

(Đề thi HSG lớp 10, Vĩnh Phúc, Hệ không chuyên năm 2011 – 2012)

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (6,0 điểm)

1. Giải phương trình sau trên $\mathbb{R}$: $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1)$

2. Giải bất phương trình sau: $\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$

Câu 2 (3,0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hai số $n+26$ và $n-11$ đều là lập phương của hai số nguyên dương nào đó.

Câu 3 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC và điểm k thuộc cạnh BC sao cho $KB = 2KC$, L là hình chiếu của B trên AK , F là trung điểm của BC , biết rằng $\angle KAB = 2\angle KAC$. Chứng minh rằng FL vuông góc với AC .

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho A là tập hợp gồm 8 phần tử, tìm số lớn nhất của các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho giao của 2 tập bất kỳ trong các tập con này không phải là một tập hợp gồm 2 phần tử.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho các số dương x, y, z . Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{(x+1)(y+1)^2}{3\sqrt[3]{z^2x^2}+1} + \frac{(y+1)(z+1)^2}{3\sqrt[3]{x^2y^2}+1} + \frac{(z+1)(x+1)^2}{3\sqrt[3]{y^2z^2}+1} \geq x+y+z+3$$

Đáp Án

Câu 1. a) điều kiện: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1) = 36(1+x) \Leftrightarrow (2x+3\sqrt{1+x})^2 = (6\sqrt{1+x})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3\sqrt{1+x} = 6\sqrt{1+x} \\ 2x+3\sqrt{1+x} = -6\sqrt{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{1+x} = 2x & (1) \\ 9\sqrt{1+x} = -2x & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(1+x) = 4x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x - 9 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(1+x) = 4x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 81x - 81 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$$

Vậy $x = 3$; $x = \frac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{b) Điều kiện: } |x-5| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 8 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: Xét } x < 2 \text{ ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{9}{5-x-3} \geq 2-x \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} \geq 2-x$$

$$\Leftrightarrow (2-x)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \text{ vậy } -1 \leq x \leq 5 \text{ là nghiệm.}$$

$$\text{Trường hợp 2: Xét } 2 < x < 5 \text{ ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{9}{5-x-3} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} \geq x-2$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)^2 \geq 9 \text{ vậy (Bất phương trình vô nghiệm)}$$

$$\text{Trường hợp 3: Xét } 5 < x \neq 8 \text{ ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{9}{x-8} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{x-8} - (x-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 - (x-8)(x-2)}{x-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 10x - 7}{x-8} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x^2 - 10x + 7) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 - 3\sqrt{2} \\ 8 < x \leq 5 + 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với miền x đang xét ta có $8 < x \leq 5 + 3\sqrt{2}$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-1; 2) \cup (8; 5 + 3\sqrt{2}]$

Câu 2. Giả sử có số nguyên dương n sao cho $n + 26 = x^3$ và $n - 11 = y^3$ với x, y là hai số nguyên dương ($x > y$).

$$\text{Khi đó ta được } x^3 - y^3 = 37 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 37$$

$$\text{Ta thấy } 0 < x-y < x^2 + xy + y^2 \text{ nên ta có } \begin{cases} x-y=1 & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 37 & (2) \end{cases}$$

Thay $x = y + 1$ từ (1) vào (2) ta được $y^2 + y - 12 = 0$ từ đó có $y = 3$ và $n = 38$.

Vậy $n = 38$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. Cách 1: Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$

Khi đó: $\angle KAB = 2\alpha, \angle BAC = 3\alpha$

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABK và ACK, ta được:

$$\frac{BK}{\sin 2\alpha} = \frac{AK}{\sin B}; \frac{CK}{\sin \alpha} = \frac{AK}{\sin C}$$

Do $BK = 2CK$, nên từ các đẳng thức trên ta có:

$$\cos \alpha = \frac{\sin B}{\sin C} \quad (*)$$

Lại có:

$$FA^2 - FC^2 = \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = bc \cdot \cos A = bc \cos 3\alpha \quad (1)$$

$$LC^2 = LA^2 + b^2 - 2b \cdot LA \cdot \cos \alpha = LA^2 + b^2 - 2bc \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow LA^2 - LC^2 = 2bc \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - b^2 = bc (\cos \alpha + \cos 3\alpha) - b^2$$

$$= (bc \cos \alpha - b^2) + bc \cos 3\alpha \quad (**)$$

$$\text{Thay } (*) \text{ vào } (**), \text{ ta được: } LA^2 - LC^2 = bc \cos 3\alpha \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } FA^2 - FC^2 = LA^2 - LC^2$$

Theo định lí Carnot, suy ra CA vuông góc với FL.

Cách 2: Trường hợp 1: L nằm trên đoạn AK.

$$\text{Ta có: } \frac{FK}{KC} = \frac{BF}{BC}.$$

Gọi M là trung điểm của BK. Suy ra:

$$MF \cdot MC = MB \cdot MK = ML^2 \Rightarrow \angle MLF = \angle MCL$$

$$\text{Mà } \angle MLK = \angle MKL$$

$$\Rightarrow \angle FLK = \angle CLK \Rightarrow \frac{LC}{LF} = \frac{KC}{KF} = 2$$

Gọi N là điểm đối xứng với L qua F.

Suy ra $LC = LN, BN = LC$ (BNCL là hình bình hành).

Suy ra $NB = NL$.

$$\text{Vậy } \triangle ALC = \triangle ALN \text{ (c.g.c)}$$

$$\text{Từ đây } \angle AN = \angle AC = \frac{\angle BAK}{2} \Rightarrow \angle BAN = \angle KAN$$

Vì MNKL là hình hành, $KL \perp BL$ nên MN là đường trung trực của BL. N là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng BL với đường phân giác góc A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABL.

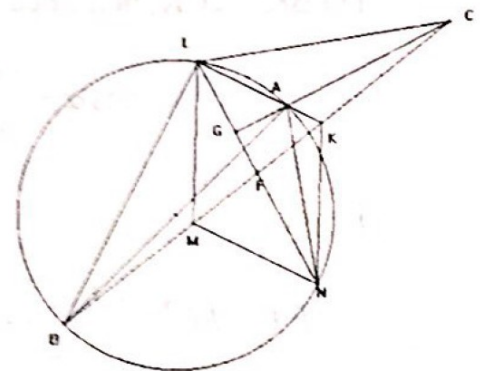
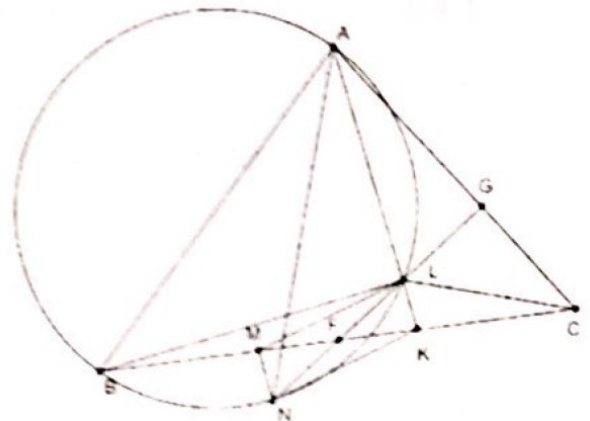
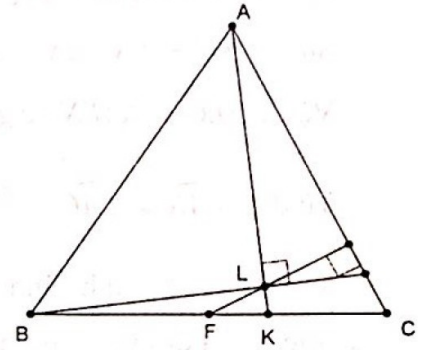
Vậy N là điểm chính giữa của cung $\widehat{BL}$ (không chứa điểm A) của (ABL).

$$\text{Vậy } \angle ANL = \angle ABL = 90^\circ - \angle BAL = 90^\circ - \angle NAC.$$

Hay $NL \perp AC$.

Trường hợp 2: L nằm ngoài đoạn AK.

Lập luận tương tự ta cũng có $NL \perp AC$



Cách 3: Gọi D là điểm đối xứng với B qua AK và E là điểm trên tia AK sao cho $AE = AB = AD$.

Ta thấy tam giác EAD là tam giác cân và C nằm trên phân giác của $\angle EAD$.

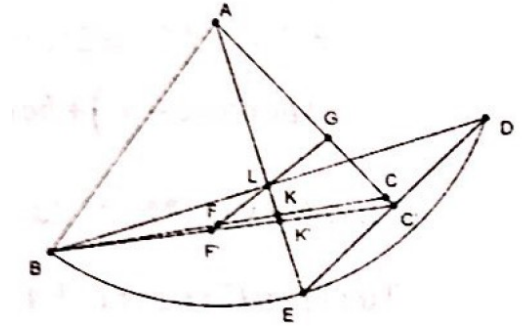
Ta chứng minh rằng C là trung điểm của DE.

Thật vậy, giả sử C không nằm trên DE. Gọi C' là giao điểm của DE và AC, AC' cắt KE tạo K'.

Suy ra K' là trọng tâm của tam giác EBD.

$\Rightarrow BK' = 2K'C \Rightarrow KK' \parallel CC'$. Vô lý. Vậy $C \equiv C'$.

Vì C là trung điểm của DE, suy ra $DE \perp AC$. Hơn nữa F là trung điểm của BC, L là trung điểm của BD, suy ra $FL \parallel ED$. Vậy $FL \perp AC$.



Câu 4: Ký hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hữu hạn X.

Gọi $B_1, B_2, \dots, B_n$ là tập con của A thỏa mãn:

$$|B_i| = 3, |B_i \cap B_j| \neq 2 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Giả sử tồn tại phần tử $a \in A$ mà a thuộc vào 4 tập trong số tập $B_1, B_2, \dots, B_n$ (chẳng hạn $a \in B_1, B_2, B_3, B_4$),

khi đó: $|B_i \cap B_j| \geq 1 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$. Mà $B_i \neq B_j$ nếu $i \neq j$, tức là $|B_i \cap B_j| \neq 3$. Do đó

$$|B_i \cap B_j| = 1 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Từ đây $|A| \geq 1 + 4 \cdot 2 = 9$, điều này mâu thuẫn.

Như vậy, mỗi phần tử A chỉ thuộc về nhiều nhất là ba trong số các tập hợp $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Khi đó $3n \leq 8 \cdot 3 \Leftrightarrow n \leq 8$

Giả sử $A = \{a_1; a_2; \dots, a_8\}$ xét các tập con của A là:

$$B_1 = \{a_1; a_2; a_3\}, B_2 = \{a_1; a_4; a_5\}, B_3 = \{a_1; a_6; a_7\}, B_4 = \{a_8; a_3; a_4\}$$

$$B_5 = \{a_8; a_2; a_6\}, B_6 = \{a_8; a_5; a_7\}, B_7 = \{a_3; a_5; a_6\}, B_8 = \{a_2; a_4; a_7\}$$

Tám tập hợp trên là các tập con gồm ba phần tử A thỏa mãn $|B_i \cap B_j| \neq 2$. Vì vậy số n cần tìm là $n = 8$

Câu 5.
$$\frac{(x+1)(y+1)^2}{3\sqrt[3]{z^2x^2}+1} + \frac{(y+1)(z+1)^2}{3\sqrt[3]{x^2y^2}+1} + \frac{(z+1)(x+1)^2}{3\sqrt[3]{y^2z^2}+1} \geq x+y+z+3$$

Gọi vế trái của bất đẳng thức S. Do $ab + a + b \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2}, \forall a > 0, b > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Nên } S &\geq \frac{(x+1)(y+1)^2}{(z+1)(x+1)} + \frac{(y+1)(z+1)^2}{(x+1)(y+1)} + \frac{(z+1)(x+1)^2}{(y+1)(z+1)} = \frac{(y+1)^2}{z+1} + \frac{(z+1)^2}{x+1} + \frac{(x+1)^2}{y+1} \\ &\geq \frac{[(y+1)+(z+1)+(x+1)]^2}{(z+1)+(x+1)+(y+1)} = x+y+z+3 \text{ (điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

