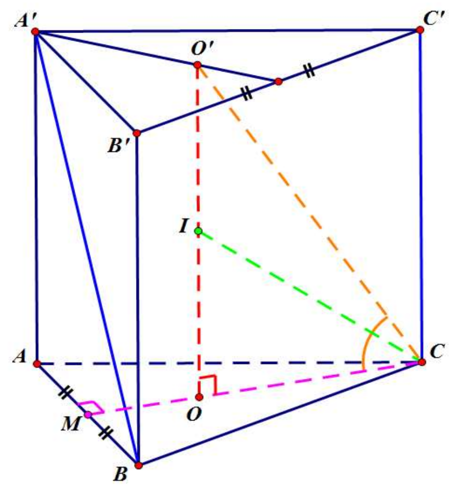
Vậy thể tích khối cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{2}\right)^3 = \dfrac{8\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 43: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi O' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, $\left(N\right)$ là hình nón ngoại tiếp hình chóp $O'.ABC$. Góc giữa đường sinh của $\left(N\right)$ và mặt đáy là α với $\tan\alpha = 2$, khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $C'C$ bằng $3a$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{64}{9}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{256}{81}a^3$. **C.** $\dfrac{256}{81}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AB và O là trọng tâm tam giác ABC.
Gọi I là trung điểm $OO' \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$.
Ta có: $CC' // AA' \Rightarrow CC' // (ABB'A') \Rightarrow d(CC', A'B) = d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A'))$.

Mà: $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CM \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CM = 3a$.

Mặt khác, hình nón (N) có một đường sinh $O'C$.

Vì $OO' \perp (ABC)$ nên $\widehat{(O'C, (ABC))} = \widehat{(O'C, OC)} = \widehat{O'CO} = \alpha$

Xét tam giác vuông $O'OC$ có: $\tan\alpha = \dfrac{OO'}{OC} \Leftrightarrow \dfrac{OO'}{OC} = 2 \Leftrightarrow OO' = 2OC = 2.\dfrac{2}{3}CM = 4a$

$\Rightarrow OI = 2a$.

Xét tam giác vuông IOC có: $IC = \sqrt{OC^2 + OI^2} = 2\sqrt{2}a$.

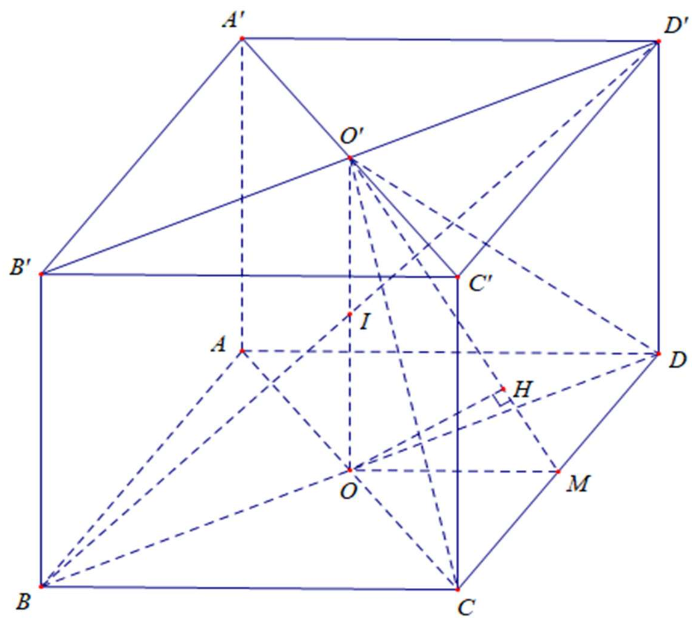
Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là: $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{2}a\right)^3 = \dfrac{64\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Câu 44: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Gọi O' là tâm của đáy $A'B'C'D'$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $O'D$ bằng a. Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{7\pi a^2}{4}$. **B.** $7\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là trung điểm của BD'.

Gọi O là tâm của $ABCD$ $\Rightarrow O'O \perp (ABCD)$.

Vì $AB // CD \Rightarrow AB // (O'CD)$ $\Rightarrow d(AB, O'D) = d(AB, (O'CD)) = d(A, (O'CD))$.

Vì O là trung điểm của AC nên có $d(O, (O'CD)) = \frac{1}{2} d(A, (O'CD)) = \frac{1}{2} d(AB, O'D) = \frac{a}{2}$.

Kẻ $OM \perp CD \Rightarrow M$ là trung điểm của CD $\Rightarrow OM = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $OH \perp O'M \Rightarrow OH \perp (O'CD) \Rightarrow OH = d(O, (O'CD)) = \frac{a}{2}$.

Tam giác $O'OM$ vuông tại O $\Rightarrow \frac{1}{O'O^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OM^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow O'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác BDD' vuông tại D có $DD' = O'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$BD = 2a$ $\Rightarrow BD' = \sqrt{BD^2 - DD'^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow IB = \frac{1}{2} BD' = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

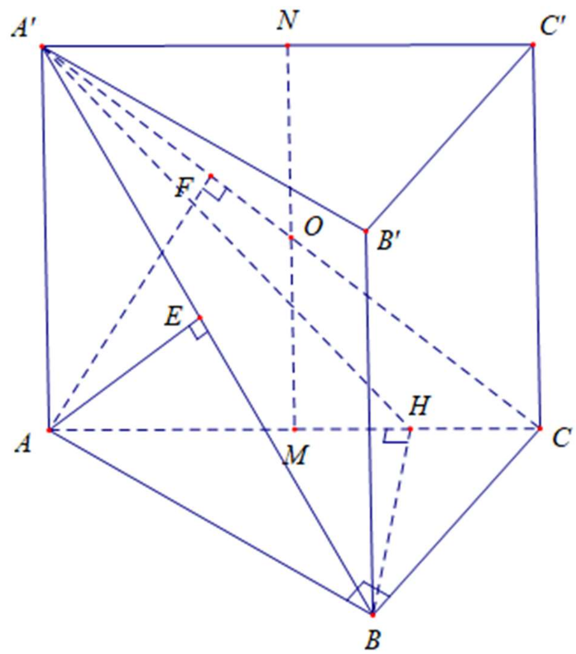
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $S = 4\pi IB^2 = \frac{7\pi a^2}{4}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là hình tam giác vuông tại B, cạnh $BC = a, \widehat{BAC} = 30°$, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và $A'C$. Tính tỉ số thể tích của khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và thể tích khối cầu ngoại tiếp đa diện $ABCEF$.

A. $\frac{8\sqrt{5}}{25}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Từ B kẻ $BH \perp AC$. Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BH \perp (ACC'A') \Rightarrow \widehat{BA'H}$ là góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(ACC'A') \Rightarrow \widehat{BA'H} = \alpha$. Có $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $AC = \dfrac{BC}{\sin 30°} = 2a$ và $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

$BH.AC = AB.BC \Rightarrow BH = \dfrac{AB.BC}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông $A'BH$ có $A'B = \dfrac{BH}{\sin\alpha} = 2a$

Trong tam giác vuông $A'AB$ có $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AC, A'C'$ $\Rightarrow M, N$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy ABC và $A'B'C'$. Theo giả thiết $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là trung điểm O của đoạn thẳng MN.

$ACC'A'$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm của AC'

$\Rightarrow OC = \dfrac{1}{2}A'C = \dfrac{1}{2}\sqrt{AA'^2 + AC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó mặt cầu tâm O bán kính $R_1 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R_1^3 = \dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$ (đvtt).

Ta có $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp BC$ và tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AE$.

Ta lại có $AE \perp A'B \Rightarrow AE \perp (A'BC) \Rightarrow AE \perp EC$.

Do đó ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AEC} = \widehat{AFC} = 90°$ $\Rightarrow$ ba điểm B, E, F đều nằm trên mặt cầu đường kính AC. Suy ra mặt cầu tâm M bán kính $R_2 = MA = \dfrac{1}{2}AC = a$ ngoại tiếp hình đa diện $ABCDEF$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDEF$ là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R_2^3 = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ (đvtt).

Tỉ số thể tích của hai khối cầu là $k=\frac{V_2}{V_1}=\frac{5\sqrt{5}}{8}$.

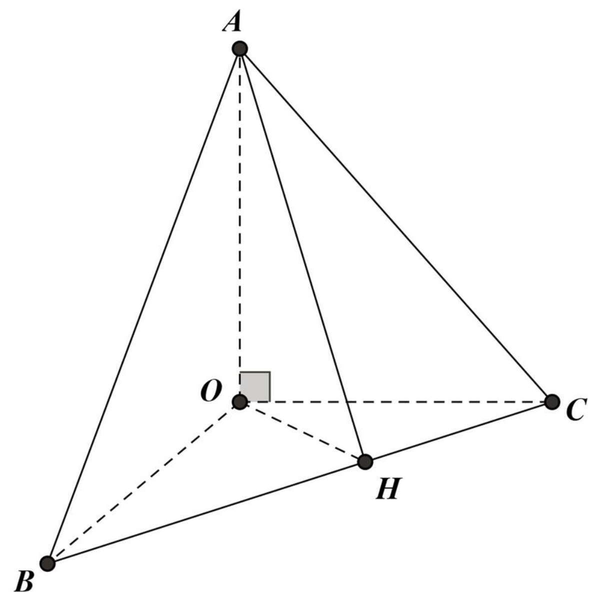
Dạng 8 : Mặt cầu nội tiếp khối chóp, khối lăng trụ

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a\ge b$, $a\ge c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là (với $m,n,p\ \in Z$).

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ đường cao AH của tam giác ABC nên $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\Rightarrow OH=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Tam giác AOH vuông tại O có $AH^2=OA^2+OH^2\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Tam giác OBC vuông tại O nên $BC=\sqrt{b^2+c^2}$

Do đó $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp $O.ABC$ là:

$$S_{tp}=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA}+S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right).$$

Dễ thấy thể tích khối chóp $O.ABC$ là $V=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}S_{tp}.r$.

Suy ra $\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}S_{tp}.r$

$$\Rightarrow\frac{a}{r}=\frac{2S_{tp}}{bc}=\frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{bc}$$

$$=\frac{a}{c}+1+\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+1+\frac{a^2}{b^2}}\ge 1+1+1+\sqrt{1+1+1}=3+\sqrt{3}.$$

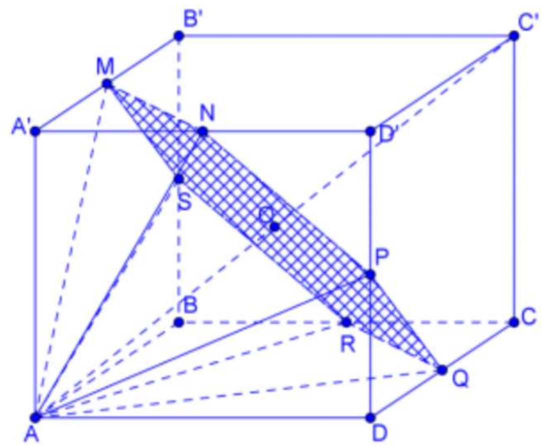
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Vậy $\min\left(\dfrac{a}{r}\right)=3+\sqrt{3}$

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',A'D',DD',CD,BC,BB'$. Diện tích mặt cầu nội tiếp khối chóp $A.MNPQRS$ gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. $0,32$. **B.** $0,13$. **C.** $1,26$. **D.** $0,64$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình lập phương.

Ta có $MNPQRS$ là hình lục giác đều cạnh bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và O là tâm của lục giác đều đó;

đồng thời $AM=AN=AP=AQ=AR=AS=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $A.MNPQRS$ là khối chóp lục giác đều $\Rightarrow AO\perp(MNPQRS)$.

Ta có lục giác $MNPQRS$ là một lục giác đều cạnh $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tuy nhiên bản chất của lục giác đều $MNPQRS$ là 6 tam giác đều bằng nhau chập vào nhau nên diện tích của lục giác $MNPQRS$ là

$$S_{MNPQRS}=6.\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Mặt khác $AO=\dfrac{AC'}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên ta suy ra $V=\dfrac{1}{3}.AO.S_{MNPQRS}=\dfrac{3}{8}$.

$$S_{\Delta ANP}=1-2.S_{\Delta ANA'}-S_{\Delta D'NP}=\frac{3}{8}.$$

Do sáu mặt bên là các tam giác đều có diện tích bằng nhau nên ta suy ra

$$S_{tp}=6.S_{\Delta ANP}+S_{MNPQRS}=\frac{9+3\sqrt{3}}{4}.$$

Tới đây ta áp dụng công thức bán kính r của mặt cầu nội tiếp khối chóp là $r=\dfrac{3V}{S_{tp}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra diện tích mặt cầu nội tiếp khối chóp $A.MNPQRS$ bằng $4\pi r^2=4\pi.\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^2\approx 1.26$.

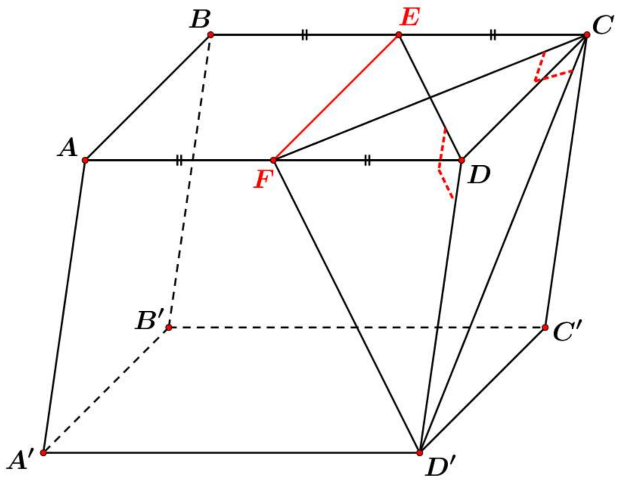
Câu 3: Cho hình hộp $ABCDA'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành, $AB=a$, $AD=2a$, $\widehat{BAD}=60°$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết rằng $CD'\perp AE$

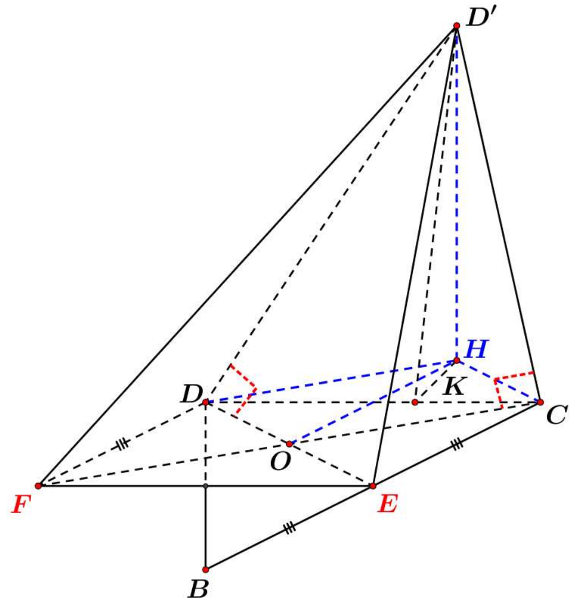
$AA' \perp DE$ và $d\left(C'D; AA'\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $D'.BCD$ bằng

A. $\dfrac{a}{4\sqrt{3}+2+2\sqrt{10}}$ **B.** $\dfrac{a}{4+2\sqrt{3}+\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}+4+2\sqrt{10}}$. **D** $\dfrac{a}{\sqrt{3}+2+\sqrt{10}}$

Lời giải

Chọn B





Ta có: $CD' \perp AE$, lại có $AE // CF$ nên $CD' \perp CF$.
Ta có tiếp: $AA' \perp DE$, lại có $AA' // DD'$ nên $DE \perp DD'$.

Ta có $EC = \dfrac{1}{2}BC = a = CD$ nên $CDFE$ là hình thoi.

Gọi H là hình chiếu của D' trên $mp\left(ABCD\right)$, O là giao điểm của CF và DE. Khi đó ta chứng minh được $OD \perp \left(D'DH\right)$ và $OC \perp \left(D'CH\right)$ nên $OD \perp DH$; $OC \perp CH$. Vậy $CODH$ là hình chữ nhật. Tam giác CDE là tam giác đều cạnh a nên $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; OD = \dfrac{a}{2}$

Ta có $AA' // \left(CDD'C'\right) \Rightarrow d\left(AA'; C'D\right) = d\left(A; \left(CDD'\right)\right) = 2d\left(F; \left(CDD'\right)\right)$ (Vì F là trung điểm của AD) $= 4d\left(O; \left(CDD'\right)\right)$ (Vì O là trung điểm của FC) $= 4d\left(H; \left(CDD'\right)\right)$

$\Rightarrow d\left(H; \left(CDD'\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. Gọi K là hình chiếu của H trên CD thì $HK = \dfrac{HC.HD}{CD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\Rightarrow D'H = \frac{d\left(H; \left(CDD'\right)\right).HK}{\sqrt{HK^2 - d\left(H; \left(CDD'\right)\right)^2}} = \frac{a}{4}.$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}BC.CD.\sin\widehat{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{D'.BCD} = \frac{1}{3}D'H.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

$$D'C = \sqrt{D'H^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{4};\ D'D = \sqrt{D'H^2 + DH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4};$$

$$\widehat{DCH} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BCH} = 120^0 \Rightarrow BH = \sqrt{BC^2 + CH^2 - 2BC.BH.\cos 120^0} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$

$$\Rightarrow BD' = \sqrt{D'H^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{85}}{4}.\ BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^0} = a\sqrt{3}.$$

$S_{CDD'} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} = \frac{1}{4}a^2$. Tương tự, $S_{BCD'} = \frac{a^2}{2}$; $S_{BDD'} = \frac{a^2\sqrt{30}}{8}$.

Gọi J là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $D'BCD$, r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện tương ứng. Khi đó $V_{D'BCD} = V_{JD'BC} + V_{JD'BD} + V_{JD'CD} + V_{JBCD} = \frac{1}{3}r.S_{D'BC} + \frac{1}{3}r.S_{D'BD} + \frac{1}{3}r.S_{D'CD} + \frac{1}{3}r.S_{BCD}$.

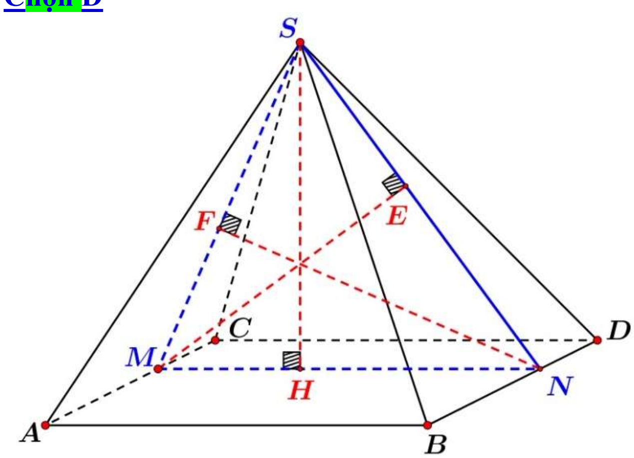
Vậy suy ra bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $D'BCD$ là $r = \frac{3V_{D'BCD}}{S_{tp}} = \frac{a}{4+2\sqrt{3}+\sqrt{10}}$.

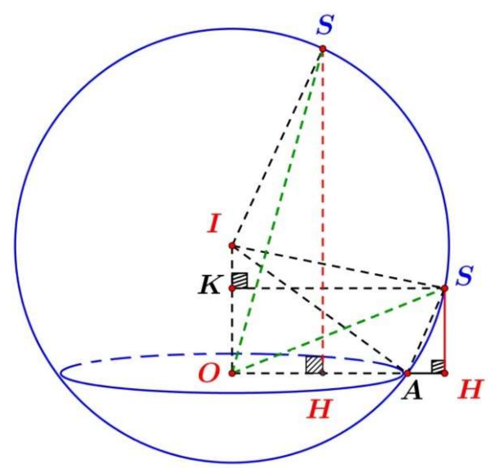
Câu 4: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là ΔABC đều cạnh bằng 6
Biết rằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng 3, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng 2. Khi ấy, bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện $S.ABC$ có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây, biết rằng $SO = \sqrt{21}$ với O là trọng tâm của tam giác ΔABC

A. $(7;8)$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(5;6)$ **D.** $(4;5)$

Lời giải

Chọn D





Đầu tiên, ta dựng hình bình hành $ABDC$, khi đó $d(B;(SAC)) = d(BD;(SAC)) = 3$

Ta cũng có: $d(SB;AC) = d(AC;(SBD)) = 2$

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABDC)$, kẻ $HM \perp AC$ tại M, $HN \perp BD$ tại N

$\Rightarrow$ Dễ dàng chứng minh $AC \perp (SMN)$ và $BD \perp (SMN)$ với $SH \subset (SMN)$

Từ đó ta suy ra $d(AC;BD) = MN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (*)

Tiếp theo, ta kẻ: $\begin{cases} ME \perp SN \\ NF \perp SM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ME \perp (SBD) \\ NF \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow d(AC;(SBD)) = d(M;(SBD)) = ME = 2$

Cùng với $d(BD;(SAC)) = d(N;(SAC)) = NF = 3$. Gọi $d(S;(ABC)) = h$, khi đó ta có:

$$\begin{cases} \sin\widehat{SMN} = \frac{NF}{MN} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin\widehat{SNM} = \frac{ME}{MN} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cot\widehat{SMN} = \sqrt{2} \\ \cot\widehat{SNM} = \frac{\sqrt{23}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HM = SH\cot\widehat{SMN} = h\sqrt{2} \\ HN = SH\cot\widehat{SNM} = \frac{h\sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

Mà $MN = HM + HN = h\sqrt{2} + \frac{h\sqrt{23}}{2} = 3\sqrt{3}$ (*) nên suy ra $h = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{23}} = SH$

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$, dựng trục (Δ) qua O vuông góc với (ABC)

Gọi K là hình chiếu vuông góc của S lên trục (Δ). Suy ra $SH = OK = h$

Đầu tiên, dễ dàng suy ra $IO = \sqrt{IA^2 - OA^2} = \sqrt{R^2 - (R_{ABC})^2} = \sqrt{R^2 - 12}$ với R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Tiếp theo ta nhận thấy, do bài toán không phụ thuộc vào việc hình chiếu H nằm ngoài hay trong đường tròn (C) nên ta có:

$$SK^2 = SO^2 - OK^2 = IS^2 - (IO - OK)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{21}\right)^2 - h^2 = R^2 - \left(\sqrt{R^2 - 12} - h\right)^2$$

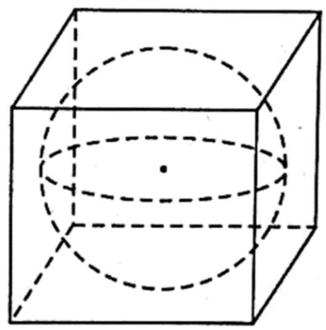
Giải phương trình trên ta thu được (CASIO): $R = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{23}{2}} + \frac{285}{16}} \approx 4.785 \in (4;5)$

Câu 5: **(VDC&HSG mức độ 3)** Cho một vật thể đựng đầy nước hình lập phương không có nắp. Khi thả một khối cầu kim loại đồng chất thì thấy khối cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương đó. Tính thể tích của khối cầu, biết rằng thể tích nước còn lại trong hình lập phương là 10. Giả sử các mặt của hình lập phương có độ dày không đáng kể.

A. $\frac{10\pi}{6-\pi}$. **B.** $\frac{9}{24-4\pi}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{15}{24-4\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{9}{12-2\pi}}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình lập phương có cạnh x. Khi đó thể tích khối lập phương là x^3.

Bán kính khối cầu tiếp xúc với các mặt của khối lập phương là $\frac{x}{2}$.

Do đó thể tích khối cầu tiếp xúc với các mặt của hình lập phương là $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{\pi x^3}{6}$.

Theo đề ra ta có $x^3 - \frac{\pi x^3}{6} = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{60}{6-\pi}}$.

Do đó bán kính của khối cầu là $R = \frac{x}{2} = \sqrt[3]{\frac{15}{12-2\pi}}$.

Thể tích của khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\sqrt[3]{\frac{15}{12-2\pi}}\right)^3 = \frac{10\pi}{6-\pi}$.

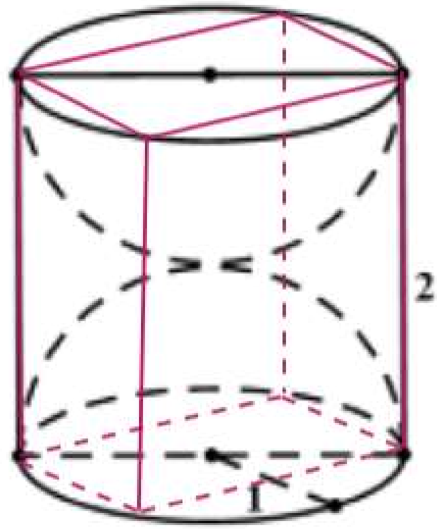
Câu 6: Một khối gỗ hình trụ tròn xoay đặc ngoại tiếp khối lăng trụ đứng có đáy hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$ và đường sinh bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu tương ứng. Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài toán ta có hình vẽ như sau:



Vì đáy hình lăng trụ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$ nên bán kính đáy của hình trụ là bằng 1.
Thể tích của khối trụ là $V = \pi.1^2.2 = 2\pi$.
Vì đường tròn đáy của khối trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu nên bán kính của mỗi nửa khối cầu là $R = 1$.

Thể tích của hai nửa khối cầu bị khoét đi là $V_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi.1^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

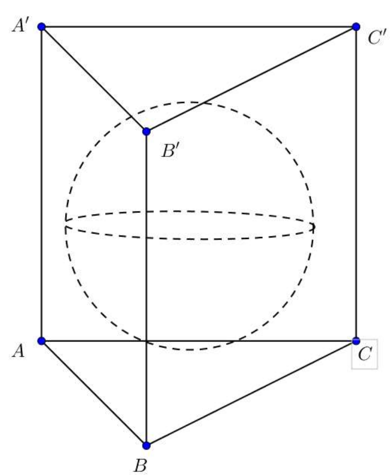
Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

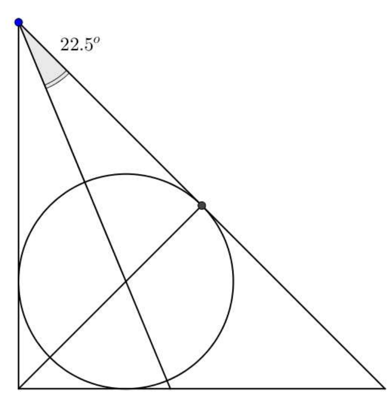
Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân cạnh huyền bằng $2a$. Biết rằng lăng trụ tồn tại mặt cầu nội tiếp thì thể tích lăng trụ này có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $2a^3\left(\sqrt{2}-1\right)$. **B.** $a^3\left(2-\sqrt{2}\right)$. **C.** $2a^3\left(\sqrt{5}-2\right)$. **D.** $a^3\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Lời giải

Chọn A





Nếu tồn tại mặt cầu (S) nội tiếp thì ít nhất bán kính mặt cầu (S) phải bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đáy là ΔABC. Cho nên ta dễ dàng suy ra bán kính nội tiếp mặt cầu (S) là: $R = a.\tan 22,5^\circ = a\left(\sqrt{2}-1\right)$

Đường cao hình trụ bằng đường kính hình cầu: $h = 2R = 2a\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Diện tích đáy hình lăng trụ bằng: $S = a^2$

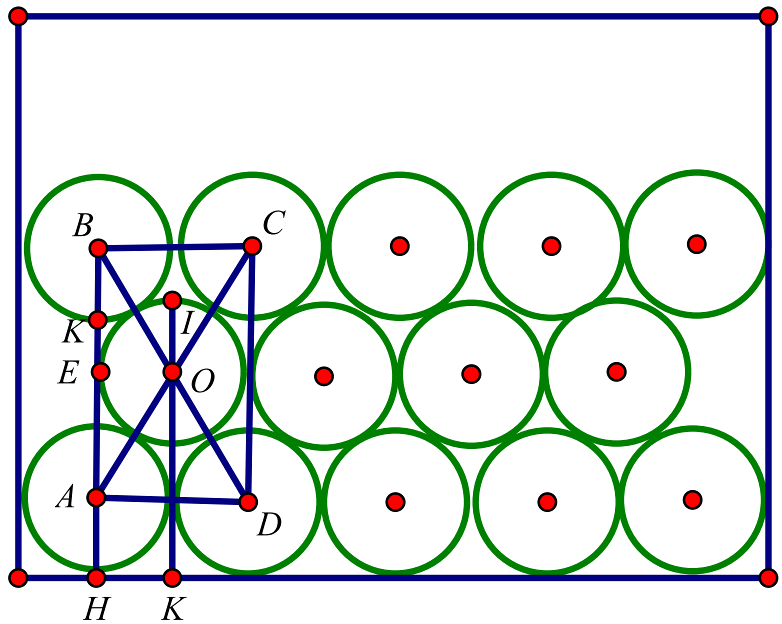
Suy ra thì thể tích lăng trụ này có giá trị bằng $V = S.h = 2a^3\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Câu 8: Cho Một hộp đựng phấn hình hộp chữ nhật có chiều dài 30cm, chiều rộng 5cm và chiều cao 6cm. Người ta xếp thẳng đứng vào đó các viên phấn giống nhau, mỗi viên phấn là một một khối trụ có chiều cao $h = 6\text{cm}$ và bán kính đáy $r = \dfrac{1}{2}\text{cm}$. Hỏi có thể xếp được tối đa bao nhiêu viên phấn?

A. 150 viên. **B.** 153 viên. **C.** 151 viên. **D.** 154 viên.

Lời giải

Chọn B



\+ Vì nếu xếp toàn bộ các hàng 5 viên thì chỉ xếp được 30 hàng nên số viên phấn xếp được là $5.30 = 150$ (viên).

\+ Còn nếu xếp toàn bộ các hàng 4 viên thì cũng chỉ xếp được 30 hàng nên số viên phấn xếp được là $4.30 = 120$ (viên).

\+ Do đó để xếp được nhiều nhất ta xếp tối đa các viên phấn vào một cạnh chiều rộng của hộp thì được 5 viên, để xếp nhiều nhất có thể thì hàng tiếp theo ta xếp xen kẽ 4 viên, rồi lại xen kẽ hàng tiếp theo 5 viên như trên hình vẽ (xét góc nhìn từ phía trên hộp xuống).

\+ Khi đó ta có: $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ nên

$HK = AB + AH - BK = \sqrt{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$.

\+ Ta qui ước xếp hàng 5 viên và hàng 4 viên liên tiếp từ đầu là một cặp.

\+ Do đó ta xếp 16 cặp trước thì diện tích khoảng trống còn lại sau khi xếp 16 cặp này là: $30 - 16.\sqrt{3} \approx 2,287$.

\+ Vì $KI = OK + OI = HE + OI = \sqrt{3} + \dfrac{1}{2} \approx 2,23 < 2,287$ nên khoảng trống còn lại sau khi xếp 16 cặp vừa đủ xếp cặp 17. Vậy số phấn nhiều nhất là $17.9 = 153$ (viên).

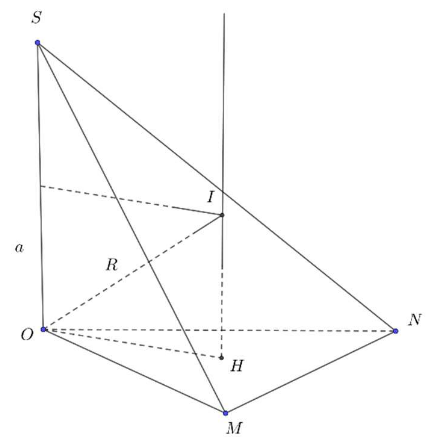
Dạng 9 : Bài toán thể tích, diện tích max min của mặt cầu, khối cầu liên quan đến khối chóp, khối lăng trụ

Câu 1: Trên mặt phẳng (P) cho góc $\widehat{xOy} = 60°$. Đoạn $SO = a$ và vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm $M; N$ chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có: $OM + ON = a$. Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$

A. $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{16\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN và tâm bán mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN \Rightarrow R^2 = OH^2 + IH^2 = \dfrac{a^2}{4} + OH^2$.

Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác OMN ta có $\dfrac{MN}{\sin 60°} = 2OH \Leftrightarrow OH = \dfrac{MN}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác OMN ta có

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2.OM.ON\cos\widehat{MON} = OM^2 + ON^2 - OM.ON = \left(OM+ON\right)^2 - 3OM.ON$$

$$\geq a^2 - 3\frac{\left(OM+ON\right)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow MN^2 \geq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 3OH^2 \geq \frac{a^2}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{4} + OH^2 \geq \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3.4} = \frac{a^2}{3}.$$

Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN$ bằng $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

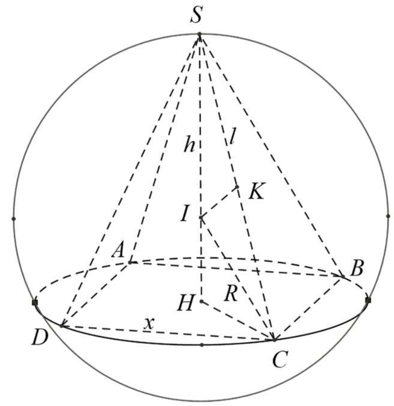
Tính diện tích của mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất ngoại tiếp tứ diện $SOMN$ là $4\pi R^2 = \dfrac{4\pi a^2}{3}$

Câu 2: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 3, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V = 576\sqrt{2}$ **B.** $V = 144\sqrt{6}$ **C.** $V = 144$ **D.** $V = 576$

Lời giải

Chọn D



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu có tâm I và bán kính $R = 3$.
Gọi $H = AC \cap BD$, K là trung điểm SC.
Đặt $AB = x; SH = h$, $(x, h > 0)$.

Ta có $HC = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow l = SC = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{2}}$.

Do $\Delta SKI \backsim \Delta SHC \Rightarrow \frac{SK}{SH} = \frac{SI}{SC} \Rightarrow l^2 = 2h.R \Rightarrow x^2 = 12h - 2h^2$.

Diện tích đáy của hình chóp $S_{ABCD} = x^2$ nên $V = \frac{1}{3}h.x^2 = \frac{1}{3}h\left(36h - 2h^2\right)$.

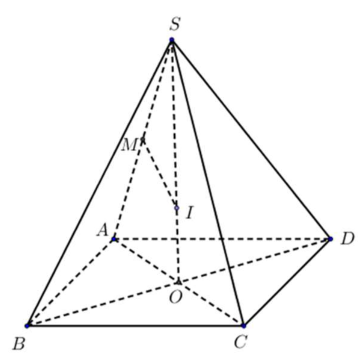
Ta có $\frac{1}{3}h.\left(36h - 2h^2\right) = \frac{1}{3}.h.h\left(36 - 2h\right) \le \frac{1}{3}.\left(\frac{h + h + 12 - 2h}{3}\right)^3 = 192 \Rightarrow V \le 192$, dấu bằng xảy ra khi $h = 12 - 2h \Leftrightarrow h = 4, x = 16$. Vậy $V_{max} = 576$.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và $\widehat{ASB} = \alpha$. Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Khi α thay đổi, giá trị nhỏ nhất của R bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có SO là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (SAO) kẻ đường trung trực của cạnh SA cắt SO tại I. Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính $R = SI$.

Gọi M là trung điểm của SA, ta có: ΔSMI và ΔSOA đồng dạng nên:

$$\frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}$$

Áp dụng định lí sin cho tam giác cân SAB ta có:

$$\frac{SA}{\sin\left(\frac{180^0-\alpha}{2}\right)}=\frac{AB}{\sin\alpha}\Rightarrow SA=\frac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}};\ SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow R=SI=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}=\frac{1}{2\sqrt{\cos\alpha.\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{\cos\alpha.\frac{1-\cos\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\cos\alpha.(1-\cos\alpha)}}$$

Ta có: $\cos\alpha+(1-\cos\alpha)\ge 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\Rightarrow 1\ge 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\Rightarrow R\ge\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos\alpha=(1-\cos\alpha)\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^o$.

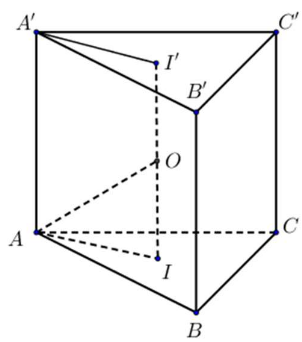
Vậy giá trị nhỏ nhất của R là: $\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ đáy là tam giác ABC với $\widehat{BAC}=60^o$, $BC=x$, $AA'=4$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ thay đổi sao cho $AB+AC=2$. Giá trị của x để bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta A'B'C'$, O là trung điểm của đoạn II'. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ, bán kính $R=OA$.
Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC ta có:

$$IA=r=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{x}{2\sin 60^O}=\frac{x\sqrt{3}}{3}\Rightarrow R=\sqrt{IA^2+IO^2}=\sqrt{\frac{x^2}{3}+4}$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos 60^O$

Ta có: $AB^2+AC^2\ge\frac{(AB+AC)^2}{2}=2$; $(AB+AC)^2\ge 4AB.AC\Rightarrow AB.AC\le 1$

$\Rightarrow x^2\ge 2-2\cos 60^O\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow R\ge\sqrt{\frac{1}{3}+4}=\frac{\sqrt{39}}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

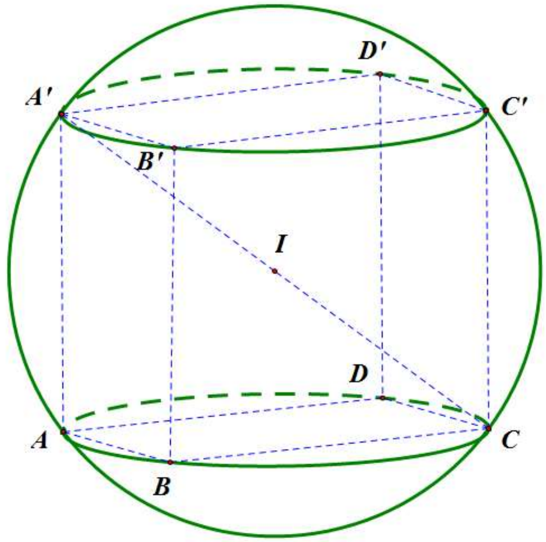
Vậy giá trị nhỏ nhất của R bằng $\frac{\sqrt{39}}{3}$ khi $x=1$.

Câu 5: Cho khối hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ có thể tích bằng 8 và có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng.Khối cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCDA'B'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất bằng?

A. 3600π **B.** $3\sqrt{50}\pi$ **C.** $5\sqrt{3}\pi$ **D.** $5\sqrt{30}\pi$

Lời giải

Chọn C



Gọi a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh $AD;AB;AA'$ của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ và $a=2b$.

Thể tích khối hộp là $V=a.b.c=2b^2c=8\Rightarrow b^2c=4$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối hộp là $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{5b^2+c^2}}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$5b^2+c^2=\dfrac{5b^2}{2}+\dfrac{5b^2}{2}+c^2\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}b^2.\dfrac{5}{2}b^2.c^2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{25}{4}\left(b^2c\right)^2}=3\sqrt[3]{100}$.

Mặt cầu ngoại tiếp khối hộp có bán kính nhỏ nhất là $R_{\min}=\dfrac{\sqrt{3\sqrt[3]{100}}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{5}{2}b^2=c^2\\ b^2c=4\\ a=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=\dfrac{2}{5}c^2\\ c^3=10\\ a=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{\sqrt[6]{10}}\\ b=\dfrac{2}{\sqrt[6]{10}}\\ c=\sqrt[3]{10}\end{cases}$

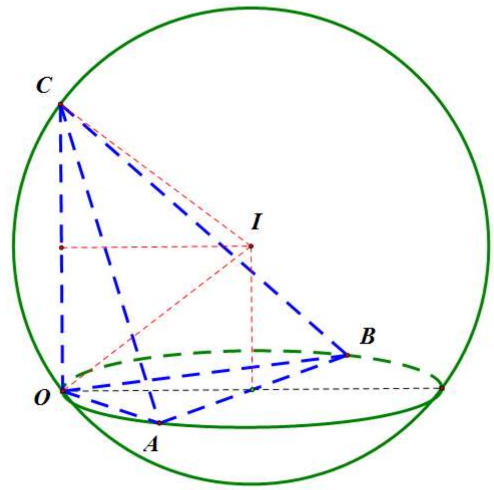
Vậy, khối cầu ngoại tiếp hình hộp có thể tích nhỏ nhất là $V_{\min}=\dfrac{4}{3}\pi R_{\min}^3=5\sqrt{3}\pi$.

Câu 6: Trong không gian cho tam diện vuông $O.ABC$, $OC=1$, OA, OB thay đổi sao cho $OA+OB=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. 3π **B.** 24π **C.** $\dfrac{8\pi}{3}$ **D.** 6π

Lời giải.

Chọn A



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $R=\dfrac{\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}{2}$.

Đặt $OA=a;OB=b,a,b>0$. Ta có $a+b=2\Leftrightarrow b=2-a$.

Ta có: $R=\dfrac{\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+1^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+(2-a)^2+1^2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2(a-1)^2+3}}{2}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ nhỏ nhất là $R_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, tại $a=b=1$.

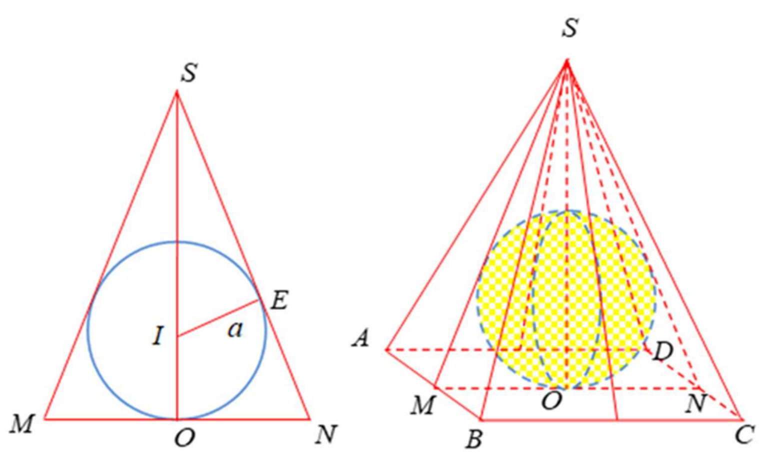
Giá trị nhỏ nhất của diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $S=4\pi R_{\min}^2=3\pi$.

Câu 7: Một khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. Tính thể tích V nhỏ nhất của khối chóp tứ giác đều ngoại tiếp khối cầu.

A. $V=\dfrac{8a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{10a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{32a^3}{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

Chọn C



Khối cầu có thể tích bằng $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ $\Rightarrow$ bán kính khối cầu $R=a$.

Giả sử mặt cầu đã cho có tâm I và ngoại tiếp khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, DC. Gọi E là tiếp điểm của SN và mặt cầu đã cho.

Đặt $SO = x$, khi đó: $SI = x - a$ và $SE = \sqrt{(x-a)^2 - a^2} = \sqrt{x^2 - 2ax}$.

Xét hai tam giác đồng dạng ΔSEI và ΔSON, ta có: $\frac{SE}{SO} = \frac{IE}{NO} \Rightarrow NO = \frac{IE.SO}{SE} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - 2ax}}$

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}x.\left(\frac{2ax}{\sqrt{x^2-2ax}}\right)^2 = \frac{4a^2x^2}{3(x-2a)}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x-2a}$ $(0 < 2a < x)$. Ta có $f'(x) = \frac{x^2 - 4ax}{(x-2a)^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4a$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$4a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$8a$	$\nearrow$	$+\infty$

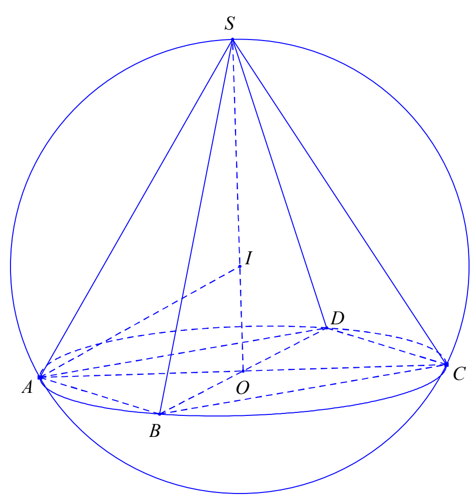
Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích là $V = \frac{32a^3}{3}$.

Câu 8: Một khối cầu có diện tích xung quanh bằng 324π. Tính thể tích V lớn nhất của khối chóp tứ giác đều nội tiếp khối cầu.

A. 576. **B.** $144\sqrt{2}$. **C.** 144. **D.** $576\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Khối cầu có diện tích xung quanh bằng 324π $\Rightarrow$ bán kính khối cầu $R = 9$.

Giả sử mặt cầu đã cho có tâm I và ngoại tiếp khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, $\left(0 < a \le 9\sqrt{2}\right)$.

Trường hợp I nằm giữa S và O :

Ta có $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OI = \sqrt{IA^2 - OA^2} = \sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}$.

Lại có $SO = SI + IO = 9 + \sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}$. Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2\left(9 + \sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}\right) = 3a^2 + \frac{1}{3}a^2\sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}$.

Đặt $a^2 = t$, do $0 < a \le 9\sqrt{2}$ nên $0 < t \le 162$

Xét hàm số $f(t)=3t+\frac{1}{3}t\left(9+\sqrt{81-\frac{t}{2}}\right)$ với $0<t\le 162$, ta có $f'(t)=3+\frac{324-3t}{12\sqrt{81-\frac{t}{2}}}$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \sqrt{81-\frac{t}{2}}=\frac{t}{12}-9 \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 108 \\ 81-\frac{t}{2}=\left(\frac{t}{12}-9\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 108 \\ \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=144 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=144$.

Bảng biến thiên

t	0		144		162
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	576	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

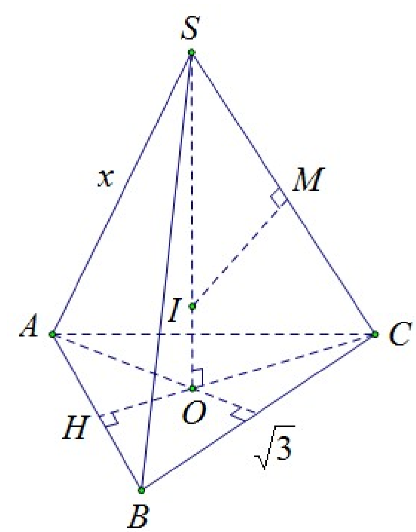
Trường hợp O nằm giữa S và I : tương tự như trên.

Câu 9: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng x, với $(x>1)$. Gọi V là thể tích khối cầu xác định bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Giá trị nhỏ nhất của V thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(7;3\pi)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O trọng tâm tam giác ABC, vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$ $\Rightarrow$ SO là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ở mặt phẳng (SOC), dựng đường trung trực của đoạn SC, cắt SC, SO lần lượt tại M và I.

Ta có: $IS=IC=IA=IB=R \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có $\Delta SMI \sim \Delta SOC \Rightarrow \frac{SM}{SO}=\frac{SI}{SC} \Rightarrow SI=\frac{SM.SC}{SO}=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}=R$.

$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}.\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)^3$.

Do đó thể tích V nhỏ nhất khi hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, với $\left(x>1\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, với $\left(x>1\right)$, có $f'\left(x\right)=\dfrac{x^3-2x}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$; $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ như sau

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Vậy $V_{\min}=\dfrac{4\pi}{3}$ khi $x=2$.