# **BÀI 3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN**

## **A. LÍ THUYẾT**

**Công thức tính thể tích khối chóp, lăng trụ**

|  |  |
| --- | --- |
| Thể tích khối chóp: .  Trong đó: : Diện tích mặt đáy.  *h*: Độ dài chiều cao khối chóp. |  |
| Thể tích khối lăng trụ:  Trong đó: : Diện tích mặt đáy.  *h*: Chiều cao của khối chóp. |  |
| Thể tích khối hộp chữ nhật:  Thể tích khối lập phương: | ***Chú ý:*** *Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.* |
|  | ***Chú ý:***  *+) Đường chéo của hình vuông cạnh a là: .*  *+) Đường chéo của hình lập phương cạnh a là:*  *+) Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là:* .  *+) Đường cao của tam giác đều cạnh a là:* |

**CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG CẦN NẮM**

**1. Hệ thức lượng trong tam giác**

a) Cho  vuông tại *A*, đường cao *AH.*

**+**) ; +) ;

**+**) ; +) ;

**+**) ; +) ;

+) .

b) Cho  có độ dài ba cạnh *a, b, c*; độ dài các trung tuyến ; bán kính đường tròn ngoại tiếp *R;* bán kính đường tròn nội tiếp *r,* nửa chu vi *p.*

+) Định lí hàm số cosin:

;

;

.

+) Định lí hàm số sin: .

+) Độ dài trung tuyến:

.

|  |
| --- |
| **2. Các công thức tính diện tích**  a) Tam giác:  +)  +)  +)  +)  (*p*: nửa chu vi của tam giác).  +)  +)  vuông tại *A*:  +)  đều, cạnh *a*: . |
| b) Hình vuông:  (*a:* cạnh hình vuông) |
| c) Hình chữ nhật: (*a, b*: hai kích thước) |
| d) Hình bình hành: |
| e) Hình thoi: |
| f) Hình thang:  (*a, b*: hai đáy, *h*: chiều cao)  g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: |

**NHẮC LẠI CÁCH XÁC ĐỊNH CAC GÓC TRONG KHÔNG GIAN**

|  |  |
| --- | --- |
| **Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy**  Để tính góc , ta gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *S* trên . Khi đó *HA* là hình chiếu vuông góc của *SA* trên .  Vậy . |  |
| **Góc giữa cạnh bên và mặt đứng**  Để tính góc biết ta dựng . Vì nên  Khi đó *K* là hình chiếu vuông góc của *B* trên  *SK* là hình chiếu vuông góc của *SB* trên  Vậy |  |
| **Góc giữa hai mặt phẳng**  Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến. |  |
| **Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy**  Để tính góc , ta gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *S* trên .  Kẻ  Vậy . |  |
| **Góc giữa mặt bên và mặt đứng**  Để tính góc biết , ta kẻ .  Kẻ  Vậy . |  |

## **II. CÁC DẠNG BÀI TẬP**

### **Dạng 1. Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp. |  |
| **MÔ HÌNH 1**  Hình chóp , cạnh *SA* vuông góc với đáy.  + Đáy là tam giác *ABC.*  + Đường cao *SA.*  + Cạnh bên *SB, SC, SA.*  + , là các tam giác vuông tại *A.*  + Góc giữa cạnh *SB* với đáy *ABC* là góc .  + Góc giữa cạnh *SC* với đáy *ABC* là góc .  + Góc giữa mặt bên *SBC* với đáy là góc với *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *BC*. |  |
| **MÔ HÌNH 2**  Hình chóp , có đáy *ABCD* là hình chữ nhật (hình vuông) và *SA* vuông góc với đáy.  + Đáy là hình chữ nhật (hình vuông) *ABCD.*  + Đường cao *SA*.  + Cạnh bên *SA, SB, SC, SD.*  + là các tam giác vuông tại A.  + Góc giữa cạnh *SB* với đáy *ABCD* là .  + Góc giữa cạnh *SC* với đáy *ABCD* là .  + Góc giữa cạnh *SD* với đáy *ABCD* là .  + Góc giữa mặt bên *SBC* với đáy *ABCD* là + Góc giữa mặt bên *SCD* với đáy *ABCD* là |  |

**2. Bài tập**

**Bài tập 1.** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông. Cạnh bên  và vuông góc với đáy. Diện tích tam giác  bằngThể tích khối chóp đã cho bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 2.** Cho khối chóp  có đáy  là hình vuông cạnh   vuông góc với đáy và khoảng cách từ  đến mặt phẳng  bằng  Thể tích của khối chóp đã cho bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 3.** Cho hình chóp  đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B,* ,  cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy và *SB* tạo với mặt đáy một góc bằng . Thể tích của khối chóp  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 4.** Cho hình chóp  có đáy *ABCD* là hình thang cân, , cạnh ,  và *SA* vuông góc với mặt phẳng , cạnh *SC* tạo với mặt phẳng đáy góc . Thể tích của khối chóp  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 5.** Cho hình chóp  có đáy *ABCD* là tứ giác lồi , ,  và *SA* vuông góc với mặt phẳng , cạnh *SC* tạo với mặt phẳng đáy góc  thỏa mãn . Thể tích khối chóp  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 6.** Cho hình chóp  có *SA* vuông góc với mặt phẳng , hai mặt phẳng  và  vuông góc với nhau, , , . Thể tích khối chóp  là *V.* Tỉ số  là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

### **Dạng 2. Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường cao nằm trên giao tuyến của mặt phẳng đó và đáy.  Ta có: . |  |
| Hình chóp có hai mặt vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với đáy.  Ta có: . |  |

**2. Bài tập**

**Bài tập 1.** Cho hình chóp có đáy *ABCD*, , , tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa *AB* và *SC* bằng . Tính thể tích *V* của khối chóp .



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 2.** Cho hình chóp có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, , . Hình chiếu của điểm *S* trên mặt phẳng trùng với trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Biết rằng góc giữa mặt phẳng và mặt phẳng bằng . Thể tích của khối chóp là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 3.** Cho hình chóp với các mặt phẳng vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác *SAB, SBC, SAC* lần lượt là . Thể tích khối chóp là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 4.** Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh *a*, hai mặt phẳng và cùng vuông góc với đáy, biết . Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *SB, SD, CD, BC.* Thể tích của khối chóp là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



### **Dạng 3. Thể tích khối chóp đều**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.  Trong hình chóp đều:  +) Đáy là một đa giác đều  +) Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.  +) Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau .  Đường cao vẽ từ đỉnh của một mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.  +) Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau  +) Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau. | ***Chú ý:***  +) Phân biệt hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều. Hình chóp tam giác đều là hình chóp có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Nói một cách khác, hình chóp tam giác đều là ***hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại không đúng.***  +) Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông. |

**2. Bài tập**

**Bài tập 1.** Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng *a* và cạnh bên bằng *2a.* Thể tích của khối chóp là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 2.** Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng *a*, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng . Thể tích khối chóp là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 3.** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng *a* và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc . Thể tích của khối chóp là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 4.** Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, góc giữa *SG* và mặt phẳng là . Thể tích khối chóp là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 5.** Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là . Thể tích *V* của khối chóp đó là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 6.** Cho khối chóp tứ giác đều  có đáy  là hình vuông tâm  cạnh bằng  Cạnh bên bằng  Gọi  là trung điểm của   là điểm đối xứng của  qua  (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối đa diện  bằng |  |

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Bài tập 7:** Cho hình chóp đều có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Cho điểm  sao cho diện tích  của  nhỏ nhất. Giá trị bằng

**A.  B.  C.  D. **

### **Dạng 4. Thể tích khối chóp biết trước một đường thẳng vuông góc với đáy**

**1. Phương pháp**

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

Việc tính *SH* ta thường dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Đề bài thường cho mối quan hệ về góc giữa đường thẳng với mặt phẳng hoặc góc giữa hai mặt phẳng xác định độ dài đường cao.

**2. Bài tập**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 1.** Cho hình chóp có đáy là tam giác vuông cân tại *A*, cạnh , gọi *M* là trung điểm *BC,* hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng là trung điểm của *AM*, tam giác *SAM* vuông tại *S*. Thể tích của khối chóp là  **A. B. C. D.** | *.* |
| **Bài tập 2.** Cho hình chóp , đáy là tam giác *ABC* có , , , cạnh bên . Gọi *M* là trung điểm của *BC,* hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng là điểm *H* thỏa mãn . Thể tích của khối chóp là  **A. B. C. D.** | .. |
| **Bài tập 3.** Cho hình chóp có đáy là hình chữ nhật cạnh , . Hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng là trung điểm *H* của *AD*. Cạnh *SC* tạo với đáy một góc bằng . Thể tích khối chóp là  **A. B. C. D.** |  |
| **Bài tập 4.** Cho hình chóp có đáy *ABCD* là hình chữ nhật tâm *O,* cạnh , , tam giác *SAC* vuông tại *S.* Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm *H* của đoạn *AO.* Thể tích khối chóp là  **A. B. C. D.** |  |
|  |  |

### **Dạng 5. Thể tích khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên, mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| - Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cạnh bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.  - Hình chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn nội tiếp mặt đáy. | **Ví dụ:** Cho hình chóp , đáy *ABC có* , , , các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng thỏa mãn . Thể tích khối chóp là  **A. B.**  **C. D.**  ***Hướng dẫn giải***    Ta có  Các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau nên hình chiếu của *S* trên là tâm đường tròn nội tiếp .  vuông tại *I* có  .  Vậy  ***Chọn C.*** |

**2. Bài tập**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 1.** Cho chóp có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh bằng *a,* các cạnh bên bằng nhau và đều bằng . Thể tích khối chóp là  **A. B. C. D.** |  |
| **Bài tập 2.** Cho hình chóp có đáy *ABC* là tam giác cân , , các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc . Thể tích khối chóp là  **A. B. C. D.** |  |
| **Bài tập 3.** Cho hình chóp có đáy *ABCD* là tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt phẳng , , , với mặt đáy lần lượt là , , , . Biết rằng tam giác *SAB* vuông cân tại *S*, và chu vi tứ giác *ABCD* là . Tính thể tích *V* của khối chóp .  **A. B.**  **C. D.** |  |
| **Bài tập 4.** Cho hình chóp có đáy *ABCD* là hình chữ nhật cạnh , . Đỉnh *S* cách đều các đỉnh *A, B, C, D,* của mặt đáy và . Thể tích khối chóp là  **A. B. C. D.** |  |
| **Bài tập 5.** Cho hình chóp có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a.* Các mặt bên , , lần lượt tạo với đáy các góc là , , . Tính thể tích của khối chóp . Biết rằng hình chiếu vuông góc của *S* trên nằm trong tam giác *ABC.*  **A. B.**  **C. D.** |  |

### **Dạng 6. Thể tích lăng trụ đứng**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hình lăng trụ đứng:** Là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên là chiều cao của hình lăng trụ đứng.  Các mặt bên là các hình chữ nhật. Các mặt bên đều vuông góc với đáy.  **Hình lăng trụ đều:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Các mặt bên đều là các hình chữ nhật bằng nhau. | **Ví dụ:** Cho hình lăng trụ đứng tam giác có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích của khối lăng trụ là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  ***Hướng dẫn giải***    Ta có đều cạnh a  Vậy  ***Chọn B.*** |

**2. Bài tập**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 1.** Cho hình lăng trụ đứng , đáy là tam giác *ABC* vuông tại *A*, cạnh hợp với mặt đáy góc .Thể tích khối lăng trụ là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 2.** Cho lăng trụ đứng , đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, cạnh , cạnh hợp với mặt bên góc . Thể tích khối lăng trụ bằng  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 3:** Cho lăng trụ đều có cạnh đáy bằng a và . Thể tích của khối lăng trụ là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 4:** Cho lăng trụ đứng có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *A,* cạnh , góc giữa hai đường thẳng và bằng . Thể tích khối lăng trụ là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 5:** Cho hình lăng trụ đứng có đáy *ABC* là tam giác vuông, . Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng và bằng . Thể tích khối chóp bằng  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |  |

### **Dạng 7. Thể tích lăng trụ xiên**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| Lăng tru xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy. Chiều cao là khoảng cách từ một đỉnh bất kì của mặt đáy này đến mặt đáy đối diện. Để tính chiều cao ta dựa vào hệ thức lượng trong tam giác. | **Ví dụ:**Cho lăng trụ tam giac *ABC* vuông cân tại *A*, cạnh , hình chiếu vuông góc của lên mặt phẳng là trong điểm của *AC*, góc tạo bởi với bằng . Thể tích khối lăng trụ là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  ***Hướng dẫn giải***  ***Chọn A***    Gọi *H* là trung điểm ;  .  Xét tam giác vuoong cân tại *H* có      .  Vây . |

**2. Bài tập**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 1:** Cho lăng trụ đây là tam giác *ABC* vuông tại *A,* , hình chiếu vuông góc của trên mặt phẳng trùng với chân đường cao *H* kẻ từ đỉnh *A* của tam giác *ABC*, góc tạo bởi với bằng . Thể tích khối lăng trụ là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  ***Bài tập 2.*** Cho lăng trụ đáy là hình thang cân *ABCD* có , cạnh tạo với mặt phẳng đáy góc . Hình chiếu vuông góc của trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thuộc đoạn *AC* sao cho . Thể tích của khối lăng trụ là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** .  **Bài tập 3.** Cho khối lăng trụ , khoảng cách từ *C* đến đường thẳng bằng 2, khoảng cách từ *A* đến các đường thẳng và lần lượt bằng 1 và , hình chiếu vuông góc *A* lên mặt phẳng là trung điểm *M* của và . Thể tích của khối lăng trụ bằng  **A.**  **B.** 1.  **C.** 2. **D.** |  |

### **Dạng 8 . Thể tích hình hộp**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hình hộp:** Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình bình hành.  **Hình hộp đứng:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình chữ nhật.  **Hình hộp chữ nhật:** Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Sau mặt của hình hộp chữ nhât đều là các hình chữ nhật.  **Hình lập phương:** Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Sáu mặt đều là các hình vuông. | **Ví dụ:** Cho hình lập phương có .  Thể tích khối lập phương là  **A.**  **B.**  **C.** 64. **D.** 125.  ***Hướng dẫn giải***    Đặt  vuông tại *A* có      Vậy .  ***Chọn C.*** |

**2. Bài tập**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 1.** Cho hình hộp đứng có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh a, .Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABD*, góc tạo bởi và mặt đáy bằng . Thể tích khối hộp là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 2.** Một tấm bìa hình vuông có cạnh 50cm. Người ta cắt bỏ đi ở một góc tấm bìa hình vuông cạnh 16cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nahat không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là  **A.** 5184  **B.** 8704  **C.** 4608  **D.** 18496  **Bài tập 3.** Cho hình hộp có đáy *ABCD* là hình chữ nhật . Hai mặt bên và lần lượt tạo với mặt phẳng đáy những góc và , cạnh bên có độ dài bằng 1. Thể tích khối hộp là  **A.** 21. **B.**  **C.**  **D.** |  |

### **Dạng 9. Tỉ số thể tích khối chóp**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| So sánh thể tích khối chóp cần tính với một khối đa diện khác đã biết trước hoặc dễ dàng tính thể tích.  Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của các bài toán sau  **Kết quả 1.**  Cho hình chóp . Lấy tương ứng trên các cạnh  Khi đó  **Chú ý:** Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm có thể có điểm  Thông thường, đối với bài toán này, đề thường cho điểm chia đoạn theo tỉ lệ, song song, hình chiếu…  Công thức chỉ đúng khi đáy là tam giác. Nếu đáy là tứ giác, ngũ giác… ta phải phân chia đáy thành các tam giác và tính tổng thể tích các khối có đáy là tam giác.  **Kết quả 2.**  Cho hình chóp đáy là hình bình hành. Mặt phẳng cắt lần lượt tạivới  Khi đó ta có hai công thức quan trọng sau  1.  2.  **Chú ý:** Các công thức 1, 2 chỉ áp dụng cho hình chóp có đáy là hình bình hành. Các công thức này được ứng dụng rất nhiều trong các bài toán tìm thiết diện cũng như thể tích khối đa diện nên tận dụng khi làm trắc nghiệm để không phải làm theo phương pháp chia nhỏ đáy thành các tam giác. | **Chứng minh**  Đặt  Ta có  (điều phải chứng minh)  **Chứng minh**  **1.** Chứng minh    Gọi O là tâm hình bình hành, I là giao điểm của SO và  Ta có  =  Nhân cả hai vế của đẳng thức với  ta được (1)  Chứng minh tương tự (2)  Từ (1) và (2) suy ra  Hay (điều phải chứng minh)  **2.** Chứng minh  Ta có  =  Do suy ra  Vậy  (điều phải chứng minh) |

**2. Bài tập**

**Bài tập 1.** Cho hình chóp SABC, trên các cạnh AB, BC, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho . Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.BMN và A.CPN là



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 2.** Cho hình chóp tứ giác đềucó đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là thỏa mãn . Mặt phẳng qua AC và vuông góc với mặt phẳng chia khối chóp thành hai khối đa diện có thể tích là và với . Tỉ lệ gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 3.** Cho hình chópcó . Thể tích của khối chóp bằng V. Tỉ số bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 4.**  Cho hình chóp có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm sao cho , mặt phẳng cắt cạnh SD tại . Gọi lần lượt là thể tích của hai khối chóp và . Khi đó tỉ số bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



### **Dạng 10. Tỉ số thể tích khối lăng trụ**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của bài toán  Cho hình lăng trụ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh sao cho  Khi đó  Đặc biệt: | **Chứng minh**    Ta có  Ta có  Suy ra  Ta có  Suy ra  Mặt khác  (điều phải chứng minh). |

**2. Bài tập**

**Bài tập 1.** Cho khối lăng trụ có M, N, P lần lượt thuộc các cạnh sao cho . Đặt là thể tích của khối đa diện là thể tích khối đa diện còn lại. Tỉ số là



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 2.** Cho hình lăng trụ tam giác có thể tích là V và độ dài cạnh bên . Trên cạnh lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho với x, y là các số dương thỏa mãn . Biết rằng thể tích khối đa diện bằng . Giá trị của bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



### **Dạng 11: Tỉ số thể tích khối hộp**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| Cho hình khối hộp, mặt phẳngcắt các cạnh lần lượt tại M, N, P, Q sao cho  Khi đó ta có | **Chứng minh**  Xét mặt phẳng  Từ M, P ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AC cắttheo thứ tự E, F  Ta có  Tương tự xét mặt phẳng  Ta cũng có  Do đó  Chia khối hộp thành hai khối và  Áp dụng tỉ số thể tích của khối lăng trụ tam giác ta được |

**2. Bài tập**

**Bài tập 1.** Cho hình lập phương có N là trung điểm . Mặt phẳng đi qua AN cắt các cạnh lần lượt tại M, P. chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng và . Tỉ số bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 2.** Cho hình hộp có thể tích bằng . Gọi hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh sao cho . Một mặt phẳng đi qua M, N lần lượt cắt cạnh tại P và Q. Thể tích khối bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 3.** Cho hình hộp có thể tích bằng . Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh sao cho . Thể tích khối bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



### **Dạng 12. Tách hình để tính thể tích**

**1. Phương pháp**

|  |  |
| --- | --- |
| Để tính thể tích các khối da diện phức tạp ta không tính trực tiếp mà tính gián tiếp thông qua việc tính thể tích các khối đơn giản (khối chóp, khối lăng trụ).  + Khối đa diện A được tạo bởi các khối đơn giản. Khi đó  .  + Khối đa diện A được bổ sung thêm các khối cơ bản để tạo thành khối cơ bản B  Khi đó .  + Ta có thể sử dụng khôi phục lại hình ẩn ban đầu để tính toán dễ dàng hơn.  + Sử dụng phương pháp trải hình trên mặt phẳng để dễ hình dung và tính toán thuận tiện hơn. | **Ví dụ:** Cắt khối hộpbởi các mặt phẳng ta được khối đa diện có thể tích lớn nhất là  **A.** . **B.** .  **C.** . **D.** .  **Hướng dẫn giải**  Cắt khối hộp bởi các mặt phẳng ta được 5 khối tứ diện ,, ,,.  Gọi V là thể tích của khối hộp.  Suy ra nên tứ diện có thể tích lớn nhất  **Chọn C.** |

**2. Bài tập**

**Bài tập 1.** Một khúc gỗ có dạng và độ dài các cạnh được cho như hình vẽ. Thể tích khúc gỗ là

**A.** V = 12. **B.** V = 96. **C.** V = 36. **D.** V = 24.

**Bài tập 2.** Một hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Thể tích của khối tứ diện A.CB’D’ bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 3.** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AA’, BB’, CC’ sao cho AM = AA’; BN = BB’; CP = CC’. Thể tích khối chóp M.BCPN là



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 4.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Hai cạnh AC, BD cắt nhau tại O. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SAD) cắt khối chóp S.ABCD tạo thành hai khối có thể tích lần lượt là ; . Tỉ số bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



thuộc cạnh DD’ sao cho . Mặt phẳng (AMP) cắt CC’ tại N. Thể tích khối đa diện AMNPBCD bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 6.** Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho PD=2CP. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Thể tích khối đa diện BMNPQD bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 7.** Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh AA’=2a và tạo với đáy một góc . Thể tích khối tứ diện ACA’B’ là



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 8.** Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có thể tích bằng 15. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh A’B’, B’C’, BC sao cho M là trung điểm của A’B’, B’N= và BP=. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB’ tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích khối đa diện lồi AQPCA’MNC’ bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



### **Dạng 13. Phục hình và trải phẳng**

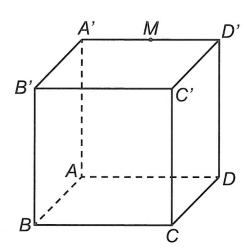
**Bài tập 1.** Cho tứ diện ABCD có ; AB=a; ; . Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng . Thể tích của tứ diện ABCD bằng



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 2** Cho tứ diện có . Thể tích của khối tứ diện là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |  |

**Bài tập 3.** Một con kiến đang ở vị trí M là trung điểm

cạnh của một chiếc hộp hình lập phương



cạnh 5cm.



Con kiến muốn bò qua sáu mặt của chiếc hộp

rồi quay trở lại M. Quãng đường bò đi ngắn

nhất của con kiến là

**A.** . **B.** .



**C.** . **D.** .



**Bài tập 4.** Cho hình chóp tứ giác đều một con kiến bò từ đỉnh A của đáy để đi tất cả các mặt xung quanh rồi trở về vị trí A. Biết cạnh bên bằng 6cm, cạnh đáy bằng 4cm. Quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi là



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



**Bài tập 13.** Cho hình chóp tứ giác đều có và . Gọi Q là trung điểm cạnh SA. Trên các cạnh lần lượt lấy các điểm không trùng với các đỉnh của hình chóp. Giá trị nhỏ nhất của tổng theo a là



**A.**  **B.**  **C.**  **D.**



**Bài tập 6** Cho hình chóp đều có . Lấy lần lượt thuộc cạnh sao cho chu vi tam giác nhỏ nhất. Tỉ số gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .



### **Dạng 14.Bài toán cực trị liên quan đến thể tích khối đa diện**

**1. Phương pháp**

**Bước 1:** Chọn ẩn.Ẩn này có thể là góc  hoặc cạnh thích hợp trong khối đa diện.

**Bước 2:** Với ẩn số được chọn ở bước 1, ta xem đó như là các yếu tố đã cho để tính thể tích  của khối đa diện theo các phương pháp đã biết.

**Bước 3:** Ta có một hàm số  mà cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó.

**Dùng bất đẳng thức cổ điển**

(Cô-si hay Bunhiacopxki) hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

**1. Bất đẳng thức Cô-si.**

**** Cho ta có .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

 Cho  ta có 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

 Cho 

Ta có 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

**Các bất đẳng thức cơ bản.**

Các dạng hay sử dụng.











**2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.**

**a.** Dạng đa thức Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cho 2 bộ số  và  ta có





Dấu  xảy ra 

**b.** Dạng phân thức

Cho 2 bộ số  và  với 

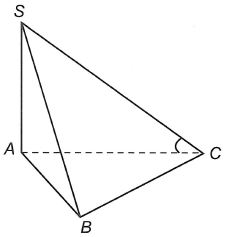
Ta có 

**Bài tập:** Cho hình chóp có đáy là tam giác  vuông cân tại  và  vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho , mặt phẳng  tạo với mặt đáy một góc . Thể tích khối chóp  đạt giá trị lớn nhất là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

***Hướng dẫn giải***

**Chọn B.**



Ta có 

Xét  vuông tại  có





 đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

 đạt giá trị lớn nhất

**Cách 1:**

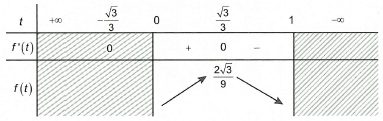
Đặt . Vì  nên 



Ta có  xác định và liên tục trên .



Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta có  khi .

Vậy  khi và chỉ khi .

**Cách 2:**

Vì 

.

Áp dụng Cô-si cho 3 số dương  và , ta được:









Đẳng thức xảy ra khi 

Vậy 

**2. Bài tập**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài tập 1.** Cho hình chóp có là đoạn thẳng thay đổi sao cho , , các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 2.** Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh . Tam giác vuông tại và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi là góc tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng , với . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 3.** Khối chóp có đáy là hình thoi cạnh , cạnh thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 4 :** Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, và vuông góc với mặt phẳng đáy . Gọi là hai điểm thay đổi trên hai cạnh sao cho mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng . Tính tổng khi thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất.  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 5:** Cho hình chóp có đáy là tam giác vuông tại với Hình chiếu của trên mặt phẳng đáy là điểm sao cho các mặt phẳng và cùng tạo với góc và mặt phẳng tạo với mặt phẳng đáy một góc . Thể tích lớn nhất của khối chóp là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 6.** Cho hình chóp tứ giác đều có các cạnh bên bằng , góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là với . Thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 7.** Một hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần là . Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 8.** Cho hình lăng trụ đứng, đáy là tam giác vuông tại . Khoảng cách từ đến và khoảng cách từ đến đều bằng không đổi, góc giữa hai mặt phẳng và bằng . Để thể tích khối lăng trụ nhỏ nhất thì góc có giá trị gần nhất giá trị nào sau đây?  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 9.** Cho hình hộp chữ nhậtcó và . Hai mặt phẳng và hợp với nhau một góc . Đường chéo hợp với mặt phẳng một góc . Hai góc thay đổi nhưng thỏa mãn hình hộp luôn là hình lăng trụ đều. Giá trị lớn nhất thể tích của khối hộp  **A.**  **B.**  **C.**  **D.** |  |

### **Dạng 15: Sử dụng thể tích để tính khoảng cách**

**1. Phương pháp**

* Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta sử dụng phương pháp đổi đỉnh và áp dụng công thức



* Trong đó là thể tích khối đa diện, là diện tích đáy và là khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy.



* Để tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau ta áp dụng công thức



1. **Bài tập**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bài tập 1.** Cho hình chóp có đáy là tam giác vuông ở . Cạnh vuông góc với đáy. Biết Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 2.** Cho tứ diện đều cạnh bằng 1 và điểm nằm trong tứ diện.  Tổng khoảng cách từ đến các mặt của tứ diện là  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 3.** Cho hình hộp chữ nhật có . Lấy điểm trên cạnh sao cho . Khoảng cách từ đến bằng 4. Khoảng cách từ điểm đến là  **A.** 2 **B.**  **C.**  **D.**  **Bài tập 4.** Cho tứ diện*ABCD* có  Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng là  **A.** **B.**  **C.** **D.**  **Bài tập 5.** Cho hình chóp *S.ABC* có .Góc . Tính khoảng cách *d* giữa hai đường thẳng *SA* và *BC*.  **A.** **B.**  **C.** **D.**  **Bài tập 6.** Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Trên AB lấy hai điểm M, N trên CD lấy hai điểm P, Q thỏa mãn . Thể tích khối MNPQ đạt giá trị lớn nhất bằng  **A.** **B.**  **C.** **D.**   |  |  | | --- | --- | |  |  | |  |